Ecuaciones en derivadas parciales avanzadas: Ejercicios

Ana Carpio, Universidad Complutense de Madrid

Enero, 2000

1. *Dado un conjunto acotado $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, cosideramos el problema: Encontrar $u > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} -\Delta u = u^p \quad & \mathbf{x} \in \Omega, \\ u = 0 \quad & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \\ u > 0 \quad & \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned}$$

Probar que hay una solución cuando $1 < p+1 < p^*$, dondep$^* = \infty$ si $n \leq 2$ y $p^* < \frac{2n}{n-2}$ cuando $n > 2$.

Consideremos el problema de minimización

$$I = \mathrm{Min}_{u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x}}{\int_\Omega |u|^{p+1} \, d\mathbf{x}} = \mathrm{Min}_{u \in H_0^1(\Omega)} J(u).$$

El funcional $J(u)$ a minimizar es positivo, por tanto, acotado inferioremente. Consideremos una sucesión minimizante $u_n \in H_0^1(\Omega)$, tal que $J(u_n) \to I$ a medida que $n \to \infty$. La sucesión $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{L^{p+1}}}$ es un sucesión minimizante que satisface $\|v_n\|_{L^{p+1}} = 1$. Entonces, $\int_\Omega |\nabla v_n|^2 d\mathbf{x} \to I$ implica quev_n está acotado en $H_0^1(\Omega)$ y v_n tiende débilmente en H_0^1 a un límite $v \in H_0^1(\Omega)$. Por las inyecciones de Sobolev, v_n es compacto en L^{p+1}, $p+1 < p^*$, por tanto, $v \in L^{p+1}(\Omega)$ y $\|v_n\|_{L^{p+1}} = 1 \to \|v\|_{L^{p+1}} = 1$. Por semicontinuidad inferior bajo convergencia débil, tenemos $J(v) \leq \lim_{n\to\infty} J(v_n) = I$. Como $v \in H_0^1(\Omega)$, se sigue que $I \leq J(v)$. Por tanto, $I = J(v)$ y se alcanza el mínimo en v. Además, podemos reemplazar v por $|v|$ y $J(|v|) \leq I(v)$, así que $w = |v| \geq 0$ es un minimizador también y $I = J(w)$. $w \neq 0$ porque $\|w\|_{L^{p+1}} = 1$.

Ahora bien, $J(w) \leq J(w + tr)$, $r \in H_0^1(\Omega)$ para t real. Un desarrollo asintótico primero para $t > 0$ y después para $t < 0$ conduce a

$$\int_\Omega \nabla w \nabla r \, d\mathbf{x} = c \int_\Omega w^p r \, d\mathbf{x}$$

para todo $r \in H_0^1(\Omega)$ con $c > 0$. Esto implica $-\Delta w = c\, w^p$. Para $u = c^{-1/(p-1)} w$ obtenemos $-\Delta u = u^p$ y $u \geq 0$, $u \neq 0$. Por el principio del máximo fuerte, $u > 0$.

Si $p+1 = p^* = \frac{2n}{n-2}$ y $n > 2$, la existencia de una solución depende de la geometría de Ω, véase [1].

2. *Dada una solución* $u \in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+, H^1_0(\Omega)) \cap W^{2,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+, L^2(\Omega))$ *of*

$$u_{tt} - \Delta u + \alpha |u_t|^{p-1} u_t = 0 \quad \text{in } L^\infty(\mathbf{R}^+, H^{-1}(\Omega))$$

con $\alpha > 0$, $1 < p$ *y* $p+1 < p^*$, *definimos*

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(\mathbf{x},t)|^2 \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_\Omega |u_t(\mathbf{x},t)|^2 \, d\mathbf{x}.$$

