Ejercicios avanzados de ecuaciones diferenciales en diferencias y ecuaciones en derivadas parciales no lineales

Ana Carpio, Universidad Complutense de Madrid

Diciembre, 2012

1 Contenido

2 Equaciones Diferenciales en Diferencias

1. *Consideremos la ecuación*

$$x'' + \frac{1}{2\alpha\theta}\frac{1+\tanh^2(x/\theta)}{1-\tanh^2(x/\theta)}x' + x - H - \tanh(\frac{x}{\theta}) = 0.$$

   Estudiar sus equilibrios y los comportamientos de las trayectorias en función de los parámetros de control θ y H.

   Tomado de [56]. Introducimos el potencial $V(x;H,\theta) = \frac{x^2}{2} - Hx - \theta \ln\cosh(\frac{x}{\theta})$. Típicamente, $\theta \in (0,1)$. La ecuación se transforma en

$$x'' + \frac{1}{2\alpha\theta}R(x,\theta)x' - V'(x;H,\theta) = 0$$

   con $R(x,\theta) = \frac{1+\tanh^2(x/\theta)}{1-\tanh^2(x/\theta)} > 0$. Para $H = 0$ y $\theta < 1$, el potencial tiene dos mínimos en los que se alcanza el mismo valor, en posiciones simétricas. En vista de la presencia de un término de amortiguación, las trayectorias se enroscan en torno a esos puntos (atractores espirales). Para $|H| < H_c$, hay dos mínimos $x_+ > 0$ y $x_- < 0$, cada uno de ellos con una zona de atracción.

2. *Consideramos la ecuación diferencial en diferencias $u_n'(t) = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} - A\sin(u_n)$, donde A es un parámetro positivo. Demostrar que existe una solución monótona tal que $u_{-\infty} = 0$ y $u_\infty = 2\pi$ con $u_0 = \pi$ y $u_n - \pi = \pi - u_{-n}$ para todo n.*

   Tomado de [14]. Ponemos $u_0 = \pi$ y variamos u_1 en el intervalo $(\pi, 2\pi)$ para encontrar la solución. La condición $u_0 = \pi$ garantiza que $u_n - \pi$ es una función impar de n. Elegimos $\epsilon > 0$ para que $-A\sin(u) > \epsilon(u-\pi)$ si $\pi < u \leq \frac{3}{2}\pi$ y escogemos N grande para que $\epsilon(N-1) > 1$. A continuación, elegimos $u_1 - \pi$ pequeño para que $u_j \leq \frac{3}{2}\pi$ si $1 \leq j \leq N$. Deseamos mostrar que bajo esas condiciones la secuencia finita $\{u_1, \ldots, u_N\}$ no es monótona creciente. Denotamos $U_n = u_n - \pi$. Si $\{U_1, \ldots, U_N\}$ es monótona creciente cuando $2 \leq j \leq N$ y $U_j \leq (2-\epsilon)U_{j-1} - U_{j-2}$. Sumando estas desigualdades obtenemos $U_N - U_{N-1} \leq \epsilon \sum_{i=2}^{-N-1} U_i + (1-\varepsilon)U_1$. Como asumimos que $U_i \geq U_1$ si $2 \leq i \leq N$, nuestra cota inferior sobre N implica $U_N < U_{N-1}$, lo que es contradictorio. Por tanto hemos mostrado que si U_1 es suficientemente pequeño, la secuencia empieza a decrecer antes de cruzar π. Por otra parte, eligiendo $U_1 > \pi$ la secuencia cruza π antes de decrecer. Nótese que la secuencia crece hasta un primer N tal que $U_N = \pi$, si $U_{N+1} > \pi$. Si, al final hay un N tal que la secuencia crece hasta $n = N$, con $U_N < \pi$, y $U_N = U_{N+1}$, entonces $U_{N+2} < U_{N+1}$ así que la secuencia decrece antes de alcanzar π.

3. *Sean $U_i(t)$ y $L_i(t)$, $i \in \mathbb{Z}$ dos sucesiones diferenciables tales que*

$$\begin{aligned} &U_i'(t) - d_1(U_i)(U_{i+1} - U_i) - d_2(U_i)(U_{i-1} - U_i) - f(U_i) \geq \\ &\quad L_i'(t) - d_1(L_i)(L_{i+1} - L_i) - d_2(L_i)(L_{i-1} - L_i) - f(L_i) \end{aligned}$$

y $U_i(0) < L_i(0)$ para todo i, siendo f, $d_1 > 0$ y $d_2 > 0$ funciones Lipschitz continuas. Entonces, $U_i(t) > L_i(t)$ para $t > 0$ y $i \in \mathbb{Z}$.

Tomado de [15]. Procedemos por reducción al absurdo, Sea $W_i(t) = U_i(t) - L_i(t)$. En $t = 0$, $W_i(0) > 0$ para todo i. Asumimos que W_i cambia de signo tras un tiempo mínimo $t_1 > 0$, para algún valor de i, $i = k$. Entonces $W_k(t_1) = 0$ y $W_k'(t) \leq 0$, cuando $t \to t_1$. Mostremos que ésto es contradictorio. En $t = t_1$, debe haber un índice m (igual o distinto de k) tal que $W_m(t_1) = 0$, mientras que su vecino $W_{m+j}(t_1) > 0$ (j es 1 o -1), y $W_i(t_1) = 0$ para todos los índices k y m. En otro caso, W_k debiera ser igual a 0 para todo k. La desigualdad diferencial implica

$$W_m'(t_1) \geq d_1(U_m(t_1))W_{m+1}(t_1) + d_2(U_m(t_1))W_{m-1}(t_1) > 0.$$

Esto contradice el hecho de que $W_m'(t)$ debiera ser no positiva cuando $t \to t_1$, si queremos que $W_m(t_1)$ se anule.

4. *Consideremos la ecuación*

$$U'(t) = z_1(F/A) + z_3(F/A) - 2U(t) - A\sin(U(t)) + F,$$

con$|F| < A$, $A >> 1$, siendo $z_1(F/A) < z_2(F/A) < z_3(F/A)$ tres ceros consecutivos de la ecuación $\sin(z) = F/A$ en un periodo. Probar que existe un umbral crítico F_c tal que esta ecuación tiene tres soluciones constantes estables si $0 \leq F < F_c$, pero una si $F > F_c$. Caracterizar F_c.

Tomado de [18]. Cuando $F = 0$, $z_1(0) = 0$, $z_2(0) = \pi$ y $z_3(0) = 2\pi$. Hemos de resolver

$$2z + A\sin(z) = F + 2\text{arcsin}(F/A) + 2\pi.$$

Según F crece desde 0, seguimos encontrando tres soluciones $z_1(F/A) < z_2(F/A) < z_3(F/A)$ que continuan esas ramas hasta que $F{+}2\text{arcsin}(F/A){+}2\pi$ alcanza el primer máximo local de $2z + A\sin(z)$ (A es grande). El valor F_c en el cual ocurre ésto se caracteriza por la existencia de un cero doble, un valor u_0 tal que $2 + A\cos(u_0) = 0$ y $2u_0 + A\sin(u_0) = F_c + 2\text{arcsin}(F_c/A) + 2\pi$. Entonces, $u_0 = \arccos(-2/A)$ y F_c es la solución de $2u_0(A) + A\sin(u_0(A)) = F_c + 2\text{arcsin}(F_c/A) + 2\pi$. Por debajo de F_c hay tres ceros. En F_c dos de ellos colisonan. Por encima de F_c, los dos ceros que colisionan, $z_1(F/A)$ y $z_2(F/A)$ se pierden.

$z_1(F/A)$ y $z_3(F/A)$ son estables mientras existen. Esta situación se corresponde con la presencia de una bifurcación nodo-silla en el sistema, véase [18].

5. *El sistema de ecuaciones*

$$\frac{dE_i}{dt} + \frac{v(E_i)}{\nu}(E_i - E_{i-1}) - \frac{D(E_i)}{\nu}(E_{i+1} - 2E_i + E_{i-1}) = J - v(E_i),$$

con $i \in \mathbb{Z}$ admite soluciones de tipo ondas viajeras de la forma $E_i(t) = E(i - ct)$ que se propagan a velocidad constante c cuando el parámetro J

es suficientemente grande. Suponemos que v, D son funciones positivas y $\nu > 0$ es grande. La función v es una cúbica, crece desde 0 hasta un máximo local, decrece a un mínimo local positivo y crece hasta el infinito. Justificar que la velocidad del frente de onda escala como $(J - J_c)^{1/2}$, donde J_c es el umbral para la existencia de ondas viajeras.

Tomado de [20]. Para ν grande, podemos construir soluciones estacionarias, que se pueden aproximar por

$$E_i \sim z_1(J) \quad i < 0, \quad E_i \sim z_3(J) \quad i > 0,$$

cuando $|J| < J_c$, mientras que E_0 es una solución de

$$J - v(E_0) - \frac{v(E_0)}{\nu}(E_0 - z_1(J)) + \frac{D(E_0)}{\nu}(z_3(J) - 2E_0 + z_1(J)) = 0,$$

donde $z_1(J) < z_2(J) < z_3(J)$ verifican $J = v(z)$. Al alcanzar un valor J_c, $z_1(J_c) = z_2(J_c)$, perdiéndose cuando $J > J_c$, de modo que sólo persiste $z_3(J)$. La ecuación reducida

$$\frac{dE_0}{dt} = J - v(E_0) - \frac{v(E_0)}{\nu}(E_0 - z_1(J)) + \frac{D(E_0)}{\nu}(z_3(J) - 2E_0 + z_1(J)),$$

para el punto de unión de las colas constantes experimenta una bifurcación de tipo nodo-silla en J_c cuya forma normal

$$\phi' = \alpha(J_c)(J - J_c) + \beta(J_c)\phi^2,$$

tiene soluciones tipo $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}(J - J_c)}\tan(\sqrt{\alpha\beta(J - J_c)}(t - t_0))$. Estas funciones explotan cuando el argumento de la tangente se aproxima a $\pm\pi/2$, en un tiempo $t - t_0 \sim \pi/\sqrt{\alpha\beta(J - J_c)}$. El valor J_c separa el régime en el cual se observan frentes de onda estancionarios (anclados) y frentes de onda viajeros.

Tomando $J > J_c$ próximo aJ_c, las simulaciones muestran perfiles escalonados, en los que un punto permanece cerca del desaparecido equilibrio $E_0(J_c)$ hasta que se mueve siguiendo la curva tangente definida por la forma normal y la posición próxima a $E_0(J_c)$ la toma otro punto contiguo. Este proceso de va repitiendo secuencialmente. La velocidad de la onda es el recíproco del tiempo que tarda esta transición $c(J, \nu) \sim \frac{\sqrt{\alpha\beta(J-J_c)}}{\pi}$, véase [20] para detalles.

6. *Consideramos un problema con ruido*

$$\frac{du_i}{dt} = u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} + F - A\sin(u_i) + \gamma\xi_i,$$

donde $A > 0$ toma valores grandes y $\gamma > 0$ caracteriza la magnitud del desorden en el sistema, mientras que ξ_i es una variable aleatoria de media nula que toma valores en el intervalo $(-1, 1)$ de forma equiprobable. Probar *que la velocidad de los frentes viajeros para F mayor que un valor crítico F_c^* escala como $(F - F_c^*)^{3/2}$.*

Tomado de [22]. Fijando $\gamma = 0$, podemos repetir con esta ecuación el estudio que hemos hecho en el ejercicio anterior y obtener un velocidad que escala como $(F - F_c)^{1/2}$. Sin embargo, al añadir ruido, para cada realización del ruido, el umbral F_c se desplaza ligeramente por el ruido. La velocidad que se observa es la media de las velocidades obtenidas para un número elevado de realizaciones. Si tenemos

$$|c_R| \sim \frac{1}{\pi}\sqrt{\alpha(F_c)\beta(F_c)(F - F_c) + \gamma\beta(F_c)\xi_0}$$

la media es

$$\bar{c} = \frac{1}{N}\sum_{R=1}^{N}|c_R| = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(\alpha\beta(F - F_c) + \gamma\beta\xi)^{1/2}d\xi \sim (F - F_c^*)^{3/2}$$

donde el nuevo valor crítico es $F_c^* = F_c - \frac{\gamma}{\alpha}$.

7. *Consideremos el problema*

$$\frac{du_i}{dt} = u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} + F - A\sin(u_i),$$

con A grande. Sean $z_1(F/A) < z_2(F/A) < z_3(F/A)$ las tres ramas consecutivas de ceros de $F - A\sin(z) = 0$ que empiezan en $z_1(0) = 0$, $z_2(0) = \pi$, $z_3(0) = 2\pi$. Sabemos que si $|F| < F_c(A)$ el problema admite soluciones estacionarias que crecen de $z_1(F/A)$ en $-\infty$ a $z_3(F/A)$ en ∞. Cuando F supera ese umbral, tenemos ondas viajeras. Escribe la ecuación para estas ondas viajeras y encuentra una fórmula para la velocidad.

Tomado de [24]. Las soluciones de tipo onda viajera tienen la estructura $u_i(t) = u(i - ct)$, donde c es la velocidad de onda constante y $u(z)$, $z = i - ct$ es un perfil de onda, que es solución de

$$-cu_z(z) = u(z+1) - 2u(z) + u(z-1) + F - A\sin(u(z)), \quad z \in \mathbb{R}$$

con $u(-\infty) = z_1(F/A)$ y $u(\infty) = z_3(F/A)$. Ese tipo de ondas viajeras se llaman frentes. Multiplicando la ecuación por u_z e integrando, obtenemos

$$-c\int_{-\infty}^{\infty} u_z^2\, dz = F\left[z_3(F/A) - z_1(F/A)\right].$$

8. *El modelo de Fitz Hugh-Nagumo discreto es un modelo típico de la propagación de pulsos*

$$\epsilon u_i' = d(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + u_i(2 - u_i)(u_i - a) - v_i,$$
$$v_i' = u_i - Bv_i.$$

donde los parámetros $\epsilon, d > 0$ y a con tales que $(0,0)$ es la única solución constante. ϵ es pequeño y a es tal que $z(2-z)(z-a)$ tiene tres raíces $z_1(a) < z_2(a) < z_3(a)$. Explica la evolución de los pulsos en términos de soluciones tipo frente de ecuaciones de Nagumo

$$\epsilon u_i' = d(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + u_i(2-u_i)(u_i - a) - w.$$

Tomado de [25]. Las soluciones tipo pulso tienen la forma $u_i(t) = u(z)$, $v_i(t) = v(z)$, $z = i - ct \in \mathbb{R}$, with

$$-c\epsilon u_z(z) = d(u(z+1) - 2u(z) + u(z-1)) + u(z)(2-u(z))(a-u(z)) - v,$$
$$-cv_z(z) = 0,$$

con $z \in \mathbb{R}$. Para v pequeño, denotamos por $z_1(a,v) < z_2(a,v) < z_3(a,v)$ las tres raíces de $u(z)(2-u(z))(a-u(z)) - v = 0$. Como ϵ es pequeño, u_i y v_i evolucionan en escalas de tiempo distintas. Se distinguen 5 regiones en el perfil del pulso

- Parte frontal: $u_i = z_1(a, v_i)$ y $v_i' = z_1(a, v_i) - Bv_i$, que evoluciona a $(0,0)$ según i crece.
- Frente delantero: Descrito por soluciones viajeras de $\epsilon u_i' = d(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + u_i(2-u_i)(u_i - a) - 0$ que decrecen de 2 a 0, con $v_i \sim 0$. Viaja a velocidad c.
- Pico: $u_i = z_2(a, v_i)$ y $v_i' = z_3(a, v_i) - Bv_i$.
- Frente transero: Descrito por una solución viajera de $\epsilon u_i' = d(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + u_i(2-u_i)(u_i - a) - w$ que crece de valores próximos a 0 a valores próximos a 2, con $v_i \sim w$, w selecionado de modo que viaja con velocidad c también.
- Cola: $u_i = z_1(a, v_i)$ y $v_i' = z_1(a, v_i) - Bv_i$, que se aproxima a $(0,0)$ según i decrece.

