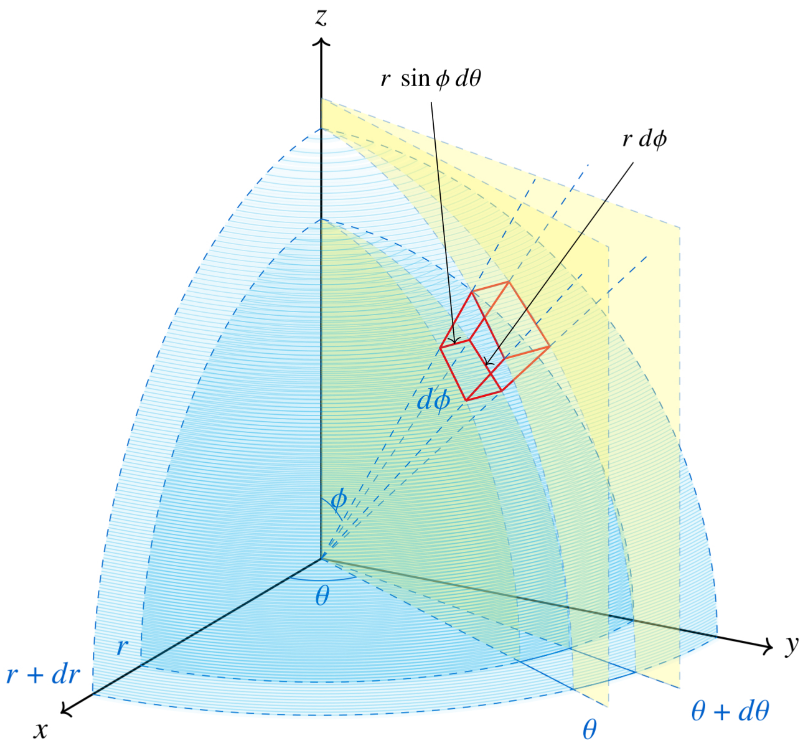
— Cálculo Integral —

Integral de Lebesgue y cálculo vectorial

Alberto Salguero Alarcón



12 de marzo de 2026

Índice

Tema 1

La medida de Lebesgue

El concepto de medida tiene una larga historia matemática, y sin embargo, no surgió la necesidad de formalizar una *teoría de la medida* hasta el siglo XIX. La idea clave a la hora de definir rigurosamente el término *medida* en sus diferentes intentos ha sido siempre que la medida del "todo" debe ser igual a la suma de las medidas de las "partes". De hecho, la medida construida sobre $\mathbb{R}$ por Borel en 1894, y que posteriormente recibió el nombre de *medida de Lebesgue en* $\mathbb{R}$, parte de que todo abierto de $\mathbb{R}$ se escribe como unión numerable disjunta de intervalos abiertos, $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Y así, Borel define la medida de G como la suma de las longitudes de los intervalos I_n.

Pero nosotros estamos interesados en construir una integral para funciones de varias variables reales que extienda a la integral de Riemann en $\mathbb{R}$. ¿Por qué debería preocuparnos el problema de la construcción de medidas?

Pues bien, ocurre que los conceptos de integral y medida están íntimamente relacionados. Si nos fijamos, la integral (de Riemann) de la función real de variable real

$$I_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a,b] \end{cases}$$

es justamente la *medida* del intervalo $[a, b]$; es decir, su longitud, $b - a$. Por lo tanto, si $A \subseteq \mathbb{R}^n$, la integral de la función I_A –que vale 1 en los puntos de A y 0 en los puntos de A^c– deberá corresponderse con la *medida* del subconjunto A, que entenderemos que será el *área* de A si $n = 2$ y el *volumen* de A si $n = 3$.

El problema es, ¿qué entendemos por la "medida" de un conjunto? ¿Cuánto mide un cuadrado de lado 1 si le quito un punto? ¿Y si le quito infinitos puntos? ¿Cuánto mide el conjunto de los números racionales? ¿Y el conjunto de los números irracionales? ¿Podemos medir cualquier conjunto?

Si no tenemos respuesta para las preguntas anteriores, entonces no tiene sentido que pensemos en construir una integral en $\mathbb{R}^n$. Por ello, primero introduciremos el concepto de *medida*, determinaremos qué propiedades debe cumplir una medida, qué conjuntos pueden medirse, y para aquellos que puedan medirse, cuál es su medida.

1.1. El problema de la medida

Nuestra idea natural de medida asigna *longitudes* a los subconjuntos de la recta, *áreas* a los subconjuntos del plano, y *volúmenes* a los subconjuntos del espacio.

Haciendo un poco de abstracción, una medida en $\mathbb{R}^n$ debería asignar a cada subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un número real positivo –o bien $+\infty$– al cual llamaremos *medida* de A. Así pues, estamos buscando una aplicación $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$. ¿Qué propiedades debería satisfacer μ para que tenga sentido llamarla *medida*? Veamos:

1. La medida de un intervalo en $\mathbb{R}$ deberá ser su longitud: es decir, el intervalo $[a, b]$ *mide* $b - a$. Del mismo modo, la medida de un rectángulo en $\mathbb{R}^2$ es *base por altura*, y la medida de un paralelepípedo en $\mathbb{R}^3$ es *largo por alto por ancho*. En definitiva, los conjuntos de la forma

   $$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$$

   deberían medir $\prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$.

2. También parece razonable aceptar que si descomponemos una figura en partes finitas (incluso numerables), entonces la suma de las medidas de cada parte debería ser la medida de la figura original. Es decir, que si escribimos un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ como $A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$ donde $A_k \cap A_{k'} = \emptyset$ para $k \neq k'$, entonces

   $$\mu(A) = \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k).$$

3. Por último, es lógico pensar que la medida de un conjunto "no depende de su posición". Es decir, que un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y cualquier trasladado suyo $x + A$, donde $x \in \mathbb{R}^n$, deberán medir lo mismo.

Es una pena, pero no se puede tener todo a la vez:

Teorema 1.1.1. (de Vitali) *No existe ninguna aplicación $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ que satisfaga las tres condiciones siguientes:*

i) *μ asigna a cada intervalo su longitud;*

$$\mu(a, b) = b - a.$$

ii) *μ es* invariante por traslaciones*; es decir, para todos $x \in \mathbb{R}$ y $A \subseteq \mathbb{R}$,*

$$\mu(x + A) = \mu(A).$$

iii) *Si* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una colección de conjuntos disjuntos dos a dos, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo: cualquier aplicación μ que satisfaga las propiedades del enunciado debe cumplir también que si $A \subseteq B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$. En efecto, si escribimos $B = A \cup (B \setminus A)$, la unión es disjunta y se tiene

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

Nuestro objetivo es construir un conjunto patológico $V \subseteq \mathbb{R}$ de manera que lleguemos a contradicción con las propiedades de μ.

Consideremos la relación de equivalencia

$$x \equiv y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

Cada clase de equivalencia es de la forma $x + \mathbb{Q}$ para cierto $x \in \mathbb{R}$, así que todas ellas son numerables. Por tanto, hay una cantidad no numerable de clases de equivalencia. Observemos, además, que cada clase de equivalencia tiene un representante en $(0, 1)$.

Consideremos, por medio del *Axioma de Elección*, un subconjunto $V \subseteq (0, 1)$ que contenga exactamente un representante de cada clase. Ahora, dado un número racional q, llamaremos $V_q = q + V = \{q + v : v \in V\}$. Se tiene:

i) Si $q \neq q'$, entonces $V_q \cap V_{q'} = \varnothing$.

   En efecto, si existiera $x \in V_q \cap V_{q'}$, se tendría $x = q + v = q' + v'$ para ciertos $v, v' \in V$. Así, $v - v' \in \mathbb{Q}$, por lo que v y v' son equivalentes. Esto entra en contradicción con la definición de V.

ii) Para el conjunto

$$W = \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)} V_q$$

   se verifica $(0, 1) \subset W \subset (-1, 2)$.

   Así es: dado $x \in (0, 1)$, debe existir $v \in V$ tal que $x = q + v$, y como también $v \in (0, 1)$, se deduce que $q = x - v \in (-1, 1)$, luego $x \in V_q$ para un cierto $q \in (-1, 1)$. Por otra parte, como $V \subseteq (0, 1)$ y $q \in (-1, 1)$, es claro que $V_q \in (-1, 2)$.

Así pues, según (ii), debe ser

$$1 \leq \mu(W) \leq 3.$$

Pero, para cualquier $q \in \mathbb{Q}$, se tiene $\mu(V_q) = \mu(V)$, ya que μ es invariante por traslaciones. Esto implica que

$$1 \leq \mu(W) = \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap(-1,1)} \mu(V_q) = \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap(-1,1)} \mu(V) \leq 3,$$

lo cual es imposible, ya que

$$\sum_{q\in\mathbb{Q}\cap(-1,1)} \mu(V) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu(V) = 0 \\ +\infty & \text{si } \mu(V) > 0. \end{cases}$$

Así pues, concluimos que $\mu(W)$ no puede tomar ningún valor de $[0, +\infty]$, en contradicción con nuestra suposición inicial. □

¿Qué acaba de ocurrir en la demostración anterior? Quizá los argumentos que hemos utilizado merecen un análisis un poco más detallado. Parece claro que nuestros problemas comienzan en el momento en que definimos el conjunto V *eligiendo* un elemento de una colección infinita de conjuntos. Así que es lógico preguntarse: ¿es legítimo el proceso por el cual hemos obtenido dicho conjunto? En otras palabras, ¿es razonable asegurar que, si tenemos una colección de conjuntos no vacíos, podemos extraer un elemento de cada uno de ellos?

Ya sabemos que las matemáticas se basan en dos tipos de afirmaciones: *axiomas* y *teoremas*. Los axiomas en los que se apoya la teoría matemática actual reciben el nombre de *axiomas de Zermelo-Frankel* (ZF). Todos ellos están relacionados con la existencia de conjuntos, y de qué se puede hacer con ellos. Hemos de admitir, sin embargo, que una buena parte de la comunidad matemática no se preocupa de *qué dicen* los axiomas de Zermelo-Frankel en su quehacer diario.

Originariamente, en 1904, Zermelo también propuso aceptar como válido el siguiente postulado:

Axioma de Elección 1.1.2. *Dada una colección de conjuntos no vacíos $(X_i)_{i\in I}$, existe un conjunto X que contiene un elemento de X_i para todo $i \in I$.*

Parece razonable, ¿no? El Axioma de Elección puede entenderse como una extensión del hecho de que un conjunto es vacío precisamente cuando *no tiene elementos*. En efecto, si X e Y son dos conjuntos no vacíos, habrá un $x \in X$ y un

$y \in Y$, y por tanto, $X \times Y$ también será un conjunto no vacío. El Axioma de Elección afirma que esta afirmación, trivialmente válida para dos conjuntos, también se acepta para *cualquier* colección de conjuntos.

Un gran número de resultados fundamentales en las matemáticas utilizan el Axioma de Elección, o incluso son equivalentes a él. Por ejemplo, la existencia de bases en espacios vectoriales, la existencia de ideales maximales en cualquier anillo, la *ley de tricotomía* para conjuntos (dados dos conjuntos, o ambos tienen "el mismo" número de elementos, o bien uno tiene "más" elementos que el otro)... Tanto es así que la comunidad matemática lo había utilizado implícitamente durante bastante tiempo.

Sin embargo, no hubo que esperar demasiado tiempo para que aparecieran resultados contraintuitivos construidos a partir del Axioma de Elección. Ejemplos de tales resultados son el Teorema 1.1.1, publicado en 1905 por el matemático italiano G. Vitali, o el siguiente, más sorprendente incluso, debido a los matemáticos polacos S. Banach y A. Tarski:

Teorema 1.1.3. (Banach-Tarski, 1924) *La bola unidad de $\mathbb{R}^3$ puede descomponerse en una colección finita de conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ de manera que, aplicando movimientos rígidos sobre ellos, se obtienen conjuntos $B_1, \ldots, B_n$ cuya unión es exactamente dos copias disjuntas de la bola unidad.*

¿A favor o en contra del Axioma de Elección?

Los trabajos de Gödel y Cohen demostraron que el axioma de elección es *independiente* del resto de axiomas de Zermelo-Frankel: es decir, ni él ni su negación pueden demostrarse a partir de ellos. Con lo cual, uno es libre de aceptar o rechazar el Axioma de Elección. Con todo, gran parte de la comunidad matemática hoy en día lo acepta. Y, al mismo tiempo, existe suficiente interés en estudiar qué resultados válidos bajo el Axioma de Elección pueden serlo también sin él.

¿Qué ocurre, pues, con el Axioma de Elección en relación con nuestro problema de la medida? Los trabajos del matemático R. Solovay demostraron que el Axioma de Elección es *esencial* para construir conjuntos como el del Teorema de Vitali. En concreto, Solovay probó que, si se niega el Axioma de Elección, y en su lugar se acepta otra propiedad –hoy en día conocida como *axioma de Solovay*–, no pueden existen conjuntos como el del Teorema 1.1.1.

De esta manera, puesto que no parece claro que podamos medir cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^n$, nosotros daremos un rodeo: trataremos de construir una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, suficientemente amplia, pero en la que pueda existir una medida razonable.

1.2. La σ-álgebra de Borel

La noción de "familia de conjuntos medibles" se formaliza en matemáticas con el concepto de σ-álgebra, que también es fundamental en la Teoría de la Probabilidad.

Definición. Una familia $\mathscr{A}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ es una *σ-álgebra* si:

(A1) $\varnothing \in \mathscr{A}$.

(A2) $\mathscr{A}$ es *cerrada por paso al complementario*; es decir, si $A \in \mathscr{A}$, entonces $A^c \in \mathscr{A}$.

(A3) $\mathscr{A}$ es *cerrada frente a uniones numerables*, es decir, para cualquier colección numerable de conjuntos $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ contenida en $\mathscr{A}$, se tiene $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}$.

Gracias a las leyes de De Morgan, toda σ-álgebra es cerrada frente a intersecciones numerables. Además, si $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra y $A, B \in \mathscr{A}$, entonces la *diferencia* $A \setminus B = A \cap B^c$ también pertenece a $\mathscr{A}$.

Supongamos que $\mathscr{C}$ es una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que queremos "medir" en algún sentido. ¿Podemos encontrar una σ-álgebra que los contenga? La respuesta es sí: $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ es σ-álgebra y contiene a $\mathscr{C}$. Pero está claro que trabajar con $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ no solucionaría nuestros problemas. Nos preguntamos, entonces, si existe la *menor* σ-álgebra que contenga a $\mathscr{C}$. Y así es, pues dada una colección $\{\mathscr{A}_i\}_{i\in I}$ de σ-álgebras en $\mathbb{R}^n$, es sencillo ver que la intersección de todas ellas,

$$\mathscr{A} = \{A \subseteq \mathbb{R}^n : A \in \mathscr{A}_i \; \forall i \in I\},$$

es de nuevo una σ-álgebra. Por lo tanto, podemos definir la *menor σ-álgebra que contiene a $\mathscr{C}$* como la intersección de todas aquellas σ-álgebras que contienen a $\mathscr{C}$:

$$\sigma(\mathscr{C}) = \bigcap \{\mathscr{A} : \mathscr{A} \text{ es } \sigma\text{-álgebra y } \mathscr{C} \subseteq \mathscr{A}\}.$$

Una de las σ-álgebras más importantes en $\mathbb{R}^n$ es la que aparece asociada a la topología usual.

