

# Ejercicios de ecuaciones en derivadas parciales, técnicas de discretización y modelos discretos

Ana Carpio, Universidad Complutense de Madrid

Enero, 2024

## 1 Contenido

- Ecuaciones en Derivadas Parciales
  - Problemas elípticos: 1-11
  - Problemas hiperbólicos y leyes de conservación: 12-13, 23-26
  - Problemas parabólicos: 9, 17-22
  - Ecuaciones de Navier-Stokes y vorticidad: 14-16
  - Ecuaciones de la elasticidad: 27-28
- Ecuaciones integrodiferenciales: 1-5
- Técnicas de discretización
  - Técnicas de disparo para fronteras libres: 1
  - Diferencias finitas: 2-8
  - Métodos variacionales y optimización: 9-13
  - Desarrollos espectrales: 14
  - Métodos de partículas: 15
  - Discretizaciones de Voronoi: 16
  -
- Ecuaciones Diferenciales en Diferencias
  - Ondas de tipo frente, ancladas y viajeras: 2, 3-8
  - Ondas de tipo pulso, fallos de propagación, sincronización: 9-10
  - Problemas bidimensionales: 11-14
  - Problemas con inercia: 1, 15-17
  - Explosión en tiempo finito: 18-19
  - Modelos cinéticos: 20-21

Referencias

## 2 Ecuaciones en Derivadas Parciales

1. Consideramos el problema

$$\begin{cases} \nabla \cdot \gamma_e \nabla u = 0 & \text{in } \Omega \setminus \overline{\Omega_i}, & \nabla \cdot \gamma_i \nabla u = 0 & \text{in } \Omega_i, \\ u^- - u^+ = 0 & \text{on } \partial\Omega_i, & \gamma_i \nabla u^- \cdot \mathbf{n} - \gamma_e \nabla u^+ \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \partial\Omega_i, \\ \gamma_e \nabla u \cdot \mathbf{n} = j & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

con coeficientes positivos  $\gamma_e, \gamma_i$  y continuos hasta el borde. Suponemos que  $\Omega_i \subset \Omega$  son dominios con fronteras regulares. El vector normal unitario  $\mathbf{n}$  apunta hacia el exterior de  $\Omega_e$  y el interior de  $\Omega_i$ .  $u^-$  y  $u^+$  denotan los valores de  $u$  en  $\partial\Omega_i$  calculados como límites exteriores e interiores de  $\Omega_i$ , respectivamente. Podemos esperar que haya solución para cualquier  $j \in L^2(\partial\Omega)$ ? Podemos esperar unicidad de solución?

Tomado de [57]. Integrando sobre  $\Omega$  y aplicando el teorema de la divergencia, tenemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega_i}} \nabla \cdot \gamma_e \nabla u d\mathbf{x} + \int_{\Omega_i} \nabla \cdot \gamma_i \nabla u d\mathbf{x} \\ &= \int_{\partial\Omega} \gamma_e \nabla u \cdot \mathbf{n} d\ell = \int_{\partial\Omega} j d\ell = 0. \end{aligned}$$

Esto proporciona una restricción sobre la integral de  $j$  en el borde para ser capaz de construir soluciones. Satisfecha esta restricción, las soluciones no son únicas pues basta añadir cualquier constante para tener otra distinta.

2. Calcula la solución de

$$\begin{aligned} \Delta p + \lambda^2 p &= a \delta_\Gamma \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{N-1}{2}} \left( \frac{\partial p}{\partial r} - i\lambda p \right) &= 0, \quad r = |\mathbf{x}|, \end{aligned}$$

siendo  $\delta_\Gamma$  una delta de Dirac con soporte en una curva  $\Gamma$ .

Tomado de [63, 62]. La solución fundamental de la ecuación de Helmholtz  $\Delta G + \lambda^2 G = -\delta$  en todo el espacio que satisface esta condición en el infinito (la condición de radiación de Sommerfeld saliente) se conoce de forma explícita. La solución para esta fuente en particular se obtiene por convolución

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^N} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) a(\mathbf{y}) \delta_\Gamma(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \\ & \int_{\Gamma} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) a(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

3. Dada una función continua  $a$ , encontrar una solución explícita de la solución del problema

$$\begin{aligned} \Delta P(\mathbf{x}) + k_e^2 P(\mathbf{x}) &= a(\mathbf{x}) \delta_{\mathbf{x}_0} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \\ \lim_{r \rightarrow 0} r \left( \frac{\partial P}{\partial r} + ik_e P \right) &= 0, \quad r = |\mathbf{x}|, \quad \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Tomado de [69]. El conjugado complejo  $Q = \bar{P}$  satisface una ecuación de Helmholtz con condición de radiación saliente en el infinito:

$$\begin{aligned} \Delta Q(\mathbf{x}) + k_e^2 Q(\mathbf{x}) &= \overline{a(\mathbf{x})} \delta_{\mathbf{x}_0}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \\ \lim_{r \rightarrow 0} r \left( \frac{\partial Q}{\partial r} - ik_e Q \right) &= 0, \quad r = |\mathbf{x}|, \quad \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

La solución fundamental es  $F(\mathbf{x}) = \frac{e^{ik_e|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|}$ . Por tanto  $\bar{P} = -F * \bar{a} \delta_{\mathbf{x}_0}$ , siendo  $\delta_{\mathbf{x}_0}$  una delta de Dirac con soporte en  $\mathbf{x}_0$  y

$$P(\mathbf{x}) = -\frac{e^{-ik_e|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|} a(\mathbf{x}_0).$$

4. *Da una expresión explícita para la solución de*

$$\begin{aligned} \mathbf{curl}(\mathbf{curl} \mathbf{P}) - k_e^2 \mathbf{P} &= \mathbf{d}(\mathbf{x}) \delta_{\mathbf{x}_0} \quad \text{in } \mathbb{R}^3, \\ \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\mathbf{x}| |\mathbf{curl} \mathbf{P} \times \hat{\mathbf{x}} - ik_e \mathbf{P}| &= 0. \end{aligned}$$

Tomado de [77]. Tomamos la divergencia de la ecuación. Como  $\text{div}(\mathbf{curl} \mathbf{A}) = 0$  para cualquier vector  $\mathbf{A}$ , tenemos  $\text{div} \mathbf{P} = -\frac{1}{k_e^2} \text{div} \mathbf{d} \delta_{\mathbf{x}_0}$ . Haciendo uso de la identidad  $\mathbf{curl}(\mathbf{curl} \mathbf{P}) = \nabla(\text{div} \mathbf{P}) - \Delta \mathbf{P}$  resulta

$$-\Delta \mathbf{P} - k_e^2 \mathbf{P} = \delta_{\mathbf{x}_0} \mathbf{d} + \frac{1}{k_e^2} \nabla(\text{div} \mathbf{d} \delta_{\mathbf{x}_0}).$$

Podemos resolver la ecuación por convolución con la función de Green para la ecuación de Helmholtz:

$$\mathbf{P} = G_{k_e} * \mathbf{d} \delta_{\mathbf{x}_0} + \frac{1}{k_e^2} G_{k_e} * \nabla(\text{div} \mathbf{d} \delta_{\mathbf{x}_0}).$$

Obsérvese que el lado derecho se puede reescribir como  $G_{k_e} * \mathbf{d} \delta_{\mathbf{x}_0} + \frac{1}{k_e^2} G_{k_e} * [\mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{d} \delta_{\mathbf{x}_0} + \Delta \mathbf{d} \delta_{\mathbf{x}_0}]$ . Intercambiando las derivadas en la convolución tenemos

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \frac{1}{k_e^2} \mathbf{curl} \mathbf{curl} G_{k_e}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \mathbf{d}(\mathbf{x}_0).$$

para  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ .

5. *Dado un semicírculo  $\Omega$ , con frontera superior curvada  $\partial\Omega^+$  y frontera inferior recta  $\partial\Omega^-$ , consideramos el problema*

$$\begin{aligned} d\Delta c &= k_s \frac{c}{c + K_s}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ c &= c_0 > 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega^- \\ \frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega^+, \end{aligned}$$

con parámetros positivos  $d, k_s, K_s$ . Probar que este problema tiene una solución nonegativa  $c \in H^1(\Omega)$ .

Tomado de [60]. La solución  $c$  se puede construir como límite de soluciones de problemas linearizados  $c^{(m)}$

$$\begin{aligned} d\Delta c^{(m)} &= \frac{k_s}{c^{(m-1)} + K_s} c^{(m)}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ c^{(m)} &= c_0 > 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega^- \\ \frac{\partial c^{(m)}}{\partial \mathbf{n}} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega^+, \end{aligned}$$

empezando de  $c^{(0)} = c_0$ . El teorema de Lax Milgram implica la existencia de una solución única  $c^{(m)} \in H^1(\Omega)$ . Denotamos  $a_{m-1} = \frac{k_s}{c^{(m-1)} + K_s}$ . Multiplicamos la ecuación por la parte negativa de  $c^{(m)}$ ,  $c^{(m)-}$ , y obtenemos

$$d \int_{\Omega} |\nabla c^{(m)-}|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} a_{m-1} |c^{(m)-}|^2 d\mathbf{x} = 0,$$

pues  $\int_{\Omega} \frac{\partial c^{(m)}}{\partial \mathbf{n}} c_0^- d\ell = 0$ . Inicialmente,  $a_0 > 0$ . Por tanto,  $c^{(1)-} = 0$  y  $c^{(1)} \geq 0$ , lo que implica  $a_1$ . Por inducción, concluimos que  $c^{(m)} \geq 0$ ,  $a_m \geq 0$  y  $a_m \leq k_s/K_s$ . Escribiendo  $c^{(m)} = \tilde{c}^{(m)} + c_0$ , con  $\tilde{c}^{(m)} \in H_0^1(\Omega)$ , tenemos

$$\begin{aligned} d\Delta \tilde{c}^{(m)} &= a_{m-1} \tilde{c}^{(m)} + a_{m-1} c_0 \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ \tilde{c}^{(m)} &= 0 > 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega^- \\ \frac{\partial \tilde{c}^{(m)}}{\partial \mathbf{n}} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega^+. \end{aligned}$$

Multiplicando  $\tilde{c}^{(m)}$  e integrando, obtenemos

$$d \int_{\Omega} |\nabla \tilde{c}^{(m)}|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} a_{m-1} |\tilde{c}^{(m)}|^2 d\mathbf{x} = \int_{\Omega} a_{m-1} c_0 \tilde{c}^{(m)} d\mathbf{x}.$$

Usando la desigualdad de Poincaré,  $\|\tilde{c}^{(m)}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C(\Omega) \frac{k_s c_0}{K_s}$ . Gracias a las inyecciones de Sobolev, podemos extraer una sucesión que converge débilmente en  $H_0^1$ , fuertemente en  $L^2$  y puntualmente a un límite  $\tilde{c}$ . Pasando al límite en la ecuación,  $c = \tilde{c} + c_0 \geq 0$  es una solución del problema original.

6. Probar que la solución  $\Phi$  de la ecuación

$$-\frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) = n_D(x) - \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{1 + \exp(\epsilon(k) - \Phi(x))}$$

con  $\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dk dx}{1 + \exp(\epsilon(k) - \Phi(x))} = a$  fijado y  $\frac{d\Phi}{dx} \in L^2$  es única.

Tomado de [21]. Supongamos que tenemos dos soluciones  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  que satisfacen tales condiciones. Sea  $U = \Phi_1 - \Phi_2$ . Entonces,  $\frac{dU}{dx} \in L^2$  y

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{1 + \exp(\epsilon(k) - \Phi_1(x))} - \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{1 + \exp(\epsilon(k) - \Phi_2(x))}.$$

Supongamos primero que  $U(x) > 0$  en todas partes. Entonces

$$a = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dkdx}{1 + \exp(\epsilon(k) - \Phi_1(x))} > \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dkdx}{1 + \exp(\epsilon(k) - \Phi_2(x))} = a,$$

lo que es imposible.

Supongamos ahora que existe un único punto  $x_0$  en el cual  $U(x_0) = 0$ . Supongamos que  $U(x) < 0$  si  $x < x_0$  y  $U(x) > 0$  si  $x > x_0$  (se procede de forma análoga en otro caso). Entonces,  $\frac{d^2U}{dx^2} < 0$  si  $x < x_0$  y  $\frac{d^2U}{dx^2} < 0$  si  $x > x_0$ . Tenemos que  $\frac{dU}{dx}$  decrece si  $x < x_0$  y  $\frac{dU}{dx}$  crece si  $x > x_0$ . Por otra parte,

$$\int_{\mathbb{R}} \left( \frac{dU}{dx} \right)^2 dx = \int_{-\infty}^{x^*} \left( \frac{dU}{dx} \right)^2 dx + \int_{x^*}^{\infty} \left( \frac{dU}{dx} \right)^2 dx$$

es finito. Si existe  $x^*$  tal que  $\frac{dU(x^*)}{dx} > 0$  y  $x^* < x_0$  entonces  $\int_{-\infty}^{x^*} \left( \frac{dU}{dx} \right)^2 dx > \left( \frac{dU(x^*)}{dx} \right)^2 \int_{-\infty}^{x^*} dx = \infty$ . Esto es imposible, así que  $\frac{dU}{dx} \leq 0$  para todo  $x$  y  $U$  decrece. Esto contradice la hipótesis sobre  $x_0$ . Por tanto, debe haber al menos dos puntos  $x_0$  y  $x_1$  en los que  $U$  se anula.

Sean  $x_0$  y  $x_1$  tales que  $U(x_0) = U(x_1) = 0$ . Si  $x_M$  es tal que  $U(x_M) = \max \{U(x), x_0 \leq x \leq x_1\} > 0$ , entonces  $\frac{d^2U(x_M)}{dx^2} \leq 0$  porque el máximo se alcanza en un punto interior. Sin embargo,

$$0 \geq \frac{d^2U(x_M)}{dx^2} = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{1 + \exp(\epsilon(k) - \Phi_1(x_M))} - \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{1 + \exp(\epsilon(k) - \Phi_2(x_M))} > 0,$$

porque  $U(x_M) > 0$ . Por tanto,  $\max \{U(x), x_0 \leq x \leq x_1\} = 0$ . De forma análoga, concluimos que  $U(x_m) = \min \{U(x), x_0 \leq x \leq x_1\} = 0$ . Por tanto,  $U = 0$  en  $[x_0, x_1]$ .

Pongamos ahora  $x_0 = \min \{x \mid U(x) = 0\}$  y  $x_1 = \max \{x \mid U(x) = 0\}$ . Entonces,  $U(x) < 0$  para  $x < x_0$  y  $U(x) > 0$  para  $x > x_1$ . Repitiendo los argumentos anteriores obtendríamos  $x' \notin [x_0, x_1]$  tal que  $U(x') = 0$ . Esto contradice la definición de  $x_0$  y  $x_1$ . Por tanto,  $U = 0$  en todas partes, y  $\Phi_1 = \Phi_2$ .

7. Sean  $B_\varepsilon = B(\mathbf{x}, \varepsilon)$  bolas centradas en puntos  $\mathbf{x}$  con radio  $\varepsilon$ . Dada una función regular  $u(\mathbf{x})$ , sea  $v_\varepsilon$  la solución de

$$\begin{cases} \Delta v_\varepsilon + k^2 v_\varepsilon = 0, & \text{en } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_\varepsilon}, \\ v_\varepsilon = -u(\mathbf{x}), & \text{en } \partial B_\varepsilon, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} \left( \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial r} - ikv_\varepsilon \right) = 0. \end{cases}$$

Cuál es el comportamiento de  $\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \mathbf{n}}$  a medida que  $\varepsilon \rightarrow 0$ ?

Tomado de [47]. El operador Dirichlet–a–Neumann proporciona una expresión de la derivada normal de  $v_\varepsilon$  en  $\Gamma_\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{n}} v_\varepsilon(\mathbf{x} + \varepsilon(\cos \theta, \sin \theta)) \\ = \frac{k}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(H_{|n|}^{(1)})'(k\varepsilon)}{H_{|n|}^{(1)}(k\varepsilon)} \int_0^{2\pi} e^{in(\theta-\Theta)} u(\mathbf{x} + \varepsilon(\cos \Theta, \sin \Theta)) d\Theta \end{aligned}$$

en coordenadas polares, donde  $H_{|n|}^{(1)}$  denota la función de Hankel de primer orden  $|n|$ . Elegimos el vector normal  $\mathbf{n}$  apuntando hacia el interior de  $B_\varepsilon$ . Para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x} + \varepsilon(\cos \theta, \sin \theta)) = k \frac{(H_0^{(1)})'(k\varepsilon)}{H_0^{(1)}(k\varepsilon)} u(\mathbf{x}) + O(\varepsilon).$$

Para  $\varepsilon > 0$  pequeño, las funciones de Hankel se aproximan como

$$H_0^{(1)}(k\varepsilon) \sim \frac{-2 \log(k\varepsilon)}{\pi i}, \quad (H_0^{(1)})'(k\varepsilon) = -H_1^{(1)}(k\varepsilon) \sim \frac{-2}{\pi i k\varepsilon}.$$

Por tanto,

$$\frac{(H_0^{(1)})'(k\varepsilon)}{H_0^{(1)}(k\varepsilon)} \sim \frac{1}{k\varepsilon \log(k\varepsilon)},$$

$$\text{y } \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x} + \varepsilon(\cos \theta, \sin \theta)) \sim \frac{1}{\varepsilon \log(k\varepsilon)} u(\mathbf{x}).$$

8. Dado un conjunto acotado  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , consideramos el problema: Encontrar  $u > 0$  tal que

$$\begin{aligned} -\Delta u &= u^p & \mathbf{x} \in \Omega, \\ u &= 0 & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \\ u &> 0 & \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned}$$

Probar que hay una solución cuando  $1 < p + 1 < p^*$ , donde  $p^* = \infty$  si  $N \leq 2$  y  $p^* < \frac{2N}{N-2}$  cuando  $N > 2$ .

Consideremos el problema de minimización

$$I = \text{Min}_{u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 d\mathbf{x}}{\int_\Omega |u|^{p+1} d\mathbf{x}} = \text{Min}_{u \in H_0^1(\Omega)} J(u).$$

El funcional  $J(u)$  a minimizar es positivo, por tanto, acotado inferiormente. Consideremos una sucesión minimizante  $u_n \in H_0^1(\Omega)$ , tal que  $J(u_n) \rightarrow I$  a medida que  $n \rightarrow \infty$ . La sucesión  $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{L^{p+1}}}$  es un sucesión minimizante que satisface  $\|v_n\|_{L^{p+1}} = 1$ . Entonces,  $\int_\Omega |\nabla v_n|^2 d\mathbf{x} \rightarrow I$  implica que  $v_n$  está acotado en  $H_0^1(\Omega)$  y  $v_n$  tiende débilmente en  $H_0^1$  a

un límite  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Por las inyecciones de Sobolev,  $v_n$  es compacto en  $L^{p+1}$ ,  $p+1 < p^*$ , por tanto,  $v \in L^{p+1}(\Omega)$  y  $\|v_n\|_{L^{p+1}} = 1 \rightarrow \|v\|_{L^{p+1}} = 1$ . Por semicontinuidad inferior bajo convergencia débil, tenemos  $J(v) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} J(v_n) = I$ . Como  $v \in H_0^1(\Omega)$ , se sigue que  $I \leq J(v)$ . Por tanto,  $I = J(v)$  y se alcanza el mínimo en  $v$ . Además, podemos reemplazar  $v$  por  $|v|$  y  $J(|v|) \leq I(v)$ , así que  $w = |v| \geq 0$  es un minimizador también y  $I = J(w)$ .  $w \neq 0$  porque  $\|w\|_{L^{p+1}} = 1$ .

Ahora bien,  $J(w) \leq J(w + tr)$ ,  $r \in H_0^1(\Omega)$  para  $t$  real. Un desarrollo asintótico primero para  $t > 0$  y después para  $t < 0$  conduce a

$$\int_{\Omega} \nabla w \nabla r \, d\mathbf{x} = c \int_{\Omega} w^p r \, d\mathbf{x}$$

para todo  $r \in H_0^1(\Omega)$  con  $c > 0$ . Esto implica  $-\Delta w = c w^p$ . Para  $u = c^{-1/(p-1)} w$  obtenemos  $-\Delta u = u^p$  y  $u \geq 0$ ,  $u \neq 0$ . Por el principio del máximo fuerte,  $u > 0$ .

Si  $p+1 = p^* = \frac{2N}{N-2}$  y  $N > 2$ , la existencia de una solución depende de la geometría de  $\Omega$ , véase [1].

9. Probar que la función  $v(\mathbf{x}, t) = |t|^{\frac{p}{p-1}} \phi(\mathbf{x})$ ,  $1 < p < p^* - 1$ , donde

$$\begin{aligned} -\Delta \phi &= \left( \frac{p}{p-1} \right)^p |\phi|^{p-1} \phi & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \phi &= 0 & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

es una solución del problema parabólico retrógrado

$$\begin{aligned} -\Delta v + |v_t|^{p-1} v_t &= 0 & \mathbf{x} \in \Omega \times (-\infty, 0], \\ v &= 0 & \mathbf{x} \in \partial\Omega \times (-\infty, 0]. \end{aligned}$$

Tomado de [3, 8]. Tenemos

$$\begin{aligned} v_t &= -\frac{p}{p-1} |t|^{\frac{1}{p-1}} \phi(\mathbf{x}), \\ |v_t|^{p-1} v_t &= -\left( \frac{p}{p-1} \right)^p |t|^{\frac{p}{p-1}} |\phi(\mathbf{x})|^{p-1} \phi(\mathbf{x}), \\ -\Delta v &= -|t|^{\frac{p}{p-1}} \Delta \phi(\mathbf{x}) = |t|^{\frac{p}{p-1}} \left( \frac{p}{p-1} \right)^p |\phi(\mathbf{x})|^{p-1} \phi(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

así que la ecuación se cumple. La existencia de  $\phi$  se sigue de la teoría de puntos críticos.

10. Trabajamos en dominios variables  $\Omega^t$ , cuyas fronteras  $\Gamma^t$  se generan a partir de una curva  $\Gamma^0 \in C^2$  (dos veces diferenciable) según la familia de deformaciones  $\Gamma^t = \{\mathbf{x} + t \mathbf{V}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \Gamma^0\}$ , a lo largo de un campo

vectorial regular  $\mathbf{V} \in C^2(\Gamma^0)$ . Para  $t > 0$ , denotamos mediante  $u^t \in H^1(B_R)$  las soluciones de

$$\begin{aligned} b^t(\Omega^t; u^t, w) &= \ell(w), \quad \forall w \in H^1(B_R), \\ b^t(\Omega^t; u, w) &= \int_{B_R \setminus \bar{\Omega}^t} (\nabla_{\mathbf{x}^t} u \nabla_{\mathbf{x}^t} \bar{w} - \kappa_e^2 u \bar{w}) d\mathbf{x}^t - \int_{\Gamma_R} L u \bar{w} dS_{\mathbf{x}} \\ &\quad + \int_{\Omega^t} (\beta \nabla_{\mathbf{x}^t} u \nabla_{\mathbf{x}^t} \bar{w} - \beta \kappa_i^2 u \bar{w}) d\mathbf{x}^t, \quad \forall u, w \in H^1(B_R). \end{aligned}$$

Cambiamos variables para reformular los problemas en  $\Omega^0$ .