Véase [25] para una visualización. Véase [32] para una aplicación de estas ideas a modelos de tipo Hodgkin-Huxley para nervios mielinados. Las soluciones de tipo pulso no se pueden propagar cuando los parámetros de la ecuación reducida que describe el frente delantero son tales que sólo admite frentes estacionarios.

9. *Consideramos el sistema*

$$v_j' = d(v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}) + f(v_j, w_j),$$
$$w_j' = \lambda g(v_j, w_j),$$

con $d, \lambda > 0$ y λ pequeõ, de modo que las dos variables evolucionan en escalas de tiempo distintas. Fijado w, $f(v,w)$ es una cúbica biestable, es decir, tiene tres ceros, dos de los cuales son estables para la primera *ecuación con $w_j = w$. Cuando las ecuaciones $f(v,w) = 0 = g(v,w)$ tienen una única solución, que es estable, tenemos soluciones de tipo pulso del sistema de ecuaciones diferenciales, como ocurre para Fitz Hugh-Nagumo. Cuando es inestable, argumenta por qué a menudo se observan oscilaciones.*

Tomado de [33]. Cuando g y f se cortan en un cero estable, tenemos un sistema excitable con soluciones de tipo pulso. Cuando se cortan en un cero inestable, soluciones de tipo ciclo límite $(V(t), W(t))$ con periodo T, $T > 0$ de

$$v' = f(v,w), \quad w' = \lambda g(v,w),$$

aparecen para λ pequeño. Las trayectorias del sistema se comportan como $v_j(t) = V(t + \phi_j)$ y $w_j(t) = W(t + \phi_j)$, para una fase ϕ_j que varía lentamente y puede hacerse independiente del tiempo cuando $t \to \infty$. Todas las trayectorias se sincronizan.

10. *Sea $u_{i,j}(t)$ una solución de*

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} = u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j} + A(\sin(u_{i,j-1} - u_{i,j})\sin(u_{i,j+1} - u_{i,j}))$$

para $i,j \in \mathbb{Z}$ y $u_{i,j}(0) = \alpha_{i,j}$ tales que $\alpha_{i+1,j} - 2\alpha_{i,j} + \alpha_{i-1,j} \in l^2$, $\sin(\alpha_{i,j-1} - \alpha_{i,j})\sin(\alpha_{i,j+1} - \alpha_{i,j}) \in l^2$ y $\alpha_{i,j} \in l^\infty_{\text{loc}}$. Si $(u_{i,j+1} - u_{i,j})(t) \in \cap_{n\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$ se cumple para todo i, j, t, entonces $u_{i,j}(t)$ tiene a un límite $s_{i,j}$ cuando $t \to 0$ que es una solución estacionaria del problema.

Tomado de [23]. Definimos $w_{i,j}(t) = u_{i,j}(t+\tau) - u_{i,j}(t)$ para algún $\tau > 0$. Entonces

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j}|w_{i,j}(t)|^2\right) = -\sum_{i,j}((w_{i+1,j} - w_{i,j})(t))^2 - \sum_{i,j}(\sin((u_{i,j+1} - u_{i,j})(t+\tau))$$
$$- \sin((u_{i,j+1} - u_{i,j})(t)))((u_{i,j+1} - u_{i,j})(t+\tau) - (u_{i,j+1} - u_{i,j})(t)) \leq 0.$$

Esto implica $w_{i,j}(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ para todo i, j. Concluimos que $u_{i,j}(t)$ tiende a un límite $s_{i,j}$ que es una solución estacionaria.

11. *Resolvemos*

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} = u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j} + A(\sin(u_{i,j-1} - u_{i,j})\sin(u_{i,j+1} - u_{i,j}))$$

con condiciones de contorno $s_{i,j} = \theta(i, j/\sqrt{A}) + Fj$ donde θ es la función ángulo que varía de 0 a 2π y $F > 0$ es un parámetro de control. Dado $F = 0$, el ejercicio anterior garantiza la existencia de soluciones estacionarias. Puedes esperar un cambio a medida que F crece?

Tomado de [26]. A medida que F crece, la condición

$$(u_{i,j+1} - u_{i,j})(t) \in \cap_{n\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$$

deja de cumplirse. Las soluciones estacionarias desaparecen y aparecen patrones viajeros. Si linearizamos el operador espacial en torno a $s_{i,j}$, tenemos un problema elíptico discreto para F pequeño que cambia de tipo al crecer F.

12. *Construimos numéricamente soluciones de*

$$\begin{aligned} m\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} + \alpha\frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} &= u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j} \\ &+A(\sin(u_{i,j-1} - u_{i,j})\sin(u_{i,j+1} - u_{i,j})) \end{aligned}$$

en un retículo rectangular $i = 1,\ldots,N_x$, $j = 1,\ldots,N_y$, con condiciones de contorno $u_{i,j} = F(j-(N_y+1)/2)$. A medida que F crece observamos que la solución inicial para $F = 0$ va evolucionando a soluciones estacionarias que cambian lentamente al subir F hasta que alcanzamos un punto F_c, tras lo cual la estructura del retículo se distorsiona. Se observan dos tipos de distorsión distintos que coexisten. Linearizando en torno a la solución estacionaria en $F = F_c$ encontramos una matrix con un autovalor nulo, mientras que todos los autovalores eran negativos para $F < F_c$. Cómo explicas ésto?

Tomado de [36]. La rama de soluciones estacionarias $s_{i,j}(F)$ parece estable. En $F = F_c$ aparecen dos nuevas ramas. estables. El sistema experimenta una bifurcación de tipo pitchfork.

13. *Consideramos la dinámica*

$$\begin{aligned} m\frac{\partial^2 v_{i,j}}{\partial t^2} + \alpha\frac{\partial v_{i,j}}{\partial t} &= v_{i-1,j} - 2v_{i,j} + v_{i+1,j} \\ &+A(\sin(v_{i,j-1} - v_{i,j})\sin(v_{i,j+1} - v_{i,j})) \end{aligned}$$

en un retículo $i = 1,\ldots,N_x$, $j = 1,\ldots,N_y$. Imponemos condiciones de contorno que representan presión hacia abajo en la zona central de la parte superior:

- *A izquierda: $v_{1,j} = v_{0,j}$.*
- *A derecha: $v_{N_x,j} = v_{N_x+1,j}$.*
- *Zona superior izquierda ($1 \leq i < p_1$): $v_{i,N_y} = v_{i,N_y+1}$.*
- *Zona superior derecha ($p_2 < i \leq N_x$): $v_{i,N_y} = v_{i,N_y+1}$.*
- *Zona inferior: $v_{i,0} = 0$.*
- *En la zona superior central ($p_1 \leq i \leq p_2$) se empuja hacia abajo: $v_{i,N_y+1} - v_{i,N_y} = -f(i)$, donde f tiene un perfil triangular que apunta hacia abajo con magnitud $F > 0$.*

Según F crece, observamos que la solución inicial para $F = 0$ desarrolla distorsiones localizadas en en retículo que viajan hacia abajo. Según decrecemos F a cero, esas distorsiones se mueven hacia arriba y pueden desaparecer. Cómo explicas ésto?

Tomado de [45]. La rama de soluciones estacionarias que empieza en $F = 0$ desarrolla bifurcaciones en valores específicos de F en los cuales se crean distorsiones en la red. Tales nuevas ramas son estables para algunos rangos de F, los defectos simplemente viajan lentamente. Estas configuraciones bifurcan en determinados valores de F para los que se crean nuevos defectos, que viajan para un rango de F, hasta que ocurre una nueva bifurcación a medida que F crece. Cuando decrecemos F, el proceso se invierte. Los defectos creados viajan hacia arriba, y desaparecen, uno tras otro.

14. *Dado el problema*

$$u_j'' + \alpha u_j' = u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1} + F - Ag(u_j),$$

donde $g(u) = u + 1$ si $u < 0$ y $g(u) = u - 1$ si $u > 0$, construir soluciones de tipo onda viajera.

Tomado de [27]. Una solución de tipo frente viajero toma la forma $u_i(t) = u(i - ct)+$, $z = i - ct$. El perfil $v(z) = u(z) + 1$ satisface

$$\begin{aligned} c^2 v_{zz}(z) - \alpha c v_z(z) - (v(z+1) - 2v(z) + v(z-1)) + Av(z) \\ = F + 2AH(-\text{sign}(cF)z), \quad z \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

con $v(-\infty) = 0$ y $v(\infty) = 2$. Hemos tomado $g(u) = u + 1 - 2H(u)$, donde u es la función de Heaviside. Usando la expresión como integral de contorno de la función de Heaviside

$$H(-z) = -\frac{1}{2\pi\imath} \int_C \frac{e^{\imath k x}}{k} dk.$$

C es un contorno formado por un semicírculo cerrado en el semiplano complejo superior y orientado en el sentido contrario de las agujas del reloj, más otro semicírculo cerrado en el semiplano complejo inferior y orientado en el sentido de las agujas del reloj, que incluye dentro el origen y forma un pequeño semicírculo por encima de él. El perfil que buscamos viene dado por la expresión

$$v(z) = \frac{F}{A} - \frac{A}{\pi\imath} \int_C \frac{\exp(\imath k \text{sign}(cF) z) dk}{k\, A + 4\sin^2(k/2) - k^2 c^2 - \imath k |c| \alpha \text{sign}(F)}.$$

Imponiendo $v(0) = 1$, obtenemos una relación entre la velocidad c y la fuerza aplicada F. Conocido $c(F)$, esta expresión proporciona los perfiles v. A diferencia de ejercicios anteriores, tales ejercicios no son monótonos, sino que presentan oscilaciones, véase [27].

15. *Probar que el problema de valores iniciales*

$$u_j'' + \alpha u_j' = d(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) - u_j + F,$$
$$u_j(0) = u_j^0, \quad u_j'(0) = u_j^1,$$

$d > 0$, $\alpha \geq 0$, admite soluciones de la forma

$$u_j(t) = \sum_k [G_{j,k}^0(t) u_k'(0) + G_{j,k}^1(t) u_k(0)] + \int_0^t \sum_k G_{j,k}^0(t-s) f_k(s) ds$$

para funciones de Green adecuadas $G_{j,k}^0$ y $G_{j,k}^1$.

Tomado de [28]. En primer lugar, eliminamos el operador en diferencias usando funciones generatrices $p(\theta, t)$ y $f(\theta, t)$

$$p(\theta, t) = \sum_j u_j(t) e^{-\imath j\theta}, \quad f(\theta, t) = \sum_j f_j(t) e^{-\imath j\theta}.$$

Diferenciando p con respecto a t y usando la ecuación, vemos que $p(\theta, t)$ es solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$p''(\theta, t) + \alpha p'(\theta, t) + \omega(\theta)^2 p(\theta, t) = f(\theta, t)$$

con $\omega(\theta)^2 = 1 + 4d \sin^2(\theta/2)$ y con condiciones iniciales para p obtenidas de las condiciones para u_j. Fijado θ, sabemos cómo calcular soluciones explícitas de esta ecuación linear de segundo orden con coeficientes constantes

$$p(\theta, t) = p(\theta, 0) g^0(\theta, t) + p'(\theta, 0) g^1(\theta, t) + \int_0^t g^1(\theta, t-s) f(\theta, s) ds,$$

con

$$g^0(\theta, t) = \begin{cases} \frac{e^{r_+(\theta)t} - e^{r_-(\theta)t}}{r_+(\theta) - r_-(\theta)}, & \alpha^2/4 > \omega^2(\theta), \\ t e^{-\alpha t/2}, & \alpha^2/4 = \omega^2(\theta), \\ e^{-\alpha t/2} \frac{\sin(I(\theta)t)}{I(\theta)}, & \alpha^2/4 < \omega^2(\theta), \end{cases}$$

$$g^1(\theta, t) = \begin{cases} \frac{e^{r_+(\theta)t} r_+(\theta) - e^{r_-(\theta)t} r_-(\theta)}{r_+(\theta) - r_-(\theta)}, & \alpha^2/4 > \omega^2(\theta), \\ t e^{-\alpha t/2} \left(1 + \frac{\alpha}{2} t\right), & \alpha^2/4 = \omega^2(\theta), \\ e^{-\alpha t/2} \left(\cos(I(\theta)t) + \frac{\alpha \sin(I(\theta)t)}{2I(\theta)}\right), & \alpha^2/4 < \omega^2(\theta). \end{cases}$$

Recuperamos u_j como

$$u_j(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{\imath j\theta} p(\theta, t),$$

lo que conduce a

$$G_{jk}^0(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{\imath(j-k)\theta} g^0(\theta, t), \quad G_{jk}^1(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{\imath(j-k)\theta} g^1(\theta, t).$$

16. *Usar la expresión de las soluciones del problema de valores iniciales establecida en el problema anterior para definir una condición de contorno no reflectante en $n = 0$ para problemas truncados en $n \geq 0$, de modo que la solución que obtenemos es la misma que obtendríamos resolviendo el sistema para todo n.*

Tomado de [48]. Colocamos una condición de contorno artificial en $n = 0$ y restringimos el dominio computacional a $n \geq 0$. Por tanto, necesitamos una condición de contorno para calcular $u_0(t)$ y cerrar el sistema. En principio,

$$\frac{d^2u_0}{dt^2} = d(u_1 - 2u_0 + u_{-1}) + f_0,$$

pero $u_{-1}(t)$ a menos que resolvamos también para $n \leq 0$. La ecuación en $n = -1$ nos proporciona

$$\frac{d^2u_{-1}}{dt^2} = d(0 - 2u_{-1} + u_{-2}) + f_{-1} + du_0.$$

Suponiendo que conocemos $u_0(t)$, podemos ver el problema para $n \leq 0$ con condición de contorno en $u_0(t)$ como un problema con condición de contorno nula en la pared y un término fuente modificado: $f_n + d\delta_{n,-1}u_0$ para $n < 0$. Podemos extender este problema a todo el espacio definiendo:

$$v_n = \begin{cases} u_n & n < 0 \\ 0 & n = 0 \\ -u_{-n} & n > 0 \end{cases}$$

La extensión v_n es solución de:

$$\frac{d^2v_n}{dt^2} = d(v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1}) + g_n,$$
$$v_n(0) = v_n^0, \quad \frac{dv_n}{dt}(0) = v_n^1,$$

para todo n, donde v_n^0 y v_n^1 son extensiones impares de u_n^0 y u_n^1. La fuente g_n se obtiene extendiendo $f_n + \delta_{n,-1}u_0$. Hemos incluido la condición de contorno u_0 como una fuerza que acúa en u_{-1} para permitir una extensión impar con $v_0 = 0$. Usando la simetría de los datos:

$$u_n(t) = v_n(t) = \sum_{n'<0} \left[\mathcal{G}^0_{n,n'}(t)\frac{du_{n'}}{dt}(0) + \frac{d\mathcal{G}^0_{n,n'}}{dt}(t)u_{n'}(0)\right]$$
$$+ \int_0^t \sum_{n'<0} \mathcal{G}^0_{n,n'}(t-s)(f_{n'}(s) + d\delta_{n',-1}u_0(s))ds, \quad n < 0$$

donde $\mathcal{G}^0_{n,n'} = G^0_{n,n'} - G^0_{n,-n'}$ es la función de Green para el semiespacio $n < 0$ con condición de contorno nula en $n = 0$. De esta forma, obtenemos la fórmula buscada para u_{-1}:

$$\begin{aligned} u_{-1}(t) &= r_{-1}(t) + d\int_0^t \mathcal{G}^0_{-1-1}(t-s)u_0(s)ds, \\ r_{-1}(t) &= \textstyle\sum_{n'<0}\big[\mathcal{G}^0_{-1,n'}(t)\frac{du_{n'}}{dt}(0) + \frac{d\mathcal{G}^0_{-1,n'}}{dt}(t)u_{n'}(0) \\ &\quad + \int_0^t \mathcal{G}^0_{-1,n'}(t-s)f_{n'}(s)ds\big]. \end{aligned}$$

El término $r_{-1}(t)$ representa la contribución de los datos en la región exterior. Nuestra condición de contorno en $n = 0$ t toma la forma:

$$\frac{d^2u_0}{dt^2} = d\Big(u_1 - 2u_0 + d\int_0^t \mathcal{G}^0_{-1-1}(t-s)u_0(s)ds\Big) + dr_{-1} + f_0,$$

con núcleo:

$$\mathcal{G}^0_{-1-1}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi}\frac{1-e^{-2i\theta}}{\omega(\theta)}\sin(\omega(\theta)t).$$

De forma análoga, obtenemos condiciones de contorno no reflectantes en intervalos finitos $-N \le n \le N$, véase [48].