Entonces, para alguna constante positiva $C(E(0))$, *se tiene*

$$E(t) \le C(E(0)) t^{-2/(p-1)}, \quad t > 0.$$

Tomado de [2]. Definimos$\phi(t) = E^{(p-1)/2}\int_\Omega u u_t \, d\mathbf{x}$. A continuación, diferenciamos respecto a t para obtener

$$\begin{aligned} E'(t) &= -\alpha \int_\Omega |u_t|^{p+1} d\mathbf{x} \le 0, \\ \phi'(t) &= E(t)^{(p-1)/2}\left(\int_\Omega |u_t|^2 \, d\mathbf{x} - \int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} - \alpha \int_\Omega |u_t|^{p-1} u_t u d\mathbf{x}\right) \\ &\quad + \frac{p-1}{2} E(t)^{(p-3)/2} E'(t) \int_\Omega u u_t \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Primero, observamos que $E(t) \le E(0)$ y $-\int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} = -2E(t) + \int_\Omega |u_t|^2 \, d\mathbf{x}$. Además,

$$E(t)^{-1}\left|\int_\Omega u u_t \, d\mathbf{x}\right| \le E(t)^{-1}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega |u|^2 \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_\Omega |u_t|^2 \, d\mathbf{x}\right) \le C(\Omega)$$

para alguna constante positiva $C(\Omega)$ porque la desigualdad de Poincaré implica $\frac{1}{2}\int_\Omega |u|^2 \, d\mathbf{x} \le \frac{\lambda(\Omega)}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x}$. Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} \phi'(t) &\le 2E(t)^{(p-1)/2}\int_\Omega |u_t|^2 \, d\mathbf{x} - \alpha E(t)^{(p-1)/2}\int_\Omega |u_t|^{p-1} u_t u d\mathbf{x} \\ &\quad - 2E(t)^{(p+1)/2} - \frac{p-1}{2} C(\Omega) E(0)^{(p-1)/2} E'(t). \end{aligned}$$

Ahora definimos $\psi_\varepsilon(t) = (1 + K_1\varepsilon)E(t) + \varepsilon\phi(t)$ con $K_1 = \frac{p-1}{2} C(\Omega) E(0)^{(p-1)/2}$. Obtenemos

$$\begin{aligned} \psi'_\varepsilon(t) &\le 2\varepsilon E(t)^{(p-1)/2}\int_\Omega |u_t|^2 \, d\mathbf{x} - \alpha\varepsilon E(t)^{(p-1)/2}\int_\Omega |u_t|^{p+1} d\mathbf{x} \\ &\quad - 2\varepsilon E(t)^{(p+1)/2} - \alpha \int_\Omega |u_t|^{p+1} d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Obsérvese que $\|u_t\|_{L^2}^2 \le \text{meas}(\Omega)^{(p-1)/(p+1)}(\int_\Omega |u_t|^{p+1})^{2/(p+1)}$. Por la desigualdad de Young obtenemos

$$\begin{aligned}
2\varepsilon E(t)^{\frac{(p-1)}{2}} \int_\Omega |u_t|^2\, d\mathbf{x} &\le 2\varepsilon \ \text{meas}(\Omega)^{\frac{p-1}{p+1}} E(t)^{\frac{p-1}{2}} \left(\int_\Omega |u_t|^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}} \\
&\le \varepsilon E(t)^{\frac{p+1}{2}} + \varepsilon\delta \int_\Omega |u_t|^{p+1}
\end{aligned}$$

para algún δ positivo que depende de Ω.

Gracias a las inyecciones de Sobolev para $p+1 < p^*$ obtenemos

$$\int_\Omega |u_t|^{p-1} u_t u\, d\mathbf{x} \le \left(\int_\Omega |u_t|^{p+1}\, d\mathbf{x}\right)^{\frac{p}{p+1}} \|u\|_{L^{p+1}} \le S(\Omega)\|u_t\|_{L^{p+1}}^p \|\nabla u\|_{L^2}.$$

Obsérvese que $\|\nabla u\|_{L^2} \le 2E(t)$. De la desigualdad de Young se sigue

$$\begin{aligned}
\varepsilon\alpha E(t)^{(p-1)/2} \int_\Omega |u_t|^{p-1} u_t u\, d\mathbf{x} &\le \varepsilon\alpha E(t)^{(p-1)/2} S(\Omega)\|u_t\|_{L^{p+1}}^p \|\nabla u\|_{L^2} \\
&\le \frac{\alpha}{2} \int_\Omega |u_t|^{p+1} + \varepsilon\eta(\varepsilon) E(t)^{(p+1)/2}
\end{aligned}$$

donde $\eta > 0$ depende de $E(0)$, Ω, α y ε, y tiende a cero a medida que ε tiende a cero. Sumando, obtenemos

$$\psi_\varepsilon'(t) \le (-\frac{\alpha}{2} + \varepsilon\delta) \int_\Omega |u_t|^{p+1} + \varepsilon(-1 + \eta(\varepsilon)) E(t)^{(p+1)/2}.$$