Tomado de [79]. Para  $t > 0$  pequeño,  $\Gamma^t \in C^2$  es una perturbación  $\Gamma^0$ . La deformación  $\mathbf{x}^t = \phi^t(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + t \mathbf{V}(\mathbf{x})$  lleva  $\Omega^0$  en  $\Omega^t$ . Para  $t$  pequeño,  $\phi^t$  es un difeomorfismo y su inversa  $\eta^t$  lleva  $\Omega^t$  en  $\Omega^0$ . El gradiente de deformación es el jacobiano del cambio de variables

$$\mathbf{J}^t(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \phi^t(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial x_i^t}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right) = \mathbf{I} + t \nabla \mathbf{V}(\mathbf{x}),$$

y su inversa  $(\mathbf{J}^t)^{-1} = \left( \frac{\partial x_i}{\partial x_j^t} \right)$  es el jacobiano de la inversa del cambio de variables. Los elementos de volumen y superficie están relacionados mediante

$$d\mathbf{x}^t = \det \mathbf{J}^t(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad dS_{\mathbf{x}^t} = \det \mathbf{J}^t(\mathbf{x}) \|(\mathbf{J}^t(\mathbf{x}))^{-T} \mathbf{n}\| dS_{\mathbf{x}},$$

y la regla de la cadena para las derivadas nos da  $\nabla_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}^t(\mathbf{x})) = (J^t(\mathbf{x}))^T \nabla_{\mathbf{x}^t} u(\mathbf{x}^t(\mathbf{x}))$ , that is,  $\nabla_{\mathbf{x}^t} u = (\mathbf{J}^t)^{-T} \nabla_{\mathbf{x}} u$ . Para cada componente tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x_\alpha^t}(\mathbf{x}^t(\mathbf{x})) = \frac{\partial u}{\partial x_k}(\mathbf{x}^t(\mathbf{x})) (J^t)_{k\beta}^{-1}(\mathbf{x}).$$

Definimos  $\hat{u}(\mathbf{x}) = u^t \circ \phi^t(\mathbf{x}) = u^t(\mathbf{x}^t(\mathbf{x}))$ . Cambiando variables tenemos

$$\begin{aligned} b_i^t(\Omega^t; u^t, w) &= \int_{\Omega^t} \left[ \beta \frac{\partial u^t}{\partial x_\alpha^t}(\mathbf{x}^t) \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_\alpha^t}(\mathbf{x}^t) - \beta \kappa_i^2 u^t(\mathbf{x}^t) \bar{w}(\mathbf{x}^t) \right] d\mathbf{x}^t = \\ &= \int_{\Omega^0} \beta \left[ \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_p}(\mathbf{x}) (J^t)_{p\alpha}^{-1}(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{w}}{\partial x_q}(\mathbf{x}) (J^t)_{q\alpha}^{-1}(\mathbf{x}) - \beta \kappa_i^2 \hat{u}(\mathbf{x}) \hat{w}(\mathbf{x}) \right] \det \mathbf{J}^t(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \hat{b}_i^t(\Omega^0; \hat{u}, \hat{w}). \end{aligned}$$

Una relación similar se tiene  $B_R \setminus \bar{\Omega}^t$  definiendo  $b_e^t(B_R \setminus \bar{\Omega}^t; u^t, w) = \hat{b}_e^t(B_R \setminus \bar{\Omega}^0; \hat{u}, \hat{w})$ . Por tanto, tenemos la formulación variacional equivalente: Encontrar  $\hat{u} \in H^1(B_R)$  tal que

$$\hat{b}^t(\Omega^0; \hat{u}, w) = \hat{b}_i^t(\Omega^0; \hat{u}, w) + \hat{b}_e^t(B_R \setminus \bar{\Omega}^0; \hat{u}, w) - \int_{\Gamma_R} L \hat{u} \bar{w} dS_{\mathbf{x}} = \ell(w),$$

para  $w \in H^1(B_R)$ .

11. Se considera el problema

$$\begin{aligned}
\mu\Delta\mathbf{u}_s + (\mu + \lambda)\nabla\operatorname{div}(\mathbf{u}_s) - \nabla p &= \Pi\nabla\phi_s, & \text{on } \Omega, \\
\mu\Delta\mathbf{v}_s + (\mu + \lambda)\nabla\operatorname{div}(\mathbf{v}_s) &= \nabla p', & \text{on } \Omega, \\
k_h\Delta p - \operatorname{div}(\mathbf{v}_s) &= 0, & \text{en } \Omega, \\
\Delta p' &= (2\mu + \lambda)\Delta e', & \text{en } \Omega, \\
p &= p_{\text{ext}}, \quad p' = p'_{\text{ext}} & \text{en } \Gamma, \\
\mathbf{u} &= 0, \quad \mathbf{v} = 0, & \text{en } \Gamma_-, \\
(\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u}_s) - (p + \Pi\phi_s)\mathbf{I})\mathbf{n} &= \mathbf{g}, \quad (\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{v}_s) - p'\mathbf{I})\mathbf{n} = \mathbf{g}', & \text{en } \Gamma_+,
\end{aligned}$$

con constantes positivas  $\mu, \lambda, k_h, \Pi$ , siendo  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ , un conjunto abierto y acotado con frontera  $\partial\Omega$  de regularidad  $C^4$ . Suponemos que  $\phi_s \in H^1(\Omega)$  y  $e' \in H^2(\Omega)$ . Prueba que tiene solución única y establece su regularidad.

Tomado de [86]. Denotamos por  $H_{0,-}^1(\Omega)$  el espacio de Sobolev formado por funciones  $H^1(\Omega)$  que se anulan en  $\Gamma_-$ . La ecuación para  $p'$  se desacopla del resto y nos proporciona una solución  $p' \in H^2(\Omega)$  por la teoría clásica de ecuaciones de Laplace. A continuación, la ecuación para  $\mathbf{v}$  es una ecuación de la elasticidad clásica que admite una única solución  $\mathbf{v}_s \in [H^2(\Omega)]^n \times [H_{0,-}^1(\Omega)]^n$ . Como la fuente  $\nabla p' \in [H^1(\Omega)]^n$ , la teoría de regularidad elíptica implica  $\mathbf{v}_s \in [H^3(\Omega)]^n$ . Por otra parte,  $\operatorname{div}(\mathbf{v}_s) \in H^2(\Omega)$  implica que la única solución  $p$  del problema de Poisson correspondiente tiene regularidad  $H^4(\Omega)$  gracias a la regularidad  $C^4$  de  $\partial\Omega$ . Finalmente, la ecuación para  $\mathbf{u}_s$  es un sistema de la elasticidad de tipo Naviere clásico con un segundo miembro en  $L^2$  y admite una única solución  $\mathbf{u}_s \in [H^2(\Omega)]^n \cap [H_{0,-}^1(\Omega)]^n$ .

12. Consideremos una membrana cuya desviación vertical respecto a un equilibrio plano viene dado por

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = d\Delta w - \kappa\Delta^2 w + f(x, y, t).$$

donde  $\rho, d, \kappa$  son constantes positivas. Esperarías que el sistema desarrollara patrones oscilatorios con una longitud de onda definida?

Tomado de [58]. El problema elíptico con condiciones de contorno nulas en un dominio rectangular admite una secuencia de autovalores positivos  $\lambda_{m,n}$  con autofunciones  $\phi_{m,n}$  dadas por combinaciones de senos y cosenos cuyo periodo depende del dominio espacial en el que se plantea y varía con el autovalor. Buscamos una solución en serie por separación de variables. El problema tiene soluciones de la forma

$$\sum_{n,m} a_{n,m}(t)\phi_{n,m}(x, y),$$

donde  $a_{n,m}(t)$  es solución de

$$a_{n,m}'' + \lambda_{n,m} a_{n,m} = f_{n,m},$$

es decir, una combinación de  $\sin(\sqrt{\lambda_{n,m}}t)$  y  $\cos(\sqrt{\lambda_{n,m}}t)$ . Hemos expresado  $f(x, y, t) = \sum_{n,m} f_{n,m}(t)\phi_{n,m}(x, y)$  como una serie de autofunciones. Modelos más complejos en los que  $w$  se acopla a ecuaciones de Navier para los desplazamientos en el plano y  $f$  viene dado por spins, or por expresiones funcionales dependientes de los desplazamientos en el plano, se usan para explicar la formación de ondulaciones en grafeno [59, 58, 54].

13. Dada una solución  $u \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega)) \cap W_{\text{loc}}^{2,\infty}(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$  of

$$u_{tt} - \Delta u + \alpha |u_t|^{p-1} u_t = 0 \quad \text{in } L^\infty(\mathbb{R}^+, H^{-1}(\Omega))$$

con  $\alpha > 0$ ,  $1 < p$  y  $p + 1 < p^*$ , definimos

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x}.$$

Entonces, para alguna constante positiva  $C(E(0))$ , se tiene

$$E(t) \leq C(E(0))t^{-2/(p-1)}, \quad t > 0.$$

Tomado de [2]. Definimos  $\phi(t) = E^{(p-1)/2} \int_{\Omega} uu_t d\mathbf{x}$ . A continuación, diferenciamos respecto a  $t$  para obtener

$$\begin{aligned} E'(t) &= -\alpha \int_{\Omega} |u_t|^{p+1} d\mathbf{x} \leq 0, \\ \phi'(t) &= E(t)^{(p-1)/2} \left( \int_{\Omega} |u_t|^2 d\mathbf{x} - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} - \alpha \int_{\Omega} |u_t|^{p-1} u_t u d\mathbf{x} \right) \\ &\quad + \frac{p-1}{2} E(t)^{(p-3)/2} E'(t) \int_{\Omega} uu_t d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Primero, observamos que  $E(t) \leq E(0)$  y  $-\int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} = -2E(t) + \int_{\Omega} |u_t|^2 d\mathbf{x}$ . Además,

$$E(t)^{-1} \left| \int_{\Omega} uu_t d\mathbf{x} \right| \leq E(t)^{-1} \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 d\mathbf{x} \right) \leq C(\Omega)$$

para alguna constante positiva  $C(\Omega)$  porque la desigualdad de Poincaré implica  $\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^2 d\mathbf{x} \leq \frac{\lambda(\Omega)}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mathbf{x}$ . Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} \phi'(t) &\leq 2E(t)^{(p-1)/2} \int_{\Omega} |u_t|^2 d\mathbf{x} - \alpha E(t)^{(p-1)/2} \int_{\Omega} |u_t|^{p-1} u_t u d\mathbf{x} \\ &\quad - 2E(t)^{(p+1)/2} - \frac{p-1}{2} C(\Omega) E(0)^{(p-1)/2} E'(t). \end{aligned}$$

Ahora definimos  $\psi_\varepsilon(t) = (1+K_1\varepsilon)E(t) + \varepsilon\phi(t)$  con  $K_1 = \frac{p-1}{2}C(\Omega)E(0)^{(p-1)/2}$ .  
Obtenemos

$$\begin{aligned}\psi'_\varepsilon(t) &\leq 2\varepsilon E(t)^{(p-1)/2} \int_{\Omega} |u_t|^2 d\mathbf{x} - \alpha\varepsilon E(t)^{(p-1)/2} \int_{\Omega} |u_t|^{p+1} d\mathbf{x} \\ &\quad - 2\varepsilon E(t)^{(p+1)/2} - \alpha \int_{\Omega} |u_t|^{p+1} d\mathbf{x}\end{aligned}$$

Obsérvese que  $\|u_t\|_{L^2}^2 \leq \text{meas}(\Omega)^{(p-1)/(p+1)} (\int_{\Omega} |u_t|^{p+1})^{2/(p+1)}$ . Por la desigualdad de Young obtenemos

$$\begin{aligned}2\varepsilon E(t)^{\frac{(p-1)}{2}} \int_{\Omega} |u_t|^2 d\mathbf{x} &\leq 2\varepsilon \text{meas}(\Omega)^{\frac{p-1}{p+1}} E(t)^{\frac{p-1}{2}} \left( \int_{\Omega} |u_t|^{p+1} \right)^{\frac{2}{p+1}} \\ &\leq \varepsilon E(t)^{\frac{p+1}{2}} + \varepsilon\delta \int_{\Omega} |u_t|^{p+1}\end{aligned}$$

para algún  $\delta$  positivo que depende de  $\Omega$ .

Gracias a las inyecciones de Sobolev para  $p+1 < p^*$  obtenemos

$$\int_{\Omega} |u_t|^{p-1} u_t u d\mathbf{x} \leq \left( \int_{\Omega} |u_t|^{p+1} d\mathbf{x} \right)^{\frac{p}{p+1}} \|u\|_{L^{p+1}} \leq S(\Omega) \|u_t\|_{L^{p+1}}^p \|\nabla u\|_{L^2}.$$

Obsérvese que  $\|\nabla u\|_{L^2} \leq 2E(t)$ . De la desigualdad de Young se sigue

$$\begin{aligned}\varepsilon\alpha E(t)^{(p-1)/2} \int_{\Omega} |u_t|^{p-1} u_t u d\mathbf{x} &\leq \varepsilon\alpha E(t)^{(p-1)/2} S(\Omega) \|u_t\|_{L^{p+1}}^p \|\nabla u\|_{L^2} \\ &\leq \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |u_t|^{p+1} + \varepsilon\eta(\varepsilon) E(t)^{(p+1)/2}\end{aligned}$$

donde  $\eta > 0$  depende de  $E(0)$ ,  $\Omega$ ,  $\alpha$  y  $\varepsilon$ , y tiende a cero a medida que  $\varepsilon$  tiende a cero. Sumando, obtenemos

$$\psi'_\varepsilon(t) \leq \left(-\frac{\alpha}{2} + \varepsilon\delta\right) \int_{\Omega} |u_t|^{p+1} + \varepsilon(-1 + \eta(\varepsilon)) E(t)^{(p+1)/2}.$$

Por otra parte, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño,

$$\frac{1}{\varepsilon} E(t) \leq (1 - K_2\varepsilon) E(t) \leq \psi_\varepsilon(t) \leq (1 + K_2\varepsilon) \leq 2E(t).$$

Eligiendo  $\varepsilon$  suficientemente pequeño, concluimos que

$$\psi'_\varepsilon(t) \leq -\frac{\varepsilon}{4} E^{(p+1)/2} \leq -\frac{\varepsilon K_3}{4} \psi_\varepsilon(t)^{(p+1)/2}.$$

e integrando la desigualdad tenemos  $E(t) \leq C(E(0))t^{-2/(p-1)}$  para  $t > 0$ .

14. Consideremos la ecuación de la vorticidad en dos dimensiones. Sea  $v = \text{curl } \mathbf{u} \in C((0, \infty); W^{1,p}(\mathbb{R}^2))$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  la solución de

$$\begin{aligned} v_t - \Delta v + \mathbf{u} \cdot \nabla v &= 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \\ v(\mathbf{x}, 0) &= v_0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

para un camp de velocidad  $u$  de divergencia nula (incompressible) y un dato inicial  $v_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ . Demostrar 1) que la masa  $\int_{\mathbb{R}^2} v_0 \, d\mathbf{x}$  no cambia con el tiempo y 2) que  $\|v(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq Ct^{-1+\frac{1}{p}}$  for  $t > 0$ .

Tomado de [4, 5]. Obsérvese que  $\mathbf{u} \cdot \nabla v = \text{div}(\mathbf{u}v) = 0$ . integrando la ecuación, usando el teorema de la divergencia, y el hecho de que  $v$  se anula en el infinito tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} v_0 \, d\mathbf{x} = 0.$$

El vector velocidad viene dado por

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = K * v(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(-y_2, y_1)}{|\mathbf{y}|^2} v(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) d\mathbf{y}$$

donde el núcleo  $K \in L^{2,\infty}$  y  $\|K * v\|_{L^r} \leq \|K\|_{L^{2,\infty}} \|v\|_{L^p}$  for  $r > 2$ ,  $1 < p < 2$ ,  $1/r = 1/p - 1/2$ .

Escribimos la expresión integral para la solución

$$v(t) = G(t) * v_0 + \int_0^t \nabla G(t-s) * [v(s) \mathbf{K} * v(s)] ds,$$

done  $G(t)$  denota el núcleo del calor. Tomando normas obtenemos

$$\|v(t)\|_{L^p} = \|G(t) * v_0\|_{L^p} + \int_0^t \|\nabla G(t-s) * [v(s) \mathbf{K} * v(s)]\|_{L^p} ds.$$

El término integral decae más rápido que el resto, por tanto

$$\|v(t)\|_{L^p} \sim \|G(t) * v_0\|_{L^p} \leq Ct^{-1+\frac{1}{p}}.$$

Sabemos que  $G(t) * v_0$  es una solución de la ecuación del calor con dato inicial  $v_0$  que pertenece a  $L^p$  para todo  $1 \leq p \leq \infty$  y todo  $t > 0$  si  $v_0 \in L^1$ . Además,  $\|G(t) * v_0\|_{L^p} \leq \|G(t)\|_{L^p} \|v_0\|_{L^1}$  and  $\|G(t)\|_{L^p} = Ct^{-1+\frac{1}{p}}$ .

15. Sea  $\mathbf{u}$  una solución de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles en dos dimensiones con dato inicial  $\mathbf{u}_0 \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^2)$  tal que  $\text{div}(\mathbf{u}_0) = 0$ . Entonces,  $\mathbf{u}(t) \in L^p(\mathbb{R}^2)$  para  $1 \leq p \leq 2$  y  $t > 0$ .

Tomado de [6, 10]. La teoría de soluciones clásicas con datos  $L^2$ , es decir,  $\mathbf{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$  garantiza que  $\mathbf{u}(t) \in L^\infty([0, \infty); L^2(\mathbb{R}^2))$  y que está acotada por  $\|\mathbf{u}_0\|_{L^2}$ . Tomando la divergencia de las ecuaciones de Navier-Stokes

$$\mathbf{u}_t - \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla p, \quad \text{div}(\mathbf{u}) = 0,$$

obtenemos una ecuación para la presión

$$-\Delta p = \operatorname{div}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}).$$

La presión viene dada entonces como la convolución  $p = E_2 * \operatorname{div}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})$ , donde  $E_2$  es la solución fundamental de  $-\Delta$  en  $\mathbb{R}^2$ , salvo por una función del tiempo. Por tanto,  $\mathbf{u}$  satisface la ecuación integral

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= G(t) * \mathbf{u}_0 + \int_0^t \partial_i G(t-s) * u_i \mathbf{u}(s) ds \\ &\quad + \int_0^t \partial_i G(t-s) * \partial_j \nabla E_2 * u_i u_j(s) ds, \end{aligned}$$

donde  $\partial_i$  denota las derivadas parciales respecto  $x_i$ ,  $u_i$  son las componentes de  $\mathbf{u}$ . Se usa la convención de suma respecto a índices repetidos. Como  $u \in L^1$ ,  $G(t) * u_0 \in L^q$  para todo  $q > 1$  y  $t > 0$ . Por otra parte,  $u(s) \in L^2$  implica que  $u_i u_j(s) \in L^1$ . Además,

$$\left\| \int_0^t \partial_i G(t-s) * u_i u_j(s) ds \right\|_{L^q} \leq C \int_0^t (t-s)^{-1+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}\|_{L^2}^2 ds \leq C t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}$$

para  $1 \leq q < 2$ . Por tanto, la primera integral pertenece a  $L^q$  si  $1 \leq q < 2$ . Consideremos ahora la segunda integral. Como  $\partial_i G(t)$  pertenece a espacio de Hardy  $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$  y  $\partial_j \nabla E_2$  es un núcleo de Calderon-Zygmund, concluimos que  $\partial_i G(t-s) * \partial_j \nabla E_2 \in L^1$  y

$$\|\partial_i G(t-s) * \partial_j \nabla E_2\|_{L^1} \leq C \|\partial_i G(t-s)\|_{\mathcal{H}^1} < C(t-s)^{-\frac{1}{2}}.$$

Por tanto,

$$\left\| \int_0^t \partial_i G(t-s) * \partial_j \nabla E_2 * u_i u_j(s) ds \right\|_{L^1} \leq \int_0^t C(t-s)^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}(s)\|_{L^2}^2 ds \leq C t^{\frac{1}{2}}.$$

De forma análoga, como  $\partial_j \nabla E_2$  es un núcleo de Calderon-Zygmund, concluimos que  $\partial_i G(t-s) * \partial_j \nabla E_2 \in L^q$ ,  $1 < q < \infty$  y

$$\|\partial_i G(t-s) * \partial_j \nabla E_2\|_{L^q} \leq C \|\partial_i G(t-s)\|_{L^q} < C(t-s)^{-1+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \partial_i G(t-s) * \partial_j \nabla E_2 * u_i u_j(s) ds \right\|_{L^q} &\leq \int_0^t C(t-s)^{-1+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}(s)\|_{L^2}^2 ds \\ &\leq C t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

para  $1 < q \leq 2$ .

16. Una curva de vorticidad (vortex line)  $\Gamma$  en un fluido incompresible irrotacional y no viscoso es una solución de las ecuaciones

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, \quad \operatorname{curl}(\mathbf{u}) = \omega_0 \delta_\Gamma(\mathbf{x}),$$

donde  $\mathbf{u}$  es la velocidad del fluido,  $\omega_0 = 2\pi\gamma$  es la circulación alrededor del vórtice y  $\gamma$  es la fuerza del vórtice.  $\delta_\Gamma$  es una función de Dirac 3D con soporte en  $\Gamma$ . Exprésese la solución en términos de una función de corriente vectorial.

Tomado de [11]. Definimos la función de corriente  $\mathbf{U}$  in  $\mathbb{R}^3$  como la solución de  $\text{div}(\mathbf{U}) = 0$ ,  $\text{curl}(\mathbf{U}) = \mathbf{u}$ . Entonces  $-\Delta\mathbf{U} = \omega_0\delta_\Gamma(\mathbf{x})$ . Usando la función de Green para el Laplaciano en  $\mathbb{R}^3$  tomamos  $\mathbf{U} = \frac{\omega_0}{4\pi} \int_\Gamma \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d\mathbf{x}'$ .

17. Definimos  $v^+(x, t) = u(x, t) + q^+(x, t)$  en  $(x_i, x_{i+1})$  siendo  $u$  una solución de

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - D_c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{u}{R} &= f^+, & x \in (x_i, x_{i+1}) &= (i, i+1), t > 0 \\ u(x_i, t) &= 0, \quad u(x_{i+1}, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= h^+(x, 0), \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} q^+(x, t) &= v_i(t) \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + v_{i+1}(t) \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \\ f^+(x, t) &= \frac{q^+(x, t)}{R} - \frac{\partial q^+}{\partial t}(x, t), \\ h^+(x, 0) &= v(x, 0) - q^+(x, 0). \end{aligned}$$

Obtén una expresión para  $v^+$ .