17. *Consideremos el problema de valores iniciales*

$$\begin{aligned} u_j'' = d(u_{j+1} - (2+r)u_j + u_{j-1}) + f(u_j), &\quad j = 1,\dots,N \\ u_j(0) = u_j^0, \quad u_j'(0) = u_j^1, &\quad j = 1,\dots,N \\ u0(t) = u_{N+1}(t) = 0, & \end{aligned}$$

para una función continua f. Denotamos $V(u) = -\int_0^u f(s)ds$. Suponemos que $uf(u) + 2(2\sigma+1)V(u) \ge 0$ para $\sigma > 0$. Definimos la energía

$$E(t) = \frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j'^2(t) + \frac{d}{2}\sum_{j=-\infty}^{j=\infty}[(u_{j+1}-u_j)^2(t) + ru_j^2(t)] + \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} V(u_j(t)).$$

Si $E(0) < 0$, entonces $\sum_{j=1}^N |u_j(t)|^2 \to \infty$ cuando $t \to T$ para algún $T > 0$ finito.

Tomado de [29]. Definimos $H(t) = \sum_{j=1}^N |u_j(t)|^2 + \rho(t+\tau)^2$, con $\rho, \sigma > 0$ a elegir de modo que $(H^{-\sigma})'' = \sigma H^{-\sigma-2}((\sigma+1)(H')^2 - HH'') \le 0$. Cuando $H(0) \ne 0$ tenemos

$$H^\sigma(t) \ge H^{\sigma+1}(0)(H(0) - \sigma t H'(0))^{-1}$$

y $H(t)$ explota en tiempo finito para algún $T \le H(0)/\sigma H'(0)$ supuesto que $H'(0) > 0$.

Veamos cómo hacer ésto. Calculamos H' y H'', y usamos la ecuación para obtener

$$HH'' - (\sigma+1)(H')^2 = 4(\sigma+1)Q + 2HG,$$

$$Q = \left(\sum_{j=1}^{N} |u_j|^2 + \rho(t+\tau)^2\right)\left(\sum_{j=1}^{N} |u_j'|^2 + \rho\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} u_j u_j' + \rho(t+\tau)\right)^2,$$

$$G = \sum_{j=1}^{N} u_j f(u_j) - \sum_{i,j} u_i a_{i,j} u_j - (2\sigma+1)\left(\sum_{j=1} |u_j'|^2 + \rho\right),$$

donde $\mathbf{A} = (a_{ij})$ es la matriz que define la parte lineal del sistema. Tenemos $Q \geq 0$. Estimamos $G'(t)$ y concluimos que $G(t) \geq \sigma(2\sigma + 1)\left(-\frac{\rho}{2} - E(0)\right) \geq 0$ si $\rho = -2E(0) > 0$.

Tenemos $(H^{-\sigma})'' \leq 0$ y $H(0) \neq 0$. Además, $H'(0) = 2\sum_{j=1}^{N} u_j^0 u_j^1 + 2\rho\tau > 0$ si $\tau > -\rho^{-1}\sum_{j=1}^{N} u_j^0 u_j^1$.

18. *Sea $u_n(t)$ una solución de*

$$u_n' = d(u_n)(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) + v(u_n)(u_{n-1} - u_n) + f(u_n),$$

con datos iniciales no negativos y un término reactivo f, tal que $f(u) > Cu^p$, con $p > 1$, $C > 0$, para $u > 0$ grande. Ponemos $a(u) = -(2d(u) + v(u))u + f(u)$ y asumimos que $d(u) > 0, d(u) + v(u) > 0$ crecen más despacio que u^p para u large. Para cualquier componente k tal que$a(u_k(0)) > 0$ y $a'(u) > 0$ cuando $u > u_k(0)$

$$u_k(t) \to \infty \quad \text{as} \quad t \to T \leq T_b = \int_{u_k(0)}^{\infty} \frac{ds}{a(s)} < \infty.$$

Tomado de [44]. El principio del máximo garantiza la positividad de $u_n(t)$. Usando $u_{k+1}, u_{k-1} \geq 0$, obtenemos la desigualdad diferencial $u_k'(t) \geq a(u_k)$. Por hipótesis, $a(u) > a(u_k(0)) > 0$ para $u \geq u_k(0)$. Entonces $u_k(t)$ decrece y está acotado inferiormente por la solución $y(t)$ de $y'(t) = g(y)$, $y(0) = u_k(0)$, que está dada implícitamente por:

$$t = \int_{u_k(0)}^{y(t)} \frac{ds}{a(s)}.$$

La integral $\int_{u_k(0)}^{\infty} \frac{ds}{a(s)} < \infty$ debido a la condición de crecimiento $a(s) >> s^p$, $p > 1$ para s grande, ya que $a(u) > 0$ para $u \geq u_k(0)$. Cuando $t \to T_b = \int_{u_k(0)}^{\infty} \frac{ds}{a(s)} < \infty$, $y(t) \to \infty$.

19. *Consideremos las ecuaciones de Becker-Döring*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\rho_k = \rho > 0,$$

$$\rho_k' = j_{k-1} - j_k, \ k \geq 2,$$

$$j_k = d_k(e^{aD_+\epsilon_k}\rho_1\rho_k - \rho_{k+1})$$

para una sucesión dado $\epsilon_k > 0$ con $D_+\epsilon_k = \epsilon_{k+1} - \epsilon_k$, con a y ρ positivos, y constantes. Calcula las distribuciones de equilibrio.

Tomado de [30]. Imponemos $j_k = 0$. Entonces $\rho_k = \rho_1^k e^{a\epsilon_k}$ es la solución de equilibrio. Este sistema admite ondas viajeras cuya descripción es compleja, ver [30].

20. *Dado el problema cinético*

$$\frac{dr_k}{ds} = (k-1)^{1/3} D(k-1) r_{k-1} - k^{1/3} D(k) r_k, \quad k \geq 3,$$

$$\frac{dr_2}{ds} = 2cD(1) - 2^{1/3} D(2) r_2,$$

$$c\frac{dc}{ds} + 4c^2 D(1) + cM_{\frac{1}{3}} = 1,$$

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{c},$$

encontrar una expresión para r_k en términos de los parámetros del problema.

Tomado de [51]. Nótese que las ecuaciones para s y c arrancan de una singularidad en $s = 0$. La transformada de Laplace de las ecuaciones nos da

$$\frac{dr_2}{ds} = 2cD(1) - 2^{1/3} D(2) r_2,$$

$$\frac{dr_k}{ds} = (k-1)^{1/3} D(k-1) r_{k-1} - k^{1/3} D(k) r_k,. \quad k \geq 3.$$

Concluimos que

$$\hat{r}_2(\sigma) = \frac{2D(1)}{\sigma + 2^{\frac{1}{3}} D(2)} \hat{c},$$

$$\hat{r}_k(\sigma) = \frac{(k-1)^{\frac{1}{3}} D(k-1)}{\sigma + k^{\frac{1}{3}} D(k)} \hat{r}_{k-1}, \quad k \geq 3.$$

Por tanto,

$$2^{\frac{1}{3}} D(2) \hat{r}_2(\sigma) = \frac{2D(1)}{1 + \sigma 2^{\frac{-1}{3}} D(2)^{-1}} \hat{c},$$

$$k^{\frac{1}{3}} D(k) \hat{r}_k(\sigma) = \frac{(k-1)^{\frac{1}{3}} D(k-1)}{1 + \sigma k^{\frac{-1}{3}} D(k)^{-1}} \hat{r}_{k-1}, \quad k \geq 3.$$

Iterando,

$$k^{\frac{1}{3}} D(k) \hat{r}_k = 2\hat{c} D(1) \hat{R}_k,$$

donde

$$\hat{R}_k(\sigma) = \prod_{j=2}^{k} \frac{1}{1 + \sigma j^{\frac{-1}{3}} D(j)^{-1}}.$$

Mediante la fórmula de inversión

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\mathcal{C}} e^{st}\hat{f}(s)ds = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{s_1+\imath\infty}^{s_1-\imath\infty} e^{st}\hat{f}(s)ds,$$

expresamos r_k como una función de las transformadas inversas R_k de $\hat{R}_k$:

$$r_k(s) = \frac{2D(1)}{k^{\frac{1}{3}}D(k)}\int_0^s R_k(s-s')c(s')ds', \quad k \geq 2,$$

con

$$R_k(t) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\mathcal{C}} e^{st}\hat{R}_k(s)ds = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{s_1+\imath\infty}^{s_1-\imath\infty} e^{st}\hat{f}(s)ds = \lim_{L\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} e^{\imath ts}\hat{R}_k(\imath s)ds,$$

donde $\mathcal{C}$ es un contorno de inversión. Una elección clásica son los contornos de Bromwich $s_1 - is$, paralelos al eje imaginario y localizados a la derecha de las singularidades de $\hat{R}_k(s)$. En este caso, podemos elegir el eje imaginario $s_1 = 0$. Para fines numéricos, las mejores elecciones de caminos de inversión son aquellas para las que se puede aproximar la integral por una fórmula de cuadratura con el mínimo de puntos posible. Podemos elegir deformaciones de caminos de Bromwich, como los contornos tipo Talbot o caminos hiperbólicos.

3 Métodos numéricos

1. *Dado un perfil $c_e > 0$, funciones $\rho(x) > 0$, $n(x) > 0$, $u(x)$ y constantes $a, R > 0$, consideramos el siguiente problema de frontera libre. Deseamos calcular x^* tal que*

$$\begin{aligned} c''(x) + au(x)c'(x) = R\rho(x)n(x)^{1/3}(c(x) - c_e(x)), \quad 0 < x < x_*, \\ c''(x) + au(x)c'(x) = 0, \quad x > x_*, \\ c(x_*) = c_e(x_*) = c_*,\ c'(x_*^-) = c'(x_*^+),\ c(\infty) = 1, c(0) = c_e(0). \end{aligned}$$

Tomado de [42]. Denotamos $c(x) = 1 + \frac{c_*-1}{\phi(x_*)}\phi(x)$ donde

$$\begin{aligned} \phi''(x) + au(x)\phi'(x) = 0, \quad x \geq 0, \\ \phi(0) = 1,\ \phi(\infty) = 0, \end{aligned}$$

es decir,

$$\phi(x) = \int_x^\infty e^{-a\int_0^y u(x')dx'}dy\left(\int_0^\infty e^{-a\int_0^y u(x')dx'}dy\right)^{-1}.$$

Para calcular x_*, selecionamos una aproximación inicial x_*. A continuación, definimos $c(x)$ para $x > x_*$ para ese valor temporal de x_*. A continuación, resolvemos $c''(x)+au(x)c'(x) = R\rho(x)n(x)^{1/3}(c(x)-c_e(x))$, $0 < x < x_*$ con $c(x_*) = c_*$ y $c'(x_*) = (c_*-1)\frac{\phi'(x_*)}{\phi(x_*)}$. Tras ello, comparamos $c(0)$ con $c_e(0)$. Según sea mayor o menor, aumentamos o disminuimos el valor de x_* hasta que la diferencia es suficientemente pequeña.

2. *Consideremos el problema hiperbólico*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial t} + A\frac{\partial E}{\partial t} + B\frac{\partial E}{\partial x} + C\frac{\partial J}{\partial t} + D = 0, \qquad & x \in (0, L),\ t > 0,\\
E(x, 0) = 0, \qquad & x \in (0, L),\\
E(0, t) = \rho J(t), \qquad & t \geq 0,\\
\int_0^L E(x, t)dx = \phi, \qquad & t \geq 0,
\end{aligned}$$

donde ρ, ϕ, L son positivos y A, B, C, D son funciones acotadas. A y B son positivas, mientras que C es negativa. Cuál sería un esquema numérico adecuado para resolver este problema?

Tomado de [16]. Los problemas hiperbólicos se discretizan normalmente de forma explícita. Sin embargo, en este caso i) tenemos una restricción integral que acopla todos los valores en cada nivel de tiempo, ii) el operador hiperbólico viene dado en forma no característica. Usamos diferencias finitas progresivas de primer orden para las derivadas temporales de primer orden de E y J. Usamos una aproximación retrógada de segundo orden para las derivadas espaciales de primer order porque las diferencias centrales conllevan inestabilidad. La derivada segunda E_{xt} se aproxima combinando las aproximaciones en espacio y tiempo descritas. En el extremo izquierdo usamos para E_x una aproximación retrógrada de primer orden. La integral se discretiza mediante una regla del trapecio compuesta.

3. *Consideramos las ecuaciones de Navier para cristales con simetría cúbica en situaciones bidimensionales, en función de tres constantes positivas c_{11}, c_{22}, c_{44}:*

$$\begin{aligned}
Mu_1'' &= C_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + C_{12}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + C_{44}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + C_{44}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2},\\
Mu_2'' &= C_{11}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + C_{12}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + C_{44}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + C_{44}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2},
\end{aligned}$$

donde $M > 0$. Proponer una discretización en diferencias finitas estable.

Tomado de [31]. Construimos una malla rectangular. Denotamos por D_i^+ y D_i^- las diferencias finitas de primer orden progresivas y regresivas, respectivamente, en la dirección i, es decir,

$$\begin{aligned}
D_1^+ u_j(\ell, m) &= \frac{u_j(\ell + \delta x_1, m) - u_j(\ell, m)}{\delta x_1},\\
D_1^- u_j(\ell, m) &= \frac{u_j(\ell, m) - u_j(\ell - \delta x_1, m)}{\delta x_1},
\end{aligned}$$

para $i = 1$. Análogamente para $i = 2$. En vista de la presencia de términos cruzados, elegimos

$$\begin{aligned} Mu_1'' &= C_{11}\frac{D_1^- D_1^+ u_1}{\delta x_1^2} + C_{12}\frac{D_1^- D_2^+ u_2}{\delta x_1 \delta x_2} + C_{44}\frac{D_2^- D_2^+ u_1}{\delta x_2^2} + C_{44}\frac{D_2^- D_1^+ u_2}{\delta x_1 \delta x_2}, \\ Mu_2'' &= C_{11}\frac{D_2^- D_2^+ u_2}{\delta x_2^2} + C_{12}\frac{D_2^- D_1^+ u_1}{\delta x_1 \delta x_2} + C_{44}\frac{D_1^- D_1^+ u_2}{\delta x_1^2} + C_{44}\frac{D_1^- D_2^+ u_1}{\delta x_1 \delta x_2}. \end{aligned}$$

Véase [35] para extensiones a cristales tridimensionales y a retículos con dos bases.