Por otra parte, para ε suficientemente pequeño,

$$\frac{1}{\varepsilon} E(t) \le (1 - K_2\varepsilon) E(t) \le \psi_\varepsilon(t) \le (1 + K_2\varepsilon) \le 2E(t).$$

Eligiendo ε suficientemente pequeño, concluimos que

$$\psi_\varepsilon'(t) \le -\frac{\varepsilon}{4} E^{(p+1)/2} \le -\frac{\varepsilon K_3}{4} \psi_\varepsilon(t)^{(p+1)/2}.$$

e integrando la desigualdad tenemos $E(t) \le C(E(0)) t^{-2/(p-1)}$ para $t > 0$.

3. *Probar que la función* $v(\mathbf{x}, t) = |t|^{\frac{p}{p-1}} \phi(\mathbf{x})$, $1 < p < p^* - 1$, *donde*

$$\begin{aligned}
-\Delta\phi = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p |\phi|^{p-1}\phi \quad & \mathbf{x} \in \Omega, \\
\phi = 0 \quad & \mathbf{x} \in \partial\Omega,
\end{aligned}$$

es una solución del problema parabólico retrógrado

$$\begin{aligned}
-\Delta v + |v_t|^{p-1} v_t = 0 \quad & \mathbf{x} \in \Omega \times (-\infty, 0], \\
v = 0 \quad & \mathbf{x} \in \partial\Omega \times (-\infty, 0].
\end{aligned}$$

Tomado de [3, 8]. Tenemos

$$
\begin{aligned}
v_t &= -\frac{p}{p-1}|t|^{\frac{1}{p-1}}\phi(\mathbf{x}), \\
|v_t|^{p-1}v_t &= -\left(\frac{p}{p-1}\right)^p |t|^{\frac{p}{p-1}}|\phi(\mathbf{x})|^{p-1}\phi(\mathbf{x}), \\
-\Delta v = -|t|^{\frac{p}{p-1}}\Delta\phi(\mathbf{x}) &= |t|^{\frac{p}{p-1}}\left(\frac{p}{p-1}\right)^p |\phi(\mathbf{x})|^{p-1}\phi(\mathbf{x}),
\end{aligned}
$$

así que la ecuación se cumple. La existencia de ϕ se sigue de la teoría de puntos críticos.

4. *Consideremos la ecuación de la vorticidad en dos dimensiones. Sea* $v = \operatorname{curl}\mathbf{u} \in C((0,\infty); W^{1,p}(\mathbf{R}^2))$, $1 \le p \le \infty$ *la solución de*

$$
\begin{aligned}
v_t - \Delta v + \mathbf{u}\cdot\nabla v &= 0, && \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^+ \\
v(\mathbf{x}, 0) &= v_0, && \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2,
\end{aligned}
$$

para un camp de velocidad u de divergencia nula (incompressible) y un dato inicial $v_0 \in L^1(\mathbf{R}^2)$. *Demostrar 1) que la masa* $\int_{\mathbf{R}^2} v_0\, d\mathbf{x}$ *no cambia con el tiempo y 2) que* $\|v(t)\|_{L^p(\mathbf{R}^2)} \le Ct^{-1+\frac{1}{p}}$ *for* $t > 0$.

Tomado de [4, 5]. Obsérvese que $\mathbf{u}\cdot\nabla v = \operatorname{div}(\mathbf{u}v) = 0$. integrando la ecuación, usando el teorema de la divergencia, y el hecho de que v se anula en el infinito tenemos

$$
\frac{d}{dt}\int_{\mathbf{R}^2} v_0\, d\mathbf{x} = 0.
$$

El vector velocidad viene dado por

$$
\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = K * v(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\frac{(-y_2, y_1)}{|\mathbf{y}|^2}v(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t)d\mathbf{y}
$$

donde el núcleo $K \in L^{2,\infty}$ y $\|K * v\|_{L^r} \le \|K\ \|_{L^{2,\infty}}\|v\|_{L^p}$ for $r > 2$, $1 < p < 2$, $1/r = 1/p - 1/2$.