Tomado de [53]. Sean  $\lambda_i = D_c(i\pi)^2 + \frac{1}{R}$  y  $\phi_i(x) = \sin(\sqrt{\lambda_i}x) \left( \int_0^1 \sin(\sqrt{\lambda_i}x)^2 dx \right)^{-1}$  los autovalores y las autofunciones normalizadas del operador  $-D_c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{u}{R} = 0$  en  $(0, 1)$  con condiciones de contorno nulas. Desarrollamos  $f^+$  y  $h^+$  como series de Fourier de autofunciones

$$\begin{aligned} f^+(x, t) &= \sum_{i=0}^{\infty} f_i^+(t) \phi_i(x), & f_i^+(t) &= \int_0^1 f^+(z + x_i, t) \phi_i(z) dz, \\ h^+(x, 0) &= \sum_{i=0}^{\infty} h_i^+ \phi_i(x), & h_i^+ &= \int_0^1 h^+(z + x_i, 0) \phi_i(z) dz. \end{aligned}$$

La expresión que buscamos viene dada por

$$\begin{aligned} v^+(x, t) &= q^+(x, t) + \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_i t} h_i^+(t) \phi_i(x - x_i) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_i t} \phi_i(x - x_i) \int_0^t e^{\lambda_i s} f_i^+(s) ds, \end{aligned}$$

donde

$$f_i^+(t) = \left( \frac{v_i}{R} - \frac{dv_i}{dt} \right) \int_0^1 (1-z) \phi_i(z) dz + \left( \frac{v_{i+1}}{R} - \frac{dv_{i+1}}{dt} \right) \int_0^1 z \phi_i(z) dz.$$

18. Consideramos la ecuación de convección-difusión

$$u_t - \Delta u + \partial_y(|u|^{q-1}u) = 0$$

planteada en  $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ , con  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}, y)$ . Supongamos que  $V$  es una solución con dato inicial  $V_0 \in (L^1 \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n)$  y  $v$  es una solución con dato inicial  $v_0 \in (L^1 \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n)$ . Supongamos que

$$v, V \in C^1([0, T]; L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^\infty([0, T]; H^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^2)$$

para todo  $T > 0$ . Entonces,  $v \leq V$ .

Tomado de [7, 9]. La función  $w = v - V$  satisface

$$w_t - \Delta w + \partial_y(|v|^{q-1}v) - \partial_y(|V|^{q-1}V) \leq 0$$

y  $w(0) \leq 0$ . Multiplicando la desigualdad por  $w^+$  e integrando por partes tenemos

$$\frac{d}{dt} \int \frac{|w^+(t)|^2}{2} d\mathbf{x} + \int |\nabla w^+(t)|^2 d\mathbf{x} \leq \int a w^+(t) \partial_y w^+(t) d\mathbf{x}$$

donde  $a(\mathbf{x}, t) = \frac{|v|^{q-1}v - |V|^{q-1}V}{v - V}$  es una función acotada. Integrando en  $t$  y aplicando la desigualdad de Young obtenemos

$$\frac{\|w^+(t)\|_2^2}{2} + \int_0^t \|\nabla w^+(s)\|_2^2 ds \leq K_1 \int_0^t \|w^+(s)\|_2^2 ds + \varepsilon \int_0^t \|\nabla w^+(s)\|_2^2 ds$$

para  $\varepsilon$  tan pequeño como sea necesario. Nótese que  $w^+(0) = 0$ . Aplicando la desigualdad de Gronwall a

$$\|w^+(t)\|_2^2 \leq 2K_1 \int_0^t \|w^+(s)\|_2^2 ds$$

obtenemos  $w^+(t) = 0$ .

19. Probar que la solución de

$$z_t - \Delta z = \mathbf{d} \cdot \nabla(G^q), \quad z(0) = 0$$

se puede calcular en términos de núcleos del calor.

Tomado de [19]. Basta poner  $z = \mathbf{d} \cdot \nabla g$  con  $g_t - \Delta g = G^q$ ,  $g(0) = 0$ , es decir,

$$g(t) = \int_0^t G(t-s) * G^q(s) ds.$$

20. Expresar la solución del problema de transmisión del calor

$$\begin{cases} U_t - \kappa_e \Delta U = 0, & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}_i \times (0, \infty), \\ U_t - \alpha_i \kappa_i \Delta U = 0, & \text{en } \Omega_i \times (0, \infty), \\ U^- - U^+ = U_{\text{inc}}, & \text{en } \partial\Omega_i \times (0, \infty), \\ \alpha_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} U^- - \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} U^+ = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} U_{\text{inc}}, & \text{en } \partial\Omega_i \times (0, \infty), \\ U(\cdot, 0) = 0, & \text{en } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

en términos de problemas de Helmholtz usando transformadas de Laplace.

Tomado de [41]. Definimos  $u_{\text{inc}}$  y  $u$  como las transformadas de Laplace en tiempo de  $U_{\text{inc}}$  y  $U$ :

$$u_{\text{inc}}(\mathbf{x}, s) = \int_0^\infty e^{-st} U_{\text{inc}}(\mathbf{x}, t) dt, \quad u(\mathbf{x}, s) = \int_0^\infty e^{-st} U(\mathbf{x}, t) dt, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N.$$

Para cada valor de  $s$ , la función  $u_s(\mathbf{x}) := u(\mathbf{x}, s)$  es solución de

$$\begin{cases} \Delta u_s + \lambda_{s,e}^2 u_s = 0, & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega_i}, \\ \alpha_i \Delta u_s + \lambda_{s,i}^2 u_s = 0, & \text{en } \Omega_i, \\ u_s^- - u_s^+ = u_{\text{inc},s}, & \text{en } \Gamma, \\ \alpha_i \partial_{\mathbf{n}} u_s^- - \partial_{\mathbf{n}} u_s^+ = \partial_{\mathbf{n}} u_{\text{inc},s}, & \text{en } \Gamma, \end{cases}$$

donde  $\lambda_{s,e}^2 := -s/\kappa_e$ ,  $\lambda_{s,i}^2 := -s/\kappa_i$  y  $u_{\text{inc},s}(\mathbf{x}) := u_{\text{inc}}(\mathbf{x}, s)$ . Tomamos  $\Gamma = \partial\Omega_i$ . Este problema tiene una única solución que satisface la condición de radiación saliente de Sommerfeld en el infinito,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{(N-1)/2} (\partial_r u_s - i\lambda_{s,e} u_s) = 0, \quad r = |\mathbf{x}|,$$

para todo  $s \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ . Esta caracterización de  $u_s(\mathbf{x})$  se puede usar para definir y calcular  $u(\cdot, s)$  para todo  $s \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ .

La solución del problema original se recupera invirtiendo la transformada de Laplace:

$$U(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} e^{st} u(\mathbf{x}, s) ds.$$

Como  $u(\cdot, s)$  existe para todo  $s \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  y depende holomórficamente de  $s$ , son posibles diversas elecciones para el camino de inversión  $\mathcal{C}$ .

21. Dado un coeficiente acotado  $a \geq 0$ , toda solución positiva  $p$  del problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - \sigma \Delta_{\mathbf{xv}} p(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) + a(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) p(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) &= f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \\ p(0, \mathbf{x}, \mathbf{v}) &= p_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \end{aligned}$$

con  $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ ,  $t \in [0, \infty)$ ,  $a \in L^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}^+$ ,  $f \in L^\infty(0, \infty; L^\infty \cap L^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2))$  y  $p_0 \in L^\infty \cap L^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ , está acotada por arriba por una solución de la ecuación del calor con los mismos datos iniciales y fuente. Además, se tienen las siguientes estimaciones para  $q \in [1, \infty]$ :

$$\|p\|_q \leq \|p_0\|_q + t \max_{s \in [0, t]} \|f(s)\|_q, \quad (1)$$

$$\|p\|_r \leq C_1 t^{-\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)\frac{n}{2}} \|p_0\|_q + C_2 t^{-\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)\frac{n}{2} + 1} \max_{s \in [0, t]} \|f(s)\|_q, \quad (2)$$

siempre que  $r \geq q$ ,  $\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)\frac{n}{2} < 1$ , siendo  $n = 2$  la dimensión.

Tomado de [?]. Sea  $p$  una solución de la ecuación del calor con fuente  $g = f - ap \leq f$ . Sea  $u$  solución de

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - \sigma \Delta_{\mathbf{xv}} u(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \quad u(0, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = p_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}).$$

Esta solución admite expresiones integrales en términos del núcleo del calor  $G(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ . Se tiene entonces

$$\begin{aligned} p(t) &= G(t) * p_0 + \int_0^t G(t - \tau) * [f(\tau) - a(\tau)p(\tau)] d\tau \\ &\leq u(t) = G(t) * p_0 + \int_0^t G(t - \tau) * f(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

donde  $*$  denota convolución en las variables  $\mathbf{x}, \mathbf{v}$ . Tomando  $f = 0$ , se siguen las estimaciones  $L^r - L^q$  para operadores del calor  $\|u\|_q = \|G(t) * p_0\|_q$

$$\begin{aligned} \|u\|_q &\leq \|G(t)\|_1 \|p_0\|_q \leq \|p_0\|_q, \\ \|u\|_r &\leq \|G(t)\|_{q'} \|p_0\|_q \leq C_q t^{-\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)\frac{n}{2}} \|p_0\|_q, \quad 1/r = 1/q + 1/q' - 1, \end{aligned}$$

con  $r \geq q$ . Cuando  $f \neq 0$  tenemos estimaciones similares para  $u$ . Se extienden a  $p$  porque  $p \leq u$ .

22. Consideramos un problema de difusión de la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} c(\mathbf{x}, t) &= d \Delta_{\mathbf{x}} c(\mathbf{x}, t) - \eta c(\mathbf{x}, t) j(\mathbf{x}, t) + h(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial c}{\partial r}(\mathbf{x}, t) &= c_{r_0}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S_{r_0}, \quad \frac{\partial c}{\partial r}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_{r_1}, \quad t > 0, \\ c(\mathbf{x}, 0) &= c_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \end{aligned}$$

donde  $d, \eta > 0$ ,  $c_{r_0} < 0$  y  $j(\mathbf{x}, t)$  una función acotada positiva. El dominio es  $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mid r_0 < r = |\mathbf{x}| < r_1\}$ , con bordes  $S_{r_0} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mid |\mathbf{x}| = r_0\}$  y  $S_{r_1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mid |\mathbf{x}| = r_1\}$ . Sea  $c \in C([0, T]; L^2(\Omega))$  una solución con dato inicial  $c_0 \in L^2(\Omega)$  y condición de contorno  $c_{r_0} \in C([0, T]; L^2(\partial\Omega))$ . Si  $c_0 \geq 0$ ,  $h \geq 0$  y  $c_{r_0} \leq 0$ , entonces  $c \geq 0$ .

Tomado de [72]. Multiplicando la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} c(\mathbf{x}, t) = d \Delta_{\mathbf{x}} c(\mathbf{x}, t) - \eta c(\mathbf{x}, t) j(\mathbf{x}, t) + h,$$

por  $c^- = \text{Max}(-c, 0)$  e integrando, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|c^-(t)\|_2^2 + \int_0^t \int_{\Omega} [|\nabla c^-|^2 + \eta j |c^-|^2] &= \\ \frac{1}{2} \|c^-(0)\|_2^2 - \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} c^- - \int_0^t \int_{\Omega} h c^- &\leq 0, \end{aligned}$$

ya que, en nuestro caso,

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} c^- = -\int_{r=r_1} \frac{\partial c}{\partial r}(r_1) c^- + \int_{r=r_0} \frac{\partial c}{\partial r}(r_0) c^- = \int_{r=r_0} \frac{\partial c}{\partial r}(r_0) c^- \leq 0.$$

Esto implica que  $c^- = 0$  y  $c \geq 0$ .

23. *Construir soluciones de la ley de conservación escalar  $w_t + (c(x)w)_x = 0$  con  $w(0) = w_0$ .*

Tomado de [17]. Ponemos  $v = cw$ . Entonces,  $v_t + cv_x = 0$ . Por tanto,  $v$  es constante a lo largo de las curvas características  $x(t)$  solución de  $x'(t) = c(x(t))$ ,  $x(0) = x_0$ , porque

$$\frac{d}{dt}v(x(t), t) = v_x(x(t), t)x'(t) + v_t(x(t), t) = 0.$$

Dado  $(x, t)$  a veces somos capaces de calcular  $x_0(x, t)$  tal que la curva característica con valor inicial  $x_0(x, t)$  satisface  $x(t) = x$ . Entonces  $v(x, t) = v_0(x_0(x, t))$  y  $w(x, t) = \frac{v_0(x_0(x, t))}{c(x_0(x, t))}$ . Las posibilidades de llevar esto a cabo dependerán de  $c$ .

24. *Resolver el problema*

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial k}(k^{1/3}r) &= 0, \\ \int_0^\infty kr(s, k)dk &= t, \\ \lim_{k \rightarrow 0} k^{1/3}r(s, k) &= 2c. \end{aligned}$$

Tomado de [34]. Integrating la ecuación sobre  $k > 0$  tenemos

$$\frac{d}{ds} \int_0^\infty r(s, k)dk = \lim_{k \rightarrow 0} k^{1/3}r(s, k) = 2c(s).$$

Argumentando como en el ejercicio previo, el método de las características da la expresión

$$\begin{aligned} k^{1/3}r(s, k) &= 2c(s - a(k))H(s - a(k)), \\ a(k) &= \frac{3}{2}k^{2/3}, \end{aligned}$$

en la cual  $H(x)$  es la función de Heaviside (1 para  $x$  positivo, 0 en otro caso).

25. *Obtén una ecuación para la frontera Obtain an equation for the upper moving boundary  $x_3 = h(x_1, x_2, t)$  of a three dimensional region with lower boundary  $x_3 = 0$  in such a way that the field  $\mathbf{v}$  satisfies  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  in it.*

Taken from [76]. We integrate  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  in the vertical direction to get

$$\int_0^h \frac{\partial(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1)}{\partial x_1} dx_3 + \int_0^h \frac{\partial(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2)}{\partial x_2} dx_3 + \int_0^h \frac{\partial(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)}{\partial x_3} dx_3 = 0,$$

siendo  $\hat{\mathbf{x}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_2$  y  $\hat{\mathbf{x}}_3$  los vectores unidad en las direcciones coordenadas. Por la regla de Leibniz

$$\int_0^h \frac{\partial(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{x}}_i)}{\partial x_i} dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \int_0^h (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{x}}_i) dx_3 \right] - \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{x}}_i \Big|_h \frac{\partial h}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \int_0^h (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) dx_3 \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \int_0^h (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2) dx_3 \right] \\ & - \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 \Big|_h \frac{\partial h}{\partial x_1} - \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 \Big|_h \frac{\partial h}{\partial x_2} + \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 \Big|_h = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 \Big|_0. \end{aligned}$$

Obsérvese que  $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{x}}_i = \frac{dx_i}{dt}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Derivando  $x_3(t) = h(x_1(t), x_2(t), t)$  con respecto al tiempo tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 \Big|_h &= \frac{dx_3}{dt} = \frac{d}{dt} h(x_1(t), x_2(t), t) = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial h}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} \\ &= \frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 \Big|_h \frac{\partial h}{\partial x_1} + \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 \Big|_h \frac{\partial h}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Gracias a esta igualdad obtenemos

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \int_0^h (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) dx_3 \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \int_0^h (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2) dx_3 \right] = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 \Big|_0.$$

26. Obtener soluciones autosimilares  $h(r, t)$  para

$$h_t - K \left(1 + \frac{3}{2}\right) R e^{3t} \frac{1}{r} (r h_r h^3)_r = 0, \quad K = \frac{g \mu_f}{3 \xi_\infty^2 \mu_s (1 - \phi_\infty)^2 R_0} h_0^3.$$

Tomado de [78]. Tenemos soluciones de la forma

$$h = R^{-2} e^t f(r) = R^{-2} e^t \left(1 - \frac{3}{2} r^2\right)^{\frac{1}{3}}, \quad R = \left(\frac{7}{3} K \left(1 + \frac{3}{2}\right) (e^{3t} - 1) + 1\right)^{\frac{1}{7}}.$$

27. Calcular una solución  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  de  $\Delta \mathbf{u} = (-b_2, b_1) \delta(x) \delta(y)$  para  $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$  arbitrarios siendo  $\delta$  la delta de Dirac con soporte en cero.

Tomado de [67]. La solución es

$$\mathbf{u} = (b_1, b_2) \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + (-b_2, b_1) \frac{1}{2\pi} \ln((x^2 + y^2)^{1/2}).$$

Esta función también satisface  $\int_C \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x} dx + \frac{\partial u_i}{\partial y} dy \right] = b_i$ ,  $i = 1, 2$  para contornos  $C$  que encierran  $(0, 0)$ .

28. Los tensores de esfuerzos  $\varepsilon$  y tensiones  $\sigma$  planos para una placa circular vienen dados por

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\sigma^2}(\varepsilon_{xx} + \sigma\varepsilon_{yy}), \quad \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\sigma^2}(\varepsilon_{yy} + \sigma\varepsilon_{xx}), \quad \sigma_{xy} = \frac{E}{1+\sigma}\varepsilon_{xy},$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \xi}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \xi}{\partial x_\beta} \right), \quad \alpha = x, y,$$

donde  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$  son los desplazamientos en el plano en las direcciones  $x$  e  $y$ , mientras que  $\xi$  es el desplazamiento fuera del plano en la dirección  $z$ . Las ecuaciones de Föppl-Von Karman para el equilibrio de una placa de grosor  $h$  son

$$D\Delta^2\xi - h\frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi}{\partial x_\alpha} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}.$$

Caracterizar las soluciones en coordenadas polares  $(r, \theta)$  con desplazamientos radiales y angulares de la forma  $u_r = ar + \frac{b}{r}$ ,  $u_\theta = 0$ . Las condiciones de contorno son  $u_r = -\beta$  en  $r = 1/2$  y  $\sigma_{rr} = 0$  en  $r = 1$ . El problema se plantea en la corona  $1/2 < r < 1$ .

Tomado de [65]. Tenemos

$$\sigma_{rr} = -\alpha \left( 1 - \frac{1}{r^2} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = -\alpha \left( 1 + \frac{1}{r^2} \right).$$

Las ecuaciones de equilibrio son

$$\Delta^2\xi + \alpha\Delta\xi + \frac{\alpha}{r} \left( -\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) = 0,$$

$$\Delta^2\xi = \frac{\partial^2\xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\xi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r},$$

con condiciones de contorno  $\xi = 0$ ,  $\frac{\partial \xi}{\partial r} = 0$  en el borde fijo  $r = 1/2$  y

$$-\frac{\partial r \Delta \xi}{\partial r} + (1-\sigma) \frac{1}{r^3} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial^3 \xi}{\partial r \partial \theta^2} \right) = 0,$$

$$\Delta \xi + (\sigma - 1) \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) = 0,$$

en el borde libre  $r = 1$ . Tenemos soluciones de la forma  $\xi(r, \theta) = \zeta(r) \cos(m\theta)$  con  $m$  entero. Para encontrarlas observamos que todos los  $\zeta$  posibles con combinaciones de dos soluciones básicas de una ecuación diferencial lineal que satisface que  $(\zeta(1/2), \zeta'(1/2), \zeta''(1/2), \zeta'''(1/2))$  vale  $(0, 0, 1, 0)$  en una y  $(0, 0, 0, 1)$  en otra. Para seleccionar  $\zeta$  que cumple las condiciones en  $r = 1$  necesitamos elegir  $\alpha(m, 1/2)$  numéricamente, y elegir a continuación  $m$ . Estos patrones proporcionan un ejemplo de inestabilidad de tipo corona en placas planas. Para inestabilidades helicoidales en filamentos véase [68].

### 3 Ecuaciones integrodiferenciales

1. Sabemos que el problema

$$\begin{aligned} g_t - \Delta_v g + \mathbf{v} \cdot \nabla_x g + \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_v g &= 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}^+, \\ g(\mathbf{x}, \mathbf{v}, 0) &= g_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

con  $g_0 \in L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$  y con  $\mathbf{E}$  acotado y Lipschitz admite soluciones fundamentales  $\Gamma_{\mathbf{E}}$ . La solución del problema de valores iniciales se puede expresar como

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \int \Gamma_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t; \mathbf{x}', \mathbf{v}', 0) d\mathbf{x}' d\mathbf{v}',$$

donde  $\Gamma_{\mathbf{E}}$  satisface las estimaciones

$$\begin{aligned} |\Gamma_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t; \mathbf{x}', \mathbf{v}', t')| &\leq C(\|\mathbf{E}\|_{L_{\mathbf{x},t}^\infty}, T) G(\mathbf{x}/2, \mathbf{v}/2, t; \mathbf{x}'/2, \mathbf{v}'/2, t'), \\ |\partial_{v_i} \Gamma_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t; \mathbf{x}', \mathbf{v}', t')| &\leq C(\|\mathbf{E}\|_{L_{\mathbf{x},t}^\infty}, T) \frac{G(\mathbf{x}/2, \mathbf{v}/2, t; \mathbf{x}'/2, \mathbf{v}'/2, t')}{(t - t')^{1/2}}, \end{aligned}$$

y  $G$  es la solución fundamental del problema con  $\mathbf{E} = 0$ . Extiéndase este resultado a problemas en los que  $\mathbf{E}$  está acotado.

Tomado de [12]. Regularizamos  $\mathbf{E}$  por convolución y consideramos  $\mathbf{E}_\delta = \mathbf{E} * \eta_\delta$  donde  $\eta_\delta$  es una familia regularizante. Las funciones  $\mathbf{E}_\delta$  son acotadas y Lipschitz, de modo que para cada una de ellas podemos construir soluciones  $g_\delta$  del problema de valores iniciales y tenemos estimaciones sobre las soluciones fundamentales  $\Gamma_\delta$ . Además,  $\|\mathbf{E}_\delta\|_{L_{\mathbf{x},t}^\infty} \leq \|\mathbf{E}\|_{L_{\mathbf{x},t}^\infty}$  y  $\mathbf{E}_\delta \rightarrow \mathbf{E}$  a medida que  $\delta \rightarrow 0$ .

Como  $\Gamma_\delta$  está acotada (localmente en  $t$ ) en todo espacio  $L_{xvt}^p$  podemos extraer una subsucesión que converge débilmente (localmente en  $t$ ) en todo  $L_{xvt}^p$  (débil estrella si  $p = \infty$ ) a una función  $\Gamma_{\mathbf{E}}$ . Asimismo, podemos pasar al límite en el lado derecho de las expresiones integrales para las soluciones  $g_\delta$  en términos de  $\Gamma_\delta$ .

Por otra parte, las expresiones integrales implican que  $g_\delta$  están uniformemente acotadas en cualquier espacio  $L_{xvt}^p$  con respecto a  $\delta$  localmente en  $t$ . Por tanto,  $g_\delta$  converge débilmente (localmente en  $t$ ) en cualquier espacio  $L_{xvt}^p$  a una función  $g$  y sus derivadas también convergen en el sentido de las distribuciones.