Definición. Llamaremos *σ-álgebra de Borel* en $\mathbb{R}^n$ a la σ-álgebra generada por los abiertos de la topología usual de $\mathbb{R}^n$. La denotaremos $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, y llamaremos *boreliano*, *conjunto de Borel* o *conjunto Borel medible* a todo elemento de la σ-álgebra de Borel.

¿Qué conjuntos contiene la σ-álgebra de Borel?

A continuación comprobaremos que la σ-álgebra de Borel contiene a una familia suficientemente amplia de conjuntos de $\mathbb{R}^n$. Por comodidad, dados $a = (a_1, \ldots, a_n)$ y $b = (b_1, \ldots, b_n)$ dos puntos de $\mathbb{R}^n$, diremos que $a \le b$ cuando $a_i \le b_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

I) La σ-álgebra de Borel contiene claramente a los conjuntos abiertos, y por tanto, a sus complementarios, que son los conjuntos cerrados. En particular, contiene a los *rectángulos abiertos*

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : a < x < b\} = \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i),$$

y a los *rectángulos cerrados*

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n : a \le x \le b\} = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i],$$

donde $a, b \in \mathbb{R}^n$.

II) También contiene a conjuntos de la forma

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n : a < x \le b\} = \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i]$$

para $a, b \in \mathbb{R}^n$, los cuales reciben el nombre de *semi-rectángulos*. En efecto, cada semi-rectángulo puede escribirse como intersección numerable de rectángulos abiertos, y como unión numerable de rectángulos cerrados:

$$(a, b] = \bigcap_{k=1}^{\infty} (a, b + \tfrac{1}{k}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [a + \tfrac{1}{k}, b]$$

En la igualdad anterior hemos abusado de la notación, entendiendo que $\frac{1}{k}$ representa al vector de $\mathbb{R}^n$ cuyas coordenadas son todas iguales a $\frac{1}{k}$.

Una advertencia: llamaremos semi-rectángulos solamente a los conjuntos de la forma $(a, b]$, y *no* a los de la forma $[a, b)$. Por supuesto, estos últimos también son borelianos.

III) En general, los conjuntos que pueden escribirse como *intersección numerable de abiertos* se denominan G_δ –se lee "gé delta"– y aquellos que son *unión* *numerable de cerrados* se llaman F_σ –se lee “efe sigma”–. Todo G_δ y todo F_σ es un boreliano.

Por ejemplo, los puntos de $\mathbb{R}$ son cerrados, así que cualquier subconjunto numerable es un F_σ. En particular, $\mathbb{Q}$ es un boreliano, y entonces su complementario $\mathbb{I}$ también lo es.

iv) Este proceso puede continuar: la σ-álgebra de Borel también contiene a las uniones numerables de conjuntos G_δ, y a sus complementarios, las intersecciones numerables de conjuntos F_σ, y también contiene por tanto a las uniones numerables de intersecciones numerables de F_σ, y a sus complementarios...

Una propiedad fundamental de la σ-álgebra de Borel es que es estable frente a anti-imagénes por funciones continuas.

Proposición 1.2.1. *Sea $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación continua. Entonces, para cada boreliano $B \subseteq \mathbb{R}^m$, $h^{-1}(B)$ es un boreliano de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Queremos probar que la familia de conjuntos

$$\mathscr{F} = \{B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m) : h^{-1}(B) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)\}$$

coincide con $\mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$. Para ello, será suficiente con probar que $\mathscr{F}$ es una σ-álgebra que contiene a los abiertos de $\mathbb{R}^m$.

En primer lugar, como h es continua, para cualquier abierto G de $\mathbb{R}^m$ se tiene que $h^{-1}(G)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, $\mathscr{F}$ contiene a los abiertos de $\mathbb{R}^m$. Así que solamente falta por probar que $\mathscr{F}$ es σ-álgebra:

(A1) Claramente $\varnothing \in \mathscr{F}$, pues $h^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

(A2) Si $B \in \mathscr{F}$, entonces $h^{-1}(B)$ es un boreliano de $\mathbb{R}^n$, y puesto que se tiene $h^{-1}(B^c) = h^{-1}(B)^c$, también $B^c \in \mathscr{F}$.

(A3) Supongamos que $B_k \in \mathscr{F}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces todos los conjuntos $h^{-1}(B_k)$ son borelianos de $\mathbb{R}^n$, y por la igualdad

$$h^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} h^{-1}(B_k)$$

deducimos que también $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathscr{F}$. □

Corolario 1.2.2. *Si $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación continua, biyectiva y tiene inversa continua, entonces B es un boreliano si, y solo si, lo es $h(B)$.*

Corolario 1.2.3. *El producto de dos borelianos es un boreliano; es decir, si $B_1 \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ y $B_2 \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ entonces $B_1 \times B_2 \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{n+m})$.*

Demostración. Las proyecciones

$$\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \ , \ \pi_1(x, y) = x,$$
$$\pi_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \ , \ \pi_2(x, y) = y,$$

son continuas, de manera que si $B_1 \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ y $B_2 \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$, los conjuntos $\pi_1^{-1}(B_1) = B_1 \times \mathbb{R}^m$ y $\pi_2^{-1}(B_2) = \mathbb{R}^n \times B_2$ son borelianos de $\mathbb{R}^{n+m}$. Por tanto, su intersección $B_1 \times B_2 = (B_1 \times \mathbb{R}^m) \cap (\mathbb{R}^n \times B_2)$ también es un boreliano. □

¿Qué familias generan la σ-álgebra de Borel?

Por definición, la σ-álgebra de Borel es la menor σ-álgebra que contiene a todos los abiertos. Nos planteamos, entonces, si podemos conseguir generar la σ-álgebra de Borel utilizando familias más manejables de conjuntos. Por ejemplo, todo abierto de $\mathbb{R}^n$ es, por definición, unión de rectángulos abiertos. Pero, a menos que aseguremos que dicha unión sea numerable, no nos sirve de mucho de cara a trabajar con la σ-álgebra de Borel.

Lema 1.2.4. *Todo abierto de $\mathbb{R}^n$ se escribe como unión numerable de rectángulos abiertos.*

Demostración. La idea es sencilla: en $\mathbb{R}$, cualquier intervalo abierto (a, b) se puede escribir como una unión de intervalos con extremos racionales. En efecto, eligiendo $(q_k)_{k=1}^{\infty}$ y $(r_k)_{k=1}^{\infty}$ sucesiones de números racionales tales que $(q_k)_{k=1}^{\infty}$ es creciente y converge a a, y $(r_k)_{k=1}^{\infty}$ es creciente y converge a b, se tiene que $(a, b) = \bigcup_{k=1}^{\infty}(q_k, r_k)$. Aplicando el mismo razonamiento coordenada a coordenada, se demuestra que todo rectángulo abierto en $\mathbb{R}^n$ es unión de rectángulos abiertos (con extremos racionales).

Ahora bien, por definición, cualquier abierto de $\mathbb{R}^n$ es unión (en principio arbitraria) de rectángulos abiertos, así que, según lo anterior, cualquier abierto de $\mathbb{R}^n$ puede escribirse como unión de rectángulos abiertos con extremos racionales. Pero, como $\mathbb{Q}^n$ es numerable, solo hay una cantidad numerable de rectángulos abiertos con extremos racionales. Así que todo abierto de $\mathbb{R}^n$ se escribe como una unión, necesariamente *numerable*, de rectángulos abiertos con extremos racionales. □

El lema anterior permite probar que $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ está generada por los rectángulos abiertos, y que también está generada por los rectángulos cerrados. Los detalles se dejan como ejercicio, pero son similares a los del siguiente corolario:

Corolario 1.2.5. *La σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$ está generada por los semi-rectángulos de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Llamemos $\mathscr{C}$ a la colección formada por todos los semi-rectángulos de $\mathbb{R}^n$. Se trata de probar que $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. En primer lugar, como $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, se tiene $\sigma(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. Para probar el recíproco, basta con ver que todo abierto de $\mathbb{R}^n$ pertenece a $\sigma(\mathscr{C})$. A su vez, todo abierto de $\mathbb{R}^n$ puede escribirse como unión numerable de rectángulos abiertos. Así que solo será necesario probar que los rectángulos abiertos pertenecen a $\sigma(\mathscr{C})$. Pero esto es sencillo:

$$(a, b) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a, b - \tfrac{1}{k}]. \qquad \square$$

Parece razonable preguntar: ¿por qué preferimos los semi-rectángulos a los rectángulos abiertos o cerrados, si estos últimos poseen mejores propiedades topológicas? Una de las razones es que los semi-rectángulos permiten construir uniones *disjuntas* de manera muy sencilla. Por ejemplo, $\mathbb{R}^2$ se escribe claramente como unión numerable y disjunta de semi-rectángulos (por ejemplo, los "semi-cuadrados" de lado 1), cosa que no ocurre con los rectángulos abiertos o cerrados. De hecho, la siguiente proposición puede servir como ejemplo. Se trata de otro camino, más explícito y visual, para probar que la σ-álgebra de Borel está generada por los semi-rectángulos.

Lema 1.2.6. *Todo abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ puede escribirse como unión numerable disjunta de semi-cuadrados con adherencia contenida en U.*

Por supuesto, un *semi-cuadrado* no es más que un semi-rectángulo $(a, b]$ en el que todos los "lados" son iguales; es decir, $b - a$ es un vector que tiene todas las coordenadas iguales.

Demostración. Es fácil escribir $\mathbb{R}^2$ como unión disjunta de semi-cuadrados de lado 1: basta con considerar los semi-cuadrados de la forma $[j, j + 1) \times [k, k + 1)$, donde n y k son números enteros. Cada uno de estos semi-cuadrados puede escribirse como unión disjunta de cuatro semi-cuadrados de lado $1/2$, y estos a su vez son unión disjunta de semi-cuadrados de lado $1/4$...

Esta es la idea que sigue la demostración –véase la Figura 1.1. Fijado k un entero no negativo, sea $\mathscr{C}_k$ la colección de los semi-cuadrados de la forma

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{m_i}{2^k} < x_i \leq \frac{m_i + 1}{2^k} \right\}, \; m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}.$$

Es claro que cada $\mathscr{C}_k$ forma una partición de $\mathbb{R}^n$, y que cada semi-cuadrado de $\mathscr{C}_k$ es unión disjunta de 2^n semi-cuadrados de $\mathscr{C}_{k+1}$. Ahora, dado un abierto U de $\mathbb{R}^n$, sea:

- $\mathscr{D}_0$ la familia de los semi-cuadrados de $\mathscr{C}_0$ con adherencia contenida en U.
- $\mathscr{D}_1$ la familia de los semi-cuadrados de $\mathscr{C}_1$ con adherencia contenida en U, y que además no estén contenidos en ningún semi-cuadrado de $\mathscr{D}_0$.
- En general, para cada entero positivo k, sea $\mathscr{D}_k$ la familia de los semi-cuadrados de $\mathscr{C}_1$ con adherencia contenida en U, y que además no estén contenidos en ningún semi-cuadrado de $\mathscr{D}_0$, $\mathscr{D}_1$, ..., $\mathscr{D}_{k-1}$.

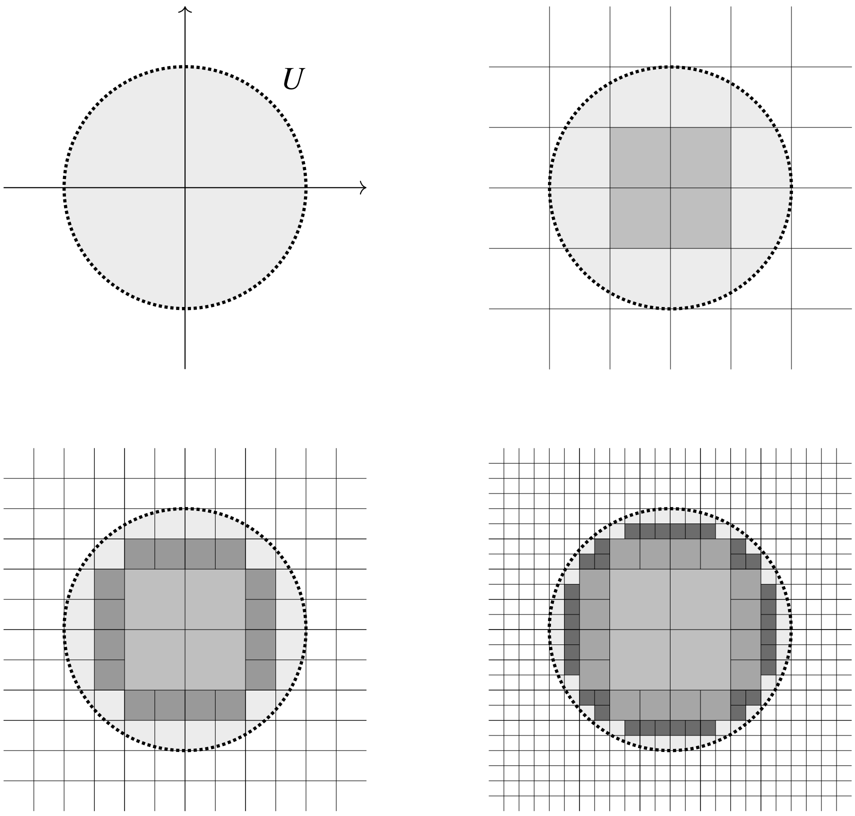


Figura 1.1: Familias $\mathscr{D}_0$, $\mathscr{D}_1$ y $\mathscr{D}_2$ para el abierto $U = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$.

Consideremos, entonces, $\mathscr{D} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathscr{D}_k$, y probemos que $U = \bigcup_{D\in\mathscr{D}} D$. En efecto, por construcción U contiene a todo semi-cuadrado de D, luego $U \supseteq \bigcup_{D\in\mathscr{D}} D$. Ahora, si $x \in U$, existe un rectángulo abierto $C \subseteq U$ que contiene a x. Pero entonces, para algún k suficientemente grande, el único semi-cuadrado de $\mathscr{C}_k$ que contiene a x tiene su clausura contenida en C, y por lo tanto, en U. Así que $x \in \bigcup_{D\in\mathscr{D}} D$. $\square$

La σ-álgebra de Borel en $\overline{\mathbb{R}}$

Necesitaremos, más adelante, trabajar con la *recta real extendida*:

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

La razón es, en realidad, una cuestión de pura conveniencia: en algunos puntos, la exposición se simplifica si admitimos funciones reales que puedan tomar los valores $+\infty$ y $-\infty$. Por ejemplo, si tenemos $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones reales que verifican $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ para todo x, la función "límite" $f(x) = \lim_n f_n(x)$ puede definirse en todo punto si admitimos que pueda tomar el valor $+\infty$. Esto es consecuencia inmediata de que cualquier sucesión creciente de números reales es convergente a un número real o bien a $+\infty$.

Para extender el orden de $\mathbb{R}$ a $\overline{\mathbb{R}}$, diremos simplemente que $-\infty < x < +\infty$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. De esta manera, el orden de $\overline{\mathbb{R}}$ induce una topología, que llamaremos *topología usual de* $\overline{\mathbb{R}}$, en la que los abiertos son aquellos conjuntos que pueden escribirse como unión de los intervalos

- (a, b), con $a, b \in \mathbb{R}$,
- $(a, +\infty] = (a, +\infty) \cup \{+\infty\}$, con $a \in \mathbb{R}$.
- $[-\infty, b) = (-\infty, b) \cup \{-\infty\}$, con $a \in \mathbb{R}$.