Escribimos la expresión integral para la solución

$$
v(t) = G(t) * v_0 + \int_0^t \nabla G(t-s) * [v(s)\,\mathbf{K} * v(s)]ds,
$$

done $G(t)$ denota el núcleo del calor. Tomando normas obtenemos

$$
\|v(t)\|_{L^p} = \|G(t) * v_0\|_{L^p} + \int_0^t \|\nabla G(t-s) * [v(s)\,\mathbf{K} * v(s)]\|_{L^p}ds.
$$

El término integral decae más rápido que el resto, por tanto

$$
\|v(t)\|_{L^p} \sim \|G(t) * v_0\|_{L^p} \le Ct^{-1+\frac{1}{p}}.
$$

Sabemos que $G(t) * v_0$ es una solución de la ecuación del calor con dato inicial v_0 que pertenece a L^p para todo $1 \leq p \leq \infty$ y todo $t > 0$ si $v_0 \in L^1$. Además, $\|G(t) * v_0\|_{L^p} \leq \|G(t)\|_{L^p} \|v_0\|_{L^1}$ and $\|G(t)\|_{L^p} = Ct^{-1+\frac{1}{p}}$.

5. *Sea* $\mathbf{u}$ *una solución de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles en dos dimensiones con dato inicial* $\mathbf{u}_0 \in L^1 \cap L^2(\mathbf{R}^2)$ *tal que* $\mathrm{div}(\mathbf{u}_0) = 0$. *Entonces,* $\mathbf{u}(t) \in L^p(\mathbf{R}^2)$ *para* $1 \leq p \leq 2$ *y* $t > 0$.

   Tomado de[6, 10]. La teoría de soluciones clásicas con datos L^2, es decir, $\mathbf{u}_0 \in L^2(\mathbf{R}^2)$ garantiza que $\mathbf{u}(t) \in L^\infty([0,\infty); L^2(\mathbf{R}^2))$ y que está acotada por $\|\mathbf{u}_0\|_{L^2}$. Tomando la divergencia de las ecuaciones de Navier-Stokes

$$\mathbf{u}_t - \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla p, \quad \mathrm{div}(\mathbf{u}) = 0,$$

   obtenemos una ecuación para la presión

$$-\Delta p = \mathrm{div}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}).$$

   La presión viene dada entonces como la convolución $p = E_2 * \mathrm{div}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})$, donde E_2 es la solución fundamental de $-\Delta$ en $\mathbf{R}^2$, salvo por una función del tiempo. Por tanto, $\mathbf{u}$ satisface la ecuación integral

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) = G(t) * \mathbf{u}_0 + \int_0^t \partial_i G(t-s) * u_i \mathbf{u}(s) ds \\ + \int_0^t \partial_i G(t-s) * \partial_j \nabla E_2 * u_i u_j(s) ds, \end{aligned}$$

   donde ∂_i denota las derivadas parciales respecto x_i, u_i son las componentes de $\mathbf{u}$. Se usa la convención de suma respecto a índices repetidos. Como $u \in L^1$, $G(t) * u_0 \in L^q$ para todo $q > 1$ y $t > 0$. Por otra parte, $u(s) \in L^2$ implica que $u_i u_j(s) \in L^1$. Además,

$$\| \int_0^t \partial_i G(t-s) * u_i u_j(s) ds \|_{L^q} \leq C \int_0^t (t-s)^{-1+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \| \ \mathbf{u} \|_{L^2}^2 ds \leq C t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}$$

   para $1 \leq q < 2$. Por tanto, la primera integral pertenece a L^q si $1 \leq q < 2$. Consideremos ahora la segunda integral. Como $\partial_i G(t)$ pertenece a espacio de Hardy $\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^2)$ y $\partial_j \nabla E_2$ es un núcleo de Calderon-Zygmund, concluimos que $\partial_i G(t-s) * \partial_j \nabla E_2 \in L^1$ y

$$\|\partial_i G(t-s) * \partial_j \nabla E_2\|_{L^1} \leq C \|\partial_i G(t-s)_{\mathcal{H}^1} < C(t-s)^{\frac{-1}{2}}.$$