En el sentido de las distribuciones, las derivadas de  $\Gamma_\delta$  con respecto a  $\mathbf{v}$  convergen débilmente a las derivadas de  $\Gamma_{\mathbf{E}}$ . Podemos pasar al límite en las desigualdades satisfechas por  $\Gamma_\delta$  y establecer desigualdades similares para  $\Gamma_{\mathbf{E}}$  porque  $\|\mathbf{E}_\delta\|_{L_{\mathbf{x},t}^\infty} \leq \|\mathbf{E}\|_{L_{\mathbf{x},t}^\infty}$ .

Multiplicando la ecuación diferencial satisfecha por  $g_\delta$  by  $g_\delta$  obtenemos una cota  $L_{xvt}^2$  uniforme sobre  $\nabla_v g_\delta$ . Si multiplicamos la ecuación por  $|\mathbf{v}|^2$  obtenemos una estimación uniforme en  $L_{xvt}^1$  sobre  $|\mathbf{v}|^2 g_\delta$ .

Multiplicando las ecuaciones diferenciales satisfechas por  $g_\delta$  por funciones test, podemos pasar al límite en todos los términos de la formulación débil, excepto en  $\mathbf{E}_\delta \nabla_v g_\delta$  con las convergencias ya establecidas. El paso al límite en este término es técnico, véanse detalles en [12]. Finalmente,  $g$  es solución del problema de valores iniciales con  $\mathbf{E}$  acotado y  $\Gamma_{\mathbf{E}}$  es una solución fundamental asociada.

2. *Calcular la solución de equilibrio de la ecuación maestra de Liouville*

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{P}(x, p, \boldsymbol{\sigma}, t) + \frac{p}{m} \partial_x \mathcal{P}(x, p, \boldsymbol{\sigma}, t) + \left( -m\omega_0^2 x + \mu \sum_{i=1}^n \sigma_i \sigma_{i+1} \right) \partial_p \mathcal{P}(x, p, \boldsymbol{\sigma}, t) \\ = \sum_{i=1}^N [W_i(R_i \boldsymbol{\sigma} | x, p) \mathcal{P}(x, p, R_i \boldsymbol{\sigma}, t) - W_i(\boldsymbol{\sigma} | x, p) \mathcal{P}(x, p, \boldsymbol{\sigma}, t)]. \end{aligned}$$

Tomado de [49]. La distribución de equilibrio es la distribución canónica

$$\mathcal{P}_{\text{eq}}(x, p, \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{Z} e^{-\beta \mathcal{H}(x, p, \boldsymbol{\sigma})},$$

donde  $Z$  es la función de partición

$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dp \sum_{\boldsymbol{\sigma}} e^{-\beta \mathcal{H}(x, p, \boldsymbol{\sigma})},$$

y  $\beta = (k_B T)^{-1}$ . Para un estudio de la dinámica de no equilibrio véase [50].

3. *La tasa de riesgo  $h(t)$ , la aceleración de envejecimiento  $q(t)$  y la probabilidad de supervivencia  $p(t)$  de un organismos vivo según la teoría de dinámica de presupuesto energético (DEB) vienen dados por*

$$h' = q - ah, \quad q' = bq + c, \quad p' = -ph.$$

*Obtén una solución explícita dados datos en  $t = 0$ .*

Tomado de [73]. Integrando en cascada tenemos

$$\begin{aligned} q(t) &= q(0)e^{bt} + \int_0^t e^{b(t-s)} c(s) ds, \\ h(t) &= h(0)e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-s)} q(s) ds, \\ p(t) &= p(0)e^{-\int_0^t h(s) ds}. \end{aligned}$$

4. *Consideremos la ecuación de the Fokker-Planck para  $p(\boldsymbol{\eta}, t)$*

$$\frac{\partial}{\partial t} p = \sum_{j=1}^N \frac{1}{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial \eta_j} \left( \frac{\partial G}{\partial \eta_j} p \right) + T \sum_{j=1}^N \frac{1}{\gamma_j} \frac{\partial^2}{\partial \eta_j^2}$$

con  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^N$ ,  $t \geq 0$  y  $G(\boldsymbol{\eta}) = A(\boldsymbol{\eta}) - FL$ . Probar que si  $F$  y  $L$  son constantes, existen soluciones explícitas estacionarias.

Tomado de [66]. Las distribuciones de la forma  $p(\boldsymbol{\eta}) \sim e^{-G(\boldsymbol{\eta})/T}$  son soluciones.

5. Dado un campo acotado  $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$  y  $\sigma > 0$ ,  $k > 0$  el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} p(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) + \nabla_{\mathbf{v}} \cdot [(\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) - k\mathbf{v})p(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})] - \sigma \Delta_{\mathbf{v}} p(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \\ = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \\ p(0, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = p_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \end{aligned}$$

admite una solución fundamental positiva  $\Gamma_{\mathbf{F}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}; \tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu})$  satisfying

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma_{\mathbf{F}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}; \tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\nu} &= e^{Nk(t-\tau)}, \\ \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma_{\mathbf{F}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}; \tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) d\mathbf{x} d\mathbf{v} &= 1. \end{aligned}$$

Demostrar para  $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \|p(t)\|_1 &\leq \|p_0\|_1 + \int_0^t \|f(\tau)\|_1 d\tau, \\ \|p(t)\|_{\infty} &\leq e^{Nkt} \|p_0\|_{\infty} + \int_0^t e^{Nk(t-\tau)} \|f(\tau)\|_{\infty} d\tau. \end{aligned}$$

Tomado de [71]. La solución del problema de valores iniciales es

$$\begin{aligned} p(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma_{\mathbf{F}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}; 0, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) p_0(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\nu} + \\ &\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma_{\mathbf{F}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}; \tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) f(\tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\nu} d\tau. \end{aligned}$$

Las estimaciones sobre  $p$  se siguen de las estimaciones sobre  $\Gamma_{\mathbf{F}}$ .

## 4 Métodos numéricos

1. Dado un perfil  $c_e > 0$ , funciones  $\rho(x) > 0$ ,  $n(x) > 0$ ,  $u(x)$  y constantes  $a, R > 0$ , consideramos el siguiente problema de frontera libre. Deseamos calcular  $x^*$  tal que

$$\begin{aligned} c''(x) + au(x)c'(x) &= R\rho(x)n(x)^{1/3}(c(x) - c_e(x)), \quad 0 < x < x_*, \\ c''(x) + au(x)c'(x) &= 0, \quad x > x_*, \\ c(x_*) &= c_e(x_*) = c_*, \quad c'(x_*^-) = c'(x_*^+), \quad c(\infty) = 1, \quad c(0) = c_e(0). \end{aligned}$$

Tomado de [42]. Denotamos  $c(x) = 1 + \frac{c_*-1}{\phi(x_*)}\phi(x)$  donde

$$\begin{aligned}\phi''(x) + au(x)\phi'(x) &= 0, \quad x \geq 0, \\ \phi(0) &= 1, \quad \phi(\infty) = 0,\end{aligned}$$

es decir,

$$\phi(x) = \int_x^\infty e^{-a \int_0^y u(x') dx'} dy \left( \int_0^\infty e^{-a \int_0^y u(x') dx'} dy \right)^{-1}.$$

Para calcular  $x_*$ , seleccionamos una aproximación inicial  $x_*$ . A continuación, definimos  $c(x)$  para  $x > x_*$  para ese valor temporal de  $x_*$ . A continuación, resolvemos  $c''(x) + au(x)c'(x) = R\rho(x)n(x)^{1/3}(c(x) - c_e(x))$ ,  $0 < x < x_*$  con  $c(x_*) = c_*$  y  $c'(x_*) = (c_* - 1)\frac{\phi'(x_*)}{\phi(x_*)}$ . Tras ello, comparamos  $c(0)$  con  $c_e(0)$ . Según sea mayor o menor, aumentamos o disminuimos el valor de  $x_*$  hasta que la diferencia es suficientemente pequeña.

## 2. Consideremos el esquema

$$\begin{aligned}C_{n_1, n_2}^{\ell+1} &= \left[ 1 - 4 \frac{\delta t}{\delta x^2} \kappa \right] C_{n_1, n_2}^\ell + \\ &\frac{\delta t}{\delta x^2} \kappa [C_{n_1+1, n_2}^\ell + C_{n_1-1, n_2}^\ell + C_{n_1, n_2+1}^\ell + C_{n_1, n_2-1}^\ell]\end{aligned}$$

con  $\left[ 1 - 4 \frac{\delta t}{\delta x^2} \kappa \right] \geq 0$ , en una caja finita con pasos  $\delta x$  y  $\delta t$ . Si las condiciones iniciales y de contorno son positivas, también lo es  $C_{n_1, n_2}^\ell$  en todas partes. Además,  $|C_{n_1, n_2}^\ell|$  está acotado por arriba por el valor máximo absoluto de los datos iniciales si los datos de contorno son nulos.

Tomado de [75]. Procedemos por inducción. Si  $C_{n_1, n_2-1}^0 \geq 0$  en todas partes y los datos de contorno son también positivos en los bordes de la red, la relación de recurrencia implica que  $C_{n_1, n_2-1}^1 \geq 0$  en todas partes. De la misma forma, si  $C_{n_1, n_2-1}^\ell \geq 0$  en todas partes, y los datos en el borde también,  $C_{n_1, n_2-1}^{\ell+1} \geq 0$  en toda la red.

Tomamos ahora  $V^\ell = \max_{n_1, n_2} |C_{n_1, n_2-1}^\ell|$ . La recurrencia implica que

$$V^{\ell+1} \leq \left[ 1 - 4 \frac{\delta t}{\delta x^2} \kappa \right] V^\ell + 4 \frac{\delta t}{\delta x^2} \kappa V^\ell = V^\ell \leq V^0.$$

## 3. Consideremos el problema hiperbólico

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial t} + A \frac{\partial E}{\partial t} + B \frac{\partial E}{\partial x} + C \frac{\partial J}{\partial t} + D &= 0, & x \in (0, L), \quad t > 0, \\ E(x, 0) &= 0, & x \in (0, L), \\ E(0, t) &= \rho J(t), & t \geq 0, \\ \int_0^L E(x, t) dx &= \phi, & t \geq 0,\end{aligned}$$

donde  $\rho, \phi, L$  son positivos y  $A, B, C, D$  son funciones acotadas.  $A$  y  $B$  son positivas, mientras que  $C$  es negativa. Cuál sería un esquema numérico adecuado para resolver este problema?

Tomado de [16]. Los problemas hiperbólicos se discretizan normalmente de forma explícita. Sin embargo, en este caso i) tenemos una restricción integral que acopla todos los valores en cada nivel de tiempo, ii) el operador hiperbólico viene dado en forma no característica. Usamos diferencias finitas progresivas de primer orden para las derivadas temporales de primer orden de  $E$  y  $J$ . Usamos una aproximación retrógrada de segundo orden para las derivadas espaciales de primer orden porque las diferencias centrales conllevan inestabilidad. La derivada segunda  $E_{xt}$  se aproxima combinando las aproximaciones en espacio y tiempo descritas. En el extremo izquierdo usamos para  $E_x$  una aproximación retrógrada de primer orden. La integral se discretiza mediante una regla del trapecio compuesta.

4. Consideramos las ecuaciones de Navier para cristales con simetría cúbica en situaciones bidimensionales, en función de tres constantes positivas  $c_{11}, c_{22}, c_{44}$ :

$$\begin{aligned} Mu_1'' &= C_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + C_{12} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + C_{44} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + C_{44} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ Mu_2'' &= C_{11} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + C_{12} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + C_{44} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + C_{44} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}, \end{aligned}$$

donde  $M > 0$ . Proponer una discretización en diferencias finitas estable.

Tomado de [31]. Construimos una malla rectangular. Denotamos por  $D_i^+$  y  $D_i^-$  las diferencias finitas de primer orden progresivas y regresivas, respectivamente, en la dirección  $i$ , es decir,

$$\begin{aligned} D_1^+ u_j(\ell, m) &= \frac{u_j(\ell + \delta x_1, m) - u_j(\ell, m)}{\delta x_1}, \\ D_1^- u_j(\ell, m) &= \frac{u_j(\ell, m) - u_j(\ell - \delta x_1, m)}{\delta x_1}, \end{aligned}$$

para  $i = 1$ . Análogamente para  $i = 2$ . En vista de la presencia de términos cruzados, elegimos

$$\begin{aligned} Mu_1'' &= C_{11} \frac{D_1^- D_1^+ u_1}{\delta x_1^2} + C_{12} \frac{D_1^- D_2^+ u_2}{\delta x_1 \delta x_2} + C_{44} \frac{D_2^- D_2^+ u_1}{\delta x_2^2} + C_{44} \frac{D_2^- D_1^+ u_2}{\delta x_1 \delta x_2}, \\ Mu_2'' &= C_{11} \frac{D_2^- D_2^+ u_2}{\delta x_2^2} + C_{12} \frac{D_2^- D_1^+ u_1}{\delta x_1 \delta x_2} + C_{44} \frac{D_1^- D_1^+ u_2}{\delta x_1^2} + C_{44} \frac{D_1^- D_2^+ u_1}{\delta x_1 \delta x_2}. \end{aligned}$$

Véase [35] para extensiones a cristales tridimensionales y a retículos con dos bases.

5. Consideramos un retículo hexagonal plano e ignoramos desplazamientos en la dirección vertical. En el límite continuo, las deformaciones planas

se describen mediante las ecuaciones de la elasticidad de Navier en dos dimensiones para el vector de desplazamiento,

$$\begin{aligned}\rho_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \\ \rho_2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},\end{aligned}$$

donde  $\rho_2$  es la densidad de masa  $\lambda$  y  $\mu$  los coeficientes de Lamé en dos dimensiones ( $\lambda = C_{12}$ ,  $\mu = C_{66}$ ,  $\lambda + 2\mu = C_{11}$ ). Proponer una discretización en diferencias finitas en un retículo hexagonal con constante  $a$ .

Tomado de [40]. Tomamos un punto  $A$  en el retículo hexagonal con coordenadas  $(x, y)$ . Sus 9 (3+6) vecinos próximos tienen coordenadas

$$\begin{aligned}n_1 &= \left(x - \frac{a}{2}, y - \frac{a}{2\sqrt{3}}\right), n_2 = \left(x + \frac{a}{2}, y - \frac{a}{2\sqrt{3}}\right), n_3 = \left(x, y + \frac{a}{\sqrt{3}}\right), \\ n_4 &= \left(x - \frac{a}{2}, y - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right), n_5 = \left(x + \frac{a}{2}, y - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right), n_6 = (x - a, y), \\ n_7 &= (x + a, y), n_8 = \left(x - \frac{a}{2}, y + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right), n_9 = \left(x + \frac{a}{2}, y + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right).\end{aligned}$$

Definimos los operadores siguientes en términos de las coordenadas  $(x, y)$  del nodo  $A$ :

$$\begin{aligned}Tu &= [u(n_1) - u(A)] + [u(n_2) - u(A)] + [u(n_3) - u(A)], \\ Hu &= [u(n_6) - u(A)] + [u(n_7) - u(A)], \\ D_1u &= [u(n_4) - u(A)] + [u(n_9) - u(A)], \\ D_2u &= [u(n_5) - u(A)] + [u(n_8) - u(A)],\end{aligned}$$

Los desarrollos de Taylor de estas combinaciones de diferencias finitas en torno a  $(x, y)$  proporcionan las aproximaciones

$$\begin{aligned}Tu &\sim (\partial_x^2 u + \partial_y^2 u) \frac{a^2}{4}, \\ Hu &\sim (\partial_x^2 u) a^2, \\ D_1u &\sim \left(\frac{1}{4} \partial_x^2 u + \frac{\sqrt{3}}{2} \partial_x \partial_y u + \frac{3}{4} \partial_y^2 u\right) a^2, \\ D_2u &\sim \left(\frac{1}{4} \partial_x^2 u - \frac{\sqrt{3}}{2} \partial_x \partial_y u + \frac{3}{4} \partial_y^2 u\right) a^2,\end{aligned}$$

según  $a \rightarrow 0$ . A continuación introducimos en las ecuaciones del movimiento  $Hu/a^2$ ,  $(4T - H)u/a^2$  y  $(D_1 - D_2)u/(\sqrt{3}a^2)$  en lugar de  $\partial_x^2 u$ ,  $\partial_y^2 u$  y  $\partial_x \partial_y u$ ,

respectivamente, con reemplazos análogos para las derivadas de  $v$ . Como resultado, obtenemos las siguientes ecuaciones en cada punto del retículo:

$$\begin{aligned}\rho_2 a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 4\mu T u + (\lambda + \mu) H u + \frac{\lambda + \mu}{\sqrt{3}} (D_1 - D_2) v, \\ \rho_2 a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 4(\lambda + 2\mu) T v - (\lambda + \mu) H v + \frac{\lambda + \mu}{\sqrt{3}} (D_1 - D_2) u.\end{aligned}$$

6. Consideremos un retículo hexagonal plano con constante de red  $a$ . Las ecuaciones de Navier isotrópicas tienen soluciones singulares

$$\begin{aligned}u &= \frac{a}{2\pi} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) + \frac{xy}{2(1-\nu)(x^2+y^2)} \right], \\ v &= \frac{a}{2\pi} \left[ -\frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} \ln \left( \frac{x^2+y^2}{b^2} \right) + \frac{y^2}{2(1-\nu)(x^2+y^2)} \right],\end{aligned}$$

donde  $\nu = \lambda/[2(\lambda+\mu)]$  para todo  $a$ . Elegimos  $(x_0, y_0)$  distinto de los puntos del retículo y resolvemos una versión amortiguada de las ecuaciones de Navier discretas formuladas en el ejercicio anterior. Cómo esperas que evolucione el sistema empezando de la condición inicial  $(u(x-x_0, y-y_0), v(x-x_0, y-y_0))$ ?

Tomado de [38]. Las ecuaciones amortiguadas tienen la forma

$$\begin{aligned}\rho_2 a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} &= 4\mu T u + (\lambda + \mu) H u + \frac{\lambda + \mu}{\sqrt{3}} (D_1 - D_2) v, \\ \rho_2 a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial v}{\partial t} &= 4(\lambda + 2\mu) T v - (\lambda + \mu) H v + \frac{\lambda + \mu}{\sqrt{3}} (D_1 - D_2) u,\end{aligned}$$

con  $\gamma > 0$ . Esperamos que el sistema relaje a una configuración estacionaria que se comporta como  $(u(x-x_0, y-y_0), v(x-x_0, y-y_0))$  a una cierta distancia de  $(x_0, y_0)$ . Estas soluciones representan defectos en el retículo que generan los campos elásticos elegidos. Se ha estudiado una gran variedad de defectos mediante estos modelos [52, 55].

7. Una aproximación asintótica a un modelo cinético conduce al sistema

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\mathbf{F}\rho) - \frac{1}{2\beta} \Delta_{\mathbf{x}} \rho &= \mu \rho - \Gamma \rho \int_0^t \rho(\mathbf{x}, s) ds, \\ \mu &= \frac{\alpha}{\pi} \left[ 1 + \frac{\alpha}{2\pi\beta(1+\sigma_v^2)} \ln \left( 1 + \frac{1}{\sigma_v^2} \right) \right], \\ \frac{\partial}{\partial t} C(\mathbf{x}, t) &= \kappa \Delta_{\mathbf{x}} C(\mathbf{x}, t) - \chi_1 C(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{x}, t), \\ \chi_1 &= \frac{\chi}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \frac{\sqrt{1+V^2+2V\cos\varphi}}{1+e^{(V^2-\eta)/\epsilon}} e^{-V^2} V dV d\varphi.\end{aligned}$$

La densidad real se expresa en términos de la densidad marginal como  $p(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \sim \frac{1}{\pi} e^{-|\mathbf{v}-\mathbf{v}_0|^2} \rho(\mathbf{x}, t)$ . Cómo puedes generar una discretización que preserve la positividad?

Tomado de [83]. Esquemas de orden bajo que preservan la positividad se pueden generar mediante diferencias finitas progresivas en tiempo, discretización de tipo upwind de los términos de transporte y esquemas centrados para el Laplaciano. Los términos integrales se discretizan mediante reglas de Simpson compuestas [75]. Para obtener un esquema de orden alto, recurrimos a esquemas WENO5 que preservan la positividad en la parte espacial. Para mantener la positividad y estabilidad al discretizar en tiempo, usamos esquemas SSP (strong stability preserving). Una posibilidad son los esquemas SSP multipaso

$$u(t_{n+1}) = \frac{16}{27} (u(t_n) + 3\delta t r(u(t_n))) + \frac{11}{27} (u(t_{n-3}) + \frac{12}{11}\delta t r(u(t_{n-3}))),$$

y el método de Runge-Kutta de orden 3

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u(t_n) + \delta t r(u(t_n)), \\ u^{(2)} &= \frac{3}{2}u(t_n) + \frac{1}{4}u^{(1)} + \frac{1}{4}\delta t r(u^{(1)}), \\ u(t_{n+1}) &= \frac{1}{3}u(t_n) + \frac{2}{3}u^{(2)} + \frac{2}{3}\delta t r(u^{(2)}). \end{aligned}$$

8. Consideremos una célula bidimensional con pared flexible inmersa en un fluido. Se describe el sistema mediante un problema de Navier-Stokes con fuente

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nu \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}, \quad \text{div}(\mathbf{u}) = 0, \quad (3)$$

donde  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  y  $p(\mathbf{x}, t)$  son la velocidad y presión del fluido, mientras que  $\rho$ ,  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  representan la densidad del fluido y la viscosidad cinemática, respectivamente. La fuente  $\mathbf{f}$  representa la densidad de fuerzas, es decir, la fuerza por unidad de volumen creada por la frontera inmersa en el fluido

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \int_{\Gamma} \mathbf{F}(\theta, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\theta, t)) d\theta,$$

donde  $\mathbf{X}(\theta, t)$  es la parametrización de la frontera inmersa  $\Gamma$ , y  $\mathbf{F}(\theta, t)$  la densidad de fuerza sobre ella. La densidad elástica es  $\mathbf{F}_e = \frac{\partial}{\partial \theta} (K \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta})$ . La ecuación para evolución de la membrana al interactuar con el fluido es

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\theta, t)) d\mathbf{x} + \lambda (\mathbf{F}_g \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n},$$

se obtiene de la condición de no deslizamiento incluyendo crecimiento debido a fuerzas  $\mathbf{F}_g$ . La interacción del fluido con la estructura está descrita mediante funciones delta  $\delta$ . Se trata de proponer una discretización para este problema teniendo en cuenta el crecimiento de la célula.

Tomado de [84] y basada en métodos de fronteras inmersas. Definimos en la región computacional una malla  $\mathbf{x}_{i,j} = (x_i, y_j)$ ,  $i, j = 0, \dots, \mathcal{N}$ , con pasos  $dx = dy = h$  y nodos  $x_i = x_0 + idx$ ,  $y_j = y_0 + jdy$ , donde  $x_0 = y_0 = 0$ ,  $x_{\mathcal{N}} = y_{\mathcal{N}} = \mathcal{L}$ . La frontera inmersa se parametriza mediante el ángulo  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Usamos una malla  $\theta_k = kd\theta$ ,  $k = 0, \dots, \mathcal{K}$  para ella. Empleamos una discretización específica de modelos de fronteras inmersas que se resuelve mediante transformadas de Fourier.

