Ecuaciones en Derivadas Parciales y Ecuaciones Diferenciales en Diferencias: Ejercicios

Ana Carpio, Universidad Complutense de Madrid

Diciembre, 2008

1 Contenido

- Ecuaciones en derivadas parciales
  - Problemas elípticos: 1-3
  - Problemas hiperbólicos: 4, 14-15, 17-19
  - Problemas parabólicos: 5-6
  - Ecuaciones de Navier-Stokes, vorticidad: 7-8, 10
  - Ecuaciones de convección-difusión: 9, 12
  - Problemas cinéticos: 11, 13, 16
- Ecuaciones diferenciales en diferencias
  - Soluciones de tipo frente, ondas viajeras y ancladas: 1-6
  - Soluciones de tipo pulso, fallos de propagación: 7
  - Problemas bidimensionales: 8-10
  - Problemas con inercia: 11-12
  - Sincronización de osciladores: 13
  - Explosión en tiempo finito: 14
  - Problemas cinéticos: 15

Referencias

2 Ecuaciones en Derivadas Parciales

1. *La ecuación de Helmholtz en todo el espacio se plantea como*

$$\Delta u + k^2 u = 0, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N,$$
$$\lim_{r=|\mathbf{x}|\to\infty} r^{\frac{N-1}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial r}(u - u_{\rm inc}) - \imath k (u - u_{\rm inc})\right) = 0.$$

Da una formulación variacional equivalente planteada en un dominio acotado mediante el operador Dirichlet-a-Neumann.

Tomado de [37]. Sea B_R una esfera de radio R y Γ_R su frontera. El operador Dirichlet–a–Neumann (también llamado Steklov–Poincaré) asocia a los datos Dirichlet en Γ_R la derivada normal de la solución del problema de Dirichlet exterior:

$$\begin{array}{rcl} L : H^{1/2}(\Gamma_R) & \longrightarrow & H^{-1/2}(\Gamma_R) \\ f & \longmapsto & \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \end{array}$$

donde $w \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^N \setminus \overline{B}_R)$, $B_R := B(\mathbf{0}, R)$ es la única solución de

$$\begin{cases} \Delta w + k^2 w = 0, & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \overline{B}_R, \\ w = f, & \text{en } \Gamma_R, \\ \displaystyle\lim_{r\to\infty} r^{N-1/2}(\frac{\partial w}{\partial r} - \imath k w) = 0. & \end{cases}$$

$H^{1/2}(\Gamma_R)$ y $H^{-1/2}(\Gamma_R)$ son espacios de trazas estandar. Podemos estudiar un problema de contorno equivalente planteado en B_R imponiendo una condición no reflectante en la pared Γ_R:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & \text{en } B_R, \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(u - u_{\text{inc}}) = L(u - u_{\text{inc}}), & \text{on } \Gamma_R. \end{cases}$$

La solución u del problema original es también solución del problema variacional

$$\begin{cases} u \in H^1(B_R), & \\ b(u, v) = \ell(v), & \forall v \in H^1(B_R), \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} b(u,v) &= \int_{B_R} (\nabla u \nabla \overline{v} - k^2 u \overline{v}) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_R} L u\, \overline{v}\, dl, \quad \forall u,\, v \in H^1(B_R), \\ \ell(v) &= \int_{\Gamma_R} (\frac{\partial u_{\text{inc}}}{\partial \mathbf{n}} - L u_{\text{inc}})\, \overline{v}\, dl, \qquad \forall v \in H^1(B_R). \end{aligned}$$

2. *Escribe el problema de transmisión tipo Helmholtz*

$$\left| \begin{array}{ll} \nabla \cdot (\alpha_e \nabla u) + \lambda_e^2 u = 0, & \text{en } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}_i, \\ \nabla \cdot (\alpha_i \nabla u) + \lambda_i(k)^2 u = 0, & \text{en } \Omega_i, \\ u^- - u^+ = 0, & \text{en } \partial\Omega_i, \\ \alpha_i \frac{\partial u^-}{\partial \mathbf{n}} - \alpha_e \frac{\partial u^+}{\partial \mathbf{n}} = 0, & \text{en } \partial\Omega_i, \\ \displaystyle\lim_{r\to\infty} r^{1/2} \left(\frac{\partial}{\partial r}(u - u_{\text{inc}}) - \imath \lambda_e (u - u_{\text{inc}}) \right) = 0, & r = |\mathbf{x}|, \end{array} \right.$$

en forma variacional y calcula la derivada de $J(k) = \int_\Gamma |u(k) - d|^2 dl$ *con respecto a* k.

Tomado de [39]. Argumentando como en el ejercicio anterior tenemos

$$\left|\begin{array}{ll} u \in H^1(B_R), & \\ S(u,v) = \ell(v), & \forall v \in H^1(B_R), \end{array}\right.$$

donde

$$\begin{aligned} S(u,v) \quad &:= \quad \int_{B_R \setminus \overline{\Omega}_i} (\alpha_e \nabla u \nabla \overline{v} - \lambda_e^2 u \overline{v}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_i} (\alpha_i \nabla u \nabla \overline{v} - \lambda_i(k)^2 u \overline{v}) d\mathbf{x} \\ & \quad - \int_{\Gamma_R} \alpha_e L u \, \overline{v} \, dl, \qquad \forall u, \, v \in H^1(B_R), \\ \ell(v) \quad &:= \quad \int_{\Gamma_R} \alpha_e (\frac{\partial u_{\mathrm{inc}}}{\partial \mathbf{n}} - L u_{\mathrm{inc}}) \, \overline{v} \, dl, \qquad \forall v \in H^1(B_R), \end{aligned}$$

siendo L el operador Dirichlet-a-Neumann definido por

$$\left|\begin{array}{ll} \nabla \cdot (\alpha_e \nabla w) + \lambda^2 w = 0, & \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}_R, \\ w = f, & \text{en } \partial B_R, \\ \lim\limits_{r \to \infty} r^{1/2} (\dfrac{\partial w}{\partial r} - \imath \lambda_e w) = 0. & \end{array}\right.$$

Diferenciando J respecto a k vemos que

$$\frac{dJ}{dk} = 2 \int_\Gamma \overline{(u(k) - d)} u_k(k) dl,$$

donde la derivada $u_k(k) = \frac{du(k)}{dk} \in H^1(B_R)$ es solución de

$$\begin{aligned} \int_{B_R \setminus \overline{\Omega}_i} (\alpha_e \nabla u_k(k) \nabla \overline{v} - \lambda_e^2 u_k(k) \overline{v}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_i} (\alpha_i \nabla u_k(k) \nabla \overline{v} - \lambda_i(k)^2 u_k(k) \overline{v}) d\mathbf{x} \\ - \int_{\Gamma_R} \alpha_e L u_k(k) \, \overline{v} \, dl = 2 \int_{\Omega_i} \lambda_i(k) \lambda_i'(k) u(k) \overline{v} d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

para todo $v \in H^1(B_R)$ y $u(k)$ es solución del problema de Helmholtz para $\lambda_i(k)$.

3. *Dado un conjunto acotado* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, *consideramos el problema: Encontrar* $u > 0$ *tal que*

$$\begin{aligned} -\Delta u = u^p \quad & \mathbf{x} \in \Omega, \\ u = 0 \quad & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \\ u > 0 \quad & \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned}$$

Probar que hay una solución cuando $1 < p + 1 < p^*$, *donde* $p^* = \infty$ *si* $N \leq 2$ *y* $p^* < \frac{2N}{N-2}$ *cuando* $N > 2$.

Consideremos el problema de minimización

$$I = \mathrm{Min}_{u\in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\, d\mathbf{x}}{\int_\Omega |u|^{p+1}\, d\mathbf{x}} = \mathrm{Min}_{u\in H_0^1(\Omega)} J(u).$$

El funcional $J(u)$ a minimizar es positivo, por tanto, acotado inferiormente. Consideremos una sucesión minimizante $u_n \in H_0^1(\Omega)$, tal que $J(u_n) \to I$ a medida que $n \to \infty$. La sucesión $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{L^{p+1}}}$ es un sucesión minimizante que satisface $\|v_n\|_{L^{p+1}} = 1$. Entonces, $\int_\Omega |\nabla v_n|^2 d\mathbf{x} \to I$ implica quev_n está acotado en $H_0^1(\Omega)$ y v_n tiende débilmente en H_0^1 a un límite $v \in H_0^1(\Omega)$. Por las inyecciones de Sobolev, v_n es compacto en L^{p+1}, $p+1 < p^*$, por tanto, $v \in L^{p+1}(\Omega)$ y $\|v_n\|_{L^{p+1}} = 1 \to \|v\|_{L^{p+1}} = 1$. Por semicontinuidad inferior bajo convergencia débil, tenemos $J(v) \leq \lim_{n\to\infty} J(v_n) = I$. Como $v \in H_0^1(\Omega)$, se sigue que $I \leq J(v)$. Por tanto, $I = J(v)$ y se alcanza el mínimo en v. Además, podemos reemplazar v por $|v|$ y $J(|v|) \leq I(v)$, así que $w = |v| \geq 0$ es un minimizador también y $I = J(w)$. $w \neq 0$ porque $\|w\|_{L^{p+1}} = 1$.

Ahora bien, $J(w) \leq J(w + tr)$, $r \in H_0^1(\Omega)$ para t real. Un desarrollo asintótico primero para $t > 0$ y después para $t < 0$ conduce a

$$\int_\Omega \nabla w \nabla r\, d\mathbf{x} = c \int_\Omega w^p r\, d\mathbf{x}$$

para todo $r \in H_0^1(\Omega)$ con $c > 0$. Esto implica $-\Delta w = c\, w^p$. Para $u = c^{-1/(p-1)} w$ obtenemos $-\Delta u = u^p$ y $u \geq 0$, $u \neq 0$. Por el principio del máximo fuerte, $u > 0$.

Si $p+1 = p^* = \frac{2N}{N-2}$ y $N > 2$, la existencia de una solución depende de la geometría de Ω, véase [1].