   Por tanto,

$$\| \int_0^t \partial_i G(t-s) * \partial_j \nabla E_2 * u_i u_j(s) ds \|_{L^1} \leq \int_0^t C(t-s)^{\frac{-1}{2}} \|\mathbf{u}(s)\|_{L^2}^2 ds \leq C t^{\frac{1}{2}}.$$

   De forma análoga, como $\partial_j \nabla E_2$ es un núcleo de Calderon-Zygmund, concluimos que $\partial_i G(t-s) * \partial_j \nabla E_2 \in L^q$, $1 < q < \infty$ y

$$\|\partial_i G(t-s) * \partial_j \nabla E_2\|_{L^q} \leq C \|\partial_i G(t-s)\|_{L^q} < C(t-s)^{-1+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}.$$

Por tanto,

$$\| \int_0^t \partial_i G(t-s) * \partial_j \nabla E_2 * u_i u_j(s) ds \|_{L^q} \leq \int_0^t C(t-s)^{-1+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}(s)\|_{L^2}^2 ds$$
$$\leq Ct^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}$$

para $1 < q \leq 2$.

6. *Consideramos la ecuación de convección-difusión*

$$u_t - \Delta u + \partial_y(|u|^{q-1}u) = 0$$

planteada en $\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+$, *con* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}, y)$. *Supongamos que* V *es una solución con dato inicial* $V_0 \in (L^1 \cap L^\infty)(\mathbf{R}^n)$ *yv es una solución con dato inicial* $v_0 \in (L^1 \cap L^\infty)(\mathbf{R}^n)$. *Supongamos que*

$$v, V \in C^1([0,T]; L^2(\mathbf{R}^2)) \cap L^\infty([0,T]; H^2(\mathbf{R}^2)) \cap L^\infty((0,T) \times \mathbf{R}^2)$$

para todo $T > 0$. *Entonces,* $v \leq V$.

Tomado de [7, 9]. La función $w = v - V$ satisface

$$w_t - \Delta w + \partial_y(|v|^{q-1}v) - \partial_y(|V|^{q-1}V) \leq 0$$

y $w(0) \leq 0$. Multiplicando la desigualdad por w^+ e integrando por partes tenemos

$$\frac{d}{dt} \int \frac{|w^+(t)|^2}{2} d\mathbf{x} + \int |\nabla w^+(t)|^2 d\mathbf{x} \leq \int a w^+(t) \partial_y w^+(t) d\mathbf{x}$$

donde $a(\mathbf{x}, t) = \frac{|v|^{q-1}v - |V|^{q-1}V}{v - V}$ es una función acotada. Integrando en t y aplicando la desigualdad de Young obtenemos

$$\frac{\|w^+(t)\|_2^2}{2} + \int_0^t \|\nabla w^+(s)\|_2^2 ds \leq K_1 \int_0^t \|w^+(s)\|_2^2 ds + \varepsilon \int_0^t \|\nabla w^+(s)\|_2^2 ds$$

para ε tan pequeño como sea necesario. Nótese que $w^+(0) = 0$. Aplicando la desigualdad de Gronwall a

$$\|w^+(t)\|_2^2 \leq 2K_1 \int_0^t \|w^+(s)\|_2^2 ds$$

obtenemos $w^+(t) = 0$.