Para evitar que la distancia entre puntos de la malla sea demasiado grande a medida que la frontera inmersa crece, se introducen nuevos puntos en el mallado a un cierto ritmo. A consecuencia de ello, el ángulo del mallado pasa a no ser uniforme y los valores locales de los parámetros varían con el ángulo a medida que se añaden puntos. Dada una malla  $\theta_k$  para una frontera  $\mathbf{X}_j$ , con pasos  $d\theta_k = \theta_k - \theta_{k-1}$ ,  $k = 1, \dots, \mathcal{K}$ , incluimos un nuevo punto entre las posiciones  $i - 1$  e  $i$  como sigue:

- $d\theta_i = d\theta_i/2$ ,  $d\theta_{i+1} = d\theta_i/2$ , y  $d\theta_{i+m} = d\theta_{i+m-1}$ ,  $1 < m < \mathcal{K} - i + 1$ .
- $\theta_i = \theta_{i-1} + d\theta_i$ ,  $\theta_{i+1} = \theta_i + d\theta_{i+1}$ , y  $\theta_{i+m} = \theta_{i+m-1}$ ,  $1 < m < \mathcal{K} - i + 1$ .
- $\mathbf{X}_j(\theta_i) = \frac{\mathbf{X}_j(\theta_{i-1}) + \mathbf{X}_j(\theta_i)}{2}$ , y  $\mathbf{X}_j(\theta_{i+m}) = \mathbf{X}_j(\theta_{i+m-1})$ ,  $0 < m < \mathcal{K} - i + 1$ .
- $K_j(\theta_i) = 2K_j(\theta_i)$ ,  $K_j(\theta_{i+1}) = 2K_j(\theta_{i+1})$ , y  $K_j(\theta_{i+m}) = K_j(\theta_{i+m-1})$ ,  $1 < m < \mathcal{K} - i + 1$ , para prevenir que la reducción del ángulo cambie el límite continuo.
- Actualizar  $\mathcal{K} = \mathcal{K} + 1$ .

9. La ecuación de Helmholtz en todo el espacio se plantea como

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N,$$

$$\lim_{r=|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} r^{\frac{N-1}{2}} \left( \frac{\partial}{\partial r} (u - u_{\text{inc}}) - ik(u - u_{\text{inc}}) \right) = 0.$$

Da una formulación variacional equivalente planteada en un dominio acotado mediante el operador Dirichlet-a-Neumann.

Tomado de [37]. Sea  $B_R$  una esfera de radio  $R$  y  $\Gamma_R$  su frontera. El operador Dirichlet-a-Neumann (también llamado Steklov-Poincaré) asocia a los datos Dirichlet en  $\Gamma_R$  la derivada normal de la solución del problema de Dirichlet exterior:

$$L : H^{1/2}(\Gamma_R) \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma_R)$$

$$f \longmapsto \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}$$

donde  $w \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^N \setminus \overline{B}_R)$ ,  $B_R := B(\mathbf{0}, R)$  es la única solución de

$$\begin{cases} \Delta w + k^2 w = 0, & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \overline{B}_R, \\ w = f, & \text{en } \Gamma_R, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{N-1/2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} - ikw \right) = 0. \end{cases}$$

$H^{1/2}(\Gamma_R)$  y  $H^{-1/2}(\Gamma_R)$  son espacios de trazas estandar. Podemos estudiar un problema de contorno equivalente planteado en  $B_R$  imponiendo una condición no reflectante en la pared  $\Gamma_R$ :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & \text{en } B_R, \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(u - u_{\text{inc}}) = L(u - u_{\text{inc}}), & \text{on } \Gamma_R. \end{cases}$$

La solución  $u$  del problema original es también solución del problema variacional

$$\begin{cases} u \in H^1(B_R), \\ b(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H^1(B_R), \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} b(u, v) &= \int_{B_R} (\nabla u \nabla \bar{v} - k^2 u \bar{v}) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_R} L u \bar{v} dl, \quad \forall u, v \in H^1(B_R), \\ \ell(v) &= \int_{\Gamma_R} \left( \frac{\partial u_{\text{inc}}}{\partial \mathbf{n}} - L u_{\text{inc}} \right) \bar{v} dl, \quad \forall v \in H^1(B_R). \end{aligned}$$

10. *Escribe el problema de transmisión tipo Helmholtz*

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\alpha_e \nabla u) + \lambda_e^2 u = 0, & \text{en } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}_i, \\ \nabla \cdot (\alpha_i \nabla u) + \lambda_i(k)^2 u = 0, & \text{en } \Omega_i, \\ u^- - u^+ = 0, & \text{en } \partial\Omega_i, \\ \alpha_i \frac{\partial u^-}{\partial \mathbf{n}} - \alpha_e \frac{\partial u^+}{\partial \mathbf{n}} = 0, & \text{en } \partial\Omega_i, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} \left( \frac{\partial}{\partial r} (u - u_{\text{inc}}) - \imath \lambda_e (u - u_{\text{inc}}) \right) = 0, & r = |\mathbf{x}|, \end{cases}$$

en forma variacional y calcula la derivada de  $J(k) = \int_{\Gamma} |u(k) - d|^2 dl$  con respecto a  $k$ .

Tomado de [39]. Argumentando como en el ejercicio anterior tenemos

$$\begin{cases} u \in H^1(B_R), \\ S(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H^1(B_R), \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} S(u, v) &:= \int_{B_R \setminus \bar{\Omega}_i} (\alpha_e \nabla u \nabla \bar{v} - \lambda_e^2 u \bar{v}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_i} (\alpha_i \nabla u \nabla \bar{v} - \lambda_i(k)^2 u \bar{v}) d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\Gamma_R} \alpha_e L u \bar{v} dl, \quad \forall u, v \in H^1(B_R), \\ \ell(v) &:= \int_{\Gamma_R} \alpha_e \left( \frac{\partial u_{\text{inc}}}{\partial \mathbf{n}} - L u_{\text{inc}} \right) \bar{v} dl, \quad \forall v \in H^1(B_R), \end{aligned}$$

siendo  $L$  el operador Dirichlet-a-Neumann definido por

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\alpha_e \nabla w) + \lambda^2 w = 0, & \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_R}, \\ w = f, & \text{en } \partial B_R, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} - i \lambda_e w \right) = 0. \end{cases}$$

Diferenciando  $J$  respecto a  $k$  vemos que

$$\frac{dJ}{dk} = 2 \int_{\Gamma} \overline{(u(k) - d)} u_k(k) dl,$$

donde la derivada  $u_k(k) = \frac{du(k)}{dk} \in H^1(B_R)$  es solución de

$$\begin{aligned} \int_{B_R \setminus \overline{\Omega_i}} (\alpha_e \nabla u_k(k) \nabla \bar{v} - \lambda_e^2 u_k(k) \bar{v}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_i} (\alpha_i \nabla u_k(k) \nabla \bar{v} - \lambda_i(k)^2 u_k(k) \bar{v}) d\mathbf{x} \\ - \int_{\Gamma_R} \alpha_e L u_k(k) \bar{v} dl = 2 \int_{\Omega_i} \lambda_i(k) \lambda_i'(k) u(k) \bar{v} d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

para todo  $v \in H^1(B_R)$  y  $u(k)$  es solución del problema de Helmholtz para  $\lambda_i(k)$ .

11. Definimos el coste  $J(a, k) = \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma} |u_m - d_m|^2$ , donde  $u_m$  es solución de

$$\begin{cases} \operatorname{div}(a_e \nabla u) + k_e^2 u = 0, & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega_i}, & \operatorname{div}(a \nabla u) + k^2 u = 0, & \text{en } \Omega_i, \\ u^- = u^+, & a \frac{\partial u^-}{\partial \mathbf{n}} = a_e \frac{\partial u^+}{\partial \mathbf{n}}, & & \text{en } \partial \Omega_i, \\ r^{(N-1)/2} \left( \frac{\partial(u - u_{\text{inc}}^m)}{\partial r} - i k_e (u - u_{\text{inc}}^m) \right) \rightarrow 0, & & & \text{cuando } r := |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Dados  $a_j, k_j$ , encontrar direcciones de descenso para

$$J(\delta) := J(a_j + \delta \phi, k_j + \delta \psi),$$

donde  $\delta > 0$ , con el fin de implementar un proceso de optimización.

Tomado de [46]. Buscamos  $\delta, \phi$  y  $\psi$  tales que  $\frac{dJ(\delta)}{d\delta} < 0$ . Diferenciando, tenemos

$$\left. \frac{dJ}{d\delta} \right|_{\delta=0} = - \sum_{m=1}^M \operatorname{Re} \left[ \int_{\Omega_j} [\phi \nabla u_m \nabla \bar{w}_m - 2\psi k_j u_m \bar{w}_m] d\mathbf{z} \right],$$

donde  $u_m$  es solución del problema directo con  $a = a_j$ , y  $k = k_j$ . Los campos adjuntos  $w_m$  son solución de

$$\begin{cases} \operatorname{div}(a_e \nabla w_m) + k_e^2 w_m = (d_m - u_m) \delta_{\Gamma_{m \in \text{as}}}, & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega_i}, \\ \operatorname{div}(a_j \nabla w_m) + k_j^2 w_m = 0, & \text{en } \Omega_i, \\ w_m^- = w_m^+, & a_i \frac{\partial w_m^-}{\partial \mathbf{n}} = a_e \frac{\partial w_m^+}{\partial \mathbf{n}}, & & \text{en } \partial \Omega_i, \\ r^{(N-1)/2} \left( \frac{\partial w_m}{\partial r} + i k_e w_m \right) \rightarrow 0, & & & \text{cuando } r \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Tomando

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^M \operatorname{Re}(\nabla u_m(\mathbf{x}) \nabla \bar{w}_m(\mathbf{x})), \quad \psi(\mathbf{x}) = - \sum_{m=1}^M \operatorname{Re}(u_m(\mathbf{x}) \bar{w}_m(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \Omega_j,$$

y

$$a_{j+1} = a_j + \delta\phi, \quad k_{j+1} = k_j + \delta\psi,$$

garantizamos  $J(a_{j+1}, k_{j+1}) < J(a_j, k_j)$  para  $\delta$  pequeño.

12. *Una epidemia se propaga en una población formada por individuos que muestran distinta susceptibilidad según sus precauciones siguiendo el siguiente modelo*

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} &= -\beta S_1(t) \frac{I(t)+qE(t)+\ell J(t)}{N}, \\ \frac{dS_2}{dt} &= -\beta p S_2(t) \frac{I(t)+qE(t)+\ell J(t)}{N}, \\ \frac{dE}{dt} &= \beta(S_1(t) + pS_2(t)) \frac{I(t)+qE(t)+\ell J(t)}{N} - kE(t), \\ \frac{dI}{dt} &= kE(t) - (\alpha + \gamma_1 + \delta)I(t), \\ \frac{dJ}{dt} &= \alpha I(t) - (\gamma_2 + \delta)J(t), \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma_1 I(t) + \gamma_2 J(t), \\ \frac{dD}{dt} &= \delta I(t) + \delta J(t). \end{aligned} \tag{4}$$

donde  $N = S_1 + S_2 + E + I + J + R + D$  es la población total, que se conserva pues asumimos que el sistema es cerrado. La tasa de transmisión  $\beta$  refleja cómo la población susceptible  $S = S_1 + S_2$  se contagia. El riesgo de infección para  $S_2$  es menor que el riesgo para  $S_1$  por un factor  $p$ , que representa las medidas de contención aplicadas. El menor impacto de los individuos diagnosticados  $J$  en la transmisión, comparado a los expuestos  $E$  e infectados sin diagnosticar  $I$  se representa mediante el parámetro  $\ell$ .  $D$  cuantifica los fallecidos y  $R$  los recuperados. La tasa de recuperación es  $\gamma_1$  para los infectados y  $\gamma_2$  para los diagnosticados, mientras que su tasa de mortalidad es  $\delta$ . Estas tasas satisfacen  $\alpha > \gamma_1$  and  $\gamma_2^{-1} = \gamma_1^{-1} - \alpha^{-1}$  [81]. Deseamos identificar el factor de reducción  $p$  que representa las medidas protectivas empleadas por la población  $S_2$ . Supongamos que el coste  $C(p)$  dado por

$$\operatorname{Min}_{p \in [0,1]} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \left[ \left( \beta(S_1(t_i) + pS_2(t_i)) \frac{I(t_i)+qE(t_i)+\ell J(t_i)}{N} - kE(t_i) \right)^+ \right]^2 + \frac{c}{2} p^2 \right\}, \tag{5}$$

donde  $\frac{c}{2} p^2$ ,  $c > 0$  representa el coste de tales medidas sujeto a la restricción (4). Se trata de proponer un esquema para resolver este problema de optimización.

Tomado de [82]. Podemos aproximar la solución de este problema mediante técnicas de Newton, lo que requiere el conocimiento de la primera y la segunda derivadas del coste (5). Denotamos  $F(i, p) = \beta(S_1(t_i) + pS_2(t_i)) \frac{I(t_i) + qE(t_i) + \ell J(t_i)}{N} - kE(t_i)$ . Entonces

$$\frac{dC}{dp} = \sum_{i=1}^N F(i, p) + F_p(i, p) + cp.$$

Podemos aplicar métodos de gradiente para optimizar o usar la caracterización del mínimo

$$\frac{dC(p)}{dp} = 0, \quad \frac{d^2C(p)}{d^2p} > 0. \quad (6)$$

Esta ecuación se puede resolver mediante técnicas de ecuaciones no lineales como Newton-Raphson

$$p^{n+1} = p^n - \left( \frac{d^2C(p^n)}{d^2p} \right)^{-1} \frac{dC(p^n)}{dp}. \quad (7)$$

Este esquema necesita las derivadas These schemes involve the second order derivative

$$\frac{d^2C}{dp^2} = \sum_{i=1}^N [F^+(i, p)F_{p,p}(i, p) + \chi_{F>0} F_p(i, p)^2] + c \quad (8)$$

que no existen si  $F(p) = 0$ , puntos en los que la iteración debiera ser modificada. Las derivadas requeridas salen de derivar el sistema (4) con respecto a  $p$  una y dos veces, con lo que quedan caracterizadas como soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales auxiliares.

13. *Se define un objeto mediante parámetros  $\nu$  que minimizan el coste*

$$J(\nu) = \frac{1}{2\sigma_{\text{noise}}^2} \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K |u_{\nu}(r_k, 0, t_m) - d_k^m|^2 + \frac{1}{2}(\nu - \nu_0)^t \mathbf{Gamma}_{\text{pr}}^{-1}(\nu - \nu_0), \quad (9)$$

donde  $u_{\nu}$  es la solución de un problema de ondas con objeto  $\Omega$  parametrizado por  $\nu$

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} - \text{div}(\mu \nabla u) &= g(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in R, \quad t > 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) &= 0, \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in R, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}) &= \begin{cases} \rho, & \mathbf{x} \in R \setminus \overline{\Omega}, \\ \rho_i, & \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases} \\ \mu(\mathbf{x}) &= \begin{cases} \mu, & \mathbf{x} \in R \setminus \overline{\Omega}, \\ \mu_i, & \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases} \end{aligned}$$

Los parámetros  $\rho, \rho_i, \mu, \mu_i$  son positivos y la fuente  $g(\mathbf{x}, t)$  tiene soporte compacto.  $\mathbf{\Gamma}_{\text{pr}}$  denote una matriz definida positiva. Los puntos  $(r_k, 0)$ ,  $k = 1, \dots, K$ , y los tiempos  $t_m$ ,  $m = 0, \dots, M$ , están igualmente espaciados. Proponemos un esquema para optimizar este funcional.

Tomamos [85]. Empezando de  $\boldsymbol{\nu}^0 = \boldsymbol{\nu}_0$ , podemos implementar una iteración de Newton de tipo  $\boldsymbol{\nu}^{j+1} = \boldsymbol{\nu}^j + \boldsymbol{\xi}^{j+1}$  donde  $\boldsymbol{\xi}^{j+1}$  es la solución de

$$(\mathbf{H}(\boldsymbol{\nu}^j) + \omega_j \text{diag}(\mathbf{H}(\boldsymbol{\nu}^j))) \boldsymbol{\xi}^{j+1} = -\mathbf{g}(\boldsymbol{\nu}^j), \quad (10)$$

donde  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\nu})$  y  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\nu})$  representan la hessiana y el gradiente del coste.

14. Sea  $B_R$  una esfera centrada en  $(0, 0, 0)$  con radio  $R$  y sean  $k_e > 0$ ,  $k_i > 0$  dos constantes. Calcula soluciones de

$$\begin{cases} \Delta u + k_e^2 u = 0, & \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R}, \\ \Delta u + k_i^2 u = 0, & \text{in } B_R, \\ u^- = u^+ + U, & \text{on } \partial B_R, \\ \beta \partial_{\mathbf{n}} u^- = \partial_{\mathbf{n}} u^+ + \partial_{\mathbf{n}} U, & \text{on } \partial B_R, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r(\partial_r u - ik_e u) = 0, & \end{cases}$$

para funciones regulares  $U$  en forma de un desarrollo en serie.

Tomado de [74]. Tenemos

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm} h_n^{(1)}(k_e |\mathbf{x}|) Y_n^m(\hat{\mathbf{x}}), \quad |\mathbf{x}| \geq R, \\ u(\mathbf{x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b_{nm} j_n(k_i |\mathbf{x}|) Y_n^m(\hat{\mathbf{x}}), \quad |\mathbf{x}| \leq R, \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{x} = |\mathbf{x}| \hat{\mathbf{x}}$ ,  $j_n$  son las funciones de Bessel esféricas de primera clase,  $h_n^{(1)}$  son funciones esféricas de Hankel y  $Y_n^m$  son polinomios armónicos esféricos

$$Y_n^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} P_n^{|m|}(\cos(\theta)) e^{im\phi},$$

asociados a polinomios de Legendre  $P_n^{|m|}$ . Con más precisión, si  $U$  admite el desarrollo

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n u_{nm} j_n(k_e |\mathbf{x}|) Y_n^m(\hat{\mathbf{x}})$$

en una esfera que contiene  $B_R$ , los coeficientes se calculan como sigue.

Sobre la frontera de la esfera  $|\mathbf{x}| = R$ , tenemos condiciones de transmisión. Imponemos estas relaciones sobre los desarrollos en serie internos y externos e igualamos los coeficientes de  $Y_n^m(\hat{\mathbf{x}})$  ya que los polinomios armónicos

esféricos son una base de  $L^2(\partial B_1)$ . Esto proporciona las relaciones

$$\begin{aligned} u_{nm}j_n(k_e R) + a_{nm}h_n^{(1)}(k_e R) - b_{nm}j_n(k_i R) &= 0, \\ u_{nm}k_e j_n'(k_e R) + a_{nm}k_e h_n^{(1)'}(k_e R) - \beta b_{nm}k_i j_n'(k_i R) &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema obtenemos los coeficientes

$$\begin{aligned} a_{nm} &= u_{nm}a_n(R) = u_{nm} \frac{k_e j_n(k_i R) j_n'(k_e R) - \beta k_i j_n'(k_i R) j_n(k_e R)}{\beta k_i j_n'(k_i R) h_n^{(1)}(k_e R) - k_e j_n(k_i R) h_n^{(1)'}(k_e R)}, \\ b_{n,m} &= u_{nm}b_n(R) = u_{nm} \frac{k_e j_n'(k_e R) h_n^{(1)}(k_e R) - k_e j_n(k_e R) (h_n^{(1)})'(k_e R)}{\beta k_i j_n'(k_i R) h_n^{(1)}(k_e R) - k_e j_n(k_i R) h_n^{(1)'}(k_e R)}. \end{aligned}$$

Para calcular estos coeficientes, observamos que las funciones de Bessel esféricas están relacionadas con las funciones de Bessel de primera clase mediante  $j_n(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2s}} J_{n+1/2}(s)$ . Las funciones de Hankel esféricas están relacionadas con las funciones de Hankel esféricas de primera clase mediante  $h_n^{(1)}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2s}} H_{n+1/2}(s)$ . Sus derivadas se evalúan usando la fórmula  $f_n'(s) = \frac{n}{s} f_n(s) - f_{n+1}(s)$ , que se verifica para  $j_n$  y  $h_n^{(1)}$ .

15. *Explicar como resolver el sistema cinético siguiente mediante el método de partículas:*

$$\begin{aligned} \partial_t f + \frac{\Delta l}{2\hbar v_M} \sin(k) \partial_x f + \frac{\tau_e}{\eta} F \partial_k f &= \\ \frac{1}{\eta} \left[ f^{FDa}(k; \mu(n)) - \left( 1 + \frac{\nu_{imp}}{2\nu_{en}} \right) f + \frac{\nu_{imp}}{2\nu_{en}} f(x, -k, t) \right], \\ \partial_x^2 V = \partial_x F = n - 1 \\ n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, k, t) dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{FDa}(k; \mu(n)) dk \\ f^{FDa}(k; \mu) &= \alpha \ln [1 + \exp(\mu - \delta + \delta \cos(k))] \\ \eta &= \frac{v_M}{\nu_{en} x_0} \quad \delta = \frac{\Delta}{2k_B T}. \end{aligned}$$

Las condiciones de contorno son, para  $x = 0$ :

$$f^+ = \beta F - \frac{f^{(0)}}{\int_0^\pi \sin(k) f^{(0)} dk} \int_{-\pi}^0 \sin(k) f^- dk$$

con

$$\beta = \frac{2\pi \hbar \sigma F_M}{e \Delta N_D}$$

y para  $x = L/x_0$ :

$$f^- = \frac{f^{(0)}}{(1/(2\pi)) \int_{-\pi}^0 f^{(0)} dk} \left( 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f^+ dk \right)$$

Las condiciones de contorno del potencial eléctrico  $V$  son

$$V(0, t) = 0, \quad V(L, t) = \phi_L \sim \frac{\phi}{F_M} \frac{L}{x_0}.$$

La condición inicial es

$$f^{(0)}(k; n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp(\imath j k) \frac{1 - \imath j F / \tau_e}{1 + j^2 (F)^2} f_j^{FD}(n)$$

$$f_j^{FD}(n) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f^{FD}(k; \mu(n)) \cos(jk) dk$$

con  $x \in [0, L = L/x_0]$  y  $f$  periodico  $k$  con periodo  $2\pi$ . La energía promedio  $E$  se define como

$$E = \frac{E}{k_B T} = \frac{\int_{-\pi/l}^{\pi/l} \varepsilon(k) f(x, k, t) dk}{k_B T \int_{-\pi/l}^{\pi/l} f(x, k, t) dk} = \delta \frac{\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos k) f(x, k, t) dk}{\int_{-\pi}^{\pi} f(x, k, t) dk}.$$

Tomado de [43]. Partimos de una descripción de la función de distribución como un suma de funciones delta:

$$f(x, k, t) \approx \sum_{i=1}^N \omega_i f_i(t) \delta(x - x_i(t)) \otimes \delta(k - k_i(t))$$

donde  $\omega_i$ ,  $f_i(t)$ ,  $x_i(t)$  y  $k_i(t)$  son, respectivamente, el volumen de control (constante), el peso la posición y el vector de onda de la partícula  $i$ -ésima. Sea  $N$  el número de partículas numéricas. El movimiento de las partículas está gobernado por una dinámica sin colisiones, mientras que las colisiones se representan por la variación de los pesos. El perfil de la solución puede desarrollar gradientes grandes cuando algunas partículas adquieren gran peso, no acumulando muchas partículas en regiones de gradientes grandes. La evolución de las partículas está determinada por sus posiciones y vectores de onda, que definen las curvas características de la parte convectiva de la ecuación. Sus ecuaciones son:

$$\frac{d}{dt} k = \frac{\tau_e}{\eta} F, \quad \frac{d}{dt} x = \frac{\Delta l}{2\hbar v_M} \sin(k).$$

La evolución de la función de distribución a lo largo de esas curvas características viene dada por la ecuación:

$$\frac{d}{dt} f = \frac{1}{\eta} \left[ - \left( 1 + \frac{\nu_{imp}}{2\nu_{en}} \right) f + \frac{\nu_{imp}}{2\nu_{en}} f(-k) + f^{FD} \right].$$

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias resultante se discretiza mediante un método de Euler modificado:

$$f_i^n = f_i^{n-1} + dt \frac{1}{\eta} \left[ - \left( 1 + \frac{\nu_{imp}}{2\nu_{en}} \right) f_i^{n-1} + \frac{\nu_{imp}}{2\nu_{en}} f_i^{(-k)} + f_i^{FD, n-1} \right]$$

with  $f_i^{(-k)} = f(x_i^{n-1}, -k_i^{n-1}, t^{n-1})$ ,

$$k_i^n = k_i^{n-1} + dt \frac{\tau_e}{\eta} F_i^{n-1},$$

$$x_i^n = x_i^{n-1} + dt \frac{\Delta l}{2\hbar v_M} \sin(k_i^n).$$

Por razones de estabilidad, usamos  $k_i^n$  para actualizar  $x_i^n$ . Métodos multitaso parecen proporcionar peiores resultados.