4. *Dada una solución* $u \in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega)) \cap W^{2,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$ *of*

$$u_{tt} - \Delta u + \alpha |u_t|^{p-1} u_t = 0 \quad \text{in } L^\infty(\mathbb{R}^+, H^{-1}(\Omega))$$

con $\alpha > 0$, $1 < p$ *y* $p+1 < p^*$, *definimos*

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(\mathbf{x},t)|^2\, d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_\Omega |u_t(\mathbf{x},t)|^2\, d\mathbf{x}.$$

Entonces, para alguna constante positiva $C(E(0))$, *se tiene*

$$E(t) \leq C(E(0)) t^{-2/(p-1)}, \quad t > 0.$$

Tomado de [2]. Definimos$\phi(t) = E^{(p-1)/2} \int_\Omega u u_t\, d\mathbf{x}$. A continuación, diferenciamos respecto a t para obtener

$$\begin{aligned}
E'(t) &= -\alpha \int_\Omega |u_t|^{p+1} d\mathbf{x} \leq 0, \\
\phi'(t) &= E(t)^{(p-1)/2} \left(\int_\Omega |u_t|^2 \, d\mathbf{x} - \int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} - \alpha \int_\Omega |u_t|^{p-1} u_t u d\mathbf{x} \right) \\
& \quad + \frac{p-1}{2} E(t)^{(p-3)/2} E'(t) \int_\Omega u u_t \, d\mathbf{x}
\end{aligned}$$

Primero, observamos que $E(t) \leq E(0)$ y $-\int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} = -2E(t) + \int_\Omega |u_t|^2 \, d\mathbf{x}$. Además,

$$E(t)^{-1} \left| \int_\Omega u u_t \, d\mathbf{x} \right| \leq E(t)^{-1} \left(\frac{1}{2} \int_\Omega |u|^2 \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_\Omega |u_t|^2 \, d\mathbf{x} \right) \leq C(\Omega)$$

para alguna constante positiva $C(\Omega)$ porque la desigualdad de Poincaré implica $\frac{1}{2} \int_\Omega |u|^2 \, d\mathbf{x} \leq \frac{\lambda(\Omega)}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x}$. Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &\leq 2E(t)^{(p-1)/2} \int_\Omega |u_t|^2 \, d\mathbf{x} - \alpha E(t)^{(p-1)/2} \int_\Omega |u_t|^{p-1} u_t u d\mathbf{x} \\
& \quad -2E(t)^{(p+1)/2} - \frac{p-1}{2} C(\Omega) E(0)^{(p-1)/2} E'(t).
\end{aligned}$$

Ahora definimos $\psi_\varepsilon(t) = (1 + K_1 \varepsilon) E(t) + \varepsilon \phi(t)$ con $K_1 = \frac{p-1}{2} C(\Omega) E(0)^{(p-1)/2}$. Obtenemos

$$\begin{aligned}
\psi'_\varepsilon(t) &\leq 2\varepsilon E(t)^{(p-1)/2} \int_\Omega |u_t|^2 \, d\mathbf{x} - \alpha \varepsilon E(t)^{(p-1)/2} \int_\Omega |u_t|^{p+1} d\mathbf{x} \\
& \quad -2\varepsilon E(t)^{(p+1)/2} - \alpha \int_\Omega |u_t|^{p+1} d\mathbf{x}
\end{aligned}$$

Obsérvese que $\|u_t\|_{L^2}^2 \leq \text{meas}(\Omega)^{(p-1)/(p+1)} (\int_\Omega |u_t|^{p+1})^{2/(p+1)}$. Por la desigualdad de Young obtenemos

$$\begin{aligned}
2\varepsilon E(t)^{\frac{(p-1)}{2}} \int_\Omega |u_t|^2 \, d\mathbf{x} &\leq 2\varepsilon \ \text{ meas}(\Omega)^{\frac{p-1}{p+1}} E(t)^{\frac{p-1}{2}} \left(\int_\Omega |u_t|^{p+1} \right)^{\frac{2}{p+1}} \\
&\leq \varepsilon E(t)^{\frac{p+1}{2}} + \varepsilon \delta \int_\Omega |u_t|^{p+1}
\end{aligned}$$

para algún δ positivo que depende de Ω.

Gracias a las inyecciones de Sobolev para $p + 1 < p^*$ obtenemos

$$\int_\Omega |u_t|^{p-1} u_t u \, d\mathbf{x} \leq \left(\int_\Omega |u_t|^{p+1} \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{p}{p+1}} \|u\|_{L^{p+1}} \leq S(\Omega) \|u_t\|_{L^{p+1}}^p \|\nabla u\|_{L^2}.$$

Obsérvese que $\|\nabla u\|_{L^2} \leq 2E(t)$. De la desigualdad de Young se sigue

$$\begin{aligned}
\varepsilon \alpha E(t)^{(p-1)/2} \int_\Omega |u_t|^{p-1} u_t u \, d\mathbf{x} &\leq \varepsilon \alpha E(t)^{(p-1)/2} S(\Omega) \|u_t\|_{L^{p+1}}^p \|\nabla u\|_{L^2} \\
&\leq \frac{\alpha}{2} \int_\Omega |u_t|^{p+1} + \varepsilon \eta(\varepsilon) E(t)^{(p+1)/2}
\end{aligned}$$

donde $\eta > 0$ depende de $E(0)$, Ω, α y ε, y tiende a cero a medida que ε tiende a cero. Sumando, obtenemos

$$\psi'_\varepsilon(t) \leq (-\frac{\alpha}{2} + \varepsilon\delta) \int_\Omega |u_t|^{p+1} + \varepsilon(-1 + \eta(\varepsilon))E(t)^{(p+1)/2}.$$

Por otra parte, para ε suficientemente pequeño,

$$\frac{1}{\varepsilon}E(t) \leq (1 - K_2\varepsilon)E(t) \leq \psi_\varepsilon(t) \leq (1 + K_2\varepsilon) \leq 2E(t).$$

Eligiendo ε suficientemente pequeño, concluimos que

$$\psi'_\varepsilon(t) \leq -\frac{\varepsilon}{4}E^{(p+1)/2} \leq -\frac{\varepsilon K_3}{4}\psi_\varepsilon(t)^{(p+1)/2}.$$

e integrando la desigualdad tenemos $E(t) \leq C(E(0))t^{-2/(p-1)}$ para $t > 0$.

5. *Probar que la función* $v(\mathbf{x}, t) = |t|^{\frac{p}{p-1}}\phi(\mathbf{x})$, $1 < p < p^* - 1$, *donde*

$$\begin{aligned} -\Delta\phi = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p |\phi|^{p-1}\phi \quad & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \phi = 0 \quad & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

es una solución del problema parabólico retrógrado

$$\begin{aligned} -\Delta v + |v_t|^{p-1}v_t = 0 \quad & \mathbf{x} \in \Omega \times (-\infty, 0], \\ v = 0 \quad & \mathbf{x} \in \partial\Omega \times (-\infty, 0]. \end{aligned}$$

Tomado de [3, 8]. Tenemos

$$\begin{aligned} v_t &= -\frac{p}{p-1}|t|^{\frac{1}{p-1}}\phi(\mathbf{x}), \\ |v_t|^{p-1}v_t &= -\left(\frac{p}{p-1}\right)^p |t|^{\frac{p}{p-1}}|\phi(\mathbf{x})|^{p-1}\phi(\mathbf{x}), \\ -\Delta v = -|t|^{\frac{p}{p-1}}\Delta\phi(\mathbf{x}) &= |t|^{\frac{p}{p-1}}\left(\frac{p}{p-1}\right)^p |\phi(\mathbf{x})|^{p-1}\phi(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

así que la ecuación se cumple. La existencia de ϕ se sigue de la teoría de puntos críticos.

6. *Expresa la solución del problema de transmisión*

$$\begin{cases} U_t - \kappa_e\Delta U = 0, & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega_i} \times (0, \infty), \\ U_t - \alpha_i\kappa_i\Delta U = 0, & \text{en } \Omega_i \times (0, \infty), \\ U^- - U^+ = U_{\text{inc}}, & \text{en } \partial\Omega_i \times (0, \infty), \\ \alpha_i\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}U^- - \frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}U^+ = \frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}U_{\text{inc}}, & \text{en } \partial\Omega_i \times (0, \infty), \\ U(\,\cdot\,, 0) = 0, & \text{en } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

en términos de problemas de Helmholtz usando transformadas de Laplace.

Tomado de [41]. Definimos u_{inc} y u como las transformadas de Laplace en tiempo de U_{inc} y U:

$$u_{\mathrm{inc}}(\mathbf{x}, s) = \int_0^\infty e^{-st} U_{\mathrm{inc}}(\mathbf{x}, t)\, dt, \quad u(\mathbf{x}, s) = \int_0^\infty e^{-st} U(\mathbf{x}, t)\, dt, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N.$$

Para cada valor de s, la función $u_s(\mathbf{x}) := u(\mathbf{x}, s)$ es solución de

$$\begin{cases} \Delta u_s + \lambda_{s,e}^2 u_s = 0, & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega_i}, \\ \alpha_i \Delta u_s + \lambda_{s,i}^2 u_s = 0, & \text{en } \Omega_i, \\ u_s^- - u_s^+ = u_{inc,s}, & \text{en } \partial\Omega_i, \\ \alpha_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u_s^- - \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u_s^+ = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u_{inc,s}, & \text{en } \partial\Omega_i, \end{cases}$$

con $\lambda_{s,e}^2 := -s/\kappa_e$, $\lambda_{s,i}^2 := -s/\kappa_i$ y $u_{inc,s}(\mathbf{x}) := u_{\mathrm{inc}}(\mathbf{x}, s)$. Este problema tiene una única solución que satisface la condición de radiación de Sommerfeld en el infinito

$$\lim_{r \to \infty} r^{(N-1)/2} \left(\partial_r u_s - \imath \lambda_{s,e} u_s \right) = 0, \qquad r = |\mathbf{x}|,$$

para todo $s \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Esta caracterización de $u_s(\mathbf{x})$ se puede usar para definir y calcular $u(\cdot, s)$ para todo $s \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

La solución del problema dependiente del tiempo se recupera invirtiendo la transformada de Laplace:

$$U(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\mathcal{C}} e^{st}\, u(\mathbf{x}, s)\, ds.$$

Como $u(\cdot, s)$ existe para todo $s \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ y depende holomórficamente de s, distintas elecciones para el camino de inversión $\mathcal{C}$ son posibles.

7. *Consideremos la ecuación de la vorticidad en dos dimensiones. Sea* $v = \operatorname{curl} \mathbf{u} \in C((0, \infty); W^{1,p}(\mathbb{R}^2))$, $1 \leq p \leq \infty$ *la solución de*

$$\begin{aligned} v_t - \Delta v + \mathbf{u} \cdot \nabla v = 0, &\qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \\ v(\mathbf{x}, 0) = v_0, &\qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

para un camp de velocidad u de divergencia nula (incompressible) y un dato inicial $v_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$. *Demostrar 1) que la masa* $\int_{\mathbb{R}^2} v_0 \, d\mathbf{x}$ *no cambia con el tiempo y 2) que* $\|v(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C t^{-1+\frac{1}{p}}$ *for* $t > 0$.