7. *Una curva de vorticidad (vortex line)* Γ *en un fluido incompresible irrotacional y no viscoso es una solución de las ecuaciones*

$$\mathrm{div}(\mathbf{u}) = 0, \quad \mathrm{curl}(\mathbf{u}) = \omega_0 \delta_\Gamma(\mathbf{x}),$$

donde $\mathbf{u}$ *es la velocidad del fluido,* $\omega_0 = 2\pi\gamma$ *es la circulación alrededor del vórtice y* γ *es la fuerza del vórtice.* δ_Γ *es una función de Dirac 3D* *con soporte en Γ. Exprésese la solución en términos de una función de corriente vectorial.*

Tomado de [11]. Definimos la función de corriente $\mathbf{U}$ in $\mathbf{R}^3$ como la solución de $\operatorname{div}(\mathbf{U}) = 0$, $\operatorname{curl}(\mathbf{U}) = \mathbf{u}$. Entonces $-\Delta\mathbf{U} = \omega_0\delta_\Gamma(\mathbf{x})$. Usando la función de Green para el Laplaciano en $\mathbf{R}^3$ tomamos $\mathbf{U} = \frac{\omega_0}{4\pi}\int_\Gamma \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d\mathbf{x}'$.

8. *Sabemos que el problema*

$$\begin{aligned} g_t - \Delta_v g + \mathbf{v}\cdot\nabla_x g + \mathbf{E}(\mathbf{x},t)\cdot\nabla_v g = 0, \qquad & \mathbf{x}\in\mathbf{R}^3, \mathbf{v}\in\mathbf{R}^3, t\in\mathbf{R}^+,\\ g(\mathbf{x},\mathbf{v},0) = g_0(\mathbf{x},\mathbf{v}), \qquad & \mathbf{x}\in\mathbf{R}^3, \mathbf{v}\in\mathbf{R}^3, \end{aligned}$$

con $g_0 \in L^1(\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3)$ y con $\mathbf{E}$ acotado y Lipschitz admite soluciones fundamentales $\Gamma_\mathbf{E}$. La solución del problema de valores iniciales se puede expresar como

$$g(\mathbf{x},\mathbf{v},t) = \int \Gamma_\mathbf{E}(\mathbf{x},\mathbf{v},t;\mathbf{x}',\mathbf{v}',0)d\mathbf{x}'d\mathbf{v}',$$

donde $\Gamma_\mathbf{E}$ satisface las estimaciones

$$\begin{aligned} |\Gamma_\mathbf{E}(\mathbf{x},\mathbf{v},t;\mathbf{x}',\mathbf{v}',t')| &\le C(\|\mathbf{E}\|_{L^\infty_{\mathbf{x},t}},T)\, G(\mathbf{x}/2,\mathbf{v}/2,t;\mathbf{x}'/2,\mathbf{v}'/2,t'),\\ |\partial_{v_i}\Gamma_\mathbf{E}(\mathbf{x},\mathbf{v},t;\mathbf{x}',\mathbf{v}',t')| &\le C(\|\mathbf{E}\|_{L^\infty_{\mathbf{x},t}},T)\, \frac{G(\mathbf{x}/2,\mathbf{v}/2,t;\mathbf{x}'/2,\mathbf{v}'/2,t')}{(t-t')^{1/2}}, \end{aligned}$$

y G es la solución fundamental del problema con $\mathbf{E}=0$. Extiéndase este resultado a problemas en los que $\mathbf{E}$ está acotado.

Tomado de [12]. Regularizamos$\mathbf{E}$ por convolución y consideramos $\mathbf{E}_\delta = \mathbf{E}*\eta_\delta$ donde η_δ es una familia regularizante. Las funciones $\mathbf{E}_\delta$ son acotadas y Lipschitz, de modo que para cada una de ellas podemos construir soluciones g_δ del problema de valores iniciales y tenemos estimaciones sobre las soluciones fundamentales Γ_δ. Además, $\|\mathbf{E}_\delta\|_{L^\infty_{x,t}} \le \|\mathbf{E}\|_{L^\infty_{x,t}}$ y $\mathbf{E}_\delta \to \mathbf{E}$ a medida que $\delta\to 0$.

Como Γ_δ está acotada (localmente en t) en todo espacio L^p_{xvt} podemos extraer una subsucesión que converge débilmente (localmente en t) en todo L^p_{xvt} (débil estrella si $p=\infty$) a una función $\Gamma_\mathbf{E}$. Asimismo, podemos pasar al límite en el lado derecho de las expresiones integrales para las soluciones g_δ en términos de Γ_δ.