Las condiciones de contorno se toman en cuenta como sigue:

- Si  $k_i^n > \pi$ , tomamos  $k_i^n = k_i^n - 2\pi$ . Si  $k_i^n < -\pi$ , tomamos  $k_i^n = k_i^n + 2\pi$ .
- Si  $x_i^n > L$ , tomamos  $x_i^n = x_i^n - L$  y  $f_i^{n-1} = f_i^+$ . Si  $x_i^n < 0$ , tomamos  $x_i^n = x_i^n + L$  y  $f_i^{n-1} = f_i^-$ . Los valores  $f_i^+$  y  $f_i^-$  se calculan por discretización de las integrales usando la regla de Simpson en una red equiespaciada  $K_{m'}$  con paso  $\Delta k$ .

Para calcular  $x_i$ ,  $k_i$  y  $f_i$  en el siguiente paso de tiempo  $t^{n+1}$ , necesitamos actualizar el campo eléctrico y la distribución de Fermi-Dirac en las ecuaciones de las partículas. Esta actualización requiere un proceso de interpolación para generar una aproximación de la función de distribución en una malla regular  $X_m$ ,  $K_{m'}$ , que se usa para aproximar el campo eléctrico y el potencial químico. Para aproximar los valores de la función de distribución en la malla,  $f_{m,m'}^n$ , empleamos los valores para las partículas  $f_i^n$ . Se calcula una media ponderada mediante

$$f_{m,m'}^n = \frac{\sum_{i=1}^N f_i^n W_{m,m'}^i}{\sum_{i=1}^N W_{m,m'}^i}$$

donde

$$W_{m,m'}^i = \max \left\{ 0, 1 - \frac{|X_m - x_i^n|}{\Delta x} \right\} \cdot \max \left\{ 0, 1 - \frac{|K_{m'} - k_i^n|}{\Delta k} \right\}$$

y  $\Delta x$ ,  $\Delta k$ , son los pasos en espacio y vector de onda.

Se obtienen aproximaciones para la densidad y densidad promedio en los puntos de malla,  $n(X_m, t^n) \approx n_m^n$  and  $(k_B T)^{-1} E(X_m, t^n) \approx (k_B T)^{-1} E_m^n$ , mediante la regla de Simpson y los valores interpolados de la función de distribución en la malla.

Calculamos el potencial químico  $\mu$  resolviendo las ecuaciones mediante un método de Newton-Raphson. La regla de Simpson se emplea también para aproximar las integrales para  $n(\mu)$  y  $dn(\mu)/d\mu$ . Una vez conocemos el potencial químico  $\mu$ , calculamos la distribución de Fermi-Dirac en los

puntos de la malla,  $f^{FD}(K_{m'}; n_m^n)$ , que se interpola a su vez para obtener la distribución de Fermi-Dirac sobre las partículas.

Calculamos el campo eléctrico en el tiempo  $t^n$ , usando diferencias finitas para discretizar la ecuación de Poisson en la malla  $X_m$  :

$$\begin{aligned} V_{m+1}^n - 2V_m^n + V_{m-1}^n &= n_m^n - 1, \\ F_m^n &= \frac{V_{m+1}^n - V_{m-1}^n}{2\Delta x}, \end{aligned}$$

donde  $V(0, t^n) = 0$  y  $V(L, t^n) = \phi L$ . Denotamos  $V_m^n$  y  $F_m^n$  las aproximaciones de  $V(X_m, t^n)$  y  $F(X_m, t^n)$  en la malla  $X_m$ . Finalmente, se interpola el campo eléctrico en la posición de la partícula  $i$

$$F_i^n = \left( \frac{X_{m+1} - x_i^n}{\Delta x} \right) F_m^n + \left( \frac{x_i^n - X_m}{\Delta x} \right) F_{m+1}^n.$$

La corriente total  $J$  viene dada por

$$J(t) = \frac{\varsigma}{L} \int_0^L \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k) f(x, k, t) dk \right] dx,$$

donde

$$\varsigma = \frac{l\Delta}{4\pi\hbar v_M}.$$

Usamos la regla de Simpson para aproximar  $J(t^n)$ .

16.

17. *Consider a set of particles at points  $\mathbf{r}_i$  in a rectangular box. We use them as seeds to generate a Voronoi tessellation of the rectangular region, with vertices  $\mathbf{r}_\mu$ . Sketch equations for the motion of the vertices due to self interaction.*

Taken from [80]. Each configuration of the mesh has the following associated energy

$$E_{VM} = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{K_i}{2} (A_i - A_i^0)^2 + \frac{\Gamma_i}{2} P_i^2 \right] + \sum_{\langle \mu, \nu \rangle} \Lambda_{\mu\nu} l_{\mu\nu}.$$

Here  $N$  is the total number of polygon,  $A_i$  is the area of polygon  $i$ ,  $A_i^0$  is its reference area, and  $K_i$  is the area modulus, i.e., a constant with units of energy per area squared measuring how hard it is to change the area of the polygon.  $P_i$  is the polygon perimeter and  $\Gamma_i$  (with units of energy per length squared) is the perimeter modulus that determines how hard it is to change perimeter  $P_i$ .  $l_{\mu\nu}$  is the length of the junction between vertices  $\mu$  and  $\nu$ , and  $\Lambda_{\mu\nu}$  is the tension of that junction (with units of energy per length). The sum in the last term is over all pairs of vertices that share

a junction. The area  $A_i$  of polygon  $\Omega_i$ , given by the following discrete version of Green's formula:

$$A_i = \frac{1}{2} \sum_{\mu \in \Omega_i} (\mathbf{r}_\mu \times \mathbf{r}_{\mu+1}) \cdot \mathbf{N}_i,$$

where  $\mathbf{r}_\mu$  is the position of vertex  $\mu$ , and  $\mathbf{N}_i$  is a unit vector perpendicular to the surface of the polygon. The sum is over all vertices of the Voronoi polygon and we close the loop with  $\mu + 1 = 1$  when  $\mu$  equals the total number of vertices in the polygon,  $N_{\Omega_i}$ . The polygon perimeter is

$$P_i = \frac{1}{2} \sum_{\mu \in \Omega_i} |\mathbf{r}_\mu - \mathbf{r}_{\mu+1}|.$$

The relation between the vertices  $\mathbf{r}_\mu$  of the Voronoi polygons and the vertices  $\mathbf{r}_i$  of the Delaunay triangles (seeds of the Voronoi polygons, i.e., centers) is

$$\mathbf{r}_\mu = \frac{\lambda_1 \mathbf{r}_i + \lambda_2 \mathbf{r}_j + \lambda_3 \mathbf{r}_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}.$$

The usual dynamics for the polygon centers is a gradient flow of the energy with forces  $\mathbf{F}_i$

$$\gamma \mathbf{r}'_i = \mathbf{F}_i$$

with

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i = & - \sum_{k=1}^N \frac{K_k}{2} (A_k - A_k^0) \sum_{\nu \in \Omega_k} [\mathbf{r}_{\nu+1, \nu-1} \times \mathbf{N}_k]^T \left[ \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial \mathbf{r}_i} \right] \\ & - \sum_{k=1}^N \Gamma_k P_k \sum_{\nu \in \Omega_k} (\hat{\mathbf{r}}_{\nu, \nu-1} - \hat{\mathbf{r}}_{\nu+1, \nu})^T \left[ \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial \mathbf{r}_i} \right] \\ & - \sum_{k=1}^N \sum_{\nu \in \Omega_k} [\Lambda_{\nu-1, \nu} \hat{\mathbf{r}}_{\nu, \nu-1} - \Lambda_{\nu, \nu+1} \hat{\mathbf{r}}_{\nu+1, \nu}]^T \left[ \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial \mathbf{r}_i} \right] \\ & + k \sum_{\langle j, i \rangle} (2a - |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \Theta(2a - |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|). \end{aligned}$$

Here  $\left[ \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial \mathbf{r}_i} \right]$  is the  $3 \times 3$  Jacobian matrix connecting coordinates of cell centres with coordinates of the dual Voronoi tessellation, and the non-commutative row-matrix product  $[\cdot]^T [\cdot]$  is a  $3 \times 1$  column vector.  $\Theta(x) = 1$  if  $x > 0$ , else  $\Theta(x) = 0$ , is the Heaviside unit step function. We have included a range repulsive force of short range  $a$  that avoids self intersections of the triangulation for very obtuse triangles.

## 5 Ecuaciones Diferenciales en Diferencias

1. Consideremos la ecuación

$$x'' + \frac{1}{2\alpha\theta} \frac{1 + \tanh^2(x/\theta)}{1 - \tanh^2(x/\theta)} x' + x - H - \tanh\left(\frac{x}{\theta}\right) = 0.$$

Estudiar sus equilibrios y los comportamientos de las trayectorias en función de los parámetros de control  $\theta$  y  $H$ .

Tomado de [56]. Introducimos el potencial  $V(x; H, \theta) = \frac{x^2}{2} - Hx - \theta \ln \cosh\left(\frac{x}{\theta}\right)$ . Típicamente,  $\theta \in (0, 1)$ . La ecuación se transforma en

$$x'' + \frac{1}{2\alpha\theta} R(x, \theta) x' - V'(x; H, \theta) = 0$$

con  $R(x, \theta) = \frac{1 + \tanh^2(x/\theta)}{1 - \tanh^2(x/\theta)} > 0$ . Para  $H = 0$  y  $\theta < 1$ , el potencial tiene dos mínimos en los que se alcanza el mismo valor, en posiciones simétricas. En vista de la presencia de un término de amortiguación, las trayectorias se enroscan en torno a esos puntos (atractores espirales). Para  $|H| < H_c$ , hay dos mínimos  $x_+ > 0$  y  $x_- < 0$ , cada uno de ellos con una zona de atracción.

2. Consideremos un sistema con energía  $A(\eta, Y) = \sum_{j=1}^N a(\eta_j; Y)$ ,  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_N)$  bajo la restricción  $\sum_{j=1}^N \eta_j = L$ . Dado  $F$ , estudiamos los mínimos de  $A(\eta, Y) - FL$ , donde  $F = F(L)$  es un multiplicador de Lagrange calculado de tal forma que la restricción se cumple.

Tomado de [61]. La curva  $F(L)$  tien  $N + 1$  ramas, que podemos calcular imponiendo  $\frac{\partial a}{\partial \eta_j} = F$  para todo  $j$ .

3. Consideramos la ecuación diferencial en diferencias  $u'_n(t) = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} - A \sin(u_n)$ , donde  $A$  es un parámetro positivo. Demostrar que existe una solución monótona tal que  $u_{-\infty} = 0$  y  $u_{\infty} = 2\pi$  con  $u_0 = \pi$  y  $u_n - \pi = \pi - u_{-n}$  para todo  $n$ .

Tomado de [14]. Ponemos  $u_0 = \pi$  y variamos  $u_1$  en el intervalo  $(\pi, 2\pi)$  para encontrar la solución. La condición  $u_0 = \pi$  garantiza que  $u_n - \pi$  es una función impar de  $n$ . Elegimos  $\epsilon > 0$  para que  $-A \sin(u) > \epsilon(u - \pi)$  si  $\pi < u \leq \frac{3}{2}\pi$  y escogemos  $N$  grande para que  $\epsilon(N - 1) > 1$ . A continuación, elegimos  $u_1 - \pi$  pequeño para que  $u_j \leq \frac{3}{2}\pi$  si  $1 \leq j \leq N$ . De-seamos mostrar que bajo esas condiciones la secuencia finita  $\{u_1, \dots, u_N\}$  no es monótona creciente. Denotamos  $U_n = u_n - \pi$ . Si  $\{U_1, \dots, U_N\}$  es monótona creciente cuando  $2 \leq j \leq N$  y  $U_j \leq (2 - \epsilon)U_{j-1} - U_{j-2}$ . Sumando estas desigualdades obtenemos  $U_N - U_{N-1} \leq \epsilon \sum_{i=2}^{N-1} U_i + (1 - \epsilon)U_1$ . Como asumimos que  $U_i \geq U_1$  si  $2 \leq i \leq N$ , nuestra cota inferior sobre  $N$  implica  $U_N < U_{N-1}$ , lo que es contradictorio. Por tanto hemos mostrado que si  $U_1$  es suficientemente pequeño, la secuencia empieza a decrecer antes de cruzar  $\pi$ . Por otra parte, eligiendo  $U_1 > \pi$  la

secuencia cruza  $\pi$  antes de decrecer. Nótese que la secuencia crece hasta un primer  $N$  tal que  $U_N = \pi$ , si  $U_{N+1} > \pi$ . Si, al final hay un  $N$  tal que la secuencia crece hasta  $n = N$ , con  $U_N < \pi$ , y  $U_N = U_{N+1}$ , entonces  $U_{N+2} < U_{N+1}$  así que la secuencia decrece antes de alcanzar  $\pi$ .

4. Sean  $U_i(t)$  y  $L_i(t)$ ,  $i \in \mathbb{Z}$  dos sucesiones diferenciables tales que

$$\begin{aligned} U_i'(t) - d_1(U_i)(U_{i+1} - U_i) - d_2(U_i)(U_{i-1} - U_i) - f(U_i) &\geq \\ L_i'(t) - d_1(L_i)(L_{i+1} - L_i) - d_2(L_i)(L_{i-1} - L_i) - f(L_i) & \end{aligned}$$

y  $U_i(0) < L_i(0)$  para todo  $i$ , siendo  $f$ ,  $d_1 > 0$  y  $d_2 > 0$  funciones Lipschitz continuas. Entonces,  $U_i(t) > L_i(t)$  para  $t > 0$  y  $i \in \mathbb{Z}$ .

Tomado de [15]. Procedemos por reducción al absurdo, Sea  $W_i(t) = U_i(t) - L_i(t)$ . En  $t = 0$ ,  $W_i(0) > 0$  para todo  $i$ . Asumimos que  $W_i$  cambia de signo tras un tiempo mínimo  $t_1 > 0$ , para algún valor de  $i$ ,  $i = k$ . Entonces  $W_k(t_1) = 0$  y  $W_k'(t) \leq 0$ , cuando  $t \rightarrow t_1$ . Mostremos que ésto es contradictorio. En  $t = t_1$ , debe haber un índice  $m$  (igual o distinto de  $k$ ) tal que  $W_m(t_1) = 0$ , mientras que su vecino  $W_{m+j}(t_1) > 0$  ( $j$  es 1 o  $-1$ ), y  $W_i(t_1) = 0$  para todos los índices  $k$  y  $m$ . En otro caso,  $W_k$  debiera ser igual a 0 para todo  $k$ . La desigualdad diferencial implica

$$W_m'(t_1) \geq d_1(U_m(t_1))W_{m+1}(t_1) + d_2(U_m(t_1))W_{m-1}(t_1) > 0.$$

Esto contradice el hecho de que  $W_m'(t)$  debiera ser no positiva cuando  $t \rightarrow t_1$ , si queremos que  $W_m(t_1)$  se anule.

5. Consideremos la ecuación

$$U'(t) = z_1(F/A) + z_3(F/A) - 2U(t) - A \sin(U(t)) + F,$$

con  $|F| < A$ ,  $A \gg 1$ , siendo  $z_1(F/A) < z_2(F/A) < z_3(F/A)$  tres ceros consecutivos de la ecuación  $\sin(z) = F/A$  en un periodo. Probar que existe un umbral crítico  $F_c$  tal que esta ecuación tiene tres soluciones constantes estables si  $0 \leq F < F_c$ , pero una si  $F > F_c$ . Caracterizar  $F_c$ .

Tomado de [18]. Cuando  $F = 0$ ,  $z_1(0) = 0$ ,  $z_2(0) = \pi$  y  $z_3(0) = 2\pi$ . Hemos de resolver

$$2z + A \sin(z) = F + 2\arcsin(F/A) + 2\pi.$$

Según  $F$  crece desde 0, seguimos encontrando tres soluciones  $z_1(F/A) < z_2(F/A) < z_3(F/A)$  que continúan esas ramas hasta que  $F + 2\arcsin(F/A) + 2\pi$  alcanza el primer máximo local de  $2z + A \sin(z)$  ( $A$  es grande). El valor  $F_c$  en el cual ocurre ésto se caracteriza por la existencia de un cero doble, un valor  $u_0$  tal que  $2 + A \cos(u_0) = 0$  y  $2u_0 + A \sin(u_0) = F_c + 2\arcsin(F_c/A) + 2\pi$ . Entonces,  $u_0 = \arccos(-2/A)$  y  $F_c$  es la solución de  $2u_0(A) + A \sin(u_0(A)) = F_c + 2\arcsin(F_c/A) + 2\pi$ . Por debajo de  $F_c$  hay tres ceros. En  $F_c$  dos de ellos colisionan. Por encima de  $F_c$ , los dos ceros que colisionan,  $z_1(F/A)$  y  $z_2(F/A)$  se pierden.

$z_1(F/A)$  y  $z_3(F/A)$  son estables mientras existen. Esta situación se corresponde con la presencia de una bifurcación nodo-silla en el sistema, véase [18]. Estas bifurcaciones son esenciales para comprender una gran variedad de fenómenos biológicos, véase [64].

6. *El sistema de ecuaciones*

$$\frac{dE_i}{dt} + \frac{v(E_i)}{\nu}(E_i - E_{i-1}) - \frac{D(E_i)}{\nu}(E_{i+1} - 2E_i + E_{i-1}) = J - v(E_i),$$

con  $i \in \mathbb{Z}$  admite soluciones de tipo ondas viajeras de la forma  $E_i(t) = E(i - ct)$  que se propagan a velocidad constante  $c$  cuando el parámetro  $J$  es suficientemente grande. Suponemos que  $v, D$  son funciones positivas y  $\nu > 0$  es grande. La función  $v$  es una cúbica, crece desde 0 hasta un máximo local, decrece a un mínimo local positivo y crece hasta el infinito. Justificar que la velocidad del frente de onda escala como  $(J - J_c)^{1/2}$ , donde  $J_c$  es el umbral para la existencia de ondas viajeras.

Tomado de [20]. Para  $\nu$  grande, podemos construir soluciones estacionarias, que se pueden aproximar por

$$E_i \sim z_1(J) \quad i < 0, \quad E_i \sim z_3(J) \quad i > 0,$$

cuando  $|J| < J_c$ , mientras que  $E_0$  es una solución de

$$J - v(E_0) - \frac{v(E_0)}{\nu}(E_0 - z_1(J)) + \frac{D(E_0)}{\nu}(z_3(J) - 2E_0 + z_1(J)) = 0,$$

donde  $z_1(J) < z_2(J) < z_3(J)$  verifican  $J = v(z)$ . Al alcanzar un valor  $J_c$ ,  $z_1(J_c) = z_2(J_c)$ , perdiéndose cuando  $J > J_c$ , de modo que sólo persiste  $z_3(J)$ . La ecuación reducida

$$\frac{dE_0}{dt} = J - v(E_0) - \frac{v(E_0)}{\nu}(E_0 - z_1(J)) + \frac{D(E_0)}{\nu}(z_3(J) - 2E_0 + z_1(J)),$$

para el punto de unión de las colas constantes experimenta una bifurcación de tipo nodo-silla en  $J_c$  cuya forma normal

$$\phi' = \alpha(J_c)(J - J_c) + \beta(J_c)\phi^2,$$

tiene soluciones tipo  $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}(J - J_c)} \tan(\sqrt{\alpha\beta(J - J_c)}(t - t_0))$ . Estas funciones explotan cuando el argumento de la tangente se aproxima a  $\pm\pi/2$ , en un tiempo  $t - t_0 \sim \pi/\sqrt{\alpha\beta(J - J_c)}$ . El valor  $J_c$  separa el régimen en el cual se observan frentes de onda estacionarios (anclados) y frentes de onda viajeros.

Tomando  $J > J_c$  próximo a  $J_c$ , las simulaciones muestran perfiles escalonados, en los que un punto permanece cerca del desaparecido equilibrio  $E_0(J_c)$  hasta que se mueve siguiendo la curva tangente definida por la forma normal y la posición próxima a  $E_0(J_c)$  la toma otro punto contiguo. Este proceso se va repitiendo secuencialmente. La velocidad de la onda es el recíproco del tiempo que tarda esta transición  $c(J, \nu) \sim \frac{\sqrt{\alpha\beta(J - J_c)}}{\pi}$ , véase [20] para detalles.

7. Consideramos un problema con ruido

$$\frac{du_i}{dt} = u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} + F - A \sin(u_i) + \gamma \xi_i,$$

donde  $A > 0$  toma valores grandes y  $\gamma > 0$  caracteriza la magnitud del desorden en el sistema, mientras que  $\xi_i$  es una variable aleatoria de media nula que toma valores en el intervalo  $(-1, 1)$  de forma equiprobable. Probar que la velocidad de los frentes viajeros para  $F$  mayor que un valor crítico  $F_c^*$  escala como  $(F - F_c^*)^{3/2}$ .