Tomado de [4, 5]. Obsérvese que $\mathbf{u} \cdot \nabla v = \operatorname{div}(\mathbf{u} v) = 0$. integrando la ecuación, usando el teorema de la divergencia, y el hecho de que v se anula en el infinito tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} v_0 \, d\mathbf{x} = 0.$$

El vector velocidad viene dado por

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = K * v(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(-y_2,y_1)}{|\mathbf{y}|^2} v(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)d\mathbf{y}$$

donde el núcleo $K \in L^{2,\infty}$ y $\|K * v\|_{L^r} \leq \|K\|_{L^{2,\infty}}\|v\|_{L^p}$ for $r > 2$, $1 < p < 2$, $1/r = 1/p - 1/2$.

Escribimos la expresión integral para la solución

$$v(t) = G(t) * v_0 + \int_0^t \nabla G(t-s) * [v(s)\,\mathbf{K} * v(s)]ds,$$

done $G(t)$ denota el núcleo del calor. Tomando normas obtenemos

$$\|v(t)\|_{L^p} = \|G(t) * v_0\|_{L^p} + \int_0^t \|\nabla G(t-s) * [v(s)\,\mathbf{K} * v(s)]\|_{L^p} ds.$$

El término integral decae más rápido que el resto, por tanto

$$\|v(t)\|_{L^p} \sim \|G(t) * v_0\|_{L^p} \leq Ct^{-1+\frac{1}{p}}.$$

Sabemos que $G(t) * v_0$ es una solución de la ecuación del calor con dato inicial v_0 que pertenece a L^p para todo $1 \leq p \leq \infty$ y todo $t > 0$ si $v_0 \in L^1$. Además, $\|G(t) * v_0\|_{L^p} \leq \|G(t)\|_{L^p}\|v_0\|_{L^1}$ and $\|G(t)\|_{L^p} = Ct^{-1+\frac{1}{p}}$.

8. *Sea* $\mathbf{u}$ *una solución de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles en dos dimensiones con dato inicial* $\mathbf{u}_0 \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ *tal que* $\mathrm{div}(\mathbf{u}_0) = 0$. *Entonces,* $\mathbf{u}(t) \in L^p(\mathbb{R}^2)$ *para* $1 \leq p \leq 2$ *y* $t > 0$.

   Tomado de[6, 10]. La teoría de soluciones clásicas con datos L^2, es decir, $\mathbf{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ garantiza que $\mathbf{u}(t) \in L^\infty([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^2))$ y que está acotada por $\|\mathbf{u}_0\|_{L^2}$. Tomando la divergencia de las ecuaciones de Navier-Stokes

$$\mathbf{u}_t - \Delta\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} = \nabla p, \quad \mathrm{div}(\mathbf{u}) = 0,$$

obtenemos una ecuación para la presión

$$-\Delta p = \mathrm{div}(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}).$$

La presión viene dada entonces como la convolución $p = E_2 * \mathrm{div}(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})$, donde E_2 es la solución fundamental de $-\Delta$ en $\mathbb{R}^2$, salvo por una función del tiempo. Por tanto, $\mathbf{u}$ satisface la ecuación integral

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t) = G(t) * \mathbf{u}_0 &+ \int_0^t \partial_i G(t-s) * u_i\mathbf{u}(s)ds \\ &+ \int_0^t \partial_i G(t-s) * \partial_j \nabla E_2 * u_i u_j(s)ds,\end{aligned}$$

donde ∂_i denota las derivadas parciales respecto x_i, u_i son las componentes de $\mathbf{u}$. Se usa la convención de suma respecto a índices repetidos. Como

$u \in L^1$, $G(t) * u_0 \in L^q$ para todo $q > 1$ y $t > 0$. Por otra parte, $u(s) \in L^2$ implica que $u_i u_j(s) \in L^1$. Además,

$$\| \int_0^t \partial_i G(t-s) * u_i u_j(s) ds \|_{L^q} \leq C \int_0^t (t-s)^{-1+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \| \mathbf{u}\|_{L^2}^2 ds \leq C t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}$$

para $1 \leq q < 2$. Por tanto, la primera integral pertenece a L^q si $1 \leq q < 2$. Consideremos ahora la segunda integral. Como $\partial_i G(t)$ pertenece a espacio de Hardy $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ y $\partial_j \nabla E_2$ es un núcleo de Calderon-Zygmund, concluimos que $\partial_i G(t-s) * \partial_j \nabla E_2 \in L^1$ y

$$\|\partial_i G(t-s) * \partial_j \nabla E_2\|_{L^1} \leq C \|\partial_i G(t-s)_{\mathcal{H}^1} < C(t-s)^{\frac{-1}{2}}.$$

Por tanto,

$$\| \int_0^t \partial_i G(t-s) * \partial_j \nabla E_2 * u_i u_j(s) ds \|_{L^1} \leq \int_0^t C(t-s)^{\frac{-1}{2}} \|\mathbf{u}(s)\|_{L^2}^2 ds \leq C t^{\frac{1}{2}}.$$

De forma análoga, como $\partial_j \nabla E_2$ es un núcleo de Calderon-Zygmund, concluimos que $\partial_i G(t-s) * \partial_j \nabla E_2 \in L^q$, $1 < q < \infty$ y

$$\|\partial_i G(t-s) * \partial_j \nabla E_2\|_{L^q} \leq C \|\partial_i G(t-s)\|_{L^q} < C(t-s)^{-1+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \| \int_0^t \partial_i G(t-s) * \partial_j \nabla E_2 * u_i u_j(s) ds \|_{L^q} &\leq \int_0^t C(t-s)^{-1+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}(s)\|_{L^2}^2 ds \\ &\leq C t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

para $1 < q \leq 2$.

9. *Consideramos la ecuación de convección-difusión*

$$u_t - \Delta u + \partial_y (|u|^{q-1} u) = 0$$

planteada en $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, *con* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}, y)$. *Supongamos que* V *es una solución con dato inicial* $V_0 \in (L^1 \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n)$ *y* v *es una solución con dato inicial* $v_0 \in (L^1 \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n)$. *Supongamos que*

$$v, V \in C^1([0,T]; L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^\infty([0,T]; H^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^2)$$

para todo $T > 0$. *Entonces,* $v \leq V$.

Tomado de [7, 9]. La función $w = v - V$ satisface

$$w_t - \Delta w + \partial_y (|v|^{q-1} v) - \partial_y (|V|^{q-1} V) \leq 0$$

y $w(0) \leq 0$. Multiplicando la desigualdad por w^+ e integrando por partes tenemos

$$\frac{d}{dt} \int \frac{|w^+(t)|^2}{2} d\mathbf{x} + \int |\nabla w^+(t)|^2 d\mathbf{x} \leq \int a w^+(t) \partial_y w^+(t) d\mathbf{x}$$

donde $a(\mathbf{x},t) = \frac{|v|^{q-1}v - |V|^{q-1}V}{v-V}$ es una función acotada. Integrando en t y aplicando la desigualdad de Young obtenemos

$$\frac{\|w^+(t)\|_2^2}{2} + \int_0^t \|\nabla w^+(s)\|_2^2 ds \leq K_1 \int_0^t \|w^+(s)\|_2^2 ds + \varepsilon \int_0^t \|\nabla w^+(s)\|_2^2 ds$$

para ε tan pequeño como sea necesario. Nótese que $w^+(0) = 0$. Aplicando la desigualdad de Gronwall a

$$\|w^+(t)\|_2^2 \leq 2K_1 \int_0^t \|w^+(s)\|_2^2 ds$$

obtenemos $w^+(t) = 0$.

10. *Una curva de vorticidad (vortex line) Γ en un fluido incompresible irrotacional y no viscoso es una solución de las ecuaciones*

$$\mathrm{div}(\mathbf{u}) = 0, \quad \mathrm{curl}(\mathbf{u}) = \omega_0 \delta_\Gamma(\mathbf{x}),$$

donde $\mathbf{u}$ es la velocidad del fluido, $\omega_0 = 2\pi\gamma$ es la circulación alrededor del vórtice y γ es la fuerza del vórtice. δ_Γ es una función de Dirac 3D con soporte en Γ. Exprésese la solución en términos de una función de corriente vectorial.

Tomado de [11]. Definimos la función de corriente $\mathbf{U}$ in $\mathbb{R}^3$ como la solución de $\mathrm{div}(\mathbf{U}) = 0$, $\mathrm{curl}(\mathbf{U}) = \mathbf{u}$. Entonces $-\Delta \mathbf{U} = \omega_0 \delta_\Gamma(\mathbf{x})$. Usando la función de Green para el Laplaciano en $\mathbb{R}^3$ tomamos $\mathbf{U} = \frac{\omega_0}{4\pi} \int_\Gamma \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d\mathbf{x}'$.

11. *Sabemos que el problema*

$$\begin{aligned} g_t - \Delta_v g + \mathbf{v} \cdot \nabla_x g + \mathbf{E}(\mathbf{x},t) \cdot \nabla_v g = 0, & \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}^+, \\ g(\mathbf{x},\mathbf{v},0) = g_0(\mathbf{x},\mathbf{v}), & \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

con $g_0 \in L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ y con $\mathbf{E}$ acotado y Lipschitz admite soluciones fundamentales $\Gamma_\mathbf{E}$. La solución del problema de valores iniciales se puede expresar como

$$g(\mathbf{x},\mathbf{v},t) = \int \Gamma_\mathbf{E}(\mathbf{x},\mathbf{v},t;\mathbf{x}',\mathbf{v}',0) d\mathbf{x}' d\mathbf{v}',$$

donde $\Gamma_\mathbf{E}$ satisface las estimaciones

$$\begin{aligned} |\Gamma_\mathbf{E}(\mathbf{x},\mathbf{v},t;\mathbf{x}',\mathbf{v}',t')| &\leq C(\|\mathbf{E}\|_{L^\infty_{\mathbf{x},t}}, T)\, G(\mathbf{x}/2,\mathbf{v}/2,t;\mathbf{x}'/2,\mathbf{v}'/2,t'), \\ |\partial_{v_i}\Gamma_\mathbf{E}(\mathbf{x},\mathbf{v},t;\mathbf{x}',\mathbf{v}',t')| &\leq C(\|\mathbf{E}\|_{L^\infty_{\mathbf{x},t}}, T)\, \frac{G(\mathbf{x}/2,\mathbf{v}/2,t;\mathbf{x}'/2,\mathbf{v}'/2,t')}{(t-t')^{1/2}}, \end{aligned}$$

y G es la solución fundamental del problema con $\mathbf{E} = 0$. Extiéndase este resultado a problemas en los que $\mathbf{E}$ está acotado.