Definición. Llamaremos σ-álgebra de Borel en $\overline{\mathbb{R}}$ a la σ-álgebra generada por los abiertos de la topología usual de $\overline{\mathbb{R}}$. La denotaremos $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

Al igual que ocurría con $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, también $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$ es la σ-álgebra generada por los intervalos abiertos, los intervalos cerrados o los semi-intervalos.

Recordemos que las operaciones de $\mathbb{R}$ también pueden extenderse a $\overline{\mathbb{R}}$, aunque *solo parcialmente*. Para $a \in \mathbb{R}$, tenemos

$$a + (+\infty) = (+\infty) + a = \infty\,, \quad a + (-\infty) = -\infty + a = -\infty,$$
$$(+\infty) + (+\infty) = \infty\,, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$
$$a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = \infty \quad \text{si } a > 0\,, \quad a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = -\infty \quad \text{si } a < 0.$$

Así, los elementos $+\infty$ y $-\infty$ *no tienen opuesto ni inverso* en $\overline{\mathbb{R}}$, así que debemos tener precaución a la hora de operar con ellos. En particular, ni $(+\infty) + (-\infty)$ ni $0 \cdot (+\infty)$ están definidos. Pese a ello, es habitual escribir $+\infty$ como simplemente ∞, y de esta simplificación surgen expresiones como "$a - \infty$" o como "$\infty - \infty$" –que significan "$a + (-\infty)$" y "$(+\infty) + (-\infty)$", respectivamente.

1.3. Medidas y sus propiedades

Una vez que hemos construido una colección adecuada de conjuntos para medir, veamos cómo podemos medirlos.

Definición. Fijemos $\mathscr{A}$ una σ-álgebra sobre $\mathbb{R}^n$. Una aplicación $\mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ es una *medida* sobre $\mathscr{A}$ si verifica las siguientes propiedades:

1. $\mu(\varnothing) = 0$.
2. μ es *σ-aditiva*; es decir, para cualquier colección numerable $A_k \in \mathscr{A}$ de conjuntos disjuntos dos a dos, se verifica

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

Fijémonos en que, para cualquier sucesión $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ de conjuntos de $\mathscr{A}$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ está bien definida: es un número real no negativo, o bien $+\infty$.

En este curso no estamos interesados en estudiar medidas abstractas, sino únicamente en construir la medida de Lebesgue. Para cada espacio $\mathbb{R}^n$, construiremos *una* medida de Lebesgue, con la que podremos medir, en particular, *longitudes*, si $n = 1$, *áreas*, si $n = 2$, y *volúmenes*, si $n = 3$. Sin embargo, la construcción de la medida y la integral de Lebesgue nos proporcionarán una amplia colección de medidas. Tiene sentido, por tanto, detenerse a estudiar algunas propiedades sencillas de las medidas en general.

Proposición 1.3.1. *Toda medida es* monótona*; es decir, dados $A, B \in \mathscr{A}$ tales que $A \subseteq B$, se tiene $\mu(A) \le \mu(B)$. Si, además, $\mu(A) < +\infty$, entonces*

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

Demostración. Escribiendo $B = A \cup (B \setminus A)$, como la unión es disjunta, se tiene

$$\mu(A) \le \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B),$$

y si, además, $\mu(A) < +\infty$, podemos despejar $\mu(B \setminus A)$ de la igualdad anterior. □

Proposición 1.3.2. *Toda medida es σ-*subaditiva*; es decir, para cualquier colección $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ contenida en $\mathscr{A}$, se verifica*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Demostración. Puesto que los conjuntos $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ no son disjuntos dos a dos, no podemos utilizar que μ es σ-aditiva. Para solucionarlo, llamemos

$$B_1 = A_1, \quad B_k = A_k \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1}).$$

Claramente, $B_k \in \mathscr{A}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, y se tiene $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, pero ahora sí, la sucesión $(B_k)_{k=1}^{\infty}$ sí está formada por conjuntos disjuntos dos a dos. Finalmente, como $B_k \subseteq A_k$, tenemos

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \qquad \square$$

Dada $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\mathscr{A}$, denotaremos:

- $A_k \uparrow A \iff A_k \subseteq A_{k+1}\ \forall k \in \mathbb{N}$ y $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.
- $A_k \downarrow A \iff A_k \supseteq A_{k+1}\ \forall k \in \mathbb{N}$ y $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$.

A veces se dice que $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ es una *sucesión creciente de conjuntos*, en el primer caso; o *decreciente*, en el segundo, y que su límite es A.

Proposición 1.3.3. (propiedades de continuidad) *Consideremos μ una medida sobre $\mathscr{A}$, y $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\mathscr{A}$.*

i) Si $A_k \uparrow A$, entonces $\lim_k \mu(A_k) = \mu(A)$.

ii) Si $A_k \downarrow A$ y existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A_N) < \infty$, entonces $\lim_k \mu(A_k) = \mu(A)$.

Demostración. Es parecida a la de la proposición anterior. Para (i), consideremos los conjuntos

$$B_1 = A_1, \quad B_k = A_k \setminus A_{k-1},$$

que son disjuntos dos a dos, pertenecen a $\mathscr{A}$ y verifican $A_k = \bigcup_{j=1}^{k} B_j$. Por lo tanto, $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, y además

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \lim_{k\to+\infty} \sum_{j=1}^{k} \mu(B_j) = \lim_{k\to+\infty} \mu(A_k).$$

Para probar (ii), apliquemos (i) a la sucesión de conjuntos $B_k = A_N \setminus A_k$, con $k > N$, que cumplen $B_k \uparrow A_N \setminus A$. Por lo tanto, $\lim_{k\to+\infty} \mu(B_k) = \mu(A_N \setminus A)$. Ahora, como $\mu(A_N) < \infty$, la igualdad anterior se convierte en

$$\lim_{k\to+\infty} \big(\mu(A_N) - \mu(A_k)\big) = \mu(A_N) - \lim_{k\to+\infty} \mu(A_k) = \mu(A_N) - \mu(A),$$

de donde se deduce lo que queríamos. $\square$

1.4. La medida de Lebesgue sobre semi-rectángulos

Nos disponemos a construir la medida de Lebesgue para $\mathbb{R}^n$. Como ya comentamos anteriormente, nuestro objetivo no es definirla para *todos* los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, sino para una σ-álgebra de conjuntos suficientemente amplia. En primer lugar, la definiremos sobre los *semi-rectángulos.* De nuevo, podíamos haber elegido, en su lugar, los rectángulos abiertos, o los cerrados. Pero, además de su utilidad a la hora de formar uniones disjuntas, los semi-rectángulos poseen ciertas propiedades respecto de la intersección y diferencia de conjuntos:

Proposición 1.4.1. *Se verifica:*

i) La intersección de dos semi-rectángulos es un semi-rectángulo.

ii) La diferencia de dos semi-rectángulos es unión finita y disjunta de semi-rectángulos.

Demostración. Ambos enunciados son fáciles haciendo un dibujo. En el primer caso, se deduce que si $I = (a, b]$ y $J = (c, d]$, entonces

$$\begin{aligned} I \cap J &= \{x \in \mathbb{R}^n : a_j < x_j \leq b_j\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : c_j < x_j \leq d_j\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : m_j < x_j \leq M_j\}. \end{aligned}$$

donde $m_j = \text{máx}\{a_j, c_j\}$ y $M_j = \text{mín}\{b_j, d_j\}$.

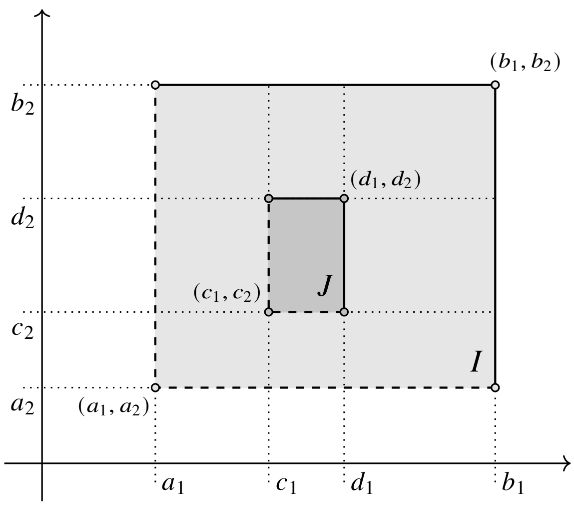


Figura 1.2: Partición en semi-rectángulos de $I \setminus J$.

Para el segundo caso, observemos que podemos suponer que $J \subseteq I$, ya que $I \setminus J = I \setminus (I \cap J)$, y ya sabemos que $I \cap J$ es un semi-rectángulo. Por tanto, debe ocurrir $a \leq c < d \leq b$. De esta manera, si "prolongamos los bordes" de I y J –véase la Figura 1.2– obtenemos, para cada $j \in \{1, ..., n\}$, los intervalos

$$(a_j, c_j], \quad (c_j, d_j], \quad (d_j, b_j]$$

alguno de los cuales puede ser vacío. Así, los semi-rectángulos

$$H_1 \times \cdots \times H_n, \quad H_j = (a_j, c_j], (c_j, d_j] \text{ ó } (d_j, b_j],$$

son disjuntos, su unión es I, y como $J = \prod_{j=1}^n (c_j, d_j]$, se tiene que J es uno de dichos semi-rectángulos. Por tanto, $I \setminus J$ es unión finita y disjunta de semi-rectángulos. □

Definición. La *medida (de Lebesgue)* de un semi-rectángulo $I = (a, b]$ de $\mathbb{R}^n$ es

$$m(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Con esta definición, ¿es entonces evidente que si dividimos un semi-rectángulo I en otros dos, pongamos, I_1 e I_2, se verifica que $m(I) = m(I_1) + m(I_2)$? ¿Y si dividimos a un semi-rectángulo I en cien semi-rectángulos? ¿Es también evidente que si I es un semi-rectángulo que contiene a otro semi-rectángulo J, entonces $m(J) \leq m(I)$? Estas preguntas deben quedar resueltas antes de pensar en extender la medida de Lebesgue a otros subconjuntos.

Lema 1.4.2. (de aditividad) *Sea I un semi-rectángulo.*

i) Si I contiene a semi-rectángulos disjuntos $I_1, ..., I_k$, *entonces* $\sum_{j=1}^k m(I_j) \leq m(I)$.

ii) Si I está contenido en la unión de los semi-rectángulos $I_1, ..., I_k$, *entonces* $m(I) \leq \sum_{j=1}^k m(I_j)$.

Demostración. La idea también es sencilla, y puede intuirse realizando un dibujo. En cambio, no resulta tan sencillo escribir una demostración totalmente rigurosa de este hecho, por lo que dejaremos algunos detalles para el lector.

Consideremos, primero, una colección de semi-rectángulos $I, I_1, ..., I_k$. Si "prolongamos los bordes" de los semi-rectángulos, como hacíamos en la demostración del teorema anterior, obtenemos una colección $\mathscr{C}$ de semi-rectángulos disjuntos, de manera que tanto I como cualquier I_j con $j \in \{1, ..., k\}$ es unión de ciertos

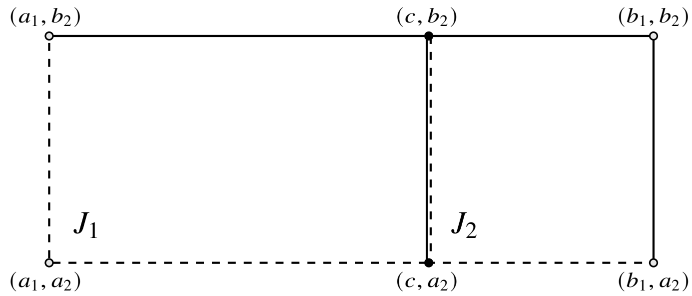


Figura 1.3: Semi-rectángulos con un borde común.

elementos de $\mathscr{C}$. Para este tipo de particiones es sencillo probar que si J_1 y J_2 son dos semi-rectángulos que tienen un borde en común, entonces $J_1 \cup J_2$ es un semi-rectángulo, y $m(J_1 \cup J_2) = m(J_1) + m(J_2)$. De hecho, la Figura 1.3 sugiere un cálculo directo:

$$\begin{aligned} m(J_1) + m(J_2) &= (c - a_1) \cdot (b_2 - a_2) + (b_1 - c) \cdot (b_2 - a_2) = \\ &= [c - a_1 + b_1 - c](b_2 - a_2) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) = \\ &= m(J_1 \cup J_2). \end{aligned}$$

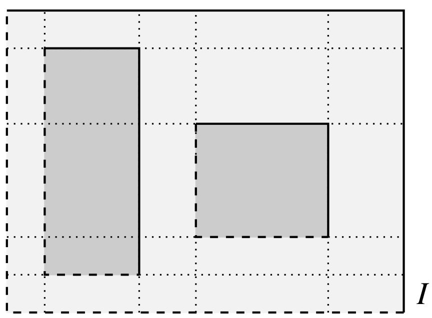


Figura 1.4: Semi-rectángulos disjuntos (gris oscuro) contenidos en I (gris claro).

De esta manera, se prueba (i) sin dificultad: si suponemos que además I contiene a $I_1, \dots, I_k$, entonces $I = \bigcup_{J \in \mathscr{C}} J$, y como $I_1, \dots, I_k$ son disjuntos, se tiene, tal y como muestra la Figura 1.4, que

$$\sum_{j=1} m(I_j) \leq \sum_{J \in \mathscr{C}} m(J) = m(I),$$

Para probar (ii), supongamos que $I \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} I_j$. En tal caso, la subcolección de semi-rectángulos $\{J \in \mathscr{C} : J \subseteq I\}$ está contenida en la subcolección $\{J \in \mathscr{C} : J \subseteq$

$\bigcup_{j=1}^k I_j\}$, así que, de acuerdo con la Figura 1.5, concluimos que

$$m(I) = \sum_{J\in\mathscr{C}\,:\,J\subseteq I} m(J) \le \sum_{J\in\mathscr{C}\,:\,J\subseteq\bigcup_{j=1}^k I_j} m(J) \le \sum_{j=1} m(I_j).$$

Observemos que la última desigualdad puede ser estricta: como los semi-rectángulos $I_1, \dots, I_k$ no son disjuntos, es posible que sea necesario tomar algún $J \in \mathscr{C}$ más de una vez. □

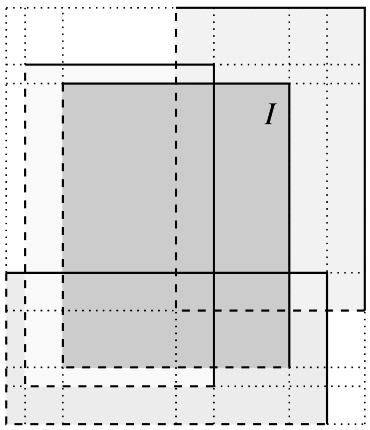


Figura 1.5: Semi-rectángulos (gris claro) cuya unión contiene a I (gris oscuro).