4. *Consideramos un retículo hexagonal plano e ignoramos desplazamientos en la dirección vertical. En el límite continuo, las deformaciones planas se describen mediante las ecuaciones de la elasticidad de Navier en dos dimensiones para el vector de desplazamiento,*

$$\begin{aligned} \rho_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\lambda + \mu)\,\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \\ \rho_2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \mu\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu)\,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\lambda + \mu)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \end{aligned}$$

donde ρ_2 es la densidad de masa λ y μ los coeficientes de Lamé en dos dimensiones($\lambda = C_{12}$, $\mu = C_{66}$, $\lambda + 2\mu = C_{11}$). Proponer una discretización en diferencias finitas en un retículo hexagonal con constante a.

Tomado de [40]. Tomamos un punto A en el retículo hexagonal con coordenadas (x, y). Sus 9 (3+6) vecinos próximos tienen coordenadas

$$\begin{aligned} n_1 &= \left(x - \frac{a}{2}, y - \frac{a}{2\sqrt{3}}\right),\ n_2 = \left(x + \frac{a}{2}, y - \frac{a}{2\sqrt{3}}\right),\ n_3 = \left(x, y + \frac{a}{\sqrt{3}}\right), \\ n_4 &= \left(x - \frac{a}{2}, y - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right),\ n_5 = \left(x + \frac{a}{2}, y - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right),\ n_6 = (x - a, y), \\ n_7 &= (x + a, y),\ n_8 = \left(x - \frac{a}{2}, y + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right),\ n_9 = \left(x + \frac{a}{2}, y + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

Definimos los operadores siguientes en términos de las coordenadas (x, y) del nodo A:

$$\begin{aligned} Tu &= [u(n_1) - u(A)] + [u(n_2) - u(A)] + [u(n_3) - u(A)], \\ Hu &= [u(n_6) - u(A)] + [u(n_7) - u(A)], \\ D_1 u &= [u(n_4) - u(A)] + [u(n_9) - u(A)], \\ D_2 u &= [u(n_5) - u(A)] + [u(n_8) - u(A)], \end{aligned}$$

Los desarrollos de Taylor de estas combinaciones de diferencias finitas en torno a (x,y) proporcionan las aproximaciones

$$\begin{aligned}
Tu &\sim \left(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u\right)\frac{a^2}{4},\\
Hu &\sim (\partial_x^2 u)\, a^2,\\
D_1 u &\sim \left(\frac{1}{4}\,\partial_x^2 u + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\partial_x\partial_y u + \frac{3}{4}\,\partial_y^2 u\right) a^2,\\
D_2 u &\sim \left(\frac{1}{4}\,\partial_x^2 u - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\partial_x\partial_y u + \frac{3}{4}\,\partial_y^2 u\right) a^2,
\end{aligned}$$

según $a \to 0$. A continuación introducimos en las ecuaciones del movimiento Hu/a^2, $(4T-H)u/a^2$ y $(D_1-D_2)u/(\sqrt{3}a^2)$ en lugar de $\partial_x^2 u$, $\partial_y^2 u$ y $\partial_x\partial_y u$, respectivamente, con reemplazos análogos para las derivadas de v. Como resultado, obtenemos las siguientes ecuaciones en cada punto del retículo:

$$\begin{aligned}
\rho_2 a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 4\mu\, Tu + (\lambda+\mu)\, Hu + \frac{\lambda+\mu}{\sqrt{3}}\,(D_1 - D_2)v,\\
\rho_2 a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 4(\lambda+2\mu)\, Tv - (\lambda+\mu) Hv + \frac{\lambda+\mu}{\sqrt{3}}\,(D_1 - D_2)u.
\end{aligned}$$

5. *Consideremos un retículo hexagonal plano con constante de red a. Las ecuaciones de Navier isotrópicas tienen soluciones singulares*

$$\begin{aligned}
u &= \frac{a}{2\pi}\left[\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{xy}{2(1-\nu)(x^2+y^2)}\right],\\
v &= \frac{a}{2\pi}\left[-\frac{1-2\nu}{4(1-\nu)}\,\ln\left(\frac{x^2+y^2}{b^2}\right) + \frac{y^2}{2(1-\nu)(x^2+y^2)}\right],
\end{aligned}$$

donde $\nu = \lambda/[2(\lambda+\mu)]$ para todo a. Elegimos (x_0, y_0) distinto de los puntos del retículo y resolvemos una versión amortiguadad de las ecuaciones de Navier discretas formuladas en el ejercicio anterior. Cómo esperas que evolucione el sistema empezando de la condición inicial $(u(x-x_0, y-y_0), v(x-x_0, y-y_0))$?

Tomado de [38]. Las ecuaciones amortiguadas tienen la forma

$$\begin{aligned}
\rho_2 a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma\frac{\partial u}{\partial t} &= 4\mu\, Tu + (\lambda+\mu)\, Hu + \frac{\lambda+\mu}{\sqrt{3}}\,(D_1 - D_2)v,\\
\rho_2 a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \gamma\frac{\partial v}{\partial t} &= 4(\lambda+2\mu)\, Tv - (\lambda+\mu) Hv + \frac{\lambda+\mu}{\sqrt{3}}\,(D_1 - D_2)u,
\end{aligned}$$

con $\gamma > 0$. Esperamos que el sistema relaje a una configuración estacionaria que se comporta como $(u(x-x_0, y-y_0), v(x-x_0, y-y_0))$ a una cierta distancia de (x_0, y_0). Estas soluciones representan defectos en el retículo que generan los campos elásticos elegidos. Se ha estudiado una gran variedad de defectos mediante estos modelos [52, 55].

6. *La ecuación de Helmholtz en todo el espacio se plantea como*

$$\Delta u + k^2 u = 0, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N,$$
$$\lim_{r=|\mathbf{x}|\to\infty} r^{\frac{N-1}{2}} (\frac{\partial}{\partial r}(u - u_{\text{inc}}) - \imath k(u - u_{\text{inc}})) = 0.$$

Da una formulación variacional equivalente planteada en un dominio acotado mediante el operador Dirichlet-a-Neumann.

Tomado de [37]. Sea B_R una esfera de radio R y Γ_R su frontera. El operador Dirichlet–a–Neumann (también llamado Steklov–Poincaré) asocia a los datos Dirichlet en Γ_R la derivada normal de la solución del problema de Dirichlet exterior:

$$\begin{array}{rcl} L : H^{1/2}(\Gamma_R) & \longrightarrow & H^{-1/2}(\Gamma_R) \\ f & \longmapsto & \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \end{array}$$

donde $w \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^N \setminus \overline{B}_R)$, $B_R := B(\mathbf{0}, R)$ es la única solución de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta w + k^2 w = 0, & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \overline{B}_R, \\ w = f, & \text{en } \Gamma_R, \\ \displaystyle\lim_{r\to\infty} r^{N-1/2}(\frac{\partial w}{\partial r} - \imath k w) = 0. & \end{array} \right.$$

$H^{1/2}(\Gamma_R)$ y $H^{-1/2}(\Gamma_R)$ son espacios de trazas estandar. Podemos estudiar un problema de contorno equivalente planteado en B_R imponiendo una condición no reflectante en la pared Γ_R:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u + k^2 u = 0, & \text{en } B_R, \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(u - u_{\text{inc}}) = L(u - u_{\text{inc}}), & \text{on } \Gamma_R. \end{array} \right.$$

La solución u del problema original es también solución del problema variacional

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H^1(B_R), \\ b(u, v) = \ell(v), \qquad \forall v \in H^1(B_R), \end{array} \right.$$

donde

$$\begin{array}{rcl} b(u, v) & = & \displaystyle\int_{B_R} (\nabla u \nabla \overline{v} - k^2 u \overline{v}) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_R} L u \, \overline{v} \, dl, \quad \forall u, \, v \in H^1(B_R), \\ \ell(v) & = & \displaystyle\int_{\Gamma_R} (\frac{\partial u_{\text{inc}}}{\partial \mathbf{n}} - L u_{\text{inc}}) \, \overline{v} \, dl, \qquad \forall v \in H^1(B_R). \end{array}$$

7. *Escribe el problema de transmisión tipo Helmholtz*

$$\left|\begin{array}{ll} \nabla\cdot(\alpha_e\nabla u)+\lambda_e^2 u=0, & \text{en } \mathbb{R}^2\setminus\overline{\Omega}_i,\\ \nabla\cdot(\alpha_i\nabla u)+\lambda_i(k)^2 u=0, & \text{en } \Omega_i,\\ u^- - u^+ = 0, & \text{en } \partial\Omega_i,\\ \alpha_i\frac{\partial u^-}{\partial\mathbf{n}}-\alpha_e\frac{\partial u^+}{\partial\mathbf{n}}=0, & \text{en } \partial\Omega_i,\\ \lim_{r\to\infty} r^{1/2}\left(\dfrac{\partial}{\partial r}(u-u_{\text{inc}})-\imath\lambda_e(u-u_{\text{inc}})\right)=0, & r=|\mathbf{x}|, \end{array}\right.$$

en forma variacional y calcula la derivada de $J(k)=\int_\Gamma |u(k)-d|^2 dl$ *con respecto a* k*.*

Tomado de [39]. Argumentando como en el ejercicio anterior tenemos

$$\left|\begin{array}{l} u\in H^1(B_R),\\ S(u,v)=\ell(v), \qquad \forall v\in H^1(B_R), \end{array}\right.$$

donde

$$\begin{aligned} S(u,v) &:= \int_{B_R\setminus\overline{\Omega}_i}(\alpha_e\nabla u\nabla\overline{v}-\lambda_e^2 u\overline{v})d\mathbf{x}+\int_{\Omega_i}(\alpha_i\nabla u\nabla\overline{v}-\lambda_i(k)^2 u\overline{v})d\mathbf{x}\\ &\quad -\int_{\Gamma_R}\alpha_e Lu\,\overline{v}\,dl, \qquad \forall u,\, v\in H^1(B_R),\\ \ell(v) &:= \int_{\Gamma_R}\alpha_e(\frac{\partial u_{\text{inc}}}{\partial\mathbf{n}}-Lu_{\text{inc}})\,\overline{v}\,dl, \qquad \forall v\in H^1(B_R), \end{aligned}$$

siendo L el operador Dirichlet-a-Neumann definido por

$$\left|\begin{array}{ll} \nabla\cdot(\alpha_e\nabla w)+\lambda^2 w=0, & \text{in } \mathbb{R}^2\setminus\overline{B}_R,\\ w=f, & \text{en } \partial B_R,\\ \lim_{r\to\infty} r^{1/2}(\dfrac{\partial w}{\partial r}-\imath\lambda_e w)=0. & \end{array}\right.$$

Diferenciando J respecto a k vemos que

$$\frac{dJ}{dk}=2\int_\Gamma\overline{(u(k)-d)}u_k(k)dl,$$

donde la derivada $u_k(k)=\frac{du(k)}{dk}\in H^1(B_R)$ es solución de

$$\begin{aligned} \int_{B_R\setminus\overline{\Omega}_i}(\alpha_e\nabla u_k(k)\nabla\overline{v}-\lambda_e^2 u_k(k)\overline{v})d\mathbf{x}+\int_{\Omega_i}(\alpha_i\nabla u_k(k)\nabla\overline{v}-\lambda_i(k)^2 u_k(k)\overline{v})d\mathbf{x}\\ -\int_{\Gamma_R}\alpha_e Lu_k(k)\,\overline{v}\,dl = 2\int_{\Omega_i}\lambda_i(k)\lambda_i'(k)u(k)\overline{v}d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

para todo $v\in H^1(B_R)$ y $u(k)$ es solución del problema de Helmholtz para $\lambda_i(k)$.

8. *Definimos el coste* $J(a,k) = \sum_{m=1}^{M} \int_\Gamma |u_m - d_m|^2$, *donde* u_m *es solución de*

$$\begin{cases} \mathrm{div}(a_e \nabla u) + k_e^2 u = 0, \quad \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}_i, \qquad \mathrm{div}(a \nabla u) + k^2 u = 0, \quad \text{en } \Omega_i, \\ u^- = u^+, \quad a\frac{\partial u^-}{\partial \mathbf{n}} = a_e \frac{\partial u^+}{\partial \mathbf{n}}, \quad \text{en } \partial\Omega_i, \\ r^{(N-1)/2} \left(\frac{\partial (u - u_{\mathrm{inc}}^m)}{\partial r} - \imath k_e (u - u_{\mathrm{inc}}^m) \right) \to 0, \quad \text{cuando } r := |\mathbf{x}| \to \infty. \end{cases}$$

Dados a_j, k_j, *encontrar direcciones de descenso para*

$$J(\delta) := J(a_j + \delta\phi, k_j + \delta\psi),$$

donde $\delta > 0$, *con el fin de implementar un proceso de optimización.*

Tomado de [46]. Buscamos δ, ϕ y ψ tales que $\frac{dJ(\delta)}{d\delta} < 0$. Diferenciando, tenemos

$$\left.\frac{dJ}{d\delta}\right|_{\delta=0} = -\sum_{m=1}^{M} \mathrm{Re} \left[\int_{\Omega_j} [\phi \, \nabla u_m \nabla \overline{w}_m - 2\psi k_j \, u_m \overline{w}_m] \, d\mathbf{z} \right],$$

donde u_m es solución del problema directo con $a = a_j$, y $k = k_j$. Los campos adjuntos w_m son solución de

$$\begin{cases} \mathrm{div}(a_e \nabla w_m) + k_e^2 w_m = (d_m - u_m)\delta_{\Gamma_{meas}}, & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}_i, \\ \mathrm{div}(a_j \nabla w_m) + k_j^2 w_m = 0, & \text{en } \Omega_i, \\ w_m^- = w_m^+, \quad a_i \frac{\partial w_m^-}{\partial \mathbf{n}} = a_e \frac{\partial w_m^+}{\partial \mathbf{n}}, & \text{en } \partial\Omega_i, \\ r^{(N-1)/2} \left(\frac{\partial w_m}{\partial r} + \imath \kappa_e w_m \right) \to 0, & \text{cuando } r \to \infty. \end{cases}$$

Tomando

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{M} \mathrm{Re}\left(\nabla u_m(\mathbf{x}) \nabla \overline{w}_m(\mathbf{x})\right), \quad \psi(\mathbf{x}) = -\sum_{m=1}^{M} \mathrm{Re}\left(u_m(\mathbf{x}) \overline{w}_m(\mathbf{x})\right), \quad \mathbf{x} \in \Omega_j,$$

y

$$a_{j+1} = a_j + \delta\phi, \qquad k_{j+1} = k_j + \delta\psi,$$

garantizamos $J(a_{j+1}, k_{j+1}) < J(a_j, k_j)$ para δ pequeño.