Tomado de [12]. Regularizamos$\mathbf{E}$ por convolución y consideramos $\mathbf{E}_\delta = \mathbf{E}*\eta_\delta$ donde η_δ es una familia regularizante. Las funciones $\mathbf{E}_\delta$ son acotadas y Lipschitz, de modo que para cada una de ellas podemos construir soluciones g_δ del problema de valores iniciales y tenemos estimaciones sobre las soluciones fundamentales Γ_δ. Además, $\|\mathbf{E}_\delta\|_{L^\infty_{x,t}} \leq \|\mathbf{E}\|_{L^\infty_{x,t}}$ y $\mathbf{E}_\delta \to \mathbf{E}$ a medida que $\delta \to 0$.

Como Γ_δ está acotada (localmente en t) en todo espacio L^p_{xvt} podemos extraer una subsucesión que converge débilmente (localmente en t) en todo L^p_{xvt} (débil estrella si $p = \infty$) a una función $\Gamma_{\mathbf{E}}$. Asimismo, podemos pasar al límite en el lado derecho de las expresiones integrales para las soluciones g_δ en términos de Γ_δ.

Por otra parte, las expresiones integrales implican que g_δ están uniformemente acotadas en cualquier espacio L^p_{xvt} con respecto a δ localmente en t. Por tanto, g_δ converge débilmente (localmente en t) en cualquier espacio L^p_{xvt} a una función g y sus derivadas también convergen en el sentido de las distribuciones.

En el sentido de las distribuciones, las derivadas de Γ_δ con respecto a $\mathbf{v}$ convergen débilmente a las derivadas de $\Gamma_{\mathbf{E}}$. Podemos pasar al límite en las desigualdades satisfechas por Γ_δ y establecer desigualdades similares para $\Gamma_{\mathbf{E}}$ porque $\|\mathbf{E}_\delta\|_{L^\infty_{x,t}} \leq \|\mathbf{E}\|_{L^\infty_{x,t}}$.

Multiplicando la ecuación diferencial satisfecha por g_δ by g_δ obtenemos una cota L^2_{xvt} uniforme sobre $\nabla_v g_\delta$. Si multiplicamos la ecuación por $|\mathbf{v}|^2$ obtenemos una estimación uniforme en L^1_{xvt} sobre $|\mathbf{v}|^2 g_\delta$.

Multiplicando las ecuaciones diferenciales satisfechas por g_δ por funciones test, podemos pasar al límite en todos los términos de la formulación débil, excepto en $\mathbf{E}_\delta \nabla_v g_\delta$ con las convergencias ya establecidas. El paso al límite en este término es técnico, véanse detalles en [12]. Finalmente, g es solución del problema de valores iniciales con $\mathbf{E}$ acotado y $\Gamma_{\mathbf{E}}$ es una solución fundamental asociada.

12. *Probar que la solución de*

$$z_t - \Delta z = \mathbf{d} \cdot \nabla(G^q), \quad z(0) = 0$$

se puede calcular en términos de núcleos del calor.

Tomado de [19]. Basta poner $z = \mathbf{d} \cdot \nabla g$ con $g_t - \Delta g = G^q$, $g(0) = 0$, es decir,

$$g(t) = \int_0^t G(t-s) * G^q(s) ds.$$

13. *Probar que la solución* Φ *de la ecuación*

$$-\frac{d^2}{dx^2}\Phi(x) = n_D(x) - \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{1 + \exp(\epsilon(k) - \Phi(x))}$$

con $\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dk dx}{1+\exp(\epsilon(k)-\Phi(x))} = a$ *fijado y* $\frac{d\Phi}{dx} \in L^2$ *es única.*

Tomado de [21]. Supongamos que tenemos dos soluciones Φ_1 y Φ_2 que satisfacen tales condiciones. Sea $U = \Phi_1 - \Phi_2$. Entonces, $\frac{dU}{dx} \in L^2$ y

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{1 + \exp(\epsilon(k) - \Phi_1(x))} - \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{1 + \exp(\epsilon(k) - \Phi_2(x))}.$$

Supongamos primero que $U(x) > 0$ en todas partes. Entonces

$$a = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dkdx}{1 + \exp(\epsilon(k) - \Phi_1(x))} > \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dkdx}{1 + \exp(\epsilon(k) - \Phi_2(x))} = a,$$

lo que es imposible.

Supongamos ahora que existe un único punto t x_0 en el cual $U(x_0) = 0$. Supongamos que $U(x) < 0$ si $x < x_0$ y $U(x) > 0$ si $x > x_0$ (se procede de forma análoga en otro caso). Entonces, $\frac{d^2U}{dx^2} < 0$ si $x < x_0$ y $\frac{d^2U}{dx^2} < 0$ si $x > x_0$. Tenemos que $\frac{dU}{dx}$ decrece si $x < x_0$ y $\frac{dU}{dx}$ crece si $x > x_0$. Por otra parte,

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{dU}{dx}\right)^2 dx = \int_{-\infty}^{x^*} \left(\frac{dU}{dx}\right)^2 dx + \int_{x^*}^{\infty} \left(\frac{dU}{dx}\right)^2 dx$$

is finito. Si existe x^* tal que $\frac{dU(x^*)}{dx} > 0$ y $x^* < x_0$ entonces $\int_{-\infty}^{x^*} \left(\frac{dU}{dx}\right)^2 dx > \left(\frac{dU(x^*)}{dx}\right)^2 \int_{-\infty}^{x^*} dx = \infty$. Esto es imposible, así que$\frac{dU}{dx} \leq 0$ para todo x y U decrece. Esto contradice la hipótesis sobre x_0. Por tanto, debe haber al menos dos puntos x_0 y x_1 en los que U se anula.

Sean x_0 y x_1 tales que $U(x_0) = U(x_1) = 0$. Si x_M es tal que $U(x_M) = \max\{U(x),\, x_0 \leq x \leq x_1\} > 0$, entonces $\frac{d^2U(x_M)}{dx^2} \leq 0$ porque el máximo se alcanza en un punto interior. Sin embargo,

$$0 \geq \frac{d^2U(x_M)}{dx^2} = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{1+\exp(\epsilon(k)-\Phi_1(x_M))} - \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{1+\exp(\epsilon(k)-\Phi_2(x_M))} > 0,$$

porque $U(x_M) > 0$. Por tanto, $\max\{U(x),\, x_0 \leq x \leq x_1\} = 0$. De forma análoga, concluimos que $U(x_m) = \min\{U(x),\, x_0 \leq x \leq x_1\} = 0$. Por tanto, $U = 0$ en $[x_0, x_1]$.

Pongamos ahora $x_0 = \min\{x \,|\, U(x) = 0\}$ y $x_1 = \max\{x \,|\, U(x) = 0\}$. Entonces, $U(x) < 0$ para $x < x_0$ y $U(x) > 0$ para $x > x_1$. Repitiendo los argumentos anteriores obtendríamos $x' \notin [x_0, x_1]$ tal que $U(x') = 0$. Esto contradice la definición de x_0 y x_1. Por tanto, $U = 0$ en todas partes, y $\Phi_1 = \Phi_2$.

14. *Consideremos el problema hiperbólico*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial t} + A\frac{\partial E}{\partial t} + B\frac{\partial E}{\partial x} + C\frac{\partial J}{\partial t} + D = 0, &\qquad x \in (0, L),\ t > 0,\\
E(x, 0) = 0, &\qquad x \in (0, L),\\
E(0, t) = \rho J(t), &\qquad t \geq 0,\\
\int_0^L E(x, t)dx = \phi, &\qquad t \geq 0,
\end{aligned}$$

donde ρ, ϕ, L *son positivos y* A, B, C, D *son funciones acotadas.* A *y* B *son positivas, mientras que* C *es negativa. Cuál sería un esquema numérico adecuado para resolver este problema?*

Tomado de [16]. Los problemas hiperbólicos se discretizan normalmente de forma explícita. Sin embargo, en este caso i) tenemos una restricción integral que acopla todos los valores en cada nivel de tiempo, ii) el operador hiperbólico viene dado en forma no característica. Usamos diferencias finitas progresivas de primer orden para las derivadas temporales de primer orden de E y J. Usamos una aproximación retrógada de segundo orden para las derivadas espaciales de primer order porque las diferencias centrales conllevan inestabilidad. La derivada segunda E_{xt} se aproxima combinando las aproximaciones en espacio y tiempo descritas. En el extremo izquierdo usamos para E_x una aproximación retrógrada de primer orden. La integral se discretiza mediante una regla del trapecio compuesta.

15. *Construir soluciones de la ley de conservación escalar* $w_t + (c(x)w)_x = 0$ *con* $w(0) = w_0$.

Tomado de [17]. Ponemos $v = cw$. Entonces, $v_t + cv_x = 0$. Por tanto, v es constante a lo largo de las curvas características $x(t)$ solución de $x'(t) = c(x(t))$, $x(0) = x_0$, porque

$$\frac{d}{dt}v(x(t), t) = v_x(x(t), t)x'(t) + v_t(x(t), t) = 0.$$

Dado (x, t) a veces somos capaces de calcular $x_0(x, t)$ tal que la curva característica con valor inicial $x_0(x, t)$ satisface $x(t) = x$. Entonces $v(x, t) = v(x(t), t) = v_0(x_0(x, t))$ y $w(x, t) = \frac{v_0(x_0(x,t))}{c(x_0(x,t))}$. Las posibilidades de llevar esto a cabo dependerán de c.

16. *Resolver el problema*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial k}(k^{1/3} r) = 0,\\
\int_0^\infty k r(s, k) dk = t,\\
\lim_{k \to 0} k^{1/3} r(s, k) = 2c.
\end{aligned}$$

Tomado de [34]. Integrating la ecuación sobre $k > 0$ tenemos

$$\frac{d}{ds}\int_0^\infty r(s,k)dk = \text{lim}_{k\to 0}k^{1/3}r(s,k) = 2c(s).$$

Argumentando como en el ejercicio previo, el método de las características da la expresión

$$\begin{aligned} k^{1/3}r(s,k) = 2c(s-a(k))H(s-a(k)), \\ a(k) = \frac{3}{2}k^{2/3}, \end{aligned}$$

en la cual $H(x)$ es la función de Heaviside (1 para x positivo, 0 en otro caso).