Para extender el lema anterior a uniones numerables, utilizaremos el siguiente resultado:

Lema 1.4.3. *Sea I un semi-rectángulo. Para todo $\varepsilon > 0$, existen semi-rectángulos J_1 y J_2 tales que $\overline{J_1} \subseteq I \subseteq \mathring{J}_2$ y*

$$m(J_2) - \varepsilon \le m(I) \le m(J_1) + \varepsilon.$$

Demostración. La aplicación

$$h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad h(x, y) = \prod_{j=1}^n (y_j - x_j),$$

es continua –se trata de un polinomio en $2n$ variables– y si $x < y$, entonces $h(x, y) = m(x, y]$. Por lo tanto, si escribimos $I = (a, b]$, el semi-rectángulo $J_2 = (x, y]$ se obtiene tomando puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $x_j < a_j < b_j < y_j$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ y de manera que se satisfaga $h(x, y) - \varepsilon \le h(a, b)$. Un razonamiento similar permite obtener el semi-rectángulo J_1. □

Teorema 1.4.4. *Si un semi-rectángulo I está contenido en la unión de los semi-rectángulos $(I_k)_{k=1}^\infty$, entonces*

$$m(I) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k).$$

En particular, si los semi-rectángulos $(I_k)_{k=1}^\infty$ son disjuntos dos a dos, y se tiene $I = \bigcup_{k=1}^\infty I_k$, entonces se da la igualdad:

$$m(I) = \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k).$$

Demostración. Para aplicar el Lema 1.4.2, necesitamos reducir nuestra colección infinita de semi-rectángulos $(I_k)_{k=1}^\infty$ a una subcolección finita. La clave está en la definición de *compacidad*: el lema anterior nos permite suponer que I es compacto, y que los I_k son abiertos, pagando, eso sí, un pequeño precio de ε en sus respectivas medidas. Pero todo recubrimiento por abiertos de un conjunto compacto admite un subrecubrimiento finito, lo que nos deja en posición de aplicar los resultados previos.

Así que fijemos $\varepsilon > 0$ y utilicemos el lema anterior, que nos proporciona:

- Un semi-rectángulo H tal que $\overline{H} \subseteq I$ y $m(I) < m(H) + \frac{\varepsilon}{2}$.
- Para cada $k \in \mathbb{N}$, un semi-rectángulo J_k tal que $I_k \subseteq \mathring{J}_k$ y $m(J_k) < m(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$.

De esta manera, el conjunto compacto $\overline{H}$ está recubierto por $\bigcup_{k=1}^\infty \mathring{J}_k$, así que podemos extraer un subrecubrimiento finito; es decir,

$$H \subseteq \overline{H} \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} \mathring{J}_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} J_k,$$

así que por el Lema 1.4.2, tenemos

$$m(H) \leq \sum_{k=1}^{N} m(J_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(J_k).$$

Finalmente,

$$m(I) \leq m(H) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(J_k) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(m(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \right) + \frac{\varepsilon}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) + \varepsilon,$$

y como ε era arbitrario, concluimos.

En particular, si $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ y la unión es disjunta, entonces para cada $N \in \mathbb{N}$, también es disjunta la unión $\bigcup_{k=1}^{N} I_k$, que está contenida en I. Por el Lema 1.4.2, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{N} m(I_k) \leq m(I),$$

y como esto ocurre para todo $N \in \mathbb{N}$, concluimos. □

1.5. La medida exterior de Lebesgue

Ya hemos comprobado que la medida de Lebesgue respeta las propiedades básicas con respecto a semi-rectángulos. Pero también querríamos poder medir otros conjuntos que no sean semi-rectángulos. A continuación, definiremos la medida de Lebesgue sobre conjuntos más generales.

Para ello, imaginemos por un momento que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ está contenido en una unión numerable de semi-rectángulos, pongamos $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. Entonces, aceptando que $m(A)$ existe, las propiedades de las medidas dirán que $m(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k)$ sean como sean los semi-rectángulos I_k con $k \in \mathbb{N}$. Este hecho motiva la siguiente definición:

Definición. Llamaremos *medida exterior de Lebesgue* en $\mathbb{R}^n$ a la aplicación $m^* : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ definida por

$$m^*(A) = \text{ínf} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k),\ (I_k)_{k=1}^{\infty} \text{ semi-rectángulos} : A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\},$$

es decir, el ínfimo se toma sobre los recubrimientos numerables de A por semi-rectángulos $(I_k)_{k=1}^{\infty}$.

Observemos que el ínfimo de la definición anterior siempre existe, pues cualquier subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ admite al menos un recubrimiento por semi-rectángulos –ya que el propio $\mathbb{R}^n$ puede recubrirse mediante semi-rectángulos–, y todas las cantidades $\sum_{k=1}^{\infty} m(I_k)$ están acotadas inferiormente por cero. Fijémonos, también, en que podemos calcular $m^*(A)$ para cualquier subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$.

Lo primero que debemos hacer es comprobar que esta definición de *medida exterior* es coherente con la medida de Lebesgue que ya hemos construido sobre los semi-rectángulos. Para ello, nos apoyaremos en las propiedades de la medida de Lebesgue que probamos en la sección anterior.

Proposición 1.5.1. *La medida exterior de Lebesgue de un semi-rectángulo coincide con su medida de Lebesgue; es decir, si I es un semi-rectángulo, entonces $m^*(I) = m(I)$.*

Demostración. El propio I es un recubrimiento por semi-rectángulos de I, así que la definición de medida exterior implica que $m^*(I) \leq m(I)$. La desigualdad contraria es consecuencia directa del Teorema 1.4.4: si $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ es un recubrimiento de I por semi-rectángulos, entonces $m(I) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k)$, y por la definición de ínfimo se concluye que $m(I) \leq m^*(I)$. □

A continuación, veamos qué propiedades tiene la medida exterior de Lebesgue.

Proposición 1.5.2. *La medida exterior de Lebesgue m^* cumple:*

i) $m^*(\varnothing) = 0$.

ii) *m^* es monótona; es decir, si $A \subseteq B$, entonces $m^*(A) \leq m^*(B)$.*

iii) *m^* es σ-subaditiva; es decir, si $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es una familia de conjuntos de $\mathbb{R}^n$ se tiene*

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k).$$

Demostración. En primer lugar, es claro que $m^*(\varnothing) = 0$, pues *cualquier* colección de semi-rectángulos recubre al conjunto vacío. Para probar que m^* es monótona, basta con darse cuenta de que si $A \subseteq B$, entonces cualquier recubrimiento numerable por semi-rectángulos $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ de B también recubre a A, con lo que

$$m^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k),$$

y por la definición de ínfimo, se deduce que $m^*(A) \leq m^*(B)$.

Finalmente, probemos que m^* es σ-subaditiva. Sea $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos de $\mathbb{R}^n$, y pongamos $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Para cualquier $\varepsilon > 0$, podemos considerar $(I_{kj})_{j=1}^{\infty}$ un recubrimiento por semi-rectángulos de A_k tal que

$$m^*(A_k) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(I_{kj}) \leq m^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

De esta forma, la colección $\{I_{kj} : k, j \in \mathbb{N}\}$ es un recubrimiento numerable de A por semi-rectángulos, así que ocurre

$$m^*(A) \le \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} m(I_{kj}) \le \sum_{k=1}^{\infty}\Big(m^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k) + \varepsilon,$$

y como ε era arbitrario, tenemos la desigualdad deseada. □

Proposición 1.5.3. *La medida exterior de Lebesgue es* invariante por traslaciones*; es decir, $m^*(x + A) = m^*(A)$ para todos $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $x \in A$.*

Demostración. Es sencillo comprobar que, si $I = (a, b]$ es un semi-rectángulo, entonces $x + I = (x + a, x + b]$, de manera que

$$m(x + I) = \prod_{i=1}^{n}\big(b_i + x_i - (a_i + x_i)\big) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = m(I).$$

Ahora, sea cualquier $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y tomemos $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ una colección numerable de semi-rectángulos tales que $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. Entonces, claramente $x + A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}(x + I_k)$, de modo que

$$m^*(x + A) \le \sum_{k=1}^{\infty} m(x + I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k).$$

Por tanto, $m^*(x + A) \le m^*(A)$. La desigualdad contraria se obtiene sin más que efectuar una traslación por $-x$:

$$m^*(A) \le m^*\big(-x + (x + A)\big) = m^*(x + A).$$ □

Lamentablemente, a pesar de que m^* es σ-subaditiva, *no es una medida*: nada nos garantiza que la desigualdad

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k)$$

se convierta en una igualdad cuando la unión $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ sea disjunta. De hecho, teniendo en cuenta el Teorema 1.1.1, los dos resultados anteriores nos indican que *m^* no puede ser σ-aditiva en todo $\mathbb{R}^n$*.

Sin embargo, aunque m^* no sea una medida, sí puede usarse para *construir* una. El último paso en la construcción de la medida de Lebesgue consiste en comprobar que, si nos restringimos a la σ-álgebra de Borel, entonces m^* sí es una verdadera medida. De hecho, haremos más, y es que construiremos una σ-álgebra que contendrá a $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ y sobre la cual m^* será σ-aditiva.

1.6. La σ-álgebra de los conjuntos Lebesgue medibles

Definición. Diremos que un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ es *Lebesgue medible* si para cualquier $E \subseteq \mathbb{R}^n$, se tiene

$$m^*(E) = m^*(A \cap E) + m^*(A^c \cap E).$$

Denotaremos $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ a la familia de subconjuntos Lebesgue medibles de $\mathbb{R}^n$.

Fijémonos en que, como m^* es σ-subaditiva, siempre se tiene

$$m^*(E) \le m^*(A \cap E) + m^*(A^c \cap E)$$

para todos $A, E \subseteq \mathbb{R}^n$. Así que a la hora de probar que un conjunto es Lebesgue medible, solo será necesario probar la desigualdad contraria.

La idea detrás de la definición de conjunto Lebesgue medible es que son lo suficientemente *razonables*, en el sentido de que la medida exterior de cualquier subconjunto E, sea E como sea, puede obtenerse descomponiéndolo mediante conjuntos Lebesgue medibles. Otra interpretación de la definición de conjunto Lebesgue medible viene sugerida por el siguiente resultado:

Lema 1.6.1. (de Carathéodory) *Para un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$, son equivalentes:*

i) A es Lebesgue medible.

ii) Para cualquier semi-rectángulo I, se verifica

$$m(I) = m^*(A \cap I) + m^*(A^c \cap I).$$

Demostración. Solo es necesario probar *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)*. Así pues, sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que verifique *(ii)*. Dado cualquier $E \subseteq \mathbb{R}^n$, consideremos un recubrimiento suyo por semi-rectángulos, $E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. Entonces, $A \cap E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A \cap I_k$, y de la misma forma, $A^c \cap E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A^c \cap I_k$. Por tanto, la monotonía de m^* afirma que

$$\begin{aligned} m^*(A \cap E) + m^*(A^c \cap E) &\le \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A \cap I_k) + \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A^c \cap I_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \big(m^*(A \cap I_k) + m^*(A^c \cap I_k)\big) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(I_k), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se tiene por hipótesis, y tomando ínfimos se concluye. $\square$

El lema de Caratheodory sugiere lo siguiente: si A es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$, entonces existe un semi-rectángulo I que lo contenga. Así, tiene sentido considerar el número

$$m_*(A) = m(I) - m^*(I \setminus A),$$

al cual se le llama *medida interior* de A. No es difícil probar que m_* está bien definida, en el sentido de que no depende del semi-rectángulo I escogido. Así pues, que A sea Lebesgue medible equivale a decir, según el lema de Caratheodory, que la "medida interior" de A coincide con la "medida exterior" de A.

Teorema 1.6.2. *La familia de conjuntos Lebesgue medibles es una σ-álgebra, y m^* es σ-aditiva sobre ella.*

Demostración. Es inmediato comprobar, a partir de la definición, que el conjunto vacío es Lebesgue medible, y que si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es Lebesgue medible entonces su complementario también lo es.

Para probar que $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ es cerrada frente a uniones numerables, examinemos primero qué ocurre con la unión finita. Así pues, si $A_1, A_2 \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, se tiene

$$\begin{aligned} m^*(E) &\overset{(*)}{=} m^*(A_1 \cap E) + m^*(A_1^c \cap E) = \\ &\overset{(**)}{=} m^*(A_1 \cap E) + m^*(A_1^c \cap A_2 \cap E) + m^*(A_1^c \cap A_2^c \cap E) = \\ &= m^*\big((A_1 \cup A_2) \cap A_1 \cap E\big) + m^*\big(A_1 \cup A_2) \cap A_1^c \cap E) + \\ &\quad + m\big((A_1 \cup A_2)^c \cap E\big) = \\ &\overset{(*)}{=} m^*\big((A_1 \cup A_2) \cap E\big) + m\big((A_1 \cup A_2)^c \cap E\big), \end{aligned}$$

donde en $(*)$ y $(**)$ hemos usado la medibilidad de A_1 y A_2, respectivamente.

Ahora, consideremos $(A_k)_{k=1}^\infty$ una sucesión de conjuntos Lebesgue medibles, y llamemos $A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$. Como la familia de los conjuntos Lebesgue medibles es cerrada por uniones finitas y complementarios, podemos suponer que los A_k son disjuntos dos a dos sin más que reemplazar $(A_k)_{k=1}^\infty$ por

$$B_1 = A_1, \quad B_k = A_k \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1}),$$

que también está formada por conjuntos Lebesgue medibles, y verifica que $A = \bigcup_{k=1}^\infty B_k$. Probaremos al mismo tiempo que $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, y que $m^*(A) = \sum_{k=1}^\infty m^*(A_k)$.

Sea, pues, $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Utilizando que A_1 y A_2 son disjuntos, se tiene que

$$\begin{aligned}m^*(E) &= m^*(A_1 \cap E) + m^*(A_1^c \cap E) = \\ &= m^*(A_1 \cap E) + m^*(A_1^c \cap A_2 \cap E) + m^*(A_1^c \cap A_2^c \cap E) = \\ &= m^*(A_1 \cap E) + m^*(A_2 \cap E) + m^*(A_1^c \cap A_2^c \cap E).\end{aligned}$$

Este razonamiento puede extenderse por inducción, utilizando que para cada $k \in \mathbb{N}$, A_k es disjunto con $A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1}$. De esta forma, obtenemos que para cualquier $N \in \mathbb{N}$ ocurre

$$\begin{aligned}m^*(E) &= \sum_{k=1}^{N} m^*(A_k \cap E) + m^*\left(\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right)^c \cap E\right) \geq \\ &\geq \sum_{k=1}^{N} m^*(A_k \cap E) + m^*\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c \cap E\right),\end{aligned}$$

donde la desigualdad es consecuencia de la monotonía de m^*. Así, tomando límite cuando $N \longrightarrow +\infty$ y utilizando que m^* es σ-subaditiva, obtenemos que

$$\begin{aligned}m^*(E) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k \cap E) + m^*\left(\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^c\right) \cap E\right) \geq \\ &\geq m^*\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \cap E\right) + m^*\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c \cap E\right) \geq m^*(E).\end{aligned}$$

Por lo tanto, todas las desigualdades de la cadena anterior son igualdades. De aquí deducimos que $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, y además, tomando $E = A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ en la cadena de desigualdades anterior, que $m^*(A) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k)$. □

Definición. Según el teorema anterior, dado $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, llamaremos *medida de Lebesgue* de A al número

$$m(A) = m^*(A).$$

El siguiente paso es asegurarnos de que en $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ hay suficientes conjuntos como para desarrollar una teoría de integración satisfactoria. Así pues:

¿Qué conjuntos son Lebesgue medibles?