9. *Explicar como resolver el sistema cinético siguiente mediante el método de partículas:*

$$\partial_t f + \frac{\Delta l}{2\hbar v_M} \sin(k) \partial_x f + \frac{\tau_e}{\eta} F \partial_k f = \\ \frac{1}{\eta} \left[f^{FDa}(k; \mu(n)) - \left(1 + \frac{\nu_{imp}}{2\nu_{en}} \right) f + \frac{\nu_{imp}}{2\nu_{en}} f(x, -k, t) \right],$$

$$\partial_x^2 V = \partial_x F = n - 1$$

$$n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,k,t)\,dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{FDa}(k;\mu(n))\,dk$$

$$f^{FDa}(k;\mu) = \alpha \ln\left[1+\exp\left(\mu-\delta+\delta\cos(k)\right)\right]$$

$$\eta = \frac{v_M}{\nu_{en}x_0} \qquad \delta = \frac{\Delta}{2k_BT}.$$

Las condiciones de contorno son, para $x = 0$:

$$f^+ = \beta F - \frac{f^{(0)}}{\int_0^{\pi}\sin(k)\,f^{(0)}\,dk}\int_{-\pi}^{0}\sin(k)\,f^-\,dk$$

con

$$\beta = \frac{2\pi\hbar\sigma F_M}{e\Delta N_D}$$

y para $x = L/x_0$:

$$f^- = \frac{f^{(0)}}{(1/(2\pi))\int_{-\pi}^{0} f^{(0)}\,dk}\left(1-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f^+\,dk\right)$$

Las condiciones de contorno del potencial eléctrico V son

$$V(0,t) = 0, \quad V(L,t) = \phi_L \sim \frac{\phi}{F_M}\frac{L}{x_0}.$$

La condición inicial es

$$f^{(0)}(k;n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\exp(\imath jk)\,\frac{1-\imath jF/\tau_e}{1+j^2\,(F)^2}f_j^{FD}(n)$$

$$f_j^{FD}(n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f^{FD}(k;\mu(n))\,\cos(jk)\,dk$$

con $x \in [0, L = L/x_0]$ y f periodico k con periodo 2π. La energía promedio E se define como

$$E = \frac{E}{k_BT} = \frac{\int_{-\pi/l}^{\pi/l}\varepsilon(k)f(x,k,t)\,dk}{k_BT\int_{-\pi/l}^{\pi/l}f(x,k,t)\,dk} = \delta\frac{\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos k)\,f(x,k,t)\,dk}{\int_{-\pi}^{\pi}f(x,k,t)\,dk}.$$

Tomado de [43]. Partimos de una descripción de la función de distribución como un suma de funciones delta:

$$f(x,k,t) \approx \sum_{i=1}^{N}\omega_i f_i(t)\delta(x-x_i(t))\otimes\delta(k-k_i(t))$$

donde ω_i, $f_i(t)$, $x_i(t)$ y $k_i(t)$ son, respectivamente, el volumen de control (constante), el pesp la posición y el vector de onda de la partícula i-ésima. Sea N el número de partículas numéricas. El movimiento de las partículas está gobernado por una dinámica sin colisiones, mientras que las colisiones se representan por la variación de los pesos. El perfil de la solución puede desarrollar gradientes grandes cuando algunas partículas adquieren gran peso, no acumulando muchas partículas en regiones de gradientes grandes. La evolución de las partículas está determinada por sus posiciones y vectores de onda, que definen las curvas características de la parte convectiva de la ecuación. Sus ecuaciones son:

$$\frac{d}{dt}k = \frac{\tau_e}{\eta}F, \quad \frac{d}{dt}x = \frac{\Delta l}{2\hbar v_M}\sin(k).$$

La evolución de la función de distribución a lo largo de esas curvas características viene dada por la ecuación:

$$\frac{d}{dt}f = \frac{1}{\eta}\left[-\left(1+\frac{\nu_{imp}}{2\nu_{en}}\right)f + \frac{\nu_{imp}}{2\nu_{en}}f(-k) + f^{FD}\right].$$

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias resultante se discretiza mediante un método de Euler modificado:

$$f_i^n = f_i^{n-1} + dt\frac{1}{\eta}\left[-\left(1+\frac{\nu_{imp}}{2\nu_{en}}\right)f_i^{n-1} + \frac{\nu_{imp}}{2\nu_{en}}f_i^{(-k)} + f_i^{FD,n-1}\right]$$

with $f_i^{(-k)} = f(x_i^{n-1}, -k_i^{n-1}, t^{n-1})$,

$$k_i^n = k_i^{n-1} + dt\frac{\tau_e}{\eta}F_i^{n-1},$$

$$x_i^n = x_i^{n-1} + dt\frac{\Delta l}{2\hbar v_M}\sin(k_i^n).$$

Por razones de estabilidad, usamos k_i^n para actualizar x_i^n. Métodos multipaso parecen proporcionar periores resultados.

Las condiciones de contorno se toman en cuenta como sigue:

- Si $k_i^n > \pi$, tomamos $k_i^n = k_i^n - 2\pi$. Si $k_i^n < -\pi$, tomamos $k_i^n = k_i^n + 2\pi$.
- Si $x_i^n > L$, tomamos $x_i^n = x_i^n - L$ y $f_i^{n-1} = f_i^+$. Si $x_i^n < 0$, tomamos $x_i^n = x_i^n + L$ y $f_i^{n-1} = f_i^-$. Los valores f_i^+ y f_i^- se calculan por discretización de las integrales usando la regla de Simpson en una red equiespaciada $K_{m'}$ con paso Δk.

Para calcular x_i, k_i y f_i en el siguiente paso de tiempo t^{n+1}, necesitamos actualizar el campo eléctrico y la distribución de Fermi-Dirac en las ecuaciones de las partículas. Esta actualización requiere un proceso de interpolación para generar una aproximación de la función de distribución en una malla regular X_m, $K_{m'}$, que se usa para aproximar el campo eléctrico y el potencial químico. Para aproximar los valores de la función de distribución en la malla, $f^n_{m,m'}$, empleamos los valores para las partículas f^n_i. Se calcula una media ponderada mediante

$$f^n_{m,m'} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} f^n_i W^i_{m,m'}}{\sum\limits_{i=1}^{N} W^i_{m,m'}}$$

donde

$$W^i_{m,m'} = \max\left\{0, 1 - \frac{|X_m - x^n_i|}{\Delta x}\right\} \cdot \max\left\{0, 1 - \frac{|K_{m'} - k^n_i|}{\Delta k}\right\}$$

y Δx , Δk, son los pasos en espacio y vector de onda.

Se obtienen aproximaciones para la densidad y densidad promedio en los puntos de malla, $n(X_m, t^n) \approx n^n_m$ and $(k_B T)^{-1} E(X_m, t^n) \approx (k_B T)^{-1} E^n_m$, mediante la regla de Simpson y los valores interpolados de la función de distribución en la malla.

Calculamos el potencial químico μ resolviendo las ecuaciones mediante un método de Newton-Raphson. La regla de Simpson se emplea también para aproximar las integrales para $n(\mu)$ y $dn(\mu)/d\mu$. Una vez conocemos el potencial químico μ, calculamos la distribución de Fermi-Dirac en los puntos de la malla, $f^{FD}(K_{m'}; n^n_m)$, que se interpola a su vez para obtener la distribución de Fermi-Dirac sobre las partículas.

Calculamos el campo eléctrico en el tiempo t^n, usando diferencias finitas para discretizar la ecuación de Poisson en la malla X_m :

$$V^n_{m+1} - 2V^n_m + V^n_{m-1} = n^n_m - 1,$$
$$F^n_m = \frac{V^n_{m+1} - V^n_{m-1}}{2\Delta x},$$

donde $V(0, t^n) = 0$ y $V(L, t^n) = \phi L$. Denotamos V^n_m yF^n_m las aproximaciones de$V(X_m, t^n)$ y $F(X_m, t^n)$ en la mallaX_m. Finalmente, se interpola el campo eléctrico en la posición de la partícula i

$$F^n_i = \left(\frac{X_{m+1} - x^n_i}{\Delta x}\right) F^n_m + \left(\frac{x^n_i - X_m}{\Delta x}\right) F^n_{m+1}.$$

La corriente total J viene dada por

$$J(t) = \frac{\varsigma}{L} \int_0^L \left[\int_{-\pi}^{\pi} \sin(k) f(x, k, t)\, dk\right] dx,$$

donde

$$\varsigma = \frac{l\Delta}{4\pi\hbar v_M}.$$

Usamos la regla de Simpson para aproximar $J(t^n)$.

4 Ecuaciones en Derivadas Parciales

1. *Consideramos el problema*

$$\begin{cases} \nabla \cdot \gamma_e \nabla u = 0 & \text{in } \Omega \setminus \overline{\Omega_i}, \quad \nabla \cdot \gamma_i \nabla u = 0 \qquad\qquad\qquad \text{in } \Omega_i, \\ u^- - u^+ = 0 & \text{on } \partial\Omega_i, \qquad \gamma_i \nabla u^- \cdot \mathbf{n} - \gamma_e \nabla u^+ \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega_i, \\ \gamma_e \nabla u \cdot \mathbf{n} = j & \textit{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

con coeficientes positivos γ_e, γ_i y continuos hasta el borde. Suponemos que $\Omega_i \subset \Omega$ son dominios con fronteras regulares. El vector normal unitario $\mathbf{n}$ apunta hacia el exterior de Ω_e y el interior de Ω_i. u^- y u^+ denotan los valores de u en $\partial\Omega_i$ calculados como límites exteriores e interiores de Ω_i, respectivamente. Podemos esperar que haya solución para cualquier $j \in L^2(\partial\Omega)$? Podemos esperar unicidad de solución?

Tomado de [57]. Integrando sobre Ω y aplicando el teorema de la divergencia, tenemos

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega \setminus \overline{\Omega_i}} \nabla \cdot \gamma_e \nabla u d\mathbf{x} + \int_{\Omega_i} \nabla \cdot \gamma_= \nabla u d\mathbf{x} \\ &= \int_{\partial\Omega} \gamma_e \nabla u \cdot \mathbf{n} \, d\ell = \int_{\partial\Omega} j \, d\ell = 0. \end{aligned}$$

Esto proporciona una restricción sobre la integral de j en el borde para ser capaz de construir soluciones. Satisfecha esta restricción, las soluciones no son únicas pues basta añadir cualquier constante para tener otra distinta.

2. *Dado un semicírculo Ω, con frontera superior curvada $\partial\Omega^+$ y frontera inferior recta $\partial\Omega^-$, consideramos el problema*

$$\begin{aligned} d\Delta c &= k_s \frac{c}{c + K_s}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ c &= c_0 > 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega^- \\ \frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega^+, \end{aligned}$$

con parámetors positivos d, k_s, K_s. Probar que este problema tiene una solución nonegativa $c \in H^1(\Omega)$.

Tomado de[60]. La solución c se puede construir como límite de soluciones de problemas linearizados $c^{(m)}$

$$\begin{aligned} d\Delta c^{(m)} &= \frac{k_s}{c^{(m-1)} + K_s} c^{(m)}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ c^{(m)} &= c_0 > 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega^- \\ \frac{\partial c^{(m)}}{\partial \mathbf{n}} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega^+, \end{aligned}$$

empezando de $c^{(0)} = c_0$. El teorema de Lax Milgram implica la existencia de una solución única $c^{(m)} \in H^1(\Omega)$. Denotamos $a_{m-1} = \frac{k_s}{c^{(m-1)}+K_s}$. Multiplicamos la ecuación por la parte negativa de $c^{(m)}$, $c^{(m)-}$, y obtenemos

$$d\int_\Omega |\nabla c^{(m)-}|^2 d\mathbf{x} + \int_\Omega a_{m-1}|c^{(m)-}|^2 \mathbf{x} = 0,$$

pues $\int_\Omega \frac{\partial c^{(m)}}{\partial \mathbf{n}} c_0^- d\ell = 0$. Initialmente, $a_0 > 0$. Por tanto, $c^{(1)-} = 0$ y$c^{(1)} \geq 0$, lo que implica a_1. Por inducción, concluimos que$c^{(m)} \geq 0$, $a_m \geq 0$ y $a_m \leq k_s/K_s$. Escribiendo $c^{(m)} = \tilde{c}^{(m)} + c_0$, con $\tilde{c}^{(m)} \in H_0^1(\Omega)$, tenemos

$$\begin{aligned} d\Delta\tilde{c}^{(m)} &= a_{m-1}\tilde{c}^{(m)} + a_{m-1}c_0 \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ \tilde{c}^{(m)} &= 0 > 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega^- \\ \frac{\partial\tilde{c}^{(m)}}{\partial\mathbf{n}} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega^+. \end{aligned}$$

Multiplicando $\tilde{c}^{(m)}$ e integrando, obtenemos

$$d\int_\Omega |\nabla\tilde{c}^{(m)}|^2 d\mathbf{x} + \int_\Omega a_{m-1}|\tilde{c}^{(m)}|^2 \mathbf{x} = \int_\Omega a_{m-1}c_0\tilde{c}^{(m)}\mathbf{x}.$$

Usando la desigualdad de Poincaré, $\|\tilde{c}^{(m)}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C(\Omega)\frac{k_s c_0}{K_s}$. Gracias a las inyecciones de Sobolev, podemos extraer una sucesión que converge débilmente en H_0^1, fuertemente en L^2 y puntualmente a un límite $\tilde{c}$. Pasando al límite en la ecuación, $c = \tilde{c} + c_0 \geq 0$ es una solución del problema original.

3. *Probar que la solución Φ de la ecuación*

$$-\frac{d^2}{dx^2}\Phi(x) = n_D(x) - \int_\mathbb{R} \frac{dk}{1+\exp(\epsilon(k)-\Phi(x))}$$

con $\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dkdx}{1+\exp(\epsilon(k)-\Phi(x))} = a$ fijado y $\frac{d\Phi}{dx} \in L^2$ es única.

Tomado de [21]. Supongamos que tenemos dos soluciones Φ_1 y Φ_2 que satisfacen tales condiciones. Sea $U = \Phi_1 - \Phi_2$. Entonces, $\frac{dU}{dx} \in L^2$ y

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \int_\mathbb{R} \frac{dk}{1+\exp(\epsilon(k)-\Phi_1(x))} - \int_\mathbb{R} \frac{dk}{1+\exp(\epsilon(k)-\Phi_2(x))}.$$

Supongamos primero que $U(x) > 0$ en todas partes. Entonces

$$a = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dkdx}{1+\exp(\epsilon(k)-\Phi_1(x))} > \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dkdx}{1+\exp(\epsilon(k)-\Phi_2(x))} = a,$$

lo que es imposible.

Supongamos ahora que existe un único punto t x_0 en el cual $U(x_0) = 0$. Supongamos que $U(x) < 0$ si $x < x_0$ y $U(x) > 0$ si $x > x_0$ (se procede de forma análoga en otro caso). Entonces, $\frac{d^2U}{dx^2} < 0$ si $x < x_0$ y $\frac{d^2U}{dx^2} < 0$ si $x > x_0$. Tenemos que $\frac{dU}{dx}$ decrece si $x < x_0$ y $\frac{dU}{dx}$ crece si $x > x_0$. Por otra parte,

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{dU}{dx}\right)^2 dx = \int_{-\infty}^{x^*} \left(\frac{dU}{dx}\right)^2 dx + \int_{x^*}^{\infty} \left(\frac{dU}{dx}\right)^2 dx$$

is finito. Si existe x^* tal que $\frac{dU(x^*)}{dx} > 0$ y $x^* < x_0$ entonces $\int_{-\infty}^{x^*} \left(\frac{dU}{dx}\right)^2 dx > \left(\frac{dU(x^*)}{dx}\right)^2 \int_{-\infty}^{x^*} dx = \infty$. Esto es imposible, así que $\frac{dU}{dx} \leq 0$ para todo x y U decrece. Esto contradice la hipótesis sobre x_0. Por tanto, debe haber al menos dos puntos x_0 y x_1 en los que U se anula.

Sean x_0 y x_1 tales que $U(x_0) = U(x_1) = 0$. Si x_M es tal que $U(x_M) = \max\{U(x),\, x_0 \leq x \leq x_1\} > 0$, entonces $\frac{d^2U(x_M)}{dx^2} \leq 0$ porque el máximo se alcanza en un punto interior. Sin embargo,

$$0 \geq \frac{d^2U(x_M)}{dx^2} = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{1+\exp(\epsilon(k)-\Phi_1(x_M))} - \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{1+\exp(\epsilon(k)-\Phi_2(x_M))} > 0,$$

porque $U(x_M) > 0$. Por tanto, $\max\{U(x),\, x_0 \leq x \leq x_1\} = 0$. De forma análoga, concluimos que $U(x_m) = \min\{U(x),\, x_0 \leq x \leq x_1\} = 0$. Por tanto, $U = 0$ en $[x_0, x_1]$.