17. *Consideramos las ecuaciones de Navier para cristales con simetría cúbica en situaciones bidimensionales, en función de tres constantes positivas* c_{11}*,* $c_2 2$*,* c_{44}*:*

$$\begin{aligned} Mu_1'' &= C_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + C_{12}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + C_{44}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + C_{44}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ Mu_2'' &= C_{11}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + C_{12}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + C_{44}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + C_{44}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}, \end{aligned}$$

donde $M > 0$*. Proponer una discretización en diferencias finitas estable.*

Tomado de [31]. Construimos una malla rectangular. Denotamos por D_i^+ y D_i^- las diferencias finitas de primer orden progresivas y regresivas, respectivamente, en la dirección i, es decir,

$$\begin{aligned} D_1^+ u_j(\ell,m) &= \frac{u_j(\ell+\delta x_1, m) - u_j(\ell,m)}{\delta x_1}, \\ D_1^- u_j(\ell,m) &= \frac{u_j(\ell,m) - u_j(\ell-\delta x_1, m)}{\delta x_1}, \end{aligned}$$

para $i = 1$. Análogamente para $i = 2$. En vista de la presencia de términos cruzados, elegimos

$$\begin{aligned} Mu_1'' &= C_{11}\frac{D_1^- D_1^+ u_1}{\delta x_1^2} + C_{12}\frac{D_1^- D_2^+ u_2}{\delta x_1 \delta x_2} + C_{44}\frac{D_2^- D_2^+ u_1}{\delta x_2^2} + C_{44}\frac{D_2^- D_1^+ u_2}{\delta x_1 \delta x_2}, \\ Mu_2'' &= C_{11}\frac{D_2^- D_2^+ u_2}{\delta x_2^2} + C_{12}\frac{D_2^- D_1^+ u_1}{\delta x_1 \delta x_2} + C_{44}\frac{D_1^- D_1^+ u_2}{\delta x_1^2} + C_{44}\frac{D_1^- D_2^+ u_1}{\delta x_1 \delta x_2}. \end{aligned}$$

Véase [35] para extensiones a cristales tridimensionales y a retículos con dos bases.

18. *Consideramos un retículo hexagonal plano e ignoramos desplazamientos en la dirección vertical. En el límite continuo, las deformaciones planas*

se describen mediante las ecuaciones de la elasticidad de Navier en dos dimensiones para el vector de desplazamiento,

$$\rho_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$
$$\rho_2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

donde ρ_2 es la densidad de masa λ y μ los coeficientes de Lamé en dos dimensiones($\lambda = C_{12}$, $\mu = C_{66}$, $\lambda + 2\mu = C_{11}$). Proponer una discretización en diferencias finitas en un retículo hexagonal con constante a.

Tomado de [40]. Tomamos un punto A en el retículo hexagonal con coordenadas (x, y). Sus 9 (3+6) vecinos próximos tienen coordenadas

$$n_1 = \left(x - \frac{a}{2}, y - \frac{a}{2\sqrt{3}}\right), \; n_2 = \left(x + \frac{a}{2}, y - \frac{a}{2\sqrt{3}}\right), \; n_3 = \left(x, y + \frac{a}{\sqrt{3}}\right),$$
$$n_4 = \left(x - \frac{a}{2}, y - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right), \; n_5 = \left(x + \frac{a}{2}, y - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right), \; n_6 = (x - a, y),$$
$$n_7 = (x + a, y), \; n_8 = \left(x - \frac{a}{2}, y + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right), \; n_9 = \left(x + \frac{a}{2}, y + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right).$$

Definimos los operadores siguientes en términos de las coordenadas (x, y) del nodo A:

$$\begin{aligned} Tu &= [u(n_1) - u(A)] + [u(n_2) - u(A)] + [u(n_3) - u(A)], \\ Hu &= [u(n_6) - u(A)] + [u(n_7) - u(A)], \\ D_1 u &= [u(n_4) - u(A)] + [u(n_9) - u(A)], \\ D_2 u &= [u(n_5) - u(A)] + [u(n_8) - u(A)], \end{aligned}$$

Los desarrollos de Taylor de estas combinaciones de diferencias finitas en torno a (x, y) proporcionan las aproximaciones

$$\begin{aligned} Tu &\sim \left(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u\right) \frac{a^2}{4}, \\ Hu &\sim (\partial_x^2 u)\, a^2, \\ D_1 u &\sim \left(\frac{1}{4}\, \partial_x^2 u + \frac{\sqrt{3}}{2}\, \partial_x \partial_y u + \frac{3}{4}\, \partial_y^2 u\right) a^2, \\ D_2 u &\sim \left(\frac{1}{4}\, \partial_x^2 u - \frac{\sqrt{3}}{2}\, \partial_x \partial_y u + \frac{3}{4}\, \partial_y^2 u\right) a^2, \end{aligned}$$

según $a \to 0$. A continuación introducimos en las ecuaciones del movimiento Hu/a^2, $(4T - H)u/a^2$ y $(D_1 - D_2)u/(\sqrt{3}a^2)$ en lugar de $\partial_x^2 u$, $\partial_y^2 u$ y $\partial_x \partial_y u$, respectivamente, con reemplazos análogos para las derivadas de v. Como resultado, obtenemos las siguientes ecuaciones en cada punto del retículo:

$$\begin{aligned}\rho_2 a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 4\mu\, Tu + (\lambda+\mu)\, Hu + \frac{\lambda+\mu}{\sqrt{3}}\,(D_1 - D_2)v,\\ \rho_2 a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 4(\lambda+2\mu)\, Tv - (\lambda+\mu) Hv + \frac{\lambda+\mu}{\sqrt{3}}\,(D_1 - D_2)u.\end{aligned}$$

19. *Consideremos un retículo hexagonal plano con constante de red a. Las ecuaciones de Navier isotrópicas tienen soluciones singulares*

$$\begin{aligned}u &= \frac{a}{2\pi}\left[\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{xy}{2(1-\nu)(x^2+y^2)}\right],\\ v &= \frac{a}{2\pi}\left[-\frac{1-2\nu}{4(1-\nu)}\ln\left(\frac{x^2+y^2}{b^2}\right) + \frac{y^2}{2(1-\nu)(x^2+y^2)}\right],\end{aligned}$$

donde $\nu = \lambda/[2(\lambda+\mu)]$ para todo a. Elegimos (x_0, y_0) distinto de los puntos del retículo y resolvemos una versión amortiguadad de las ecuaciones de Navier discretas formuladas en el ejercicio anterior. Cómo esperas que evolucione el sistema empezando de la condición inicial $(u(x-x_0, y-y_0), v(x-x_0, y-y_0))$?

Tomado de [38]. Las ecuaciones amortiguadas tienen la forma

$$\begin{aligned}\rho_2 a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma\frac{\partial u}{\partial t} &= 4\mu\, Tu + (\lambda+\mu)\, Hu + \frac{\lambda+\mu}{\sqrt{3}}\,(D_1 - D_2)v,\\ \rho_2 a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \gamma\frac{\partial v}{\partial t} &= 4(\lambda+2\mu)\, Tv - (\lambda+\mu) Hv + \frac{\lambda+\mu}{\sqrt{3}}\,(D_1 - D_2)u,\end{aligned}$$

con $\gamma > 0$. Esperamos que el sistema relaje a una configuración estacionaria que se comporta como $(u(x-x_0, y-y_0), v(x-x_0, y-y_0))$ a una cierta distancia de (x_0, y_0). Estas soluciones representan defectos en el retículo que generan los campos elásticos elegidos.

3 Ecuaciones Diferenciales en Diferencias

1. *Consideramos la ecuación diferencial en diferencias $u_n'(t) = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} - A\sin(u_n)$, donde A es un parámetro positivo. Demostrar que existe una solución monótona tal que $u_{-\infty} = 0$ y $u_\infty = 2\pi$ con $u_0 = \pi$ y $u_n - \pi = \pi - u_{-n}$ para todo n.*

   Tomado de [14]. Ponemos $u_0 = \pi$ y variamos u_1 en el intervalo $(\pi, 2\pi)$ para encontrar la solución. La condición $u_0 = \pi$ garantiza que $u_n - \pi$ es una función impar de n. Elegimos $\epsilon > 0$ para que $-A\sin(u) > \epsilon(u-\pi)$ si $\pi < u \leq \frac{3}{2}\pi$ y escogemos N grande para que $\epsilon(N-1) > 1$. A continuación, elegimos $u_1 - \pi$ pequeño para que $u_j \leq \frac{3}{2}\pi$ si $1 \leq j \leq N$. Deseamos mostrar que bajo esas condiciones la secuencia finita $\{u_1, \ldots, u_N\}$

no es monótona creciente. Denotamos $U_n = u_n - \pi$. Si $\{U_1, \ldots, U_N\}$ es monótona creciente cuando $2 \leq j \leq N$ y $U_j \leq (2-\epsilon)U_{j-1} - U_{j-2}$. Sumando estas desigualdades obtenemos $U_N - U_{N-1} \leq \epsilon \sum_{i=2}^{-N-1} U_i + (1-\varepsilon)U_1$. Como asumimos que $U_i \geq U_1$ si $2 \leq i \leq N$, nuestra cota inferior sobre N implica $U_N < U_{N-1}$, lo que es contradictorio. Por tanto hemos mostrado que si U_1 es suficientemente pequeño, la secuencia empieza a decrecer antes de cruzar π. Por otra parte, eligiendo $U_1 > \pi$ la secuencia cruza π antes de decrecer. Nótese que la secuencia crece hasta un primer N tal que $U_N = \pi$, si $U_{N+1} > \pi$. Si, al final hay un N tal que la secuencia crece hasta $n = N$, con $U_N < \pi$, y $U_N = U_{N+1}$, entonces $U_{N+2} < U_{N+1}$ así que la secuencia decrece antes de alcanzar π.

2. *Sean $U_i(t)$ y $L_i(t)$, $i \in \mathbb{Z}$ dos sucesiones diferenciables tales que*

$$U_i'(t) - d_1(U_i)(U_{i+1} - U_i) - d_2(U_i)(U_{i-1} - U_i) - f(U_i) \geq$$
$$L_i'(t) - d_1(L_i)(L_{i+1} - L_i) - d_2(L_i)(L_{i-1} - L_i) - f(L_i)$$

y $U_i(0) < L_i(0)$ para todo i, siendo f, $d_1 > 0$ y $d_2 > 0$ funciones Lipschitz continuas. Entonces, $U_i(t) > L_i(t)$ para $t > 0$ y $i \in \mathbb{Z}$.

Tomado de [15]. Procedemos por reducción al absurdo, Sea $W_i(t) = U_i(t) - L_i(t)$. En $t = 0$, $W_i(0) > 0$ para todo i. Asumimos que W_i cambia de signo tras un tiempo mínimo $t_1 > 0$, para algún valor de i, $i = k$. Entonces $W_k(t_1) = 0$ y $W_k'(t) \leq 0$, cuando $t \to t_1$. Mostremos que ésto es contradictorio. En $t = t_1$, debe haber un índice m (igual o distinto de k) tal que $W_m(t_1) = 0$, mientras que su vecino $W_{m+j}(t_1) > 0$ (j es 1 o -1), y $W_i(t_1) = 0$ para todos los índices k y m. En otro caso, W_k debiera ser igual a 0 para todo k. La desigualdad diferencial implica

$$W_m'(t_1) \geq d_1(U_m(t_1))W_{m+1}(t_1) + d_2(U_m(t_1))W_{m-1}(t_1) > 0.$$

Esto contradice el hecho de que $W_m'(t)$ debiera ser no positiva cuando $t \to t_1$, si queremos que $W_m(t_1)$ se anule.