Tomado de [22]. Fijando  $\gamma = 0$ , podemos repetir con esta ecuación el estudio que hemos hecho en el ejercicio anterior y obtener un velocidad que escala como  $(F - F_c)^{1/2}$ . Sin embargo, al añadir ruido, para cada realización del ruido, el umbral  $F_c$  se desplaza ligeramente por el ruido. La velocidad que se observa es la media de las velocidades obtenidas para un número elevado de realizaciones. Si tenemos

$$|c_R| \sim \frac{1}{\pi} \sqrt{\alpha(F_c)\beta(F_c)(F - F_c) + \gamma\beta(F_c)\xi_0}$$

la media es

$$\bar{c} = \frac{1}{N} \sum_{R=1}^N |c_R| = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (\alpha\beta(F - F_c) + \gamma\beta\xi)^{1/2} d\xi \sim (F - F_c^*)^{3/2}$$

donde el nuevo valor crítico es  $F_c^* = F_c - \frac{\gamma}{\alpha}$ .

8. Consideremos el problema

$$\frac{du_i}{dt} = u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} + F - A \sin(u_i),$$

con  $A$  grande. Sean  $z_1(F/A) < z_2(F/A) < z_3(F/A)$  las tres ramas consecutivas de ceros de  $F - A \sin(z) = 0$  que empiezan en  $z_1(0) = 0$ ,  $z_2(0) = \pi$ ,  $z_3(0) = 2\pi$ . Sabemos que si  $|F| < F_c(A)$  el problema admite soluciones estacionarias que crecen de  $z_1(F/A)$  en  $-\infty$  a  $z_3(F/A)$  en  $\infty$ . Cuando  $F$  supera ese umbral, tenemos ondas viajeras. Escribe la ecuación para estas ondas viajeras y encuentra una fórmula para la velocidad.

Tomado de [24]. Las soluciones de tipo onda viajera tienen la estructura  $u_i(t) = u(i-ct)$ , donde  $c$  es la velocidad de onda constante y  $u(z)$ ,  $z = i-ct$  es un perfil de onda, que es solución de

$$-cu_z(z) = u(z+1) - 2u(z) + u(z-1) + F - A \sin(u(z)), \quad z \in \mathbb{R}$$

con  $u(-\infty) = z_1(F/A)$  y  $u(\infty) = z_3(F/A)$ . Ese tipo de ondas viajeras se llaman frentes. Multiplicando la ecuación por  $u_z$  e integrando, obtenemos

$$-c \int_{-\infty}^{\infty} u_z^2 dz = F [z_3(F/A) - z_1(F/A)].$$

9. El modelo de Fitz Hugh-Nagumo discreto es un modelo típico de la propagación de pulsos

$$\begin{aligned}\epsilon u'_i &= d(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + u_i(2 - u_i)(u_i - a) - v_i, \\ v'_i &= u_i - Bv_i.\end{aligned}$$

donde los parámetros  $\epsilon, d > 0$  y  $a$  con tales que  $(0, 0)$  es la única solución constante.  $\epsilon$  es pequeño y  $a$  es tal que  $z(2 - z)(z - a)$  tiene tres raíces  $z_1(a) < z_2(a) < z_3(a)$ . Explica la evolución de los pulsos en términos de soluciones tipo frente de ecuaciones de Nagumo

$$\epsilon u'_i = d(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + u_i(2 - u_i)(u_i - a) - w.$$

Tomado de [25]. Las soluciones tipo pulso tienen la forma  $u_i(t) = u(z)$ ,  $v_i(t) = v(z)$ ,  $z = i - ct \in \mathbb{R}$ , with

$$\begin{aligned}-\epsilon u_z(z) &= d(u(z+1) - 2u(z) + u(z-1)) + u(z)(2 - u(z))(a - u(z)) - v, \\ -cv_z(z) &= 0,\end{aligned}$$

con  $z \in \mathbb{R}$ . Para  $v$  pequeño, denotamos por  $z_1(a, v) < z_2(a, v) < z_3(a, v)$  las tres raíces de  $u(z)(2 - u(z))(a - u(z)) - v = 0$ . Como  $\epsilon$  es pequeño,  $u_i$  y  $v_i$  evolucionan en escalas de tiempo distintas. Se distinguen 5 regiones en el perfil del pulso

- Parte frontal:  $u_i = z_1(a, v_i)$  y  $v'_i = z_1(a, v_i) - Bv_i$ , que evoluciona a  $(0, 0)$  según  $i$  crece.
- Frente delantero: Descrito por soluciones viajeras de  $\epsilon u'_i = d(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + u_i(2 - u_i)(u_i - a) - 0$  que decrecen de 2 a 0, con  $v_i \sim 0$ . Viaja a velocidad  $c$ .
- Pico:  $u_i = z_2(a, v_i)$  y  $v'_i = z_3(a, v_i) - Bv_i$ .
- Frente trasero: Descrito por una solución viajera de  $\epsilon u'_i = d(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + u_i(2 - u_i)(u_i - a) - w$  que crece de valores próximos a 0 a valores próximos a 2, con  $v_i \sim w$ ,  $w$  seleccionado de modo que viaja con velocidad  $c$  también.
- Cola:  $u_i = z_1(a, v_i)$  y  $v'_i = z_1(a, v_i) - Bv_i$ , que se aproxima a  $(0, 0)$  según  $i$  decrece.

Véase [25] para una visualización. Véase [32] para una aplicación de estas ideas a modelos de tipo Hodgkin-Huxley para nervios mielinados. Las soluciones de tipo pulso no se pueden propagar cuando los parámetros de la ecuación reducida que describe el frente delantero son tales que sólo admite frentes estacionarios.

10. Consideramos el sistema

$$\begin{aligned}v'_j &= d(v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}) + f(v_j, w_j), \\ w'_j &= \lambda g(v_j, w_j),\end{aligned}$$

con  $d, \lambda > 0$  y  $\lambda$  pequeño, de modo que las dos variables evolucionan en escalas de tiempo distintas. Fijado  $w$ ,  $f(v, w)$  es una cúbica biestable, es decir, tiene tres ceros, dos de los cuales son estables para la primera ecuación con  $w_j = w$ . Cuando las ecuaciones  $f(v, w) = 0 = g(v, w)$  tienen una única solución, que es estable, tenemos soluciones de tipo pulso del sistema de ecuaciones diferenciales, como ocurre para Fitz Hugh-Nagumo. Cuando es inestable, argumenta por qué a menudo se observan oscilaciones.

Tomado de [33]. Cuando  $g$  y  $f$  se cortan en un cero estable, tenemos un sistema excitable con soluciones de tipo pulso. Cuando se cortan en un cero inestable, soluciones de tipo ciclo límite  $(V(t), W(t))$  con periodo  $T$ ,  $T > 0$  de

$$v' = f(v, w), \quad w' = \lambda g(v, w),$$

aparecen para  $\lambda$  pequeño. Las trayectorias del sistema se comportan como  $v_j(t) = V(t + \phi_j)$  y  $w_j(t) = W(t + \phi_j)$ , para una fase  $\phi_j$  que varía lentamente y puede hacerse independiente del tiempo cuando  $t \rightarrow \infty$ . Todas las trayectorias se sincronizan.

11. Sea  $u_{i,j}(t)$  una solución de

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} = u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j} + A(\sin(u_{i,j-1} - u_{i,j}) \sin(u_{i,j+1} - u_{i,j}))$$

para  $i, j \in \mathbb{Z}$  y  $u_{i,j}(0) = \alpha_{i,j}$  tales que  $\alpha_{i+1,j} - 2\alpha_{i,j} + \alpha_{i-1,j} \in l^2$ ,  $\sin(\alpha_{i,j-1} - \alpha_{i,j}) \sin(\alpha_{i,j+1} - \alpha_{i,j}) \in l^2$  y  $\alpha_{i,j} \in l_{\text{loc}}^\infty$ . Si  $(u_{i,j+1} - u_{i,j})(t) \in \cap_{n \in \mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi]$  se cumple para todo  $i, j, t$ , entonces  $u_{i,j}(t)$  tiene a un límite  $s_{i,j}$  cuando  $t \rightarrow 0$  que es una solución estacionaria del problema.

Tomado de [23]. Definimos  $w_{i,j}(t) = u_{i,j}(t + \tau) - u_{i,j}(t)$  para algún  $\tau > 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \sum_{i,j} |w_{i,j}(t)|^2 \right) &= - \sum_{i,j} ((w_{i+1,j} - w_{i,j})(t))^2 - \sum_{i,j} (\sin((u_{i,j+1} - u_{i,j})(t + \tau)) \\ &\quad - \sin((u_{i,j+1} - u_{i,j})(t))) ((u_{i,j+1} - u_{i,j})(t + \tau) - (u_{i,j+1} - u_{i,j})(t)) \leq 0. \end{aligned}$$

Esto implica  $w_{i,j}(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  para todo  $i, j$ . Concluimos que  $u_{i,j}(t)$  tiende a un límite  $s_{i,j}$  que es una solución estacionaria.

12. Resolvemos

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} = u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j} + A(\sin(u_{i,j-1} - u_{i,j}) \sin(u_{i,j+1} - u_{i,j}))$$

con condiciones de contorno  $s_{i,j} = \theta(i, j/\sqrt{A}) + Fj$  donde  $\theta$  es la función ángulo que varía de 0 a  $2\pi$  y  $F > 0$  es un parámetro de control. Dado  $F =$

0, el ejercicio anterior garantiza la existencia de soluciones estacionarias. Puedes esperar un cambio a medida que  $F$  crece?

Tomado de [26]. A medida que  $F$  crece, la condición

$$(u_{i,j+1} - u_{i,j})(t) \in \cap_{n \in \mathbb{Z}} \left[ -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi \right]$$

deja de cumplirse. Las soluciones estacionarias desaparecen y aparecen patrones viajeros. Si linealizamos el operador espacial en torno a  $s_{i,j}$ , tenemos un problema elíptico discreto para  $F$  pequeño que cambia de tipo al crecer  $F$ .

13. *Construimos numéricamente soluciones de*

$$m \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} = u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j} \\ + A(\sin(u_{i,j-1} - u_{i,j}) \sin(u_{i,j+1} - u_{i,j}))$$

en un retículo rectangular  $i = 1, \dots, N_x$ ,  $j = 1, \dots, N_y$ , con condiciones de contorno  $u_{i,j} = F(j - (N_y + 1)/2)$ . A medida que  $F$  crece observamos que la solución inicial para  $F = 0$  va evolucionando a soluciones estacionarias que cambian lentamente al subir  $F$  hasta que alcanzamos un punto  $F_c$ , tras lo cual la estructura del retículo se distorsiona. Se observan dos tipos de distorsión distintos que coexisten. Linearizando en torno a la solución estacionaria en  $F = F_c$  encontramos una matrix con un autovalor nulo, mientras que todos los autovalores eran negativos para  $F < F_c$ . Cómo explicas ésto?

Tomado de [36]. La rama de soluciones estacionarias  $s_{i,j}(F)$  parece estable. En  $F = F_c$  aparecen dos nuevas ramas, estables. El sistema experimenta una bifurcación de tipo pitchfork.

14. *Consideramos la dinámica*

$$m \frac{\partial^2 v_{i,j}}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial v_{i,j}}{\partial t} = v_{i-1,j} - 2v_{i,j} + v_{i+1,j} \\ + A(\sin(v_{i,j-1} - v_{i,j}) \sin(v_{i,j+1} - v_{i,j}))$$

en un retículo  $i = 1, \dots, N_x$ ,  $j = 1, \dots, N_y$ . Imponemos condiciones de contorno que representan presión hacia abajo en la zona central de la parte superior:

- *A izquierda:*  $v_{1,j} = v_{0,j}$ .
- *A derecha:*  $v_{N_x,j} = v_{N_x+1,j}$ .
- *Zona superior izquierda* ( $1 \leq i < p_1$ ):  $v_{i,N_y} = v_{i,N_y+1}$ .
- *Zona superior derecha* ( $p_2 < i \leq N_x$ ):  $v_{i,N_y} = v_{i,N_y+1}$ .
- *Zona inferior:*  $v_{i,0} = 0$ .

- En la zona superior central ( $p_1 \leq i \leq p_2$ ) se empuja hacia abajo:  $v_{i,N_y+1} - v_{i,N_y} = -f(i)$ , donde  $f$  tiene un perfil triangular que apunta hacia abajo con magnitud  $F > 0$ .

Según  $F$  crece, observamos que la solución inicial para  $F = 0$  desarrolla distorsiones localizadas en el retículo que viajan hacia abajo. Según decrecemos  $F$  a cero, esas distorsiones se mueven hacia arriba y pueden desaparecer. Cómo explicas esto?

Tomado de [45]. La rama de soluciones estacionarias que empieza en  $F = 0$  desarrolla bifurcaciones en valores específicos de  $F$  en los cuales se crean distorsiones en la red. Tales nuevas ramas son estables para algunos rangos de  $F$ , los defectos simplemente viajan lentamente. Estas configuraciones bifurcan en determinados valores de  $F$  para los que se crean nuevos defectos, que viajan para un rango de  $F$ , hasta que ocurre una nueva bifurcación a medida que  $F$  crece. Cuando decrecemos  $F$ , el proceso se invierte. Los defectos creados viajan hacia arriba, y desaparecen, uno tras otro.

15. Dado el problema

$$u_j'' + \alpha u_j' = u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1} + F - Ag(u_j),$$

donde  $g(u) = u + 1$  si  $u < 0$  y  $g(u) = u - 1$  si  $u > 0$ , construir soluciones de tipo onda viajera.

Tomado de [27]. Una solución de tipo frente viajero toma la forma  $u_i(t) = u(i - ct)$ ,  $z = i - ct$ . El perfil  $v(z) = u(z) + 1$  satisface

$$\begin{aligned} c^2 v_{zz}(z) - \alpha c v_z(z) - (v(z+1) - 2v(z) + v(z-1)) + Av(z) \\ = F + 2AH(-\text{sign}(cF)z), \quad z \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

con  $v(-\infty) = 0$  y  $v(\infty) = 2$ . Hemos tomado  $g(u) = u + 1 - 2H(u)$ , donde  $u$  es la función de Heaviside. Usando la expresión como integral de contorno de la función de Heaviside

$$H(-z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{ikx}}{k} dk.$$

$C$  es un contorno formado por un semicírculo cerrado en el semiplano complejo superior y orientado en el sentido contrario de las agujas del reloj, más otro semicírculo cerrado en el semiplano complejo inferior y orientado en el sentido de las agujas del reloj, que incluye dentro el origen y forma un pequeño semicírculo por encima de él. El perfil que buscamos viene dado por la expresión

$$v(z) = \frac{F}{A} - \frac{A}{\pi i} \int_C \frac{\exp(ik \text{sign}(cF)z) dk}{k A + 4 \sin^2(k/2) - k^2 c^2 - ik|c|\alpha \text{sign}(F)}.$$

Imponiendo  $v(0) = 1$ , obtenemos una relación entre la velocidad  $c$  y la fuerza aplicada  $F$ . Conocido  $c(F)$ , esta expresión proporciona los perfiles

v. A diferencia de ejercicios anteriores, tales ejercicios no son monótonos, sino que presentan oscilaciones, véase [27].

16. Probar que el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} u_j'' + \alpha u_j' &= d(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) - u_j + F, \\ u_j(0) &= u_j^0, \quad u_j'(0) = u_j^1, \end{aligned}$$

$d > 0$ ,  $\alpha \geq 0$ , admite soluciones de la forma

$$u_j(t) = \sum_k [G_{j,k}^0(t)u_k'(0) + G_{j,k}^1(t)u_k(0)] + \int_0^t \sum_k G_{j,k}^0(t-s)f_k(s)ds$$

para funciones de Green adecuadas  $G_{j,k}^0$  y  $G_{j,k}^1$ .

Tomado de [28]. En primer lugar, eliminamos el operador en diferencias usando funciones generatrices  $p(\theta, t)$  y  $f(\theta, t)$

$$p(\theta, t) = \sum_j u_j(t)e^{-ij\theta}, \quad f(\theta, t) = \sum_j f_j(t)e^{-ij\theta}.$$

Diferenciando  $p$  con respecto a  $t$  y usando la ecuación, vemos que  $p(\theta, t)$  es solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$p''(\theta, t) + \alpha p'(\theta, t) + \omega(\theta)^2 p(\theta, t) = f(\theta, t)$$

con  $\omega(\theta)^2 = 1 + 4d \sin^2(\theta/2)$  y con condiciones iniciales para  $p$  obtenidas de las condiciones para  $u_j$ . Fijado  $\theta$ , sabemos cómo calcular soluciones explícitas de esta ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes

$$p(\theta, t) = p(\theta, 0)g^0(\theta, t) + p'(\theta, 0)g^1(\theta, t) + \int_0^t g^1(\theta, t-s)f(\theta, s)ds,$$

con

$$g^0(\theta, t) = \begin{cases} \frac{e^{r_+(\theta)t} - e^{r_-(\theta)t}}{r_+(\theta) - r_-(\theta)}, & \alpha^2/4 > \omega^2(\theta), \\ te^{-\alpha t/2}, & \alpha^2/4 = \omega^2(\theta), \\ e^{-\alpha t/2} \frac{\sin(I(\theta)t)}{I(\theta)}, & \alpha^2/4 < \omega^2(\theta), \end{cases}$$

$$g^1(\theta, t) = \begin{cases} \frac{e^{r_+(\theta)t} r_+(\theta) - e^{r_-(\theta)t} r_-(\theta)}{r_+(\theta) - r_-(\theta)}, & \alpha^2/4 > \omega^2(\theta), \\ te^{-\alpha t/2} \left(1 + \frac{\alpha}{2}t\right), & \alpha^2/4 = \omega^2(\theta), \\ e^{-\alpha t/2} \left(\cos(I(\theta)t) + \frac{\alpha \sin(I(\theta)t)}{2I(\theta)}\right), & \alpha^2/4 < \omega^2(\theta). \end{cases}$$

Recuperamos  $u_j$  como

$$u_j(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{ij\theta} p(\theta, t),$$

lo que conduce a

$$G_{jk}^0(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{i(j-k)\theta} g^0(\theta, t), \quad G_{jk}^1(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{i(j-k)\theta} g^1(\theta, t).$$

17. Usar la expresión de las soluciones del problema de valores iniciales establecida en el problema anterior para definir una condición de contorno no reflectante en  $n = 0$  para problemas truncados en  $n \geq 0$ , de modo que la solución que obtenemos es la misma que obtendríamos resolviendo el sistema para todo  $n$ .

Tomado de [48]. Colocamos una condición de contorno artificial en  $n = 0$  y restringimos el dominio computacional a  $n \geq 0$ . Por tanto, necesitamos una condición de contorno para calcular  $u_0(t)$  y cerrar el sistema. En principio,

$$\frac{d^2 u_0}{dt^2} = d(u_1 - 2u_0 + u_{-1}) + f_0,$$

pero  $u_{-1}(t)$  a menos que resolvamos también para  $n \leq 0$ . La ecuación en  $n = -1$  nos proporciona

$$\frac{d^2 u_{-1}}{dt^2} = d(0 - 2u_{-1} + u_{-2}) + f_{-1} + du_0.$$

Suponiendo que conocemos  $u_0(t)$ , podemos ver el problema para  $n \leq 0$  con condición de contorno en  $u_0(t)$  como un problema con condición de contorno nula en la pared y un término fuente modificado:  $f_n + d\delta_{n,-1}u_0$  para  $n < 0$ . Podemos extender este problema a todo el espacio definiendo:

$$v_n = \begin{cases} u_n & n < 0 \\ 0 & n = 0 \\ -u_{-n} & n > 0 \end{cases}$$

La extensión  $v_n$  es solución de:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_n}{dt^2} &= d(v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1}) + g_n, \\ v_n(0) &= v_n^0, \quad \frac{dv_n}{dt}(0) = v_n^1, \end{aligned}$$

para todo  $n$ , donde  $v_n^0$  y  $v_n^1$  son extensiones impares de  $u_n^0$  y  $u_n^1$ . La fuente  $g_n$  se obtiene extendiendo  $f_n + \delta_{n,-1}u_0$ . Hemos incluido la condición de contorno  $u_0$  como una fuerza que actúa en  $u_{-1}$  para permitir una extensión impar con  $v_0 = 0$ . Usando la simetría de los datos:

$$\begin{aligned} u_n(t) = v_n(t) &= \sum_{n' < 0} \left[ \mathcal{G}_{n,n'}^0(t) \frac{du_{n'}}{dt}(0) + \frac{d\mathcal{G}_{n,n'}^0}{dt}(t) u_{n'}(0) \right] \\ &+ \int_0^t \sum_{n' < 0} \mathcal{G}_{n,n'}^0(t-s) (f_{n'}(s) + d\delta_{n',-1}u_0(s)) ds, \quad n < 0 \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{G}_{n,n'}^0 = G_{n,n'}^0 - G_{n,-n'}^0$  es la función de Green para el semiespacio  $n < 0$  con condición de contorno nula en  $n = 0$ . De esta forma, obtenemos

la fórmula buscada para  $u_{-1}$ :

$$\begin{aligned} u_{-1}(t) &= r_{-1}(t) + d \int_0^t \mathcal{G}_{-1-1}^0(t-s)u_0(s)ds, \\ r_{-1}(t) &= \sum_{n' < 0} \left[ \mathcal{G}_{-1,n'}^0(t) \frac{du_{n'}}{dt}(0) + \frac{d\mathcal{G}_{-1,n'}^0}{dt}(t)u_{n'}(0) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \mathcal{G}_{-1,n'}^0(t-s)f_{n'}(s)ds \right]. \end{aligned}$$

El término  $r_{-1}(t)$  representa la contribución de los datos en la región exterior. Nuestra condición de contorno en  $n = 0$  toma la forma:

$$\frac{d^2 u_0}{dt^2} = d \left( u_1 - 2u_0 + d \int_0^t \mathcal{G}_{-1-1}^0(t-s)u_0(s)ds \right) + dr_{-1} + f_0,$$

con núcleo:

$$\mathcal{G}_{-1-1}^0(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{1 - e^{-2i\theta}}{\omega(\theta)} \sin(\omega(\theta)t).$$

De forma análoga, obtenemos condiciones de contorno no reflectantes en intervalos finitos  $-N \leq n \leq N$ , véase [48].

18. *Consideremos el problema de valores iniciales*

$$\begin{aligned} u_j'' &= d(u_{j+1} - (2+r)u_j + u_{j-1}) + f(u_j), \quad j = 1, \dots, N \\ u_j(0) &= u_j^0, \quad u_j'(0) = u_j^1, \quad j = 1, \dots, N \\ u_0(t) &= u_{N+1}(t) = 0, \end{aligned}$$

para una función continua  $f$ . Denotamos  $V(u) = -\int_0^u f(s)ds$ . Suponemos que  $uf(u) + 2(2\sigma + 1)V(u) \geq 0$  para  $\sigma > 0$ . Definimos la energía

$$E(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j'^2(t) + \frac{d}{2} \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} [(u_{j+1} - u_j)^2(t) + ru_j^2(t)] + \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} V(u_j(t)).$$

Si  $E(0) < 0$ , entonces  $\sum_{j=1}^N |u_j(t)|^2 \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow T$  para algún  $T > 0$  finito.