Pongamos ahora $x_0 = \min\{x \,|\, U(x) = 0\}$ y $x_1 = \max\{x \,|\, U(x) = 0\}$. Entonces, $U(x) < 0$ para $x < x_0$ y $U(x) > 0$ para $x > x_1$. Repitiendo los argumentos anteriores obtendríamos $x' \notin [x_0, x_1]$ tal que $U(x') = 0$. Esto contradice la definición de x_0 y x_1. Por tanto, $U = 0$ en todas partes, y $\Phi_1 = \Phi_2$.

4. *Sean $B_\varepsilon = B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ bolas centradas en puntos $\mathbf{x}$ con radio ε. Dada una función regular $u(\mathbf{x})$, sea v_ε la solución de*

$$\begin{cases} \Delta v_\varepsilon + k^2 v_\varepsilon = 0, & \text{en } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_\varepsilon}, \\ v_\varepsilon = -u(\mathbf{x}), & \text{en } \partial B_\varepsilon, \\ \lim\limits_{r\to\infty} r^{1/2} \left(\dfrac{\partial v_\varepsilon}{\partial r} - \imath k v_\varepsilon\right) = 0. & \end{cases}$$

Cuál es el comportamiento de $\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \mathbf{n}}$ a medida que $\varepsilon \to 0$?

Tomado de [47]. El operador Dirichlet–a–Neumann proporciona una expresión de la derivada normal de v_ε en Γ_ε:

$$\begin{aligned}\partial_{\mathbf{n}} v_\varepsilon(\mathbf{x} + \varepsilon(\cos\theta, \sin\theta)) \\ = \frac{k}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(H_{|n|}^{(1)})'(k\varepsilon)}{H_{|n|}^{(1)}(k\varepsilon)} \int_0^{2\pi} e^{\imath n(\theta-\Theta)} u(\mathbf{x} + \varepsilon(\cos\Theta, \sin\Theta)) d\Theta\end{aligned}$$

en coordenadas polares, donde $H^{(1)}_{|n|}$ denota la funciónde Hankel de primer orden $|n|$. Elegimos el vector normal $\mathbf{n}$ apuntando hacia el interior de B_ε. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x} + \varepsilon(\cos\theta, \sin\theta)) = k\frac{(H_0^{(1)})'(k\varepsilon)}{H_0^{(1)}(k\varepsilon)}u(\mathbf{x}) + O(\varepsilon).$$

Para $\varepsilon > 0$ pequeño, las funciones de Hankel se aproximan como

$$H_0^{(1)}(k\varepsilon) \sim \frac{-2\log(k\varepsilon)}{\pi\imath}, \qquad (H_0^{(1)})'(k\varepsilon) = -H_1^{(1)}(k\varepsilon) \sim \frac{-2}{\pi\imath k\varepsilon}.$$

Por tanto,

$$\frac{(H_0^{(1)})'(k\varepsilon)}{H_0^{(1)}(k\varepsilon)} \sim \frac{1}{k\varepsilon\log(k\varepsilon)},$$

y $\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x} + \varepsilon(\cos\theta, \sin\theta)) \sim \frac{1}{\varepsilon\log(k\varepsilon)}u(\mathbf{x})$.

5. *Dado un conjunto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, consideramos el problema: Encontrar $u > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} -\Delta u = u^p \quad & \mathbf{x} \in \Omega, \\ u = 0 \quad & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \\ u > 0 \quad & \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned}$$

Probar que hay una solución cuando $1 < p + 1 < p^*$, donde $p^* = \infty$ si $N \le 2$ y $p^* < \frac{2N}{N-2}$ cuando $N > 2$.

Consideremos el problema de minimización

$$I = \mathrm{Min}_{u\in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\, d\mathbf{x}}{\int_\Omega |u|^{p+1}\, d\mathbf{x}} = \mathrm{Min}_{u\in H_0^1(\Omega)} J(u).$$

El funcional $J(u)$ a minimizar es positivo, por tanto, acotado inferioremente. Consideremos una sucesión minimizante $u_n \in H_0^1(\Omega)$, tal que $J(u_n) \to I$ a medida que $n \to \infty$. La sucesión $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{L^{p+1}}}$ es un sucesión minimizante que satisface $\|v_n\|_{L^{p+1}} = 1$. Entonces, $\int_\Omega |\nabla v_n|^2 d\mathbf{x} \to I$ implica quev_n está acotado en $H_0^1(\Omega)$ y v_n tiende débilmente en H_0^1 a un límite $v \in H_0^1(\Omega)$. Por las inyecciones de Sobolev, v_n es compacto en L^{p+1}, $p+1 < p^*$, por tanto, $v \in L^{p+1}(\Omega)$ y $\|v_n\|_{L^{p+1}} = 1 \to \|v\|_{L^{p+1}} = 1$. Por semicontinuidad inferior bajo convergencia débil, tenemos $J(v) \le \lim_{n\to\infty} J(v_n) = I$. Como $v \in H_0^1(\Omega)$, se sigue que $I \le J(v)$. Por tanto, $I = J(v)$ y se alcanza el mínimo en v. Además, podemos reemplazar v por $|v|$ y $J(|v|) \le I(v)$, así que $w = |v| \ge 0$ es un minimizador también y $I = J(w)$. $w \ne 0$ porque $\|w\|_{L^{p+1}} = 1$.

Ahora bien, $J(w) \le J(w + tr)$, $r \in H_0^1(\Omega)$ para t real. Un desarrollo asintótico primero para $t > 0$ y después para $t < 0$ conduce a

$$\int_\Omega \nabla w \nabla r\, d\mathbf{x} = c\int_\Omega w^p r\, d\mathbf{x}$$

para todo $r \in H_0^1(\Omega)$ con $c > 0$. Esto implica $-\Delta w = c w^p$. Para $u = c^{-1/(p-1)} w$ obtenemos $-\Delta u = u^p$ y $u \geq 0$, $u \neq 0$. Por el principio del máximo fuerte, $u > 0$.

Si $p+1 = p^* = \frac{2N}{N-2}$ y $N > 2$, la existencia de una solución depende de la geometría de Ω, véase [1].

6. *Probar que la función* $v(\mathbf{x}, t) = |t|^{\frac{p}{p-1}} \phi(\mathbf{x})$, $1 < p < p^* - 1$, *donde*

$$
\begin{aligned}
-\Delta\phi = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p |\phi|^{p-1}\phi \quad & \mathbf{x} \in \Omega, \\
\phi = 0 \quad & \mathbf{x} \in \partial\Omega,
\end{aligned}
$$

es una solución del problema parabólico retrógrado

$$
\begin{aligned}
-\Delta v + |v_t|^{p-1} v_t = 0 \quad & \mathbf{x} \in \Omega \times (-\infty, 0], \\
v = 0 \quad & \mathbf{x} \in \partial\Omega \times (-\infty, 0].
\end{aligned}
$$

Tomado de [3, 8]. Tenemos

$$
\begin{aligned}
v_t &= -\frac{p}{p-1} |t|^{\frac{1}{p-1}} \phi(\mathbf{x}), \\
|v_t|^{p-1} v_t &= -\left(\frac{p}{p-1}\right)^p |t|^{\frac{p}{p-1}} |\phi(\mathbf{x})|^{p-1} \phi(\mathbf{x}), \\
-\Delta v = -|t|^{\frac{p}{p-1}} \Delta\phi(\mathbf{x}) &= |t|^{\frac{p}{p-1}} \left(\frac{p}{p-1}\right)^p |\phi(\mathbf{x})|^{p-1} \phi(\mathbf{x}),
\end{aligned}
$$

así que la ecuación se cumple. La existencia de ϕ se sigue de la teoría de puntos críticos.

7. *Consideremos una membrane cuya desviación vertical respecto a un equilibrio plano viene dado por*

$$
\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = d\Delta w - \kappa \Delta^2 w + f(x, y, t).
$$

donde ρ, d, κ *son constantes positivas. Esperarías que el sistema desarrollara patrones oscilatorios con una longitud de onda definida?*

Tomado de [58]. El problema elíptico con condiciones de contorno nulas en un dominio rectangular admite una secuencia de autovalores positivos $\lambda_{m,n}$ con autofunciones $\phi_{m,n}$ dadas por combinaciones de senos y cosenos cuyo periodo depende del dominio espacial en el que se plantea y varía con el autovalor. Buscamos una solución en serie por separación de variables. El problema tiene soluciones de la forma

$$
\sum_{n,m} a_{n,m}(t) \phi_{n,m}(x, y),
$$

donde $a_{n,m}(t)$ es solución de

$$a''_{n,m} + \lambda_{n,m} a_{n,m} = f_{n,m},$$

es decir, una combinación de $\sin(\sqrt{\lambda_{n,m}}t)$ y $\cos(\sqrt{\lambda_{n,m}}t)$. Hemos expresado $f(x,y,t) = \sum_{n,m} f_{n,m}(t)\phi_{n,m}(x,y)$ como una serie de autofunciones. Modelos más complejos en los que w se acopla a ecuaciones de Navier para los desplazamientos en el plano y f viene dado por spins, or por expresiones funcionales dependientes de los desplazamientos en el plano, se usan para explicar la formación de ondulaciones en grafeno [59, 58, **?**].

8. *Dada una solución* $u \in W^{1,\infty}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, H^1_0(\Omega)) \cap W^{2,\infty}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$ *of*

$$u_{tt} - \Delta u + \alpha |u_t|^{p-1} u_t = 0 \quad \text{in } L^\infty(\mathbb{R}^+, H^{-1}(\Omega))$$

con $\alpha > 0$*,* $1 < p$ *y* $p + 1 < p^*$*, definimos*

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(\mathbf{x},t)|^2 \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_\Omega |u_t(\mathbf{x},t)|^2 \, d\mathbf{x}.$$

Entonces, para alguna constante positiva $C(E(0))$*, se tiene*

$$E(t) \le C(E(0)) t^{-2/(p-1)}, \quad t > 0.$$

Tomado de [2]. Definimos$\phi(t) = E^{(p-1)/2}\int_\Omega u u_t \, d\mathbf{x}$. A continuación, diferenciamos respecto a t para obtener

$$\begin{aligned} E'(t) &= -\alpha \int_\Omega |u_t|^{p+1} d\mathbf{x} \le 0, \\ \phi'(t) &= E(t)^{(p-1)/2} \left(\int_\Omega |u_t|^2 \, d\mathbf{x} - \int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} - \alpha \int_\Omega |u_t|^{p-1} u_t u d\mathbf{x} \right) \\ & \quad + \frac{p-1}{2} E(t)^{(p-3)/2} E'(t) \int_\Omega u u_t \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Primero, observamos que $E(t) \le E(0)$ y $-\int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} = -2E(t) + \int_\Omega |u_t|^2 \, d\mathbf{x}$. Además,

$$E(t)^{-1} \left| \int_\Omega u u_t \, d\mathbf{x} \right| \le E(t)^{-1} \left(\frac{1}{2}\int_\Omega |u|^2 \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_\Omega |u_t|^2 \, d\mathbf{x} \right) \le C(\Omega)$$

para alguna constante positiva $C(\Omega)$ porque la desigualdad de Poincaré implica $\frac{1}{2}\int_\Omega |u|^2 \, d\mathbf{x} \le \frac{\lambda(\Omega)}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x}$. Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} \phi'(t) &\le 2E(t)^{(p-1)/2} \int_\Omega |u_t|^2 \, d\mathbf{x} - \alpha E(t)^{(p-1)/2} \int_\Omega |u_t|^{p-1} u_t u d\mathbf{x} \\ & \quad -2E(t)^{(p+1)/2} - \frac{p-1}{2} C(\Omega) E(0)^{(p-1)/2} E'(t). \end{aligned}$$

Ahora definimos $\psi_\varepsilon(t) = (1+K_1\varepsilon)E(t)+\varepsilon\phi(t)$ con $K_1 = \frac{p-1}{2}C(\Omega)E(0)^{(p-1)/2}$. Obtenemos

$$\begin{aligned}\psi'_\varepsilon(t) \quad &\leq \quad 2\varepsilon E(t)^{(p-1)/2}\int_\Omega |u_t|^2\,d\mathbf{x} - \alpha\varepsilon E(t)^{(p-1)/2}\int_\Omega |u_t|^{p+1}d\mathbf{x}\\ &\quad -2\varepsilon E(t)^{(p+1)/2} - \alpha\int_\Omega |u_t|^{p+1}d\mathbf{x}\end{aligned}$$

Obsérvese que $\|u_t\|^2_{L^2} \leq \text{meas}(\Omega)^{(p-1)/(p+1)}(\int_\Omega |u_t|^{p+1})^{2/(p+1)}$. Por la desigualdad de Young obtenemos

$$\begin{aligned}2\varepsilon E(t)^{\frac{(p-1)}{2}}\int_\Omega |u_t|^2\,d\mathbf{x} &\leq 2\varepsilon\ \ \text{meas}(\Omega)^{\frac{p-1}{p+1}}E(t)^{\frac{p-1}{2}}\left(\int_\Omega |u_t|^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}}\\ &\leq \varepsilon E(t)^{\frac{p+1}{2}} + \varepsilon\delta\int_\Omega |u_t|^{p+1}\end{aligned}$$

para algún δ positivo que depende de Ω.

Gracias a las inyecciones de Sobolev para $p+1 < p^*$ obtenemos

$$\int_\Omega |u_t|^{p-1}u_t u\,d\mathbf{x} \leq \left(\int_\Omega |u_t|^{p+1}\,d\mathbf{x}\right)^{\frac{p}{p+1}}\|u\|_{L^{p+1}} \leq S(\Omega)\|u_t\|^p_{L^{p+1}}\|\nabla u\|_{L^2}.$$

Obsérvese que $\|\nabla u\|_{L^2} \leq 2E(t)$. De la desigualdad de Young se sigue

$$\begin{aligned}\varepsilon\alpha E(t)^{(p-1)/2}\int_\Omega |u_t|^{p-1}u_t u\,d\mathbf{x} &\leq \varepsilon\alpha E(t)^{(p-1)/2}S(\Omega)\|u_t\|^p_{L^{p+1}}\|\nabla u\|_{L^2}\\ &\leq \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |u_t|^{p+1} + \varepsilon\eta(\varepsilon)E(t)^{(p+1)/2}\end{aligned}$$

donde $\eta > 0$ depende de $E(0)$, Ω, α y ε, y tiende a cero a medida que ε tiende a cero. Sumando, obtenemos

$$\psi'_\varepsilon(t) \leq (-\frac{\alpha}{2} + \varepsilon\delta)\int_\Omega |u_t|^{p+1} + \varepsilon(-1+\eta(\varepsilon))E(t)^{(p+1)/2}.$$

Por otra parte, para ε suficientemente pequeño,

$$\frac{1}{\varepsilon}E(t) \leq (1-K_2\varepsilon)E(t) \leq \psi_\varepsilon(t) \leq (1+K_2\varepsilon) \leq 2E(t).$$

Eligiendo ε suficientemente pequeño, concluimos que

$$\psi'_\varepsilon(t) \leq -\frac{\varepsilon}{4}E^{(p+1)/2} \leq -\frac{\varepsilon K_3}{4}\psi_\varepsilon(t)^{(p+1)/2}.$$

e integrando la desigualdad tenemos $E(t) \leq C(E(0))t^{-2/(p-1)}$ para $t > 0$.

9. *Consideremos la ecuación de la vorticidad en dos dimensiones. Sea* $v = \operatorname{curl}\mathbf{u} \in C((0,\infty); W^{1,p}(\mathbb{R}^2))$, $1 \leq p \leq \infty$ *la solución de*

$$v_t - \Delta v + \mathbf{u}\cdot\nabla v = 0, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$$
$$v(\mathbf{x},0) = v_0, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,$$

para un camp de velocidad u de divergencia nula (incompressible) y un dato inicial $v_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$. *Demostrar 1) que la masa* $\int_{\mathbb{R}^2} v_0\, d\mathbf{x}$ *no cambia con el tiempo y 2) que* $\|v(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq Ct^{-1+\frac{1}{p}}$ *for* $t > 0$.