Proposición 1.6.3. *Todo semi-rectángulo es Lebesgue medible.*

Demostración. Sea I un semi-rectángulo de $\mathbb{R}^n$. En virtud del lema de Carathéodory, basta con probar que para cualquier semi-rectángulo J, se verifica

$$m^*(J) = m^*(I \cap J) + m^*(I^c \cap J).$$

Pero esto se deduce fácilmente de las propiedades de m sobre los semi-rectángulos. En efecto, $I \cap J$ es un semi-rectángulo, mientras que $I^c \cap J$ es unión finita y disjunta de semi-rectángulos, pongamos, $I^c \cap J = \bigcup_{k=1}^r H_k$. Como la medida exterior de un semi-rectángulo es justamente su medida de Lebesgue, la σ-subaditividad de m^* implica ya que

$$m^*(I \cap J) + m^*(I \setminus J) \leq m(I \cap J) + \sum_{k=1}^{r} m(H_k) = m(J). \qquad \square$$

Teorema 1.6.4. *Todo boreliano es Lebesgue medible.*

Demostración. Los semi-rectángulos generan $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, según el Corolario 1.2.5. $\square$

Teorema 1.6.5. *Todo conjunto de medida exterior nula es Lebesgue medible.*

Demostración. Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ cumple $m^*(A) = 0$, la monotonía de m^* implica que para cualquier $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $m^*(A \cap E) = 0$. Así,

$$m^*(E) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A^c \cap E) = m^*(A^c \cap E) \leq m^*(E),$$

luego todas las desigualdades de la cadena anterior son, en realidad, igualdades. $\square$

Los conjuntos de medida nula resultarán fundamentales en la integración, como más adelante comprobaremos. Veamos algunos ejemplos de conjuntos de medida nula:

I) Todo *punto* tiene medida nula; pues dado $p \in \mathbb{R}^n$, el conjunto $\{p\}$ puede recubrirse por semi-rectángulos con medida tan pequeña como se quiera.

II) La unión numerable de conjuntos de medida nula también es un conjunto de medida nula. En particular, cualquier *conjunto numerable* mide cero.

Por ejemplo, ahora sabemos que $m(\mathbb{Q}) = 0$. Así que

$$m([0,1] \cap \mathbb{I}) = m(0,1] = 1,$$

ya que la diferencia entre $(0, 1]$ y $[0, 1] \cap \mathbb{I}$ es el conjunto de racionales del intervalo $(0, 1)$, que es numerable. También deducimos que la medida de un intervalo en $\mathbb{R}$ no depende de si incluye o no a sus extremos, es decir,

$$m(a, b) = m(a, b] = m[a, b] = b - a,$$

pues $(a, b) = (a, b] \setminus \{a\}$, y $m\{a\} = 0$.

Por último, esta propiedad nos proporciona una nueva demostración de que *cualquier intervalo abierto contiene una cantidad no numerable de puntos*: de lo contrario, deberían ser conjuntos de medida nula.

iii) También existen conjuntos no numerables de medida nula. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$, el eje X

$$A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

tiene medida nula.

La idea consiste en probar que A es unión numerable de segmentos horizontales, y cada uno de ellos mide cero. Con detalle, fijado $n \in \mathbb{N}$, el segmento

$$A_k = \{(x, 0) : -k \leq x \leq k\}$$

está contenido en cualquiera de los semi-rectángulos de la forma

$$I = \big(-k - 1, k + 1\big] \times (-\varepsilon, \varepsilon]$$

sea cual sea $\varepsilon > 0$. Así que $m(A_k) \leq 2(k + 1)\varepsilon$, de donde se deduce que $m(A_k) = 0$. Finalmente, como $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, debe ser $m(A) = 0$.

iv) Incluso en $\mathbb{R}$, existen conjuntos no numerables que miden cero. El ejemplo clásico lo proporciona el llamado *conjunto de Cantor*.

Consideremos el intervalo $[0, 1]$, dividámoslo en tres segmentos iguales, y eliminemos el intervalo abierto del medio. Obtenemos así el conjunto

$$C_1 = [0, 1] \setminus \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right).$$

Si repetimos la misma acción con cada segmento de C_1, obtenemos

$$C_2 = C_1 \setminus \left[\left(\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9}\right) \cup \left(\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9}\right)\right].$$

Repitamos este proceso inductivamente: es decir, el conjunto C_n resulta de dividir cada segmento de C_{k-1} en tres partes iguales y eliminar la parte central de cada uno de ellos, sin contar los extremos.

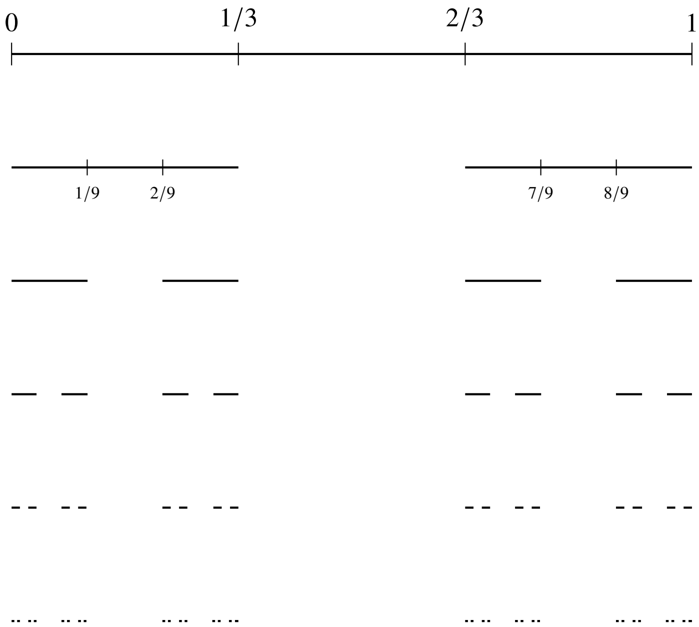


Figura 1.6: Construcción del conjunto de Cantor.

El *conjunto de Cantor* es la intersección de todos estos conjuntos: $\Delta = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$.

No es difícil probar que Δ *es no vacío:* como $[0, 1]$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, toda cadena decreciente de cerrados contenido en $[0, 1]$ es necesariamente no vacía. De hecho, Δ tiene el mismo cardinal que el intervalo $[0, 1]$, como veremos a continuación. Para ello, consideremos la representación en base 3 de un número $x \in [0, 1]$:

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots_{(3)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j}\ ,\ a_j \in \{0, 1, 2\}.$$

Algunos puntos admiten varias representaciones: por ejemplo,

$$\tfrac{1}{3} = 0, 1_{(3)} = 0, 0222222\ldots_{(3)}$$

Por construcción, el conjunto de Cantor está formado por aquellos números del intervalo $[0, 1]$ para los cuales existe una expresión en base 3 *sin unos*:

- En C_1, eliminamos el intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, que son aquellos de la forma $0, 1 a_2 a_3 a_4 \ldots_{(3)}$.

- En C_2 eliminamos los intervalos $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ y $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, los que contienen los números de la forma $0,01a_3a_4..._{(3)}$ y $0,21a_3a_4..._{(3)}$ –los números de la forma $0,11a_3a_4..._{(3)}$ ya los habíamos eliminado en C_1.
- En definitiva, los puntos de los intervalos $(\frac{3^j-2}{3^k}, \frac{3^j-1}{3^k})$, donde $j \in \{1,...,k\}$, son precisamente aquellos cuya expresión en base 3 tiene un 1 en la posición j-ésima.

Por tanto, la aplicación

$$\Delta \longrightarrow [0,1], \quad x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}a_j}{2^j},$$

es decir, sustituir los doses por unos en la expresión ternaria de x y a continuación interpretar el resultado como una expresión binaria, es sobreyectiva. Así que Δ es un conjunto no numerable.

Sin embargo, $m(\Delta) = 0$: como C_k es la unión de 2^k segmentos de longitud $\frac{1}{3^k}$, y $C_k \downarrow \Delta$, se tiene

$$m(\Delta) = \lim_n m(C_k) = \lim_k \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

¿Todo Lebesgue medible es un boreliano?

La pregunta es obligada: sabemos que se tienen las inclusiones

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R}^n),$$

y sabemos también que la segunda de ellas es estricta, al menos, si aceptamos el Axioma de Elección. En realidad, la primera inclusión también es estricta (también bajo el Axioma de Elección): existen Lebesgue medibles que no son borelianos. Construir un ejemplo de uno de tales conjuntos no es del todo sencillo. Sin embargo, puede darse un rodeo para probar, de manera indirecta, la existencia de conjuntos Lebesgue medibles que no son de Borel.

La razón de que $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ es, sencillamente, que $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ tiene el cardinal de $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$, mientras que $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ tiene el cardinal de $\mathbb{R}^n$. Probar esta última afirmación no es difícil utilizando propiedades de cardinales y ordinales, pero son herramientas cuyo manejo queda más allá del alcance de este curso. En cambio, es sencillo probar que $|\mathscr{L}(\mathbb{R})| = |\mathscr{P}(\mathbb{R})|$: todo subconjunto del conjunto de Cantor Δ mide cero, así que es medible. Pero Δ tiene el mismo cardinal que $\mathbb{R}$, así que las contenciones

$$\mathscr{P}(\Delta) \subseteq \mathscr{L}(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R})$$

permiten concluir que $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ tiene tantos elementos como $\mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Sin embargo, puede demostrarse que los conjuntos Lebesgue medibles son *casi* borelianos, en el sentido de que para cualquier $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ existe $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ tal que $B \subseteq A$ y $m(A \setminus B) = 0$. Una demostración de este hecho viene indicada en el ejercicio 14 de este mismo tema.

1.7. Propiedades de la medida de Lebesgue

Ya tenemos en nuestro poder la medida de Lebesgue, que además está definida sobre una σ-álgebra suficientemente rica. En esta sección analizaremos hasta qué punto la medida de Lebesgue recoge propiedades de nuestra forma intuitiva de medir.

Teorema 1.7.1. (Primer teorema de unicidad) *La medida de Lebesgue es la única medida sobre $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ que asigna a cada semi-rectángulo su n-volumen.*

Demostración. Sea μ otra medida sobre $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mu(I) = m(I)$ para cualquier semi-rectángulo I, y probemos que $\mu(B) = m(B)$ para cualquier $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. Dado $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, consideremos una colección numerable de semi-rectángulos $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ que recubre a B; se tiene entonces que

$$\mu(B) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k),$$

así que, tomando ínfimos, se deduce que $\mu(B) \leq m(B)$. Para la desigualdad contraria, observemos que si B es acotado, entonces existe un semi-rectángulo I tal que $B \subseteq I$. Entonces $\mu(B) \leq m(B) \leq m(I) < +\infty$, es decir, todas las cantidades involucradas son finitas, y podemos escribir:

$$\mu(I) - \mu(B) = \mu(I \setminus B) \leq m(I \setminus B) = m(I) - m(B) \;\Rightarrow\; m(B) \leq \mu(B).$$

Por lo tanto, μ y m coinciden sobre los borelianos acotados. Pero como cualquier subconjunto Lebesgue medible puede escribirse como unión creciente de conjuntos acotados, hemos terminado: dado $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, no necesariamente acotado, la sucesión de conjuntos medibles acotados $B_k = \{x \in B : \|x\| \leq k\}$ cumple que $B_k \uparrow B$, y por tanto

$$m(B) = \lim_k m(B_k) = \lim_k \mu(B_k) = \mu(B). \qquad \square$$

El siguiente teorema de unicidad afirma que, salvo un cambio de escala, la medida de Lebesgue es la única medida no nula en $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ que es invariante por traslaciones.

Teorema 1.7.2. (Segundo teorema de unicidad) *Sea μ una medida sobre $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ invariante por traslaciones y tal que $\mu\big((0,1]^n\big) < \infty$. Entonces, μ es un múltiplo de la medida de Lebesgue; concretamente,*

$$\mu = c \cdot m \quad \textit{donde} \quad c = \mu\big((0,1]^n\big)$$

Demostración. El caso $c = 0$ es sencillo: $\mathbb{R}^n$ se escribe como unión numerable disjunta de semi-cuadrados de lado 1, todos ellos trasladados de $Q = (0,1]^n$. Así que si $\mu(Q) = 0$, entonces $\mu(\mathbb{R}^n) = 0$, y por lo tanto, $\mu(B) = 0$ para cualquier boreliano $B \subseteq \mathbb{R}^n$.

Así, podemos suponer que $c \neq 0$. Probaremos entonces que

$$\nu : \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty], \qquad \nu(B) = \frac{1}{c} \cdot \mu(B),$$

es la medida de Lebesgue, para lo cual es suficiente con probar, según el teorema anterior, que ν y m coinciden sobre los semi-rectángulos. Ahora, como ν es invariante por traslaciones, debe ocurrir $\nu(a,b] = \nu(0, b-a]$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}^n$ con $a < b$. De este modo, basta con probar que ν y m coinciden sobre los semi-rectángulos de la forma $(0,a]$, con $a > 0$. La demostración tiene un marcado carácter geométrico, y procede por etapas:

i) ν y m coinciden sobre los semi-cuadrados de la forma $(0, \frac{1}{k}]^n)$, con $k \in \mathbb{N}$.

Sea, de nuevo, $Q = (0,1]^n$ el semi-cuadrado unidad, y consideremos una partición de Q en k^n semi-cubos $Q_1, ..., Q_{k^n}$ de lados $\frac{1}{k}$ –véase la Figura 1.7. Todos ellos son, por tanto, trasladados de $(0, \frac{1}{k}]^n$, de manera que

$$\nu(Q) = \sum_{i=1}^{k^n} \nu(Q_j) = k^n \cdot \nu((0, \tfrac{1}{k}]^n),$$

$$m(Q) = \sum_{i=1}^{k^n} m(Q_j) = k^n \cdot m((0, \tfrac{1}{k}]^n),$$

y como $\nu(Q) = m(Q)$, se tiene la igualdad deseada.

ii) ν y m coinciden sobre los semi-rectángulos de la forma $(0,a]$, con $a \in \mathbb{Q}^n$.

Pongamos, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $a_i = \frac{n_i}{k_i}$, con $n_i, k_i \in \mathbb{N}$, y sea k el mínimo común múltiplo de $k_1, \ldots, k_n$. Entonces, el semi-rectángulo $(0,a]$ admite

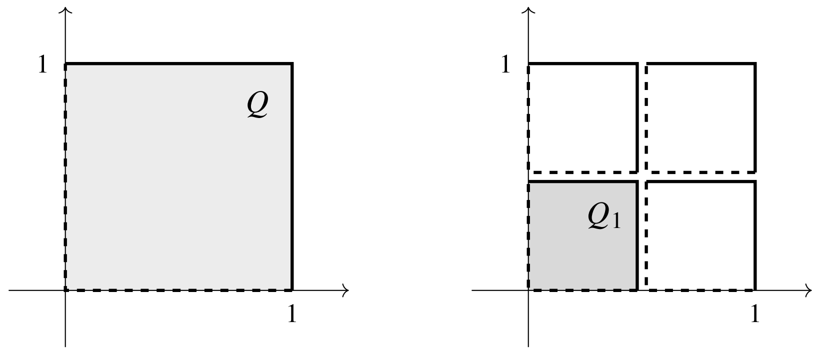


Figura 1.7: División de $(0,1]^2$ en cuatro semi-cuadrados trasladados de $(0,1/2]^2$.

una partición por semi-cuadrados de lados $\frac{1}{k}$ –como se muestra en la Figura 1.8– sobre los que ν y m coinciden, según hemos probado en la etapa anterior.