Tomado de [29]. Definimos  $H(t) = \sum_{j=1}^N |u_j(t)|^2 + \rho(t+\tau)^2$ , con  $\rho, \sigma > 0$  a elegir de modo que  $(H^{-\sigma})'' = \sigma H^{-\sigma-2}((\sigma+1)(H')^2 - HH'') \leq 0$ . Cuando  $H(0) \neq 0$  tenemos

$$H^\sigma(t) \geq H^{\sigma+1}(0)(H(0) - \sigma t H'(0))^{-1}$$

y  $H(t)$  explota en tiempo finito para algún  $T \leq H(0)/\sigma H'(0)$  supuesto que  $H'(0) > 0$ .

Veamos cómo hacer ésto. Calculamos  $H'$  y  $H''$ , y usamos la ecuación para

obtener

$$HH'' - (\sigma + 1)(H')^2 = 4(\sigma + 1)Q + 2HG,$$

$$Q = \left( \sum_{j=1}^N |u_j|^2 + \rho(t + \tau)^2 \right) \left( \sum_{j=1}^N |u'_j|^2 + \rho \right) - \left( \sum_{j=1}^N u_j u'_j + \rho(t + \tau) \right)^2,$$

$$G = \sum_{j=1}^N u_j f(u_j) - \sum_{i,j} u_i a_{i,j} u_j - (2\sigma + 1) \left( \sum_{j=1}^N |u'_j|^2 + \rho \right),$$

donde  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  es la matriz que define la parte lineal del sistema. Tenemos  $Q \geq 0$ . Estimamos  $G'(t)$  y concluimos que  $G(t) \geq \sigma(2\sigma + 1) \left(-\frac{\rho}{2} - E(0)\right) \geq 0$  si  $\rho = -2E(0) > 0$ .

Tenemos  $(H^{-\sigma})'' \leq 0$  y  $H(0) \neq 0$ . Además,  $H'(0) = 2 \sum_{j=1}^N u_j^0 u_j^1 + 2\rho\tau > 0$  si  $\tau > -\rho^{-1} \sum_{j=1}^N u_j^0 u_j^1$ .

19. Sea  $u_n(t)$  una solución de

$$u'_n = d(u_n)(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) + v(u_n)(u_{n-1} - u_n) + f(u_n),$$

con datos iniciales no negativos y un término reactivo  $f$ , tal que  $f(u) > Cu^p$ , con  $p > 1$ ,  $C > 0$ , para  $u > 0$  grande. Ponemos  $a(u) = -(2d(u) + v(u))u + f(u)$  y asumimos que  $d(u) > 0$ ,  $d(u) + v(u) > 0$  crecen más despacio que  $u^p$  para  $u$  large. Para cualquier componente  $k$  tal que  $a(u_k(0)) > 0$  y  $a'(u) > 0$  cuando  $u > u_k(0)$

$$u_k(t) \rightarrow \infty \quad \text{as } t \rightarrow T \leq T_b = \int_{u_k(0)}^{\infty} \frac{ds}{a(s)} < \infty.$$

Tomado de [44]. El principio del máximo garantiza la positividad de  $u_n(t)$ . Usando  $u_{k+1}, u_{k-1} \geq 0$ , obtenemos la desigualdad diferencial  $u'_k(t) \geq a(u_k)$ . Por hipótesis,  $a(u) > a(u_k(0)) > 0$  para  $u \geq u_k(0)$ . Entonces  $u_k(t)$  decrece y está acotado inferiormente por la solución  $y(t)$  de  $y'(t) = g(y)$ ,  $y(0) = u_k(0)$ , que está dada implícitamente por:

$$t = \int_{u_k(0)}^{y(t)} \frac{ds}{a(s)}.$$

La integral  $\int_{u_k(0)}^{\infty} \frac{ds}{a(s)} < \infty$  debido a la condición de crecimiento  $a(s) \gg s^p$ ,  $p > 1$  para  $s$  grande, ya que  $a(u) > 0$  para  $u \geq u_k(0)$ . Cuando  $t \rightarrow T_b = \int_{u_k(0)}^{\infty} \frac{ds}{a(s)} < \infty$ ,  $y(t) \rightarrow \infty$ .

20. Consideremos las ecuaciones de Becker-Döring

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\rho_k = \rho > 0,$$

$$\rho'_k = j_{k-1} - j_k, \quad k \geq 2,$$

$$j_k = d_k(e^{aD+\epsilon_k} \rho_1 \rho_k - \rho_{k+1})$$

para una sucesión dado  $\epsilon_k > 0$  con  $D_+\epsilon_k = \epsilon_{k+1} - \epsilon_k$ , con  $a$  y  $\rho$  positivos, y constantes. Calcula las distribuciones de equilibrio.

Tomado de [30]. Imponemos  $j_k = 0$ . Entonces  $\rho_k = \rho_1^k e^{a\epsilon_k}$  es la solución de equilibrio. Este sistema admite ondas viajeras cuya descripción es compleja, ver [30].

21. Dado el problema cinético

$$\begin{aligned}\frac{dr_k}{ds} &= (k-1)^{1/3}D(k-1)r_{k-1} - k^{1/3}D(k)r_k, \quad k \geq 3, \\ \frac{dr_2}{ds} &= 2cD(1) - 2^{1/3}D(2)r_2, \\ c\frac{dc}{ds} + 4c^2D(1) + cM_{\frac{1}{3}} &= 1, \\ \frac{dt}{ds} &= \frac{1}{c},\end{aligned}$$

encontrar una expresión para  $r_k$  en términos de los parámetros del problema.

Tomado de [51]. Nótese que las ecuaciones para  $s$  y  $c$  arrancan de una singularidad en  $s = 0$ . La transformada de Laplace de las ecuaciones nos da

$$\begin{aligned}\frac{dr_2}{ds} &= 2cD(1) - 2^{1/3}D(2)r_2, \\ \frac{dr_k}{ds} &= (k-1)^{1/3}D(k-1)r_{k-1} - k^{1/3}D(k)r_k, \quad k \geq 3.\end{aligned}$$

Concluimos que

$$\begin{aligned}\hat{r}_2(\sigma) &= \frac{2D(1)}{\sigma + 2^{\frac{1}{3}}D(2)}\hat{c}, \\ \hat{r}_k(\sigma) &= \frac{(k-1)^{\frac{1}{3}}D(k-1)}{\sigma + k^{\frac{1}{3}}D(k)}\hat{r}_{k-1}, \quad k \geq 3.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}2^{\frac{1}{3}}D(2)\hat{r}_2(\sigma) &= \frac{2D(1)}{1 + \sigma 2^{\frac{-1}{3}}D(2)^{-1}}\hat{c}, \\ k^{\frac{1}{3}}D(k)\hat{r}_k(\sigma) &= \frac{(k-1)^{\frac{1}{3}}D(k-1)}{1 + \sigma k^{\frac{-1}{3}}D(k)^{-1}}\hat{r}_{k-1}, \quad k \geq 3.\end{aligned}$$

Iterando,

$$k^{\frac{1}{3}}D(k)\hat{r}_k = 2\hat{c}D(1)\hat{R}_k,$$

donde

$$\hat{R}_k(\sigma) = \prod_{j=2}^k \frac{1}{1 + \sigma j^{\frac{-1}{3}}D(j)^{-1}}.$$

Mediante la fórmula de inversión

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} e^{st} \hat{f}(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_1+i\infty}^{s_1-i\infty} e^{st} \hat{f}(s) ds,$$

expresamos  $r_k$  como una función de las transformadas inversas  $R_k$  de  $\hat{R}_k$ :

$$r_k(s) = \frac{2D(1)}{k^{\frac{1}{3}}D(k)} \int_0^s R_k(s-s')c(s')ds', \quad k \geq 2,$$

con

$$R_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} e^{st} \hat{R}_k(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_1+i\infty}^{s_1-i\infty} e^{st} \hat{f}(s) ds = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L e^{ts} \hat{R}_k(is) ds,$$

donde  $\mathcal{C}$  es un contorno de inversión. Una elección clásica son los contornos de Bromwich  $s_1 - is$ , paralelos al eje imaginario y localizados a la derecha de las singularidades de  $\hat{R}_k(s)$ . En este caso, podemos elegir el eje imaginario  $s_1 = 0$ . Para fines numéricos, las mejores elecciones de caminos de inversión son aquellas para las que se puede aproximar la integral por una fórmula de cuadratura con el mínimo de puntos posible. Podemos elegir deformaciones de caminos de Bromwich, como los contornos tipo Talbot o caminos hiperbólicos.

## Referencias

- [1] A Carpio Rodriguez, M Comte, R Lewandoski, A nonexistence result for a nonlinear equation involving critical Sobolev exponent, *Annales de l'Institut Henri Poincaré - Analyse Non linéaire*, 9(3), 243-261, 1992
- [2] A. Carpio, Sharp estimates of the energy for the solutions of some dissipative second order evolution equations, *Potential Analysis* 1(3), 265-289, 1992
- [3] A. Carpio, Existence de solutions globales rétrogrades pour des équations des ondes non linéaires dissipatives, *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, 316(8), 803-808, 1993
- [4] A. Carpio, Comportement asymptotique des solutions des équations du tourbillon en dimensions 2 et 3, *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, 316(12), 1289-1294, 1993
- [5] A. Carpio, Asymptotic behavior for the vorticity equations in dimensions two and three, *Communications in partial differential equations* 19 (5-6), 827-872, 1994
- [6] A. Carpio, Unicité et comportement asymptotique pour des équations de convection-diffusion scalaires, *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique* 319 (1), 51-56, 1994

- [7] A. Carpio, Comportement asymptotique dans les équations de Navier-Stokes, *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique* 319 (3), 223-228, 1994
- [8] A. Carpio, Existence of global-solutions to some nonlinear dissipative wave-equations, *Journal de mathématiques pures et appliquées* 73 (5), 471-488, 1994
- [9] A. Carpio, Large time behaviour in convection-diffusion equations, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze* 23 (3), 551-574, 1996
- [10] A. Carpio, Large-time behavior in incompressible Navier-Stokes equations, *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 27 (2), 449-475, 1996
- [11] A Carpio, SJ Chapman, SD Howison, JR Ockendon, Dynamics of line singularities, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 355(1731), 2013-2024, 1997
- [12] A. Carpio, Long-time behaviour for solutions of the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck equation, *Mathematical methods in the applied sciences* 21 (11), 985-1014, 1998
- [13] A Carpio, SJ Chapman, On the modelling of instabilities in dislocation interactions, *Philosophical Magazine B* 78 (2), 155-157, 1998
- [14] A Carpio, SJ Chapman, S Hastings, JB McLeod, Wave solutions for a discrete reaction-diffusion equation, *European Journal of Applied Mathematics* 11 (4), 399-412, 2000
- [15] A Carpio, LL Bonilla, A Wacker, E Schöll, Wave fronts may move upstream in semiconductor superlattices, *Physical Review E* 61 (5), 4866, 2000
- [16] A Carpio, P Hernando, M Kindelan, Numerical study of hyperbolic equations with integral constraints arising in semiconductor theory, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 39 (1), 168-191, 2001
- [17] A Carpio, SJ Chapman, JJJ Velázquez, Pile-up solutions for some systems of conservation laws modelling dislocation interaction in crystals, *SIAM Journal on Applied Mathematics* 61 (6), 2168-2199, 2001
- [18] A Carpio, LL Bonilla, Wave front depinning transition in discrete one-dimensional reaction-diffusion systems, *Physical Review Letters* 86 (26), 6034, 2001
- [19] G Duro, A Carpio, Asymptotic profiles for convection-diffusion equations with variable diffusion, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 45 (4), 407-433, 2001
- [20] A Carpio, LL Bonilla, G Dell'Acqua, Motion of wave fronts in semiconductor superlattices, *Physical Review E* 64 (3), 036204, 2001

- [21] A Carpio, E Cebrian, FJ Mustieles, Long time asymptotics for the semiconductor Vlasov-Poisson-Boltzmann equations, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 11 (09), 1631-1655, 2001
- [22] A Carpio, LL Bonilla, A Luzón, Effects of disorder on the wave front depinning transition in spatially discrete systems, *Physical Review E* 65 (3), 035207, 2002
- [23] A Carpio, Wavefronts for discrete two-dimensional nonlinear diffusion equations, *Applied Mathematics Letters* 15 (4), 415-421, 2002
- [24] A Carpio, LL Bonilla, Depinning transitions in discrete reaction-diffusion equations, *SIAM Journal on Applied Mathematics* 63 (3), 1056-1082, 2003
- [25] A Carpio, LL Bonilla, Pulse propagation in discrete systems of coupled excitable cells, *SIAM Journal on Applied Mathematics* 63 (2), 619-635, 2003
- [26] A Carpio, LL Bonilla, Edge dislocations in crystal structures considered as traveling waves in discrete models, *Physical Review Letters* 90 (13), 135502, 2003
- [27] A Carpio, LL Bonilla, Oscillatory wave fronts in chains of coupled nonlinear oscillators, *Physical Review E* 67 (5), 056621, 2003
- [28] A Carpio, Nonlinear stability of oscillatory wave fronts in chains of coupled oscillators, *Physical Review E* 69 (4), 046601, 2004
- [29] A Carpio, G Duro, Instability and collapse in discrete wave equations, *Computational Methods in Applied Mathematics* 5 (3), 223-241, 2005
- [30] JC Neu, LL Bonilla, A Carpio, Igniting homogeneous nucleation, *Physical Review E* 71 (2), 021601, 2005
- [31] A Carpio, LL Bonilla, Discrete models of dislocations and their motion in cubic crystals, *Physical Review B* 71 (13), 134105, 2005
- [32] A Carpio, Asymptotic construction of pulses in the discrete Hodgkin-Huxley model for myelinated nerves, *Physical Review E* 72 (1), 011905, 2005
- [33] A Carpio, Wave trains, self-oscillations and synchronization in discrete media, *Physica D: Nonlinear Phenomena* 207 (1-2), 117-136, 2005
- [34] LL Bonilla, A Carpio, JC Neu, WG Wolfer, Kinetics of helium bubble formation in nuclear materials, *Physica D: Nonlinear Phenomena* 222 (1-2), 131-140, 2006
- [35] LL Bonilla, A Carpio, I Plans, Dislocations in cubic crystals described by discrete models, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 376, 361-377, 2007

- [36] I Plans, A Carpio, LL Bonilla, Homogeneous nucleation of dislocations as bifurcations in a periodized discrete elasticity model, *EPL (Europhysics Letters)* 81 (3), 36001, 2008
- [37] A Carpio, ML Rapún, Topological derivatives for shape reconstruction, In: Bonilla, L.L. (eds) *Inverse Problems and Imaging. Lecture Notes in Mathematics*, vol 1943. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008
- [38] A Carpio, LL Bonilla, F de Juan, MAH Vozmediano, Dislocations in graphene, *New Journal of Physics* 10 (5), 053021, 2008
- [39] A Carpio, ML Rapún, Solving inhomogeneous inverse problems by topological derivative methods, *Inverse Problems* 24 (4), 045014, 2008
- [40] A Carpio, LL Bonilla, Periodized discrete elasticity models for defects in graphene, *Physical Review B* 78 (8), 085406, 2008
- [41] A Carpio, ML Rapún, Domain reconstruction using photothermal techniques, *Journal of Computational Physics* 227 (17), 8083-8106, 2008
- [42] JC Neu, A Carpio, LL Bonilla, Theory of surface deposition from boundary layers containing condensable vapour and particles, *Journal of fluid mechanics* 626, 183-210, 2009
- [43] E Cebrián, LL Bonilla, A Carpio, Self-sustained current oscillations in the kinetic theory of semiconductor superlattices, *Journal of Computational Physics* 228 (20), 7689-7705, 2009
- [44] A Carpio, G Duro, Explosive behavior in spatially discrete reaction-diffusion systems, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 12, 693-711, 2009
- [45] I Plans, A Carpio, LL Bonilla, Toy nanoindentation model and incipient plasticity, *Chaos, Solitons & Fractals* 42 (3), 1623-1630, 2009
- [46] A Carpio, ML Rapún, An iterative method for parameter identification and shape reconstruction, *Inverse Problems in Science and Engineering* 18 (1), 35-50, 2010
- [47] A Carpio, BT Johansson, ML Rapún, Determining planar multiple sound-soft obstacles from scattered acoustic fields, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 36 (2), 185-199, 2010
- [48] A Carpio, B Tapiador, Nonreflecting boundary conditions for discrete waves, *Journal of Computational Physics* 229 (5), 1879-1896, 2010
- [49] A Prados, LL Bonilla, A Carpio, Phase transitions in a mechanical system coupled to Glauber spins, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* P06016, 2010

- [50] LL Bonilla, A Prados, A Carpio, Nonequilibrium dynamics of a fast oscillator coupled to Glauber spins, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* P09019, 2010
- [51] A Carpio, B Tapiador, Analysis of helium bubble growth in radioactive waste, *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 11 (5), 4174-4184, 2010
- [52] LL Bonilla, A Carpio, Theory of defect dynamics in graphene: defect groupings and their stability, *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 23 (4), 337-346, 2011
- [53] A Carpio, I Peral, Propagation failure along myelinated nerves, *Journal of nonlinear science* 21 (4), 499-520, 2011
- [54] LL Bonilla, A Carpio, A Prados, RR Rosales, Ripples in a string coupled to Glauber spins, *Physical Review E* 85 (3), 031125, 2012
- [55] LL Bonilla, A Carpio, Driving dislocations in graphene, *Science* 337 (6091), 161-162, 2012
- [56] A Prados, A Carpio, LL Bonilla, Spin-oscillator model for the unzipping of biomolecules by mechanical force, *Physical Review E* 86 (2), 021919, 2012
- [57] A Carpio, ML Rapún, Hybrid topological derivative and gradient-based methods for electrical impedance tomography, *Inverse Problems* 28 (9), 095010, 2012
- [58] LL Bonilla, A Carpio, Ripples in a graphene membrane coupled to Glauber spins *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* P09015, 2012
- [59] LL Bonilla, A Carpio, Model of ripples in graphene, *Physical Review B* 86 (19), 195402, 2012
- [60] D Rodriguez, B Einarsson, A Carpio, Biofilm growth on rugose surfaces, *Physical Review E* 86 (6), 061914, 2012
- [61] A Prados, A Carpio, LL Bonilla, Sawtooth patterns in force-extension curves of biomolecules: An equilibrium-statistical-mechanics theory, *Physical Review E* 88 (1), 012704, 2013
- [62] A Carpio, ML Rapún, Hybrid topological derivative-gradient based methods for nondestructive testing, 2013 *Abstract and applied analysis* 2013, 816134
- [63] A Carpio, ML Rapún, Parameter identification in photothermal imaging, *Journal of mathematical imaging and vision* 49 (2), 273-288, 2014
- [64] LL Bonilla, A Carpio, A Prados, Protein unfolding and refolding as transitions through virtual states, *EPL (Europhysics Letters)* 108 (2), 28002, 2014

- [65] DR Espeso, A Carpio, B Einarsson, Differential growth of wrinkled biofilms, *Physical Review E* 91 (2), 022710, 2015
- [66] LL Bonilla, A Carpio, A Prados, Theory of force-extension curves for modular proteins and DNA hairpins, *Physical Review E* 91 (5), 052712, 2015
- [67] LL Bonilla, A Carpio, C Gong, JH Warner, Measuring strain and rotation fields at the dislocation core in graphene, *Physical Review B* 92 (15), 155417, 2015
- [68] DR Espeso, A Carpio, E Martínez-García, V De Lorenzo, Stenosis triggers spread of helical *Pseudomonas* biofilms in cylindrical flow systems, *Scientific reports* 6, 27170, 2016
- [69] A Carpio, TG Dimiduk, ML Rapún, V Selgás, Noninvasive imaging of three-dimensional micro and nanostructures by topological methods, *SIAM Journal on Imaging Sciences* 9 (3), 1324-1354, 2016
- [70] A Carpio, G Duro, Well posedness of an angiogenesis related integrodifferential diffusion model, *Applied Mathematical Modelling* 40 (9-10), 5560-5575, 2016
- [71] A Carpio, G Duro, Well posedness of an integrodifferential kinetic model of Fokker-Planck type for angiogenesis, *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 30, 184-212, 2016
- [72] A Carpio, G Duro, M Negreanu, Constructing solutions for a kinetic model of angiogenesis in annular domains, *Applied Mathematical Modelling* 45, 303-322, 2017
- [73] B Birnir, A Carpio, E Cebrián, P Vidal, Dynamic energy budget approach to evaluate antibiotic effects on biofilms, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 54, 70-83, 2018
- [74] A Carpio, TG Dimiduk, V Selgás, P Vidal, Optimization methods for in-line holography, *SIAM Journal on Imaging Sciences* 11, 923-956, 2018
- [75] LL Bonilla, A Carpio, M Carretero, G Duro, M Negreanu, F Terragni, A convergent numerical scheme for integrodifferential kinetic models of angiogenesis, *Journal of Computational Physics* 375, 1270-1294, 2018
- [76] A Carpio, E Cebrián, P Vidal, Biofilms as poroelastic materials, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 109, 1-8, 2019
- [77] A Carpio, TG Dimiduk, F Le Louër, ML Rapún, When topological derivatives met regularized Gauss-Newton iterations in holographic 3D imaging, *Journal of Computational Physics* 388, 224-251, 2019
- [78] A Carpio, E Cebrián, Incorporating Cellular Stochasticity in Solid-Fluid Mixture Biofilm Models, *Entropy* 22 (2), 188, 2020

- [79] A Carpio, S Iakunin, G Stadler, Bayesian approach to inverse scattering with topological priors, *Inverse Problems* 36 (10), 105001, 2020
- [80] LL Bonilla, A Carpio, C Trenado, Tracking collective cell motion by topological data analysis, *PLOS Computational Biology* 16 (12), e1008407, 2020
- [81] A Carpio, E Pierret, Uncertainty quantification in covid-19 spread: lockdown effects, *Results in Physics* 35, 105375, 2022
- [82] A Carpio, E Pierret, Parameter identification in epidemiological models, in *Mathematical Analysis of Infectious Diseases (MAID 2020)* 103-124, Praveen Agarwal, Juan J. Nieto and Delfim F. M. Torres Eds., Elsevier, 2022.
- [83] A Carpio, E Cebrian, Positivity preserving high order schemes for angiogenesis models, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation* 23(6), 917-929, 2022
- [84] A Carpio, R González-Albaladejo, Immersed Boundary Approach to Biofilm Spread on Surfaces *Communications in Computational Physics* 31 (1), 257-292, 2022
- [85] A. Carpio, E. Cebrián, A. Gutiérrez, Object based Bayesian full-waveform inversion for shear elastography, *Inverse Problems* 39, 075007, 2023
- [86] A. Carpio, G. Duro, Well posedness of fluid-solid mixture models for biofilm spread, *Applied Mathematical Modelling* 124, 64-85, 2023