Tomado de [4, 5]. Obsérvese que $\mathbf{u}\cdot\nabla v = \operatorname{div}(\mathbf{u}v) = 0$. integrando la ecuación, usando el teorema de la divergencia, y el hecho de que v se anula en el infinito tenemos

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2} v_0\, d\mathbf{x} = 0.$$

El vector velocidad viene dado por

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = K * v(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(-y_2,y_1)}{|\mathbf{y}|^2} v(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)d\mathbf{y}$$

donde el núcleo $K \in L^{2,\infty}$ y $\|K * v\|_{L^r} \leq \|K\|_{L^{2,\infty}}\|v\|_{L^p}$ for $r > 2$, $1 < p < 2$, $1/r = 1/p - 1/2$.

Escribimos la expresión integral para la solución

$$v(t) = G(t) * v_0 + \int_0^t \nabla G(t-s) * [v(s)\,\mathbf{K} * v(s)]ds,$$

done $G(t)$ denota el núcleo del calor. Tomando normas obtenemos

$$\|v(t)\|_{L^p} = \|G(t) * v_0\|_{L^p} + \int_0^t \|\nabla G(t-s) * [v(s)\,\mathbf{K} * v(s)]\|_{L^p} ds.$$

El término integral decae más rápido que el resto, por tanto

$$\|v(t)\|_{L^p} \sim \|G(t) * v_0\|_{L^p} \leq Ct^{-1+\frac{1}{p}}.$$

Sabemos que $G(t) * v_0$ es una solución de la ecuación del calor con dato inicial v_0 que pertenece a L^p para todo $1 \leq p \leq \infty$ y todo $t > 0$ si $v_0 \in L^1$. Además, $\|G(t) * v_0\|_{L^p} \leq \|G(t)\|_{L^p}\|v_0\|_{L^1}$ and $\|G(t)\|_{L^p} = Ct^{-1+\frac{1}{p}}$.

10. *Sea* $\mathbf{u}$ *una solución de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles en dos dimensiones con dato inicial* $\mathbf{u}_0 \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ *tal que* $\operatorname{div}(\mathbf{u}_0) = 0$. *Entonces,* $\mathbf{u}(t) \in L^p(\mathbb{R}^2)$ *para* $1 \leq p \leq 2$ *y* $t > 0$.

Tomado de[6, 10]. La teoría de soluciones clásicas con datos L^2, es decir, $\mathbf{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ garantiza que $\mathbf{u}(t) \in L^\infty([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^2))$ y que está acotada por $\|\mathbf{u}_0\|_{L^2}$. Tomando la divergencia de las ecuaciones de Navier-Stokes

$$\mathbf{u}_t - \Delta\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} = \nabla p, \quad \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0,$$

obtenemos una ecuación para la presión

$$-\Delta p = \mathrm{div}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}).$$

La presión viene dada entonces como la convolución $p = E_2 * \mathrm{div}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})$, donde E_2 es la solución fundamental de $-\Delta$ en $\mathbb{R}^2$, salvo por una función del tiempo. Por tanto, $\mathbf{u}$ satisface la ecuación integral

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t) = G(t) * \mathbf{u}_0 &+ \int_0^t \partial_i G(t-s) * u_i \mathbf{u}(s) ds \\ &+ \int_0^t \partial_i G(t-s) * \partial_j \nabla E_2 * u_i u_j(s) ds,\end{aligned}$$

donde ∂_i denota las derivadas parciales respecto x_i, u_i son las componentes de $\mathbf{u}$. Se usa la convención de suma respecto a índices repetidos. Como $u \in L^1$, $G(t) * u_0 \in L^q$ para todo $q > 1$ y $t > 0$. Por otra parte, $u(s) \in L^2$ implica que $u_i u_j(s) \in L^1$. Además,

$$\| \int_0^t \partial_i G(t-s) * u_i u_j(s) ds \|_{L^q} \leq C \int_0^t (t-s)^{-1+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \| \mathbf{u} \|_{L^2}^2 ds \leq C t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}$$

para $1 \leq q < 2$. Por tanto, la primera integral pertenece a L^q si $1 \leq q < 2$. Consideremos ahora la segunda integral. Como $\partial_i G(t)$ pertenece a espacio de Hardy $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ y $\partial_j \nabla E_2$ es un núcleo de Calderon-Zygmund, concluimos que $\partial_i G(t-s) * \partial_j \nabla E_2 \in L^1$ y

$$\|\partial_i G(t-s) * \partial_j \nabla E_2\|_{L^1} \leq C \|\partial_i G(t-s)_{\mathcal{H}^1} < C(t-s)^{\frac{-1}{2}}.$$

Por tanto,

$$\| \int_0^t \partial_i G(t-s) * \partial_j \nabla E_2 * u_i u_j(s) ds \|_{L^1} \leq \int_0^t C(t-s)^{\frac{-1}{2}} \|\mathbf{u}(s)\|_{L^2}^2 ds \leq C t^{\frac{1}{2}}.$$

De forma análoga, como $\partial_j \nabla E_2$ es un núcleo de Calderon-Zygmund, concluimos que $\partial_i G(t-s) * \partial_j \nabla E_2 \in L^q$, $1 < q < \infty$ y

$$\|\partial_i G(t-s) * \partial_j \nabla E_2\|_{L^q} \leq C \|\partial_i G(t-s)\|_{L^q} < C(t-s)^{-1+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\| \int_0^t \partial_i G(t-s) * \partial_j \nabla E_2 * u_i u_j(s) ds \|_{L^q} &\leq \int_0^t C(t-s)^{-1+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}(s)\|_{L^2}^2 ds \\ &\leq C t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

para $1 < q \leq 2$.

11. *Una curva de vorticidad (vortex line) Γ en un fluido incompresible irrotacional y no viscoso es una solución de las ecuaciones*

$$\mathrm{div}(\mathbf{u}) = 0, \quad \mathrm{curl}(\mathbf{u}) = \omega_0 \delta_\Gamma(\mathbf{x}),$$

donde $\mathbf{u}$ *es la velocidad del fluido,* $\omega_0 = 2\pi\gamma$ *es la circulación alrededor del vórtice y* γ *es la fuerza del vórtice.* δ_Γ *es una función de Dirac 3D con soporte en* Γ*. Exprésese la solución en términos de una función de corriente vectorial.*

Tomado de [11]. Definimos la función de corriente $\mathbf{U}$ in $\mathbb{R}^3$ como la solución de $\mathrm{div}(\mathbf{U}) = 0$, $\mathrm{curl}(\mathbf{U}) = \mathbf{u}$. Entonces $-\Delta\mathbf{U} = \omega_0\delta_\Gamma(\mathbf{x})$. Usando la función de Green para el Laplaciano en $\mathbb{R}^3$ tomamos $\mathbf{U} = \frac{\omega_0}{4\pi}\int_\Gamma \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d\mathbf{x}'$.

12. *Definimos* $v^+(x,t) = u(x,t) + q^+(x,t)$ *en* (x_i, x_{i+1}) *siendo* u *una solución de*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - D_c\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{u}{R} &= f^+, \qquad x \in (x_i, x_{i+1}) = (i, i+1),\ t > 0\\
u(x_i, t) = 0,\ u(x_{i+1}, t) &= 0,\\
u(x, 0) &= h^+(x, 0),
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
q^+(x,t) &= v_i(t)\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + v_{i+1}(t)\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i},\\
f^+(x,t) &= \frac{q^+(x,t)}{R} - \frac{\partial q^+}{\partial t}(x,t),\\
h^+(x,0) &= v(x,0) - q^+(x,0).
\end{aligned}$$

Obtén una expresión para v^+*.*

Tomado de [53]. Sean $\lambda_i = D_c(i\pi)^2 + \frac{1}{R}$ y $\phi_i(x) = \sin(\sqrt{\lambda_i}x)\big(\int_0^1 \sin(\sqrt{\lambda_i}x)^2 dx\big)^{-1}$ los autovalores y las autofunciones normalizadas del operador $-D_c\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{u}{R} = 0$ en $(0,1)$ con condiciones de contorno nulas. Desarrollamos f^+ y h^+ como series de Fourier de autofunciones

$$\begin{aligned}
f^+(x,t) &= \sum_{i=0}^{\infty} f_i^+(t)\phi_i(x), \quad f_i^+(t) = \int_0^1 f^+(z + x_i, t)\phi_i(z)dz,\\
h^+(x,0) &= \sum_{i=0}^{\infty} h_i^+\phi_i(x), \quad h_i^+ = \int_0^1 h^+(z + x_i, 0)\phi_i(z)dz.
\end{aligned}$$

La expresión que buscamos viene dada por

$$\begin{aligned}
v^+(x,t) = q^+(x,t) &+ \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_i t} h_i^+(t)\phi_i(x - x_i)\\
&+ \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_i t}\phi_i(x - x_i)\int_0^t e^{\lambda_i s} f_i^+(s)ds,
\end{aligned}$$

donde

$$f_i^+(t) = \left(\frac{v_i}{R} - \frac{dv_i}{dt}\right)\int_0^1 (1 - z)\phi_i(z)dz + \left(\frac{v_{i+1}}{R} - \frac{dv_{i+1}}{dt}\right)\int_0^1 z\phi_i(z)dz.$$

13. *Consideramos la ecuación de convección-difusión*

$$u_t - \Delta u + \partial_y(|u|^{q-1}u) = 0$$

planteada en $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, *con* $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}, y)$. *Supongamos que* V *es una solución con dato inicial* $V_0 \in (L^1 \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n)$ *y* v *es una solución con dato inicial* $v_0 \in (L^1 \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n)$. *Supongamos que*

$$v, V \in C^1([0,T]; L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^\infty([0,T]; H^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^2)$$

para todo $T > 0$. *Entonces,* $v \leq V$.

Tomado de [7, 9]. La función $w = v - V$ satisface

$$w_t - \Delta w + \partial_y(|v|^{q-1}v) - \partial_y(|V|^{q-1}V) \leq 0$$

y $w(0) \leq 0$. Multiplicando la desigualdad por w^+ e integrando por partes tenemos

$$\frac{d}{dt} \int \frac{|w^+(t)|^2}{2} d\mathbf{x} + \int |\nabla w^+(t)|^2 d\mathbf{x} \leq \int a w^+(t) \partial_y w^+(t) d\mathbf{x}$$

donde $a(\mathbf{x}, t) = \frac{|v|^{q-1}v - |V|^{q-1}V}{v - V}$ es una función acotada. Integrando en t y aplicando la desigualdad de Young obtenemos

$$\frac{\|w^+(t)\|_2^2}{2} + \int_0^t \|\nabla w^+(s)\|_2^2 ds \leq K_1 \int_0^t \|w^+(s)\|_2^2 ds + \varepsilon \int_0^t \|\nabla w^+(s)\|_2^2 ds$$

para ε tan pequeño como sea necesario. Nótese que $w^+(0) = 0$. Aplicando la desigualdad de Gronwall a

$$\|w^+(t)\|_2^2 \leq 2K_1 \int_0^t \|w^+(s)\|_2^2 ds$$

obtenemos $w^+(t) = 0$.

14. *Probar que la solución de*

$$z_t - \Delta z = \mathbf{d} \cdot \nabla(G^q), \quad z(0) = 0$$

se puede calcular en términos de núcleos del calor.

Tomado de [19]. Basta poner $z = \mathbf{d} \cdot \nabla g$ con $g_t - \Delta g = G^q$, $g(0) = 0$, es decir,

$$g(t) = \int_0^t G(t-s) * G^q(s) ds.$$

15. *Expresar la solución del problema de transmisión del calor*

$$\begin{cases} U_t - \kappa_e \Delta U = 0, & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega_i} \times (0,\infty), \\ U_t - \alpha_i \kappa_i \Delta U = 0, & \text{en } \Omega_i \times (0,\infty), \\ U^- - U^+ = U_{\text{inc}}, & \text{en } \partial\Omega_i \times (0,\infty), \\ \alpha_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} U^- - \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} U^+ = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} U_{\text{inc}}, & \text{en } \partial\Omega_i \times (0,\infty), \\ U(\,\cdot\,, 0) = 0, & \text{en } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

en términos de problemas de Helmholtz usando transformadas de Laplace.

Tomado de [41]. Definimos $u_{\rm inc}$ y u como las transformadas de Laplace en tiempo de $U_{\rm inc}$ y U:

$$u_{\rm inc}(\mathbf{x}, s) = \int_0^\infty e^{-st} U_{\rm inc}(\mathbf{x}, t)\, dt, \quad u(\mathbf{x}, s) = \int_0^\infty e^{-st} U(\mathbf{x}, t)\, dt, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N.$$

Para cada valor de s, la función $u_s(\mathbf{x}) := u(\mathbf{x}, s)$ es solución de

$$\begin{cases} \Delta u_s + \lambda_{s,e}^2 u_s = 0, & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega_i}, \\ \alpha_i \Delta u_s + \lambda_{s,i}^2 u_s = 0, & \text{en } \Omega_i, \\ u_s^- - u_s^+ = u_{inc,s}, & \text{en } \Gamma, \\ \alpha_i \partial_{\mathbf{n}} u_s^- - \partial_{\mathbf{n}} u_s^+ = \partial_{\mathbf{n}} u_{inc,s}, & \text{en } \Gamma, \end{cases}$$

donde $\lambda_{s,e}^2 := -s/\kappa_e$, $\lambda_{s,i}^2 := -s/\kappa_i$ y $u_{inc,s}(\mathbf{x}) := u_{inc}(\mathbf{x}, s)$. Tomamos $\Gamma = \partial\Omega_i$. Este problema tiene una única solución que satisface la condición de radiación saliente de Sommerfeld en el infinito,

$$\lim_{r\to\infty} r^{(N-1)/2} \left(\partial_r u_s - \imath \lambda_{s,e} u_s\right) = 0, \qquad r = |\mathbf{x}|,$$

para todo $s \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Esta caracterización de $u_s(\mathbf{x})$ se puede usar para definir y calcular $u(\cdot, s)$ para todo $s \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

La solución del problema original se recupera invirtiendo la transformada de Laplace:

$$U(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\mathcal{C}} e^{st}\, u(\mathbf{x}, s)\, ds.$$

Como $u(\cdot, s)$ existe para todo $s \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ y depende holomórficamente de s, son posibles diversas elecciones para el camino de inversión $\mathcal{C}$.

16. *Sabemos que el problema*

$$\begin{aligned} g_t - \Delta_v g + \mathbf{v} \cdot \nabla_x g + \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_v g = 0, \qquad & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}^+, \\ g(\mathbf{x}, \mathbf{v}, 0) = g_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \qquad & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

con $g_0 \in L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ *y con* $\mathbf{E}$ *acotado y Lipschitz admite soluciones fundamentales* $\Gamma_{\mathbf{E}}$. *La solución del problema de valores iniciales se puede expresar como*

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \int \Gamma_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t; \mathbf{x}', \mathbf{v}', 0) d\mathbf{x}' d\mathbf{v}',$$

donde $\Gamma_{\mathbf{E}}$ *satisface las estimaciones*

$$\begin{aligned} |\Gamma_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t; \mathbf{x}', \mathbf{v}', t')| &\le C(\|\mathbf{E}\|_{L^\infty_{\mathbf{x},t}}, T)\, G(\mathbf{x}/2, \mathbf{v}/2, t; \mathbf{x}'/2, \mathbf{v}'/2, t'), \\ |\partial_{v_i} \Gamma_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t; \mathbf{x}', \mathbf{v}', t')| &\le C(\|\mathbf{E}\|_{L^\infty_{\mathbf{x},t}}, T)\, \frac{G(\mathbf{x}/2, \mathbf{v}/2, t; \mathbf{x}'/2, \mathbf{v}'/2, t')}{(t - t')^{1/2}}, \end{aligned}$$

y G es la solución fundamental del problema con $\mathbf{E} = 0$. Extiéndase este resultado a problemas en los que $\mathbf{E}$ está acotado.