Por otra parte, las expresiones integrales implican que g_δ están uniformemente acotadas en cualquier espacio L^p_{xvt} con respecto a δ localmente en t. Por tanto, g_δ converge débilmente (localmente en t) en cualquier espacio L^p_{xvt} a una función g y sus derivadas también convergen en el sentido de las distribuciones.

En el sentido de las distribuciones, las derivadas de Γ_δ con respecto a $\mathbf{v}$ convergen débilmente a las derivadas de $\Gamma_\mathbf{E}$. Podemos pasar al límite en las desigualdades satisfechas por Γ_δ y establecer desigualdades similares para $\Gamma_\mathbf{E}$ porque $\|\mathbf{E}_\delta\|_{L^\infty_{x,t}} \le \|\mathbf{E}\|_{L^\infty_{x,t}}$.

Multiplicando la ecuación diferencial satisfecha por g_δ by g_δ obtenemos una cota L^2_{xvt} uniforme sobre $\nabla_v g_\delta$. Si multiplicamos la ecuación por $|\mathbf{v}|^2$ obtenemos una estimación uniforme en L^1_{xvt} sobre $|\mathbf{v}|^2 g_\delta$.

Multiplicando las ecuaciones diferenciales satisfechas por g_δ por funciones test, podemos pasar al límite en todos los términos de la formulación débil, excepto en $\mathbf{E}_\delta \nabla_v g_\delta$ con las convergencias ya establecidas. El paso al límite en este término es técnico, véanse detalles en [12]. Finalmente, g es solución del problema de valores iniciales con $\mathbf{E}$ acotado y $\Gamma_{\mathbf{E}}$ es una solución fundamental asociada.

9. *Consideramos la ecuación diferencial en diferencias $u_n'(t) = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} - A\sin(u_n)$, donde A es un parámetro positivo. Demostrar que existe una solución monótona tal que $u_{-\infty} = 0$ y $u_\infty = 2\pi$ con $u_0 = \pi$ y $u_n - \pi = \pi - u_{-n}$ para todo n.*

   Tomado de [14]. Ponemos $u_0 = \pi$ y variamos u_1 en el intervalo $(\pi, 2\pi)$ para encontrar la solución. La condición $u_0 = \pi$ garantiza que $u_n - \pi$ es una función impar de n. Elegimos $\epsilon > 0$ para que $-A\sin(u) > \epsilon(u - \pi)$ si $\pi < u \leq \frac{3}{2}\pi$ y escogemos N grande para que $\epsilon(N-1) > 1$. A continuación, elegimos $u_1 - \pi$ pequeño para que $u_j \leq \frac{3}{2}\pi$ si $1 \leq j \leq N$. Deseamos mostrar que bajo esas condiciones la secuencia finita $\{u_1, \ldots, u_N\}$ no es monótona creciente. Denotamos$U_n = u_n - \pi$. Si $\{U_1, \ldots, U_N\}$ es monótona creciente cuando $2 \leq j \leq N$ y $U_j \leq (2-\epsilon)U_{j-1} - U_{j-2}$. Sumando estas desigualdades obtenemos $U_N - U_{N-1} \leq \epsilon \sum_{i=2}^{-N-1} U_i + (1-\varepsilon)U_1$. Como asumimos que $U_i \geq U_1$ si $2 \leq i \leq N$, nuestra cota inferior sobre N implica $U_N < U_{N-1}$, lo que es contradictorio. Por tanto hemos mostrado que si U_1 es suficientemente pequeño, la secuencia empieza a decrecer antes de cruzar π. Por otra parte, eligiendo $U_1 > \pi$ la secuencia cruza π antes de decrecer. Nótese que la secuencia crece hasta un primer N tal que $U_N = \pi$, si $U_{N+1} > \pi$. Si, al final hay un N tal que la secuencia crece hasta $n = N$, con $U_N < \pi$, y $U_N = U_{N+1}$, entonces $U_{N+2} < U_{N+1}$ así que la secuencia decrece antes de alcanzar π.