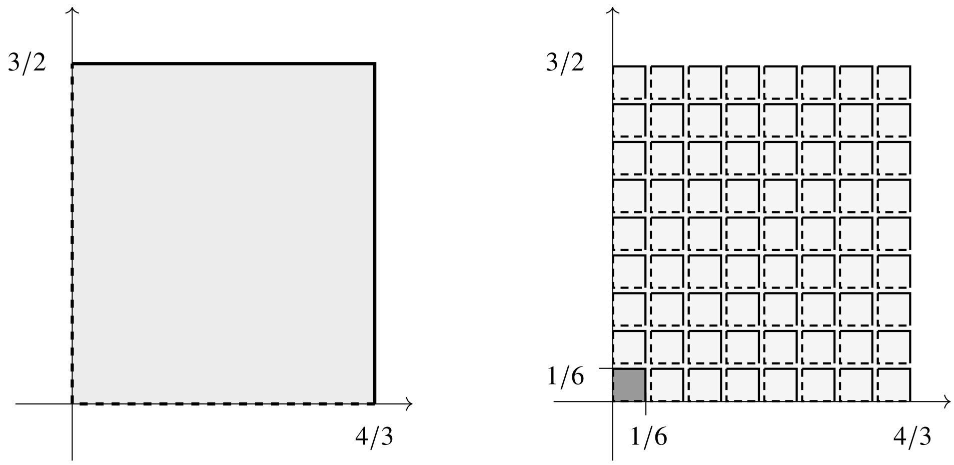


Figura 1.8: División del semi-rectángulo $(0,4/3] \times (0,3/2]$ en semi-cuadrados trasladados de $(0,1/6]^2$.

iii) ν y m coinciden sobre los semi-rectángulos de la forma $(0,a]$, con $a \in \mathbb{R}^n$.

Consideremos una sucesión $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ de puntos en $\mathbb{Q}^n$ tales que $b_k \leq b_{k+1} \leq a$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y $\lim_k b_k = a$. Así, $(0,b_k] \uparrow (0,a]$, luego por la etapa anterior,

$$\nu\big((0,a]\big) = \lim_k \nu\big((0,b_k]\big) = \lim_k m\big((0,a]\big) = m\big((0,a]\big). \qquad \square$$

Para finalizar, utilizaremos los teoremas de unicidad para probar que la medida de Lebesgue *respeta el producto cartesiano*.

Teorema 1.7.3. (de la medida producto) *Si $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ y $B' \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^p)$, entonces $B \times B' \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{n+p})$. Además:*

i) Si B y B' tienen medida finita, entonces

$$m(B \times B') = m(B) \cdot m(B').$$

ii) Si $m(B) = 0$ y $m(B') = +\infty$ –o al revés–, entonces $m(B \times B') = 0$.

iii) Si $m(B) > 0$ y $m(B') = +\infty$, entonces $m(B \times B') = +\infty$.

El teorema anterior se suele resumir diciendo simplemente que

$$m(B \times B') = m(B) \cdot m(B'),$$

y que, en este contexto, $0 \cdot (+\infty) = 0$.

Demostración. Ya probamos en el Corolario 1.2.3 que el producto de borelianos es un boreliano. Para probar las afirmaciones *(i)–(iii)*, trabajaremos por etapas aplicando el *Segundo Teorema de Unicidad* 1.7.2.

Para demostrar *(i)*, nos lo pondremos fácil: probaremos primero que para cualquier $B' \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^p)$,

$$m(Q \times B') = m(Q) \cdot m(B') = m(B'),$$

donde $Q = (0, 1]^n$ es el semi-cuadrado unidad. Para ello, consideraremos la aplicación

$$\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}^p) \to [0, +\infty], \quad \mu(B') = m(Q \times B').$$

Es sencillo ver que μ es una medida sobre $\mathscr{B}(\mathbb{R}^p)$ invariante por traslaciones, pues si $x = (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p$, entonces

$$\begin{aligned}\mu(x + B') = m(Q \times (x + B')) &= m\big((0, ..., 0, x_1, ..., x_p) + (Q \times B')\big) = \\ &= m(Q \times B') = \mu(B').\end{aligned}$$

Además, $\mu\big((0, 1]^p\big) = m\big((0, 1]^{n+p}\big) < +\infty$. Por lo tanto, en virtud del Teorema 1.7.2, $\mu = c \cdot m$, con $c = m(Q) = 1$, y se deduce que

$$\mu(B') = c \cdot m(B') = m(Q) \cdot m(B') = m(B').$$

Ahora, si fijamos $B' \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^p)$ tal que $m(B') < +\infty$, la siguiente medida

$$\nu : \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty], \quad \mu(B) = m(B \times B').$$

es invariante por traslaciones. Además, en virtud del paso anterior, cumple

$$\nu(Q) = m(Q \times B') = m(Q) \cdot m(B') = m(B') < +\infty,$$

así que debe ser $\nu = c \cdot m$ para $c = m(B')$, es decir,

$$\nu(B') = m(B \times B') = m(B) \cdot m(B').$$

Esto es suficiente para probar *(i)*, y si además $m(B') = 0$, de nuevo el Teorema 1.7.2 afirma que $\nu(B) = m(B \times B') = 0$, lo que demuestra *(ii)*.

Finalmente, probemos *(iii)*. Si $m(B) > 0$ y $m(B') = +\infty$, consideremos la sucesión de conjuntos

$$B'_k = \{x \in B' : \|x\| \leq k\},$$

todos ellos acotados, así que sus medidas son finitas. Por lo tanto, en virtud de *(i)*, sabemos que $m(B \times B'_k) = m(B) \cdot m(B'_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por otra parte, $B'_k \uparrow B'$, por lo que $\lim_k m(B'_k) = m(B') = +\infty$. Juntando ambas propiedades, llegamos a

$$m(B \times B') \geq m(B \times B'_k) = m(B) \cdot m(B'_k).$$

Con lo cual, debe ser $m(B \times B') = +\infty$. □

Autoevaluación

Elíjase una de las respuestas (a), (b), (c) ó (d) para cada pregunta. Solamente hay una respuesta correcta en cada caso.

1. Señálese la afirmación correcta:

   a) Todo boreliano es unión de un abierto y un cerrado.

   b) Todo conjunto Lebesgue medible es boreliano.

   c) Existen borelianos que no son ni abiertos ni cerrados.

   d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

2. Consideremos $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos Lebesgue medibles tales que $m(A_n) = 2^{-n}$. ¿Qué podemos asegurar acerca de $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$?

   a) A es acotado.

   b) Si los A_n son disjuntos dos a dos, entonces $m(A) = 1$.

c) $m(A) \geq 1$.

d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

3. Consideremos $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de semi-rectángulos en $\mathbb{R}^2$ tales que $m(I_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Señálese la afirmación correcta sobre $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$:

   a) Puede ocurrir que A no sea un semi-rectángulo.

   b) Puede ocurrir que $m(A) < 1$.

   c) Puede ocurrir que A sea un conjunto no Lebesgue medible.

   d) Puede ocurrir que $A = \emptyset$.

4. Dados dos borelianos A y B tales que $A \subseteq B$, señálese la afirmación correcta.

   a) Si $B \setminus A$ es no vacío, entonces $m(A) < m(B)$.

   b) Si $m(B \setminus A) = +\infty$, entonces $m(A) = +\infty$.

   c) Si $m(A) = m(B)$, entonces $m(B \setminus A) = 0$.

   d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

5. Señálese la afirmación correcta sobre la medida exterior de Lebesgue m^*:

   a) El valor $m^*(A)$ solo puede calcularse si A es Lebesgue medible.

   b) Si A y B son disjuntos, entonces $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$.

   c) Para cualesquiera subconjuntos A y B, $m^*(A) \geq m^*(A \cap B)$.

   d) Si $m^*(A) = +\infty$, entonces A es Lebesgue medible.

6. La medida de Lebesgue del conjunto $A = \big([-1, 1) \cap \mathbb{Q}\big) \cup \big((2, 3) \cap \mathbb{I}\big)$ es...

   a) ...1.

   b) ...2.

   c) ...3.

   d) A no es Lebesgue medible.

7. Señálese cuál de los siguientes conjuntos tiene medida nula en $\mathbb{R}^2$:

   a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{I}\}$.

   b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y \in \mathbb{Z}\}$.

   c) $A = [0, \frac{1}{2}] \times (-1, 1)$.

d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 10^{-6}\}$.

8. Señálese cuál de los siguientes conjuntos tiene medida nula en $\mathbb{R}^2$:

   a) $A = \mathbb{N} \times V$, donde V es un subconjunto no medible de $\mathbb{R}$.

   b) $A = \Delta \times \mathbb{R}$, donde Δ es el conjunto de Cantor.

   c) $A = \{(n, \frac{1}{m} + \frac{1}{n}) : \ n, m \in \mathbb{Z}\}$.

   d) Todas las afirmaciones anteriores son correctas.

9. Señálese la afirmación correcta:

   a) Si K es compacto, entonces $m(K) < +\infty$.

   b) Si G es abierto, entonces $m(G) < +\infty$.

   c) Si F es cerrado, entonces $m(F) < +\infty$.

   d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

10. Dado un subconjunto A de $\mathbb{R}$, ¿en qué caso podemos asegurar que es Lebesgue medible?

    a) A es la unión de un F_σ con un conjunto de medida nula.

    b) A es el complementario de un conjunto de medida nula.

    c) Existe un boreliano B tal que $B = A \cap \mathbb{I}$.

    d) Todas las afirmaciones anteriores son correctas.

Ejercicios

1. Sea $f : X \to Y$ una aplicación. Estúdiese si las igualdades siguientes son ciertas. En caso de que no sean ciertas, indíquese si es posible añadir hipótesis sobre f para que lo sean:

   a) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$, donde $B_i \subseteq Y$.

   b) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$, donde $B_i \subseteq Y$.

   c) $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$, donde $A_i \subseteq X$.

   d) $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$, donde $A_i \subseteq X$.

   e) $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$, donde $B \subseteq Y$.

   f) $f(A^c) = f(A)^c$, donde $A \subseteq X$.

2. Pruébese que la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$ está generada por la familia de rectángulos abiertos, y también por la familia de rectángulos cerrados.

3. Consideremos $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

   a) Pruébese que si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotado, entonces $m^*(A) < +\infty$. ¿Es cierto el recíproco?

   b) Pruébese que si $m^*(A) = 0$, entonces $\mathring{A} = \emptyset$. ¿Es cierto el recíproco?

   c) Pruébese que si la frontera de A mide cero, entonces A es medible. ¿Es cierto el recíproco?

4. Dado A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y $t \in \mathbb{R}$, definimos $tA = \{ta : a \in A\}$.

   a) Pruébese que, si $t > 0$, entonces $m^*(tA) = t^n \cdot m^*(A)$.

   b) Pruébese que $m^*(-A) = m^*(A)$, y dedúzcase que, en general,

$$m^*(tA) = |t|^n \cdot m^*(A).$$

5. Pruébese que la medida de Lebesgue de un rectángulo depende únicamente de sus extremos, y no de si se consideran o no. Es decir, que dados $a, b \in \mathbb{R}^n$, con $a < b$, se tiene

$$m(a, b) = m[a, b] = m(a, b].$$

6. Indíquese si cada uno de los enunciados siguientes son verdaderos o falsos. Si son verdaderos, propóngase una demostración; si son falsos, póngase un contraejemplo. En todos los enunciados, A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

   a) Si existe un conjunto B tal que $A \cap B$ es medible, entonces A es medible.

   b) Si existe un conjunto B tal que $A \cap B$ y $A \setminus B$ son medibles, entonces A es medible.

   c) Si $A \cap \mathbb{I}^n$ es medible, entonces A es medible.

   d) Si A es medible y B es no medible, entonces $A \cup B$ es no medible.

   e) Si A y B son no medibles, entonces $A \cup B$ es no medible.

   f) Si A es medible y B es no medible, entonces $A \cap B$ es no medible.

   g) Si A mide cero, entonces para cualquier B, $A \times B$ es medible.

   h) Si $A \times B$ es medible, entonces A y B son medibles.

7. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $m^*(A) < +\infty$. Pruébese que si existe un boreliano $B \subseteq A$ tal que $m(B) = m^*(A)$, entonces A es Lebesgue medible. ¿Es cierto este resultado si $m^*(A) = +\infty$?

8. Póngase un ejemplo de dos conjuntos Lebesgue medibles A y B tales que:

   a) $m(A) = m(B) = m(A \setminus B) = +\infty$.

   b) $m(A) = m(B) = +\infty$, pero $m(A \setminus B) < +\infty$.

9. Póngase un ejemplo de una sucesión de conjuntos Lebesgue medibles $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que $A_n \downarrow A$, pero que $\text{lím}_n\, m(A_n) \neq m(A)$.

10. Póngase un ejemplo de un subconjunto medible A de $\mathbb{R}$ tal que $m(\mathring{A}) < m(A) < m(\overline{A})$.

11. Consideremos el conjunto de los números reales del intervalo $[0, 1]$ en cuya expresión decimal no aparece ningún nueve. Pruébese que es medible, y calcúlese su medida.

12. **Sobre conjuntos F_σ.**

    Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación continua.

    a) Pruébese que cualquier cerrado en $\mathbb{R}^n$ puede escribirse como unión numerable de conjuntos compactos.

    b) Pruébese, a partir del apartado anterior, que todo conjunto tipo F_σ puede escribirse como unión numerable de conjuntos compactos.

    c) Dedúzcase de aquí que la imagen de un conjunto F_σ por una aplicación continua es un F_σ.

    Así pues, las aplicaciones continuas no tienen por qué llevar abiertos en abiertos, ni cerrados en cerrados, pero sí llevan conjuntos F_σ en conjuntos F_σ.

13. **Sobre conjuntos G_δ.**

    Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación. Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto

    $$G_k = \{x \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0 : \|y - x\| < \delta,\ \|y' - x\| < \delta \ \Rightarrow\ \|f(y) - f(y')\| < \tfrac{1}{k}\}$$

    a) Pruébese que f es continua en un punto x si, y solo si, $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$.

    b) Dedúzcase que el conjunto de puntos donde f es continua es de tipo G_δ.

    En particular, si admitimos (sin demostración) que $\mathbb{Q}$ no es un conjunto G_δ, deducimos que no existe ninguna aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea continua en cada punto racional y discontinua en cada punto irracional.

14. **Caracterización de los conjuntos Lebesgue medibles.**

    a) Utilícese la definición de medida exterior de Lebesgue para probar que, dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue medible con $m(A) < +\infty$, existe un boreliano B tal que $A \subseteq B$ y $m(B) = m(A)$.

b) Pruébese que todo conjunto Lebesgue medible puede escribirse como unión de un boreliano y un conjunto de medida nula. Para ello, supóngase primero que A es un conjunto Lebesgue medible acotado, y aplíquese el apartado anterior al conjunto $I \setminus A$, donde I es un semi-rectángulo que contiene a A.

Tema 2

La integral de Lebesgue

La medida de Lebesgue constituye una herramienta muy potente, y gracias a ella, se obtiene la llamada *integral de Lebesgue* en $\mathbb{R}^n$, que desarrollaremos en este capítulo.

Al igual que la teoría de integración Riemann solo consideraba funciones acotadas, también nosotros necesitaremos restringirnos a una cierta colección de funciones –las llamadas *funciones medibles*– para definir la integral de Lebesgue. ¿Por qué? Pues, sencillamente, porque no todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es Lebesgue medible: recordemos que, en cualquier teoría de integración razonable, la integral de la función

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

debe ser la "medida" de A, y no todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ admite tal cosa. Así, del mismo modo en que hemos renunciado a medir cualquier conjunto, deberemos renunciar a integrar cualquier función. Pero no hay de qué preocuparse: veremos que la integral de Lebesgue está definida para una colección de funciones muchísimo más amplia que la integral de Riemann.