3. *Consideremos la ecuación*

$$U'(t) = z_1(F/A) + z_3(F/A) - 2U(t) - A\sin(U(t)) + F,$$

con$|F| < A$, $A >> 1$, siendo $z_1(F/A) < z_2(F/A) < z_3(F/A)$ tres ceros consecutivos de la ecuación $\sin(z) = F/A$ en un periodo. Probar que existe un umbral crítico F_c tal que esta ecuación tiene tres soluciones constantes estables si $0 \leq F < F_c$, pero una si $F > F_c$. Caracterizar F_c.

Tomado de [18]. Cuando $F = 0$, $z_1(0) = 0$, $z_2(0) = \pi$ y $z_3(0) = 2\pi$. Hemos de resolver

$$2z + A\sin(z) = F + 2\text{arcsin}(F/A) + 2\pi.$$

Según F crece desde 0, seguimos encontrando tres soluciones $z_1(F/A) < z_2(F/A) < z_3(F/A)$ que continuan esas ramas hasta que $F + 2\text{arcsin}(F/A) +$

2π alcanza el primer máximo local de $2z + A\sin(z)$ (A es grande). El valor F_c en el cual ocurre ésto se caracteriza por la existencia de un cero doble, un valor u_0 tal que $2 + A\cos(u_0) = 0$ y $2u_0 + A\sin(u_0) = F_c + 2\text{arcsin}(F_c/A) + 2\pi$. Entonces, $u_0 = \arccos(-2/A)$ y F_c es la solución de $2u_0(A) + A\sin(u_0(A)) = F_c + 2\text{arcsin}(F_c/A) + 2\pi$. Por debajo de F_c hay tres ceros. En F_c dos de ellos colisonan. Por encima de F_c, los dos ceros que colisionan, $z_1(F/A)$ y $z_2(F/A)$ se pierden.

$z_1(F/A)$ y $z_3(F/A)$ son estables mientras existen. Esta situación se corresponde con la presencia de una bifurcación nodo-silla en el sistema, véase [18].

4. *El sistema de ecuaciones*

$$\frac{dE_i}{dt} + \frac{v(E_i)}{\nu}(E_i - E_{i-1}) - \frac{D(E_i)}{\nu}(E_{i+1} - 2E_i + E_{i-1}) = J - v(E_i),$$

con $i \in \mathbb{Z}$ admite soluciones de tipo ondas viajeras de la forma $E_i(t) = E(i - ct)$ que se propagan a velocidad constante c cuando el parámetro J es suficientemente grande. Suponemos que v, D son funciones positivas y $\nu > 0$ es grande. La función v es una cúbica, crece desde 0 hasta un máximo local, decrece a un mínimo local positivo y crece hasta el infinito. Justificar que la velocidad del frente de onda escala como $(J - J_c)^{1/2}$, donde J_c es el umbral para la existencia de ondas viajeras.

Tomado de [20]. Para ν grande, podemos construir soluciones estacionarias, que se pueden aproximar por

$$E_i \sim z_1(J) \quad i < 0, \quad E_i \sim z_3(J) \quad i > 0,$$

cuando $|J| < J_c$, mientras que E_0 es una solución de

$$J - v(E_0) - \frac{v(E_0)}{\nu}(E_0 - z_1(J)) + \frac{D(E_0)}{\nu}(z_3(J) - 2E_0 + z_1(J)) = 0,$$

donde $z_1(J) < z_2(J) < z_3(J)$ verifican $J = v(z)$. Al alcanzar un valor J_c, $z_1(J_c) = z_2(J_c)$, perdiéndose cuando $J > J_c$, de modo que sólo persiste $z_3(J)$. La ecuación reducida

$$\frac{dE_0}{dt} = J - v(E_0) - \frac{v(E_0)}{\nu}(E_0 - z_1(J)) + \frac{D(E_0)}{\nu}(z_3(J) - 2E_0 + z_1(J)),$$

para el punto de unión de las colas constantes experimenta una bifurcación de tipo nodo-silla en J_c cuya forma normal

$$\phi' = \alpha(J_c)(J - J_c) + \beta(J_c)\phi^2,$$

tiene soluciones tipo $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}(J - J_c)}\tan(\sqrt{\alpha\beta(J - J_c)}(t - t_0))$. Estas funciones explotan cuando el argumento de la tangente se aproxima a $\pm\pi/2$, en un tiempo $t - t_0 \sim \pi/\sqrt{\alpha\beta(J - J_c)}$. El valor J_c separa el régime en el cual se observan frentes de onda estancionarios (anclados) y frentes de onda viajeros.

Tomando $J > J_c$ próximo aJ_c, las simulaciones muestran perfiles escalonados, en los que un punto permanece cerca del desaparecido equilibrio $E_0(J_c)$ hasta que se mueve siguiendo la curva tangente definida por la forma normal y la posición próxima a $E_0(J_c)$ la toma otro punto contiguo. Este proceso de va repitiendo secuencialmente. La velocidad de la onda es el recíproco del tiempo que tarda esta transición $c(J,\nu) \sim \frac{\sqrt{\alpha\beta(J-J_c)}}{\pi}$, véase [20] para detalles.

5. *Consideramos un problema con ruido*

$$\frac{du_i}{dt} = u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} + F - A\sin(u_i) + \gamma\xi_i,$$

donde $A > 0$ *toma valores grandes y* $\gamma > 0$ *caracteriza la magnitud del desorden en el sistema, mientras que* ξ_i *es una variable aleatoria de media nula que toma valores en el intervalo* $(-1, 1)$ *de forma equiprobable. Probar que la velocidad de los frentes viajeros para* F *mayor que un valor crítico* F_c^* *escala como* $(F - F_c^*)^{3/2}$.

Tomado de [22]. Fijando $\gamma = 0$, podemos repetir con esta ecuación el estudio que hemos hecho en el ejercicio anterior y obtener un velocidad que escala como $(F - F_c)^{1/2}$. Sin embargo, al añadir ruido, para cada realización del ruido, el umbral F_c se desplaza ligeramente por el ruido. La velocidad que se observa es la media de las velocidades obtenidas para un número elevado de realizaciones. Si tenemos

$$|c_R| \sim \frac{1}{\pi}\sqrt{\alpha(F_c)\beta(F_c)(F - F_c) + \gamma\beta(F_c)\xi_0}$$

la media es

$$\bar{c} = \frac{1}{N}\sum_{R=1}^{N}|c_R| = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(\alpha\beta(F - F_c) + \gamma\beta\xi)^{1/2}d\xi \sim (F - F_c^*)^{3/2}$$

donde el nuevo valor crítico es $F_c^* = F_c - \frac{\gamma}{\alpha}$.

6. *Consideremos el problema*

$$\frac{du_i}{dt} = u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} + F - A\sin(u_i),$$

con A *grande. Sean* $z_1(F/A) < z_2(F/A) < z_3(F/A)$ *las tres ramas consecutivas de ceros de* $F - A\sin(z) = 0$ *que empiezan en* $z_1(0) = 0$, $z_2(0) = \pi$, $z_3(0) = 2\pi$. *Sabemos que si* $|F| < F_c(A)$ *el problema admite soluciones estacionarias que crecen de* $z_1(F/A)$ *en* $-\infty$ *a* $z_3(F/A)$ *en* ∞. *Cuando* F *supera ese umbral, tenemos ondas viajeras. Escribe la ecuación para estas ondas viajeras y encuentra una fórmula para la velocidad.*

Tomado de [24]. Las soluciones de tipo onda viajera tienen la estructura $u_i(t) = u(i-ct)$, donde c es la velocidad de onda constante y $u(z)$, $z = i-ct$ es un perfil de onda, que es solución de

$$-cu_z(z) = u(z+1) - 2u(z) + u(z-1) + F - A\sin(u(z)), \quad z \in \mathbb{R}$$

con $u(-\infty) = z_1(F/A)$ y $u(\infty) = z_3(F/A)$. Ese tipo de ondas viajeras se llaman frentes. Multiplicando la ecuación por u_z e integrando, obtenemos

$$-c\int_{-\infty}^{\infty} u_z^2\,dz = F\left[z_3(F/A) - z_1(F/A)\right].$$

7. *El modelo de Fitz Hugh-Nagumo discreto es un modelo típico de la propagación de pulsos*

$$\begin{aligned}\epsilon u_i' = d(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + u_i(2-u_i)(u_i - a) - v_i,\\ v_i' = u_i - Bv_i.\end{aligned}$$

donde los parámetros $\epsilon, d > 0$ *y* a *con tales que* $(0,0)$ *es la única solución constante.* ϵ *es pequeño y* a *es tal que* $z(2-z)(z-a)$ *tiene tres raíces* $z_1(a) < z_2(a) < z_3(a)$. *Explica la evolución de los pulsos en términos de soluciones tipo frente de ecuaciones de Nagumo*

$$\epsilon u_i' = d(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + u_i(2-u_i)(u_i - a) - w.$$

Tomado de [25]. Las soluciones tipo pulso tienen la forma $u_i(t) = u(z)$, $v_i(t) = v(z)$, $z = i - ct \in \mathbb{R}$, with

$$\begin{aligned}-c\epsilon u_z(z) = d(u(z+1) - 2u(z) + u(z-1)) + u(z)(2-u(z))(a-u(z)) - v,\\ -cv_z(z) = 0,\end{aligned}$$

con $z \in \mathbb{R}$. Para v pequeño, denotamos por $z_1(a,v) < z_2(a,v) < z_3(a,v)$ las tres raíces de $u(z)(2-u(z))(a-u(z)) - v = 0$. Como ϵ es pequeño, u_i y v_i evolucionan en escalas de tiempo distintas. Se distinguen 5 regiones en el perfil del pulso

- Parte frontal: $u_i = z_1(a, v_i)$ y $v_i' = z_1(a, v_i) - Bv_i$, que evoluciona a $(0,0)$ según i crece.
- Frente delantero: Descrito por soluciones viajeras de $\epsilon u_i' = d(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + u_i(2-u_i)(u_i - a) - 0$ que decrecen de 2 a 0, con $v_i \sim 0$. Viaja a velocidad c.
- Pico: $u_i = z_2(a, v_i)$ y $v_i' = z_3(a, v_i) - Bv_i$.
- Frente transero: Descrito por una solución viajera de $\epsilon u_i' = d(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + u_i(2-u_i)(u_i - a) - w$ que crece de valores próximos a 0 a valores próximos a 2, con $v_i \sim w$, w selecionado de modo que viaja con velocidad c también.