Tomado de [12]. Regularizamos$\mathbf{E}$ por convolución y consideramos $\mathbf{E}_\delta = \mathbf{E} * \eta_\delta$ donde η_δ es una familia regularizante. Las funciones $\mathbf{E}_\delta$ son acotadas y Lipschitz, de modo que para cada una de ellas podemos construir soluciones g_δ del problema de valores iniciales y tenemos estimaciones sobre las soluciones fundamentales Γ_δ. Además, $\|\mathbf{E}_\delta\|_{L^\infty_{x,t}} \leq \|\mathbf{E}\|_{L^\infty_{x,t}}$ y $\mathbf{E}_\delta \to \mathbf{E}$ a medida que $\delta \to 0$.

Como Γ_δ está acotada (localmente en t) en todo espacio L^p_{xvt} podemos extraer una subsucesión que converge débilmente (localmente en t) en todo L^p_{xvt} (débil estrella si $p = \infty$) a una función $\Gamma_{\mathbf{E}}$. Asimismo, podemos pasar al límite en el lado derecho de las expresiones integrales para las soluciones g_δ en términos de Γ_δ.

Por otra parte, las expresiones integrales implican que g_δ están uniformemente acotadas en cualquier espacio L^p_{xvt} con respecto a δ localmente en t. Por tanto, g_δ converge débilmente (localmente en t) en cualquier espacio L^p_{xvt} a una función g y sus derivadas también convergen en el sentido de las distribuciones.

En el sentido de las distribuciones, las derivadas de Γ_δ con respecto a $\mathbf{v}$ convergen débilmente a las derivadas de $\Gamma_{\mathbf{E}}$. Podemos pasar al límite en las desigualdades satisfechas por Γ_δ y establecer desigualdades similares para $\Gamma_{\mathbf{E}}$ porque $\|\mathbf{E}_\delta\|_{L^\infty_{x,t}} \leq \|\mathbf{E}\|_{L^\infty_{x,t}}$.

Multiplicando la ecuación diferencial satisfecha por g_δ by g_δ obtenemos una cota L^2_{xvt} uniforme sobre $\nabla_v g_\delta$. Si multiplicamos la ecuación por $|\mathbf{v}|^2$ obtenemos una estimación uniforme en L^1_{xvt} sobre $|\mathbf{v}|^2 g_\delta$.

Multiplicando las ecuaciones diferenciales satisfechas por g_δ por funciones test, podemos pasar al límite en todos los términos de la formulación débil, excepto en $\mathbf{E}_\delta \nabla_v g_\delta$ con las convergencias ya establecidas. El paso al límite en este término es técnico, véanse detalles en [12]. Finalmente, g es solución del problema de valores iniciales con $\mathbf{E}$ acotado y $\Gamma_{\mathbf{E}}$ es una solución fundamental asociada.

17. *Calcular la solución de equilibrio de la ecuación maestra de Liouville*

$$\partial_t \mathcal{P}(x,p,\boldsymbol{\sigma},t) + \frac{p}{m}\partial_x \mathcal{P}(x,p,\boldsymbol{\sigma},t) + \left(-m\omega_0^2 x + \mu \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \sigma_{i+1}\right) \partial_p \mathcal{P}(x,p,\boldsymbol{\sigma},t)$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \left[W_i(R_i\boldsymbol{\sigma}|x,p)\mathcal{P}(x,p,R_i\boldsymbol{\sigma},t) - W_i(\boldsymbol{\sigma}|x,p)\mathcal{P}(x,p,\boldsymbol{\sigma},t) \right].$$

Tomado de [49]. La distribución de equilibrio es la distribución canónica

$$\mathcal{P}_{\mathrm{eq}}(x,p,\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{Z} e^{-\beta \mathcal{H}(x,p,\boldsymbol{\sigma})},$$

donde Z es la función de partición

$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p \sum_{\boldsymbol{\sigma}} e^{-\beta \mathcal{H}(x,p,\boldsymbol{\sigma})} ,$$

y $\beta = (k_B T)^{-1}$. Para un estudio de la dinámica de no equilibrio véase [50].

18. *Construir soluciones de la ley de conservación escalar* $w_t + (c(x)w)_x = 0$ *con* $w(0) = w_0$.

    Tomado de [17]. Ponemos $v = cw$. Entonces, $v_t + cv_x = 0$. Por tanto, v es constante a lo largo de las curvas características $x(t)$ solución de $x'(t) = c(x(t))$, $x(0) = x_0$, porque

    $$\frac{d}{dt} v(x(t), t) = v_x(x(t), t)x'(t) + v_t(x(t), t) = 0.$$

    Dado (x, t) a veces somos capaces de calcular $x_0(x, t)$ tal que la curva característica con valor inicial $x_0(x, t)$ satisface $x(t) = x$. Entonces $v(x, t) = v(x(t), t) = v_0(x_0(x, t))$ y $w(x, t) = \frac{v_0(x_0(x,t))}{c(x_0(x,t))}$. Las posibilidades de llevar esto a cabo dependerán de c.

19. *Resolver el problema*

    $$\frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial k}(k^{1/3} r) = 0,$$
    $$\int_0^\infty k r(s, k) dk = t,$$
    $$\lim_{k \to 0} k^{1/3} r(s, k) = 2c.$$

    Tomado de [34]. Integrating la ecuación sobre $k > 0$ tenemos

    $$\frac{d}{ds} \int_0^\infty r(s, k) dk = \lim_{k \to 0} k^{1/3} r(s, k) = 2c(s).$$

    Argumentando como en el ejercicio previo, el método de las características da la expresión

    $$k^{1/3} r(s, k) = 2c(s - a(k))H(s - a(k)),$$
    $$a(k) = \frac{3}{2} k^{2/3},$$

    en la cual $H(x)$ es la función de Heaviside (1 para x positivo, 0 en otro caso).

Referencias

[1] A Carpio Rodriguez, M Comte, R Lewandoski, A nonexistence result for a nonlinear equation involving critical Sobolev exponent, Annales de l'Institut Henri Poincaré - Analyse Non linéaire, 9(3), 243-261, 1992

[2] A. Carpio, Sharp estimates of the energy for the solutions of some dissipative second order evolution equations, Potential Analysis 1(3), 265-289, 1992

[3] A. Carpio, Existence de solutions globales rétrogrades pour des équations des ondes non linéaires dissipatives, Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique, 316(8), 803-808, 1993

[4] A. Carpio, Comportement asymptotique des solutions des équations du tourbillon en dimensions 2 et 3, Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique, 316(12), 1289-1294, 1993

[5] A. Carpio, Asymptotic behavior for the vorticity equations in dimensions two and three, Communications in partial differential equations 19 (5-6), 827-872, 1994

[6] A. Carpio, Unicité et comportement asymptotique pour des équations de convection-diffusion scalaires, Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique 319 (1), 51-56, 1994

[7] A. Carpio, Comportement asymptotique dans les équations de Navier-Stokes, Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique 319 (3), 223-228, 1994

[8] A. Carpio, Existence of global-solutions to some nonlinear dissipative wave-equations, Journal de mathématiques pures et appliquées 73 (5), 471-488, 1994

[9] A. Carpio, Large time behaviour in convection-diffusion equations, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze 23 (3), 551-574, 1996

[10] A. Carpio, Large-time behavior in incompressible Navier-Stokes equations, SIAM Journal on Mathematical Analysis 27 (2), 449-475, 1996

[11] A Carpio, SJ Chapman, SD Howison, JR Ockendon, Dynamics of line singularities, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 355(1731), 2013-2024, 1997

[12] A. Carpio, Long-time behaviour for solutions of the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck equation, Mathematical methods in the applied sciences 21 (11), 985-1014, 1998

[13] A Carpio, SJ Chapman, On the modelling of instabilities in dislocation interactions, Philosophical Magazine B 78 (2), 155-157, 1998

[14] A Carpio, SJ Chapman, S Hastings, JB McLeod, Wave solutions for a discrete reaction-diffusion equation, European Journal of Applied Mathematics 11 (4), 399-412, 2000

[15] A Carpio, LL Bonilla, A Wacker, E Schöll, Wave fronts may move upstream in semiconductor superlattices, Physical Review E 61 (5), 4866, 2000

[16] A Carpio, P Hernando, M Kindelan, Numerical study of hyperbolic equations with integral constraints arising in semiconductor theory, SIAM Journal on Numerical Analysis 39 (1), 168-191, 2001

[17] A Carpio, SJ Chapman, JJL Velázquez, Pile-up solutions for some systems of conservation laws modelling dislocation interaction in crystals, SIAM Journal on Applied Mathematics 61 (6), 2168-2199, 2001

[18] A Carpio, LL Bonilla, Wave front depinning transition in discrete one-dimensional reaction-diffusion systems, Physical Review Letters 86 (26), 6034, 2001

[19] G Duro, A Carpio, Asymptotic profiles for convection–diffusion equations with variable diffusion, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 45 (4), 407-433, 2001

[20] A Carpio, LL Bonilla, G Dell'Acqua, Motion of wave fronts in semiconductor superlattices, Physical Review E 64 (3), 036204, 2001

[21] A Carpio, E Cebrian, FJ Mustieles, Long time asymptotics for the semiconductor Vlasov-Poisson-Boltzmann equations, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences 11 (09), 1631-1655, 2001

[22] A Carpio, LL Bonilla, A Luzón, Effects of disorder on the wave front depinning transition in spatially discrete systems, Physical Review E 65 (3), 035207, 2002

[23] A Carpio, Wavefronts for discrete two-dimensional nonlinear diffusion equations, Applied Mathematics Letters 15 (4), 415-421, 2002

[24] A Carpio, LL Bonilla, Depinning transitions in discrete reaction-diffusion equations, SIAM Journal on Applied Mathematics 63 (3), 1056-1082, 2003

[25] A Carpio, LL Bonilla, Pulse propagation in discrete systems of coupled excitable cells, SIAM Journal on Applied Mathematics 63 (2), 619-635, 2003

[26] A Carpio, LL Bonilla, Edge dislocations in crystal structures considered as traveling waves in discrete models, Physical Review Letters 90 (13), 135502, 2003

[27] A Carpio, LL Bonilla, Oscillatory wave fronts in chains of coupled nonlinear oscillators, Physical Review E 67 (5), 056621, 2003

[28] A Carpio, Nonlinear stability of oscillatory wave fronts in chains of coupled oscillators, Physical Review E 69 (4), 046601, 2004

[29] A Carpio, G Duro, Instability and collapse in discrete wave equations, Computational Methods in Applied Mathematics 5 (3), 223-241, 2005

[30] JC Neu, LL Bonilla, A Carpio, Igniting homogeneous nucleation, Physical Review E 71 (2), 021601, 2005

[31] A Carpio, LL Bonilla, Discrete models of dislocations and their motion in cubic crystals, Physical Review B 71 (13), 134105, 2005

[32] A Carpio, Asymptotic construction of pulses in the discrete Hodgkin-Huxley model for myelinated nerves, Physical Review E 72 (1), 011905, 2005

[33] A Carpio, Wave trains, self-oscillations and synchronization in discrete media, Physica D: Nonlinear Phenomena 207 (1-2), 117-136, 2005

[34] LL Bonilla, A Carpio, JC Neu, WG Wolfer, Kinetics of helium bubble formation in nuclear materials, Physica D: Nonlinear Phenomena 222 (1-2), 131-140, 2006

[35] LL Bonilla, A Carpio, I Plans, Dislocations in cubic crystals described by discrete models, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 376, 361-377, 2007

[36] I Plans, A Carpio, LL Bonilla, Homogeneous nucleation of dislocations as bifurcations in a periodized discrete elasticity model, EPL (Europhysics Letters) 81 (3), 36001, 2008

[37] A Carpio, ML Rapún, Topological derivatives for shape reconstruction, In: Bonilla, L.L. (eds) Inverse Problems and Imaging. Lecture Notes in Mathematics, vol 1943. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008

[38] A Carpio, LL Bonilla, F de Juan, MAH Vozmediano, Dislocations in graphene, New Journal of Physics 10 (5), 053021, 2008

[39] A Carpio, ML Rapún, Solving inhomogeneous inverse problems by topological derivative methods, Inverse Problems 24 (4), 045014, 2008

[40] A Carpio, LL Bonilla, Periodized discrete elasticity models for defects in graphene, Physical Review B 78 (8), 085406, 2008

[41] A Carpio, ML Rapún, Domain reconstruction using photothermal techniques, Journal of Computational Physics 227 (17), 8083-8106, 2008

[42] JC Neu, A Carpio, LL Bonilla, Theory of surface deposition from boundary layers containing condensable vapour and particles, Journal of fluid mechanics 626, 183-210, 2009

[43] E Cebrián, LL Bonilla, A Carpio, Self-sustained current oscillations in the kinetic theory of semiconductor superlattices, Journal of Computational Physics 228 (20), 7689-7705, 2009

[44] A Carpio, G Duro, Explosive behavior in spatially discrete reaction-diffusion systems, Discrete Contin. Dyn. Syst. 12, 693-711, 2009

[45] I Plans, A Carpio, LL Bonilla, Toy nanoindentation model and incipient plasticity, Chaos, Solitons & Fractals 42 (3), 1623-1630, 2009

[46] A Carpio, ML Rapún, An iterative method for parameter identification and shape reconstruction, Inverse Problems in Science and Engineering 18 (1), 35-50, 2010

[47] A Carpio, BT Johansson, ML Rapún, Determining planar multiple sound-soft obstacles from scattered acoustic fields, Journal of Mathematical Imaging and Vision 36 (2), 185-199, 2010

[48] A Carpio, B Tapiador, Nonreflecting boundary conditions for discrete waves, Journal of Computational Physics 229 (5), 1879-1896, 2010

[49] A Prados, LL Bonilla, A Carpio, Phase transitions in a mechanical system coupled to Glauber spins, Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment P06016, 2010

[50] LL Bonilla, A Prados, A Carpio, Nonequilibrium dynamics of a fast oscillator coupled to Glauber spins, Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment P09019, 2010

[51] A Carpio, B Tapiador, Analysis of helium bubble growth in radioactive waste, Nonlinear Analysis: Real World Applications 11 (5), 4174-4184, 2010

[52] LL Bonilla, A Carpio, Theory of defect dynamics in graphene: defect groupings and their stability, Continuum Mechanics and Thermodynamics 23 (4), 337-346, 2011

[53] A Carpio, I Peral, Propagation failure along myelinated nerves, Journal of nonlinear science 21 (4), 499-520, 2011

[54] LL Bonilla, A Carpio, A Prados, RR Rosales, Ripples in a string coupled to Glauber spins, Physical Review E 85 (3), 031125, 2012

[55] LL Bonilla, A Carpio, Driving dislocations in graphene, Science 337 (6091), 161-162, 2012

[56] A Prados, A Carpio, LL Bonilla, Spin-oscillator model for the unzipping of biomolecules by mechanical force, Physical Review E 86 (2), 021919, 2012

[57] A Carpio, ML Rapún, Hybrid topological derivative and gradient-based methods for electrical impedance tomography, Inverse Problems 28 (9), 095010, 2012

[58] LL Bonilla, A Carpio, Ripples in a graphene membrane coupled to Glauber spins Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment P09015, 2012

[59] LL Bonilla, A Carpio, Model of ripples in graphene, Physical Review B 86 (19), 195402, 2012

[60] D Rodriguez, B Einarsson, A Carpio, Biofilm growth on rugose surfaces, Physical Review E 86 (6), 061914, 2012