La idea fundamental de la construcción de la integral de Lebesgue es agrupar los puntos del dominio de integración según la proximidad en el *rango*; es decir, según la proximidad de los valores que tome la función que queremos integrar. Aquí es donde se encuentra la diferencia fundamental con respecto a la integración de Riemann, en la cual los puntos se agrupaban según su proximidad en el propio *dominio*.

Las Figuras 2.1 y 2.2 ilustran la diferencia entre ambas teorías de integración. En la figura superior, se aproxima el área que encierra función f bajo el eje X mediante una suma de Riemann, que se corresponde con una partición del dominio de f en intervalos pequeños. En la figura inferior, correspondiente a la integral de Lebesgue, observemos que se ha dividido el eje Y en segmentos del mismo tamaño, y se han representado en el eje X las anti-imágenes por f de cada uno de los segmentos. De esta manera, se obtiene una aproximación del área que hay entre f y el eje X. De

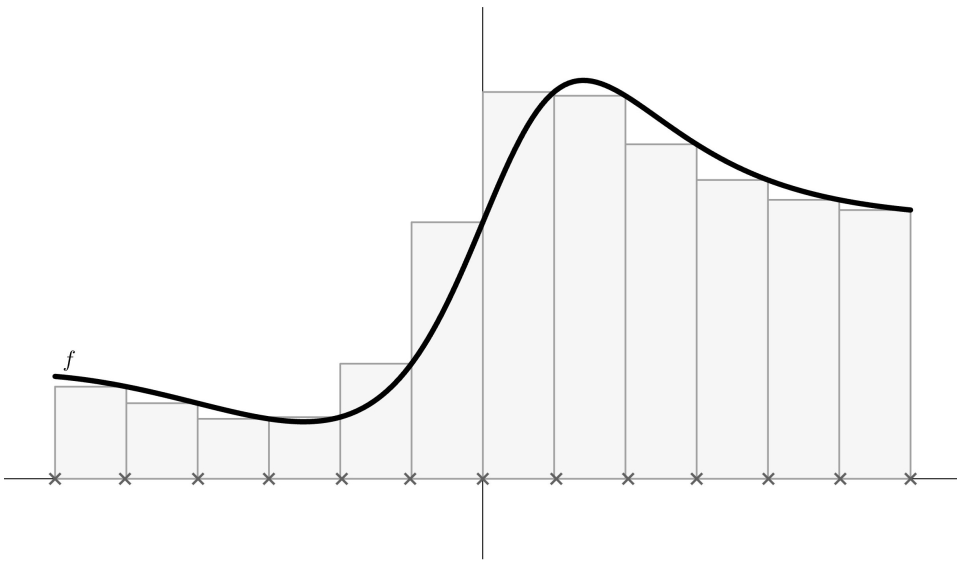


Figura 2.1: Esquema de la integración Riemann.

hecho, esta es la idea de la demostración del *Teorema de Convergencia de funciones simples*, (2.1.6), pág. 49.

Sin embargo, la imagen puede hacernos pasar por alto un detalle de gran importancia: para agrupar los puntos del dominio según el rango, podemos utilizar *cualquier conjunto medible*, sin necesidad de que sean rectángulos. Esta flexibilidad es lo que en realidad permite que la integral de Lebesgue pueda definirse para un mayor número de funciones.

2.1. Funciones medibles

Definición. Diremos que una función $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ es

- *Borel medible* si para cada $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^p)$, $f^{-1}(B) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.
- *Lebesgue medible* si para cada $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^p)$, $f^{-1}(B) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.

Observemos que toda función Borel medible es claramente Lebesgue medible.

Proposición 2.1.1. *Dadas funciones $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ y $g:\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, se verifica:*

i) Si f y g son Borel medibles, entonces $g \circ f$ es Borel medible.

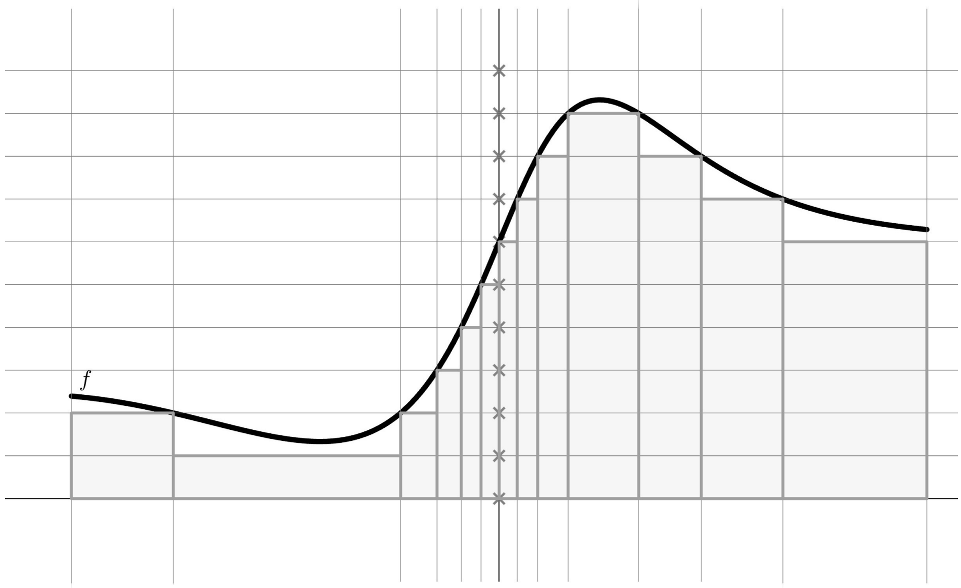


Figura 2.2: Esquema de la integración Lebesgue.

ii) Si f es Lebesgue medible y g es Borel medible, entonces $g \circ f$ es Lebesgue medible.

Demostración. Como g es Borel medible, para cada $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^q)$, $g^{-1}(B)$ es un boreliano de $\mathbb{R}^p$, así que $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$ es un boreliano de $\mathbb{R}^n$ en el primer caso y un Lebesgue medible de $\mathbb{R}^n$ en el segundo. □

Será habitual que tratemos al mismo tiempo funciones Borel medibles y funciones Lebesgue medibles, tal y como ha ocurrido en la demostración de la proposición anterior. Para no perder rigor, pero al mismo tiempo mantener un lenguaje cómodo, escribiremos $\mathscr{A} = \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ ó $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, y hablaremos simplemente de *funciones $\mathscr{A}$-medibles*. Por ejemplo, si reescribiéramos el enunciado de la proposición anterior con este lenguaje, diríamos sencillamente que la composición de una función $\mathscr{A}$-medible con una función Borel medible da como resultado una función $\mathscr{A}$-medible. En la mayoría de los casos, sin embargo, utilizaremos el adjetivo *medible* para hablar indistintamente de funciones –y conjuntos– Borel medibles o Lebesgue medibles cuando no sea necesario distinguir.

Proposición 2.1.2. *Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ es $\mathscr{A}$-medible si, y solo si, lo son todas las funciones coordenadas $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$.*

Demostración. Si f es $\mathscr{A}$-medible, entonces las funciones coordenadas $f_j = \pi_j \circ f$ lo son, según indica la proposición anterior. Recíprocamente, si cada función f_j es $\mathscr{A}$-medible, consideremos $\mathscr{F} = \{B \subseteq \mathbb{R}^m : f^{-1}(B) \in \mathscr{A}\}$ y probemos que se trata de una σ-álgebra que contiene a los semi-rectángulos. Esto último es sencillo, pues si $I = (a, b] = \prod_{j=1}^{p}(a_j, b_j]$, se tiene que

$$f^{-1}(I) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : f_j(x) \in (a_j, b_j]\ \forall j \in \{1, ..., p\}\right\} = \bigcap_{j=1}^{p} f_j^{-1}(a_j, b_j],$$

y este conjunto es $\mathscr{A}$-medible por hipótesis. Probar que $\mathscr{F}$ es σ-álgebra es rutinario, y se deja como ejercicio al lector. □

La mayoría de funciones medibles con las que trabajaremos este curso serán de la forma $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o bien de la forma $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Para este tipo de funciones es más sencillo estudiar el carácter $\mathscr{A}$-medible.

Lema 2.1.3. *Para una función $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, son equivalentes:*

i) f es $\mathscr{A}$-medible.

ii) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq \alpha\} \in \mathscr{A}$.

iii) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \alpha\} \in \mathscr{A}$.

iv) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \alpha\} \in \mathscr{A}$.

v) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \alpha\} \in \mathscr{A}$.

La demostración se deja como ejercicio. La implicación $(v) \Rightarrow (i)$ puede hacerse probando que $\mathscr{F} = \{B \subseteq \mathbb{R} : f^{-1}(B) \in \mathscr{A}\}$ es una σ-álgebra que contiene a los semi-intervalos.

Los resultados anteriores permiten poner gran cantidad de ejemplos de funciones medibles. De hecho, la gran mayoría de las funciones que podemos imaginarnos son medibles:

I) Dado un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$, se llama *función indicador* a la función

$$I_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad , \quad I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Se tiene que I_A es $\mathscr{A}$-medible si, y sólo si, $A \in \mathscr{A}$, sin más que observar que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : I_A(x) > \alpha\} = \begin{cases} \varnothing & \text{si } \alpha \geq 1 \\ A & \text{si } 0 \leq \alpha < 1 \\ \mathbb{R}^n & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

II) Toda *función continua* es Borel medible –y por tanto, Lebesgue medible–, gracias a la Proposición 1.2.1.

Sin embargo, existen funciones Borel medibles que no son continuas. Por ejemplo, $I_{\mathbb{Q}}$, la función indicador de los números racionales, es un ejemplo de una función Borel medible que es discontinua en todo punto.

III) *Máximo y mínimo de dos funciones.*

Dadas dos funciones f y g, definimos el *máximo* de f y g como

$$\text{máx}(f, g)(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}$$

y el *mínimo* como

$$\text{mín}(f, g)(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}.$$

Es sencillo comprobar que si f y g son $\mathscr{A}$-medibles, también lo son $\text{máx}(f, g)$ y $\text{mín}(f, g)$, pues para cada $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} &\{x \in \mathbb{R}^n : \text{máx}(f, g)(x) > \alpha\} = \\ &\qquad = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) > \alpha\}, \end{aligned}$$

y para $\text{mín}(f, g)$, podemos hacer algo parecido:

$$\begin{aligned} &\{x \in \mathbb{R}^n : \text{mín}(f, g)(x) > \alpha\} = \\ &\qquad = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \alpha\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) > \alpha\}. \end{aligned}$$

IV) *Partes positiva y negativa de una función.*

Llamaremos *parte positiva* y *parte negativa* de una función f a las funciones

$$f^+ = \text{máx}\{f, 0\}, \quad f^- = \text{máx}\{-f, 0\},$$

de manera que se tienen las igualdades

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Tengamos cuidado con el signo menos en la primera igualdad: *la parte negativa de f es una función no negativa.*

Veamos que si f es medible, entonces también lo son f^+ y f^-. En efecto, como la función constante 0 es medible, se tiene que f^+ es medible. Ahora, si f es medible, también lo es $-f$, ya que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \alpha\} = \{x \in \mathbb{R}^n : -f(x) < -\alpha\},$$

de modo que f^- también es medible.

Como consecuencia, se deduce que si f es medible, también lo es $|f|$, pues $|f| = \text{máx}\{f, -f\}$.

v) *Límite puntual de una sucesión de funciones medibles.*

Una sucesión de funciones $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ *converge puntualmente* a una función f si para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y cada $\varepsilon > 0$, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que

$$k > \nu \implies |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

En otras palabras, si para cada $x \in \mathbb{R}^n$, la sucesión de números reales $(f_k(x))_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x)$. Lo denotaremos $f_k \xrightarrow{p} f$.

Se verifica que *el límite puntual de funciones medibles es medible*, es decir, que si $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones medibles que convergen puntualmente a f, entonces f es medible.

Para probar esta afirmación, recordemos que, dado $\alpha > 0$, $f(x) > \alpha$ si, y sólo si, existe un $m \in \mathbb{N}$ y un índice $N \in \mathbb{N}$ para el cual se satisface $f_k(x) > \alpha + \frac{1}{m}$ siempre que $k \geq N$. En efecto:

- si $f(x) > \alpha$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) > \alpha + \frac{1}{m}$, y por lo tanto, todos los términos $f_k(x)$, salvo quizá finitos, son también estrictamente mayores que $\alpha + \frac{1}{m}$.
- si existen $m \in \mathbb{N}$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $f_k(x) > \alpha + \frac{1}{m}$ para todo $k \geq N$, entonces $f(x) \geq \alpha + \frac{1}{m} > \alpha$.

Así, se obtiene que

$$\begin{aligned} f(x) > \alpha &\iff \exists m \in \mathbb{N},\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall k > N,\ f_k(x) > \alpha + \tfrac{1}{m} \\ &\iff \exists m \in \mathbb{N},\ \exists N \in \mathbb{N} : x \in \bigcap_{k=N}^{\infty} \{y : f_k(y) > \alpha + \tfrac{1}{m}\} \\ &\iff \exists m \in \mathbb{N} :\ x \in \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{k=N}^{\infty} \{y : f_k(y) > \alpha + \tfrac{1}{m}\} \\ &\iff x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{k=N}^{\infty} \{y : f_k(y) > \alpha + \tfrac{1}{m}\} \end{aligned}$$

Es decir,

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{k=N}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^n : f_k(x) > \alpha + \tfrac{1}{m}\}$$

Ahora, los conjuntos de la forma $\{x \in \mathbb{R}^n : f_k(x) > \alpha + \frac{1}{m}\}$ son medibles para cualquier valor de k, así que sus respectivas intersecciones y uniones son medibles. Por lo tanto, f es medible.

Teorema de convergencia de funciones simples

A continuación consideraremos un caso particular de funciones medibles, las llamadas *simples*. Su papel es parecido al de las funciones escalonadas en la integración Riemann.

Definición. Diremos que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es *simple* si es medible y toma un número finito de valores *reales*.

Insistimos en que, por definición, una función simple *no toma valores infinitos*.

Lema 2.1.4. *Una función $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es simple si, y solo si, existe una partición de $\mathbb{R}^n$ en conjuntos medibles $A_1, ..., A_k$ y números reales $a_1, ..., a_j$ tales que*

$$s = \sum_{j=1}^{k} a_k I_{A_k}. \tag{2.a}$$

En otras palabras, las funciones simples son precisamente combinaciones lineales de funciones indicadores sobre conjuntos medibles, que pueden suponerse disjuntos.

Demostración. Si s es una función simple, entonces por definición es medible y toma un número finito de valores $a_1, ..., a_k$. La colección de conjuntos medibles

$$A_j = s^{-1}(a_j), \quad j \in \{1, ..., k\}$$

forman una partición de $\mathbb{R}^n$, y $s(x) = a_j$ precisamente cuando $x \in A_j$. Por lo tanto, s cumple la igualdad (2.a).

Recíprocamente, toda función que satisfaga la igualdad (2.a) solo puede tomar los valores $a_1, ..., a_k$. Además, los conjuntos $A_j = s^{-1}(a_j)$ forman una partición de $\mathbb{R}^n$, y si son medibles, entonces s es una función medible, pues dado $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\{x \in \mathbb{R}^n : s(x) > \alpha\} = \bigcup \{s^{-1}(a_j) : a_j > \alpha\} = \bigcup_{\{j : a_j > \alpha\}} A_j$$

que es un conjunto medible. □

Proposición 2.1.5. *Se verifica:*

i) La suma y el producto de dos funciones simple es simple.

ii) El cociente de dos funciones simples cuyo denominador no se anula es una función simple.