- Cola: $u_i = z_1(a, v_i)$ y $v_i' = z_1(a, v_i) - Bv_i$, que se aproxima a $(0, 0)$ según i decrece.

Véase [25] para una visualización. Véase [32] para una aplicación de estas ideas a modelos de tipo Hodgkin-Huxley para nervios mielinados. Las soluciones de tipo pulso no se pueden propagar cuando los parámetros de la ecuación reducida que describe el frente delantero son tales que sólo admite frentes estacionarios.

8. *Sea $u_{i,j}(t)$ una solución de*

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} = u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j} + A(\sin(u_{i,j-1} - u_{i,j})\sin(u_{i,j+1} - u_{i,j}))$$

para $i, j \in \mathbb{Z}$ y $u_{i,j}(0) = \alpha_{i,j}$ tales que $\alpha_{i+1,j} - 2\alpha_{i,j} + \alpha_{i-1,j} \in l^2$, $\sin(\alpha_{i,j-1} - \alpha_{i,j})\sin(\alpha_{i,j+1} - \alpha_{i,j}) \in l^2$ y $\alpha_{i,j} \in l^\infty_{\text{loc}}$. Si $(u_{i,j+1} - u_{i,j})(t) \in \cap_{n\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$ se cumple para todo i, j, t, entonces $u_{i,j}(t)$ tiene a un límite $s_{i,j}$ cuando $t \to 0$ que es una solución estacionaria del problema.

Tomado de [23]. Definimos $w_{i,j}(t) = u_{i,j}(t+\tau) - u_{i,j}(t)$ para algún $\tau > 0$. Entonces

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j}|w_{i,j}(t)|^2\right) = -\sum_{i,j}((w_{i+1,j} - w_{i,j})(t))^2 - \sum_{i,j}(\sin((u_{i,j+1} - u_{i,j})(t+\tau))$$
$$- \sin((u_{i,j+1} - u_{i,j})(t)))((u_{i,j+1} - u_{i,j})(t+\tau) - (u_{i,j+1} - u_{i,j})(t)) \leq 0.$$

Esto implica $w_{i,j}(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ para todo i, j. Concluimos que $u_{i,j}(t)$ tiende a un límite $s_{i,j}$ que es una solución estacionaria.

9. *Resolvemos*

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} = u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j} + A(\sin(u_{i,j-1} - u_{i,j})\sin(u_{i,j+1} - u_{i,j}))$$

con condiciones de contorno $s_{i,j} = \theta(i, j/\sqrt{A}) + Fj$ donde θ es la función ángulo que varía de 0 a 2π y $F > 0$ es un parámetro de control. Dado $F = 0$, el ejercicio anterior garantiza la existencia de soluciones estacionarias. Puedes esperar un cambio a medida que F crece?

Tomado de[26]. A medida que F crece, la condición

$$(u_{i,j+1} - u_{i,j})(t) \in \cap_{n\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$$

deja de cumplirse. Las soluciones estacionarias desaparecen y aparecen patrones viajeros. Si linearizamos el operador espacial en torno a $s_{i,j}$, tenemos un problema elíptico discreto para F pequeño que cambia de tipo al crecer F.

10. *Construimos numéricamente soluciones de*

$$m\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} + \alpha\frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} = u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}$$
$$+A(\sin(u_{i,j-1} - u_{i,j})\sin(u_{i,j+1} - u_{i,j}))$$

en un retículo rectangular $i = 1, \dots, N_x$, $j = 1, \dots, N_y$, *con condiciones de contorno* $u_{i,j} = F(j - (N_y + 1)/2)$. *A medida que* F *crece observamos que la solución inicial para* $F = 0$ *va evolucionando a soluciones estacionarias que cambian lentamente al subir* F *hasta que alcanzamos un punto* F_c, *tras lo cual la estructura del retículo se distorsiona. Se observan dos tipos de distorsión distintos que coexisten. Linearizando en torno a la solución estacionaria en* $F = F_c$ *encontramos una matrix con un autovalor nulo, mientras que todos los autovalores eran negativos para* $F < F_c$. *Cómo explicas ésto?*

Tomado de [36]. La rama de soluciones estacionarias $s_{i,j}(F)$ parece estable. En $F = F_c$ aparecen dos nuevas ramas. estables. El sistema experimenta una bifurcación de tipo pitchfork.

11. *Dado el problema*

$$u_j'' + \alpha u_j' = u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1} + F - Ag(u_j),$$

donde $g(u) = u + 1$ *si* $u < 0$ *y* $g(u) = u - 1$ *si* $u > 0$, *construir soluciones de tipo onda viajera.*

Tomado de [27]. Una solución de tipo frente viajero toma la forma $u_i(t) = u(i - ct)+$, $z = i - ct$. El perfil $v(z) = u(z) + 1$ satisface

$$c^2 v_{zz}(z) - \alpha c v_z(z) - (v(z+1) - 2v(z) + v(z-1)) + Av(z)$$
$$= F + 2AH(-\mathrm{sign}(cF)z), \quad z \in \mathbb{R},$$

con $v(-\infty) = 0$ y $v(\infty) = 2$. Hemos tomado $g(u) = u + 1 - 2H(u)$, donde u es la función de Heaviside. Usando la expresión como integral de contorno de la función de Heaviside

$$H(-z) = -\frac{1}{2\pi\imath}\int_C \frac{e^{\imath kx}}{k}dk.$$

C es un contorno formado por un semicírculo cerrado en el semiplano complejo superior y orientado en el sentido contrario de las agujas del reloj, más otro semicírculo cerrado en el semiplano complejo inferior y orientado en el sentido de las agujas del reloj, que incluye dentro el origen y forma un pequeño semicírculo por encima de él. El perfil que buscamos viene dado por la expresión

$$v(z) = \frac{F}{A} - \frac{A}{\pi\imath}\int_C \frac{\exp(\imath k \mathrm{sign}(cF)z)dk}{k\,A + 4\sin^2(k/2) - k^2c^2 - \imath k|c|\alpha\mathrm{sign}(F)}.$$

Imponiendo $v(0) = 1$, obtenemos una relación entre la velocidad c y la fuerza aplicada F. Conocido $c(F)$, esta expresión proporciona los perfiles v. A diferencia de ejercicios anteriores, tales ejercicios no son monótonos, sino que presentan oscilaciones, véase [27].

12. *Probar que el problema de valores iniciales*

$$
\begin{aligned}
u_j'' + \alpha u_j' = d(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) - u_j + F,\\
u_j(0) = u_j^0, \quad u_j'(0) = u_j^1,
\end{aligned}
$$

$d > 0$, $\alpha \geq 0$, *admite soluciones de la forma*

$$
u_j(t) = \sum_k [G_{j,k}^0(t) u_k'(0) + G_{j,k}^1(t) u_k(0)] + \int_0^t \sum_k G_{j,k}^0(t-s) f_k(s) ds
$$

para funciones de Green adecuadas $G_{j,k}^0$ *y* $G_{j,k}^1$.

Tomado de [28]. En primer lugar, eliminamos el operador en diferencias usando funciones generatrices $p(\theta, t)$ y $f(\theta, t)$

$$
p(\theta, t) = \sum_j u_j(t) e^{-\imath j\theta}, \quad f(\theta, t) = \sum_j f_j(t) e^{-\imath j\theta}.
$$

Diferenciando p con respecto a t y usando la ecuación, vemos que $p(\theta, t)$ es solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$
p''(\theta, t) + \alpha p'(\theta, t) + \omega(\theta)^2 p(\theta, t) = f(\theta, t)
$$

con $\omega(\theta)^2 = 1 + 4d \sin^2(\theta/2)$ y con condiciones iniciales para p obtenidas de las condiciones para u_j. Fijado θ, sabemos cómo calcular soluciones explícitas de esta ecuación linear de segundo orden con coeficientes constantes

$$
p(\theta, t) = p(\theta, 0) g^0(\theta, t) + p'(\theta, 0) g^1(\theta, t) + \int_0^t g^1(\theta, t-s) f(\theta, s) ds,
$$

con

$$
g^0(\theta, t) = \begin{cases} \frac{e^{r_+(\theta)t} - e^{r_-(\theta)t}}{r_+(\theta) - r_-(\theta)}, & \alpha^2/4 > \omega^2(\theta), \\ t e^{-\alpha t/2}, & \alpha^2/4 = \omega^2(\theta), \\ e^{-\alpha t/2} \frac{\sin(I(\theta)t)}{I(\theta)}, & \alpha^2/4 < \omega^2(\theta), \end{cases}
$$

$$
g^1(\theta, t) = \begin{cases} \frac{e^{r_+(\theta)t} r_+(\theta) - e^{r_-(\theta)t} r_-(\theta)}{r_+(\theta) - r_-(\theta)}, & \alpha^2/4 > \omega^2(\theta), \\ t e^{-\alpha t/2} \left(1 + \frac{\alpha}{2} t\right), & \alpha^2/4 = \omega^2(\theta), \\ e^{-\alpha t/2} \left(\cos(I(\theta)t) + \frac{\alpha \sin(I(\theta)t)}{2I(\theta)}\right), & \alpha^2/4 < \omega^2(\theta). \end{cases}
$$

Recuperamos u_j como

$$
u_j(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{\imath j\theta} p(\theta, t),
$$

lo que conduce a

$$G^0_{jk}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{\imath(j-k)\theta} g^0(\theta,t), \quad G^1_{jk}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{\imath(j-k)\theta} g^1(\theta,t).$$

13. *Consideramos el sistema*

$$\begin{aligned} v_j' &= d(v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}) + f(v_j, w_j), \\ w_j' &= \lambda g(v_j, w_j), \end{aligned}$$

con $d, \lambda > 0$ y λ pequeõ, de modo que las dos variables evolucionan en escalas de tiempo distintas. Fijado w, $f(v,w)$ es una cúbica biestable, es decir, tiene tres ceros, dos de los cuales son estables para la primera ecuación con $w_j = w$. Cuando las ecuaciones $f(v,w) = 0 = g(v,w)$ tienen una única solución, que es estable, tenemos soluciones de tipo pulso del sistema de ecuaciones diferenciales, como ocurre para Fitz Hugh-Nagumo. Cuando es inestable, argumenta por qué a menudo se observan oscilaciones.

Tomado de[33]. Cuando g y f se cortan en un cero estable, tenemos un sistema excitable con soluciones de tipo pulso. Cuando se cortan en un cero inestable, soluciones de tipo ciclo límite $(V(t), W(t))$ con periodo T, $T > 0$ de

$$v' = f(v,w), \quad w' = \lambda g(v,w),$$

aparecen para λ pequeño. Las trayectorias del sistema se comportan como $v_j(t) = V(t + \phi_j)$ y $w_j(t) = W(t + \phi_j)$, para una fase ϕ_j que varía lentamente y puede hacerse independiente del tiempo cuando $t \to \infty$. Todas las trayectorias se sincronizan.