10. *Sean $U_i(t)$ y $L_i(t)$, $i \in \mathbf{Z}$ dos sucesiones diferenciables tales que*

$$\begin{aligned} U_i'(t) - d_1(U_i)(U_{i+1} - U_i) - d_2(U_i)(U_{i-1} - U_i) - f(U_i) \geq \\ L_i'(t) - d_1(L_i)(L_{i+1} - L_i) - d_2(L_i)(L_{i-1} - L_i) - f(L_i) \end{aligned}$$

   y $U_i(0) < L_i(0)$ para todo i, siendo f, $d_1 > 0$ y $d_2 > 0$ funciones Lipschitz continuas. Entonces, $U_i(t) > L_i(t)$ para $t > 0$ y $i \in \mathbf{Z}$.

   Tomado de [15]. Procedemos por reducción al absurdo, Sea $W_i(t) = U_i(t) - L_i(t)$. En $t = 0$, $W_i(0) > 0$ para todo i. Asumimos que W_i cambia de signo tras un tiempo mínimo $t_1 > 0$, para algún valor de i, $i = k$. Entonces $W_k(t_1) = 0$ y $W_k'(t) \leq 0$, cuando $t \to t_1$. Mostremos que ésto es contradictorio. En $t = t_1$, debe haber un índice m (igual o distinto de k) tal que $W_m(t_1) = 0$, mientras que su vecino $W_{m+j}(t_1) > 0$ (j es 1 o

-1), y $W_i(t_1) = 0$ para todos los índices k y m. En otro caso, W_k debiera ser igual a 0 para todo k. La desigualdad diferencial implica

$$W'_m(t_1) \geq d_1(U_m(t_1))W_{m+1}(t_1) + d_2(U_m(t_1))W_{m-1}(t_1) > 0.$$

Esto contradice el hecho de que $W'_m(t)$ debiera ser no positiva cuando $t \to t_1$, si queremos que $W_m(t_1)$ se anule.

Referencias

[1] A Carpio Rodriguez, M Comte, R Lewandoski, A nonexistence result for a nonlinear equation involving critical Sobolev exponent, Annales de l'Institut Henri Poincaré - Analyse Non linéaire, 9(3), 243-261, 1992

[2] A. Carpio, Sharp estimates of the energy for the solutions of some dissipative second order evolution equations, Potential Analysis 1(3), 265-289, 1992

[3] A. Carpio, Existence de solutions globales rétrogrades pour des équations des ondes non linéaires dissipatives, Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique, 316(8), 803-808, 1993

[4] A. Carpio, Comportement asymptotique des solutions des équations du tourbillon en dimensions 2 et 3, Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique, 316(12), 1289-1294, 1993

[5] A. Carpio, Asymptotic behavior for the vorticity equations in dimensions two and three, Communications in partial differential equations 19 (5-6), 827-872, 1994

[6] A. Carpio, Unicité et comportement asymptotique pour des équations de convection-diffusion scalaires, Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique 319 (1), 51-56, 1994

[7] A. Carpio, Comportement asymptotique dans les équations de Navier-Stokes, Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique 319 (3), 223-228, 1994

[8] A. Carpio, Existence of global-solutions to some nonlinear dissipative wave-equations, Journal de mathématiques pures et appliquées 73 (5), 471-488, 1994

[9] A. Carpio, Large time behaviour in convection-diffusion equations, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze 23 (3), 551-574, 1996

[10] A. Carpio, Large-time behavior in incompressible Navier-Stokes equations, SIAM Journal on Mathematical Analysis 27 (2), 449-475, 1996

[11] A Carpio, SJ Chapman, SD Howison, JR Ockendon, Dynamics of line singularities, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 355(1731), 2013-2024, 1997

[12] A. Carpio, Long-time behaviour for solutions of the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck equation, Mathematical methods in the applied sciences 21 (11), 985-1014, 1998

[13] A Carpio, SJ Chapman, On the modelling of instabilities in dislocation interactions, Philosophical Magazine B 78 (2), 155-157, 1998

[14] A Carpio, SJ Chapman, S Hastings, JB McLeod, Wave solutions for a discrete reaction-diffusion equation, European Journal of Applied Mathematics 11 (4), 399-412, 2000

[15] A Carpio, LL Bonilla, A Wacker, E Schöll, Wave fronts may move upstream in semiconductor superlattices, Physical Review E 61 (5), 4866, 2000