14. *Consideremos el problema de valores iniciales*

$$\begin{aligned} u_j'' &= d(u_{j+1} - (2+r)u_j + u_{j-1}) + f(u_j), \quad j = 1, \dots, N \\ u_j(0) &= u_j^0, \quad u_j'(0) = u_j^1, \quad j = 1, \dots, N \\ u0(t) &= u_{N+1}(t) = 0, \end{aligned}$$

para una función continua f. Denotamos $V(u) = -\int_0^u f(s)ds$. Suponemos que $uf(u) + 2(2\sigma+1)V(u) \geq 0$ para $\sigma > 0$. Definimos la energía

$$E(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j'^2(t) + \frac{d}{2} \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} [(u_{j+1} - u_j)^2(t) + r u_j^2(t)] + \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} V(u_j(t)).$$

Si $E(0) < 0$, entonces $\sum_{j=1}^N |u_j(t)|^2 \to \infty$ cuando $t \to T$ para algún $T > 0$ finito.

Tomado de [29]. Definimos $H(t)=\sum_{j=1}^{N}|u_j(t)|^2+\rho(t+\tau)^2$, con $\rho,\sigma>0$ a elegir de modo que $(H^{-\sigma})''=\sigma H^{-\sigma-2}((\sigma+1)(H')^2-HH'')\leq 0$. Cuando $H(0)\neq 0$ tenemos

$$H^{\sigma}(t)\geq H^{\sigma+1}(0)(H(0)-\sigma t H'(0))^{-1}$$

y $H(t)$ explota en tiempo finito para algún $T\leq H(0)/\sigma H'(0)$ supuesto que $H'(0)>0$.

Veamos cómo hacer ésto. Calculamos H' y H'', y usamos la ecuación para obtener

$$HH''-(\sigma+1)(H')^2=4(\sigma+1)Q+2HG,$$

$$Q=\left(\sum_{j=1}^{N}|u_j|^2+\rho(t+\tau)^2\right)\left(\sum_{j=1}^{N}|u_j'|^2+\rho\right)-\left(\sum_{j=1}^{N}u_ju_j'+\rho(t+\tau)\right)^2,$$

$$G=\sum_{j=1}^{N}u_jf(u_j)-\sum_{i,j}u_ia_{i,j}u_j-(2\sigma+1)\left(\sum_{j=1}|u_j'|^2+\rho\right),$$

donde $\mathbf{A}=(a_{ij})$ es la matriz que define la parte lineal del sistema. Tenemos $Q\geq 0$. Estimamos $G'(t)$ y concluimos que $G(t)\geq\sigma(2\sigma+1)\left(-\frac{\rho}{2}-E(0)\right)\geq 0$ si $\rho=-2E(0)>0$.

Tenemos $(H^{-\sigma})''\leq 0$ y $H(0)\neq 0$. Además, $H'(0)=2\sum_{j=1}^{N}u_j^0u_j^1+2\rho\tau>0$ si $\tau>-\rho^{-1}\sum_{j=1}^{N}u_j^0u_j^1$.

15. *Consideremos las ecuaciones de Becker-Döring*

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\rho_k=\rho>0,$$
$$\rho_k'=j_{k-1}-j_k,\ k\geq 2,$$
$$j_k=d_k(e^{aD_+\epsilon_k}\rho_1\rho_k-\rho_{k+1})$$

para una sucesión dado $\epsilon_k>0$ *con* $D_+\epsilon_k=\epsilon_{k+1}-\epsilon_k$*, con* a *y* ρ *positivos, y constantes. Calcula las distribuciones de equilibrio.*

Tomado de [30]. Imponemos $j_k=0$. Entonces $\rho_k=\rho_1^k e^{a\epsilon_k}$ es la solución de equilibrio. Este sistema admite ondas viajeras cuya descripción es compleja, ver [30].

Referencias

[1] A Carpio Rodriguez, M Comte, R Lewandoski, A nonexistence result for a nonlinear equation involving critical Sobolev exponent, Annales de l'Institut Henri Poincaré - Analyse Non linéaire, 9(3), 243-261, 1992

[2] A. Carpio, Sharp estimates of the energy for the solutions of some dissipative second order evolution equations, Potential Analyis 1(3), 265-289, 1992

[3] A. Carpio, Existence de solutions globales rétrogrades pour des équations des ondes non linéaires dissipatives, Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique, 316(8), 803-808, 1993

[4] A. Carpio, Comportement asymptotique des solutions des équations du tourbillon en dimensions 2 et 3, Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique, 316(12), 1289-1294, 1993

[5] A. Carpio, Asymptotic behavior for the vorticity equations in dimensions two and three, Communications in partial differential equations 19 (5-6), 827-872, 1994

[6] A. Carpio, Unicité et comportement asymptotique pour des équations de convection-diffusion scalaires, Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique 319 (1), 51-56, 1994

[7] A. Carpio, Comportement asymptotique dans les équations de Navier-Stokes, Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique 319 (3), 223-228, 1994

[8] A. Carpio, Existence of global-solutions to some nonlinear dissipative wave-equations, Journal de mathématiques pures et appliquées 73 (5), 471-488, 1994

[9] A. Carpio, Large time behaviour in convection-diffusion equations, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze 23 (3), 551-574, 1996

[10] A. Carpio, Large-time behavior in incompressible Navier-Stokes equations, SIAM Journal on Mathematical Analysis 27 (2), 449-475, 1996

[11] A Carpio, SJ Chapman, SD Howison, JR Ockendon, Dynamics of line singularities, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 355(1731), 2013-2024, 1997

[12] A. Carpio, Long-time behaviour for solutions of the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck equation, Mathematical methods in the applied sciences 21 (11), 985-1014, 1998

[13] A Carpio, SJ Chapman, On the modelling of instabilities in dislocation interactions, Philosophical Magazine B 78 (2), 155-157, 1998

[14] A Carpio, SJ Chapman, S Hastings, JB McLeod, Wave solutions for a discrete reaction-diffusion equation, European Journal of Applied Mathematics 11 (4), 399-412, 2000

[15] A Carpio, LL Bonilla, A Wacker, E Schöll, Wave fronts may move upstream in semiconductor superlattices, Physical Review E 61 (5), 4866, 2000

[16] A Carpio, P Hernando, M Kindelan, Numerical study of hyperbolic equations with integral constraints arising in semiconductor theory, SIAM Journal on Numerical Analysis 39 (1), 168-191, 2001

[17] A Carpio, SJ Chapman, JJL Velázquez, Pile-up solutions for some systems of conservation laws modelling dislocation interaction in crystals, SIAM Journal on Applied Mathematics 61 (6), 2168-2199, 2001

[18] A Carpio, LL Bonilla, Wave front depinning transition in discrete one-dimensional reaction-diffusion systems, Physical Review Letters 86 (26), 6034, 2001

[19] G Duro, A Carpio, Asymptotic profiles for convection–diffusion equations with variable diffusion, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 45 (4), 407-433, 2001

[20] A Carpio, LL Bonilla, G Dell'Acqua, Motion of wave fronts in semiconductor superlattices, Physical Review E 64 (3), 036204, 2001

[21] A Carpio, E Cebrian, FJ Mustieles, Long time asymptotics for the semiconductor Vlasov-Poisson-Boltzmann equations, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences 11 (09), 1631-1655, 2001

[22] A Carpio, LL Bonilla, A Luzón, Effects of disorder on the wave front depinning transition in spatially discrete systems, Physical Review E 65 (3), 035207, 2002

[23] A Carpio, Wavefronts for discrete two-dimensional nonlinear diffusion equations, Applied Mathematics Letters 15 (4), 415-421, 2002

[24] A Carpio, LL Bonilla, Depinning transitions in discrete reaction-diffusion equations, SIAM Journal on Applied Mathematics 63 (3), 1056-1082, 2003

[25] A Carpio, LL Bonilla, Pulse propagation in discrete systems of coupled excitable cells, SIAM Journal on Applied Mathematics 63 (2), 619-635, 2003

[26] A Carpio, LL Bonilla, Edge dislocations in crystal structures considered as traveling waves in discrete models, Physical Review Letters 90 (13), 135502, 2003

[27] A Carpio, LL Bonilla, Oscillatory wave fronts in chains of coupled nonlinear oscillators, Physical Review E 67 (5), 056621, 2003

[28] A Carpio, Nonlinear stability of oscillatory wave fronts in chains of coupled oscillators, Physical Review E 69 (4), 046601, 2004

[29] A Carpio, G Duro, Instability and collapse in discrete wave equations, Computational Methods in Applied Mathematics 5 (3), 223-241, 2005

[30] JC Neu, LL Bonilla, A Carpio, Igniting homogeneous nucleation, Physical Review E 71 (2), 021601, 2005

[31] A Carpio, LL Bonilla, Discrete models of dislocations and their motion in cubic crystals, Physical Review B 71 (13), 134105, 2005

[32] A Carpio, Asymptotic construction of pulses in the discrete Hodgkin-Huxley model for myelinated nerves, Physical Review E 72 (1), 011905, 2005

[33] A Carpio, Wave trains, self-oscillations and synchronization in discrete media, Physica D: Nonlinear Phenomena 207 (1-2), 117-136, 2005

[34] LL Bonilla, A Carpio, JC Neu, WG Wolfer, Kinetics of helium bubble formation in nuclear materials, Physica D: Nonlinear Phenomena 222 (1-2), 131-140, 2006

[35] LL Bonilla, A Carpio, I Plans, Dislocations in cubic crystals described by discrete models, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 376, 361-377, 2007

[36] I Plans, A Carpio, LL Bonilla, Homogeneous nucleation of dislocations as bifurcations in a periodized discrete elasticity model, EPL (Europhysics Letters) 81 (3), 36001, 2008

[37] A Carpio, ML Rapún, Topological derivatives for shape reconstruction, In: Bonilla, L.L. (eds) Inverse Problems and Imaging. Lecture Notes in Mathematics, vol 1943. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008

[38] A Carpio, LL Bonilla, F de Juan, MAH Vozmediano, Dislocations in graphene, New Journal of Physics 10 (5), 053021, 2008

[39] A Carpio, ML Rapún, Solving inhomogeneous inverse problems by topological derivative methods, Inverse Problems 24 (4), 045014, 2008

[40] A Carpio, LL Bonilla, Periodized discrete elasticity models for defects in graphene, Physical Review B 78 (8), 085406, 2008

[41] A Carpio, ML Rapún, Domain reconstruction using photothermal techniques, Journal of Computational Physics 227 (17), 8083-8106, 2008