Demostración. Es obvio que la suma, producto y cociente de dos funciones que toman una cantidad finita de valores toma, de nuevo, una cantidad finita de valores. El problema reside en que no es automático probar que las operaciones de funciones medibles dan como resultado funciones medibles.

Para evitar esta dificultad, podemos dar un rodeo mediante el lema anterior. Dadas s y s' dos funciones simples, escribámoslas de la forma $s = \sum_{i=1}^{k} a_i I_{A_i}$ y $s' = \sum_{j=1}^{m} b_j I_{B_j}$, donde $\{A_i\}_{i=1}^{k}$ y $\{B_j\}_{j=1}^{m}$ son particiones de $\mathbb{R}^n$ formadas por conjuntos medibles. Entonces, los conjuntos

$$\left\{A_i \cap B_j : i \in \{1, ..., k\}, j \in \{1, ..., m\}\right\}$$

también forman una partición de $\mathbb{R}^n$, y es claro que, si fijamos $i \in \{1, ..., k\}$ y $j \in \{1, ..., m\}$, la función $s + s'$ toma el valor $a_i + b_j$ en los puntos del conjunto $A_i \cap B_j$. Así que

$$s + s' = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} (a_i + b_j) I_{A_i \cap B_j}$$

Análogamente ocurre con el producto y el cociente, así que tenemos:

$$s \cdot s' = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} (a_i \cdot b_j) I_{A_i \cap B_j}, \qquad \frac{s}{s'} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{a_i}{b_j} \right) I_{A_i \cap B_j},$$

donde en la última igualdad se requiere que $b_j \neq 0$ para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$. □

La importancia de las funciones simples radica en que, a pesar de su sencillez, son suficientes para aproximar cualquier función medible mediante la convergencia puntual.

Teorema 2.1.6. (de convergencia de funciones simples) *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible no negativa. Entonces existe una sucesión $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ de funciones simples no negativas tales que:*

i) $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ *es* creciente*; es decir,* $s_k(x) \leq s_{k+1}(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$.

ii) $s_k \xrightarrow{p} f$.

Demostración. La idea se ilustra en la Figura 2.3, y consiste en utilizar funciones simples que aproximen a f "cada vez mejor" en un conjunto "cada vez más grande". Para ello, fijemos $k \in \mathbb{N}$ y consideremos el conjunto

$$A_k = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < k\},$$

que puede descomponerse como unión disjunta de los conjuntos medibles

$$A_{j,k} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{j-1}{2^k} \leq f(x) < \frac{j}{2^k} \right\} = f^{-1} \left[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k} \right)$$

donde $j \in \{1, \ldots, k2^k\}$. Observemos que los valores de f en $A_{j,k}$ oscilan poco, pues si $x, x' \in A_{j,k}$, entonces $|f(x) - f(x')| \leq 2^{-k}$. Por otra parte, es sencillo comprobar que $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < +\infty\}$.

Esta idea nos lleva a considerar una sucesión de funciones simples $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ que sean constantes en cada $A_{j,k}$, y que fuera de A_k tomen el valor k. Así pues, llamemos

$$s_k(x) = \begin{cases} \frac{j-1}{2^k} & \text{si } \frac{j-1}{2^k} \leq f(x) < \frac{j}{2^k} \text{ con } j \in \{1, \ldots, k2^k\}, \\ k & \text{si } f(x) \geq k. \end{cases}$$

Probemos en primer lugar que $s_k(x) \leq s_{k+1}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Para ello, distingamos dos casos:

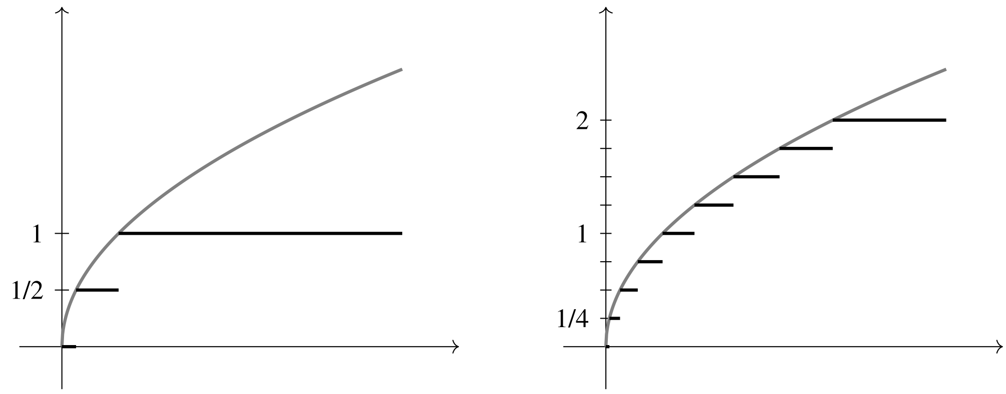


Figura 2.3: Primeras aproximantes para $f(x) = \sqrt{x}$.

- Si $f(x) < k$, entonces existe $j \in \{1, ..., k2^k\}$ tal que $x \in A_{j,k}$, en otras palabras, $\frac{j-1}{2^k} \leq f(x) < \frac{j}{2^k}$, y por tanto,

$$\frac{2j-2}{2^{k+1}} \leq f(x) < \frac{2j}{2^{k+1}}.$$

De esta forma, se deduce que $x \in A_{2j-2,k+1} \cup A_{2j-1,k+1}$, así que $s_{k+1}(x) \geq \frac{2j-2}{2^{k+1}} = \frac{j-1}{2^k} = s_k(x)$.

- Si $f(x) \geq k$, es decir $k = \frac{k2^{k+1}}{2^{k+1}} \leq f(x)$, entonces concluimos que existe $j \in \{k2^{k+1}+1, k2^{k+1}+2, ..., (k+1)2^{k+1}\}$ tal que $x \in A_{j,k+1}$, o bien $f(x) \geq k+1$. En cualquier caso, $s_{k+1}(x) \geq \frac{k2^{k+1}}{2^{k+1}} = k = s_k(x)$.

Para concluir, probemos que $s_k \xrightarrow{p} f$. Fijemos $x \in \mathbb{R}^n$. Si $f(x) = +\infty$, entonces $s_k(x) = k$, con lo cual se tiene $s_k(x) \to f(x)$ trivialmente. Por otra parte, si $f(x) < \infty$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) < N$. Así que, para cualquier $k \geq N$, debe existir un $j \in \{1, ..., k2^k\}$ tal que $\frac{j-1}{2^k} \leq f(x) < \frac{j}{2^k}$, y por tanto:

$$|f(x) - s_k(x)| = f(x) - s_k(x) \leq \frac{j}{2^k} - \frac{j-1}{2^k} \leq \frac{1}{2^k}. \qquad \square$$

La hipótesis de no negatividad de la función f en el teorema anterior puede omitirse para obtener:

Corolario 2.1.7. *Toda función $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es límite puntual de funciones simples.*

Demostración. Basta con aplicar el teorema anterior a f^+ y f^-. $\square$

Corolario 2.1.8. *Dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, se verifica* *i) Si la suma $f + g$ está bien definida –es decir, $f(x) + g(x) \neq +\infty - \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$–, entonces es medible.*

ii) El producto $f \cdot g$ es medible.

ii) Si el cociente f/g está bien definido –es decir, g no se anula en ningún punto–, entonces es medible.

Demostración. Dadas dos funciones medibles f y g, consideremos dos sucesiones de funciones simples $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ y $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ que converjan puntualmente a f y a g, respectivamente. Entonces, claramente $f_k + g_k \xrightarrow{p} f + g$ y $f_k \cdot g_k \xrightarrow{p} f \cdot g$, así que tanto $f + g$ como $f \cdot g$ son medibles, por ser límites puntuales de funciones medibles.

Finalmente, es posible que, aunque g no se anule en ningún punto, sí lo hagan las funciones g_k. Para ello, vamos a modificarlas ligeramente para evitar este problema: la sucesión de funciones

$$g'_k(x) = g_k(x) + \frac{1}{k} I_{\{x : g_k(x) = 0\}}(x) = \begin{cases} g_k(x) & \text{si } g_k(x) \neq 0 \\ \frac{1}{k} & \text{si } g_k(x) = 0 \end{cases}$$

también son simples, convergen a g y no se anulan en ningún punto. Así que, ahora sí, $f_k/g'_k \xrightarrow{p} f/g$, con lo que f/g es medible. □

2.2. Construcción de la integral de Lebesgue

Estamos ya en condiciones de definir la integral de Lebesgue. Nuestro punto de partida para definir la integral es que para cualquier función f no negativa, la *integral sobre f* debe coincidir con la *medida* del conjunto que queda bajo la gráfica de f.

Definición. Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ medible no negativa, llamaremos *conjunto de ordenadas* de f a

$$\operatorname{Ord} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) : 0 \leq y < f(x)\}.$$

Fijémonos que los puntos de la gráfica de f no pertenecen al conjunto de ordenadas.

Como era de esperar, la existencia de conjuntos no Lebesgue medibles hace imprescindible restringir la integral a la clase de funciones medibles. Para ello, nos aseguraremos de que, para cualquier función medible no negativa f, su conjunto de ordenadas sea también medible.

Proposición 2.2.1. *Si f es una función $\mathscr{A}$-medible no negativa, entonces* Ord f *es un conjunto $\mathscr{A}$-medible.*

Demostración. Si f es $\mathscr{A}$-medible, entonces la función

$$h : \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \to \overline{\mathbb{R}} \quad , \quad h(x, y) = f(x) - y$$

es también $\mathscr{A}$-medible, pues es composición de las funciones

$$(x, y) \mapsto (f(x), y) \mapsto f(x) - y,$$

la primera de las cuales es $\mathscr{A}$-medible, puesto que lo es coordenada a coordenada –Proposición 2.1.2–, y la segunda es continua. De esta forma, $\operatorname{Ord} f = h^{-1}(0, +\infty)$, luego se trata de un conjunto $\mathscr{A}$-medible. □

La definición de integral se hará por etapas. Primero definiremos la integral para funciones *simples* no negativas, y después para funciones *medibles* no negativas. Por último, extenderemos la definición de integral a funciones medibles arbitrarias.

2.2.1. Integral de funciones simples no negativas

Definición. Sea $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función simple no negativa, y escribamos $s = \sum_{j=1}^{k} a_j I_{A_j}$, donde $A_1, \ldots, A_k$ son disjuntos dos a dos. Llamaremos *integral* de s al número

$$\int s \, dm = \sum_{j=1}^{k} a_j \cdot m(A_j).$$

En particular, si $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, la integral de la función I_A es justamente la *medida* del conjunto A.

Es necesario comprobar que la definición de integral que acabamos de dar no depende de los conjuntos $A_1, \ldots, A_k$ ni de las constantes $a_1, \ldots, a_k$. Probaremos esto directamente viendo que $\int s \, dm$ coincide con la medida del conjunto de ordenadas de s: tal conjunto es intrínseco a s, y por tanto no depende de la forma en la que escribamos.

Proposición 2.2.2. *Sea $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función simple no negativa, y escribamos $s = \sum_{j=1}^{k} a_i I_{A_j}$. Entonces*

$$m(\operatorname{Ord} s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot m(A_j).$$

En particular, la integral $\int s \, dm$ está bien definida.

Demostración. Puesto que $s = \sum_{j=1}^{k} a_i I_{A_j}$, se tiene que

$$\text{Ord}\, s = \{(x,y) : x \in A_j, 0 \leq y < a_j\} = \bigcup_{j=1}^{k} \big(A_k \times [0, a_j)\big),$$

y como los conjuntos $A_1, ..., A_k$ son disjuntos, también es disjunta la unión de la igualdad anterior. Por lo tanto, según el Teorema 1.7.3,

$$m(\text{Ord}\, s) = \sum_{j=1}^{k} m\big(A_k \times [0, a_j]\big) = \sum_{j=1}^{n} m(A_j) \cdot m[0, a_j] = \sum_{j=1}^{k} a_j \cdot m(A_j). \qquad \square$$

Proposición 2.2.3. *La integral de funciones simples no negativas verifica las siguientes propiedades:*

i) Es lineal*; es decir, para cualesquiera funciones simples no negativas s y s', se tiene*

$$\int (s + s')\, dm = \int s\, dm + \int s'\, dm,$$

y si $c \geq 0$, entonces

$$\int (cs)\, dm = c \int s\, dm.$$

ii) Es monótona*; es decir, si s y s' son dos funciones simples no negativas tales que $s \leq s'$, entonces*

$$\int s\, dm \leq \int s'\, dm.$$

Demostración. Sean $s = \sum_{i=1}^{k} a_i I_{A_i}$ y $s' = \sum_{j=1}^{m} b_j I_{B_j}$ dos funciones simples no negativas, donde los conjuntos $A_1, ..., A_k$ y $B_1, ..., B_m$ son particiones de $\mathbb{R}^n$ formadas por conjuntos medibles. Entonces,

$$\int (s + s')\, dm = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} (a_i + b_j) \cdot m(A_i \cap B_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} a_i \sum_{j=1}^{m} m(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{i=1}^{k} m(A_i \cap B_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot m(A_i) + \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot m(B_j) =$$

$$= \int s\, dm + \int s'\, dm.$$

Por otra parte, es claro que $cs = \sum_{j=1}^{k}(ca_j) \cdot I_{A_j}$, así que

$$\int (cs)\, dm = \sum_{j=1}^{k}(ca_j) \cdot m(A_j) = c \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot m(A_j) = c \int s\, dm.$$

Para probar que la integral es monótona, basta con observar que si $0 \le s \le s'$, entonces $\operatorname{Ord} s \subseteq \operatorname{Ord} s'$, por lo que

$$\int s\, dm = m\big(\operatorname{Ord} s\big) \le m\big(\operatorname{Ord} s'\big) = \int s'\, dm. \qquad \square$$

2.2.2. Integral de funciones no negativas

El siguiente paso consiste en extender la integral a funciones medibles no negativas. Para ello, nos ayudaremos del Teorema 2.1.6, por el cual toda función medible no negativa es límite creciente de funciones simples.

Definición. Si f es una función medible no negativa, llamaremos

$$\int f\, dm = \sup\left\{\int s\, dm,\ s \text{ simple} : 0 \le s \le f\right\}$$

Antes de continuar, debemos asegurarnos de que esta nueva definición de integral *extiende* a la anterior; es decir, que para funciones simples no negativas, ambas definiciones coinciden. Esto puede hacerse comprobando que, también para funciones medibles no negativas, la integral coincide con la medida del conjunto de ordenadas.

Proposición 2.2.4. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función medible no negativa, entonces*

$$\int f\, dm = m(\operatorname{Ord} f).$$

Demostración. Por una parte, observemos que si s es una función simple tal que $0 \le s \le f$, entonces $\operatorname{Ord} s \le \operatorname{Ord} f$, con lo cual se tiene

$$\int f\, dm = \sup\left\{\int s\, dm,\ s \text{ simple} : 0 \le s \le f\right\} =$$

$$= \sup\left\{m(\operatorname{Ord} s),\ s \text{ simple} : 0 \le s \le f\right\} \le$$

$$\le m(\operatorname{Ord} f).$$

Para probar la desigualdad contraria, consideremos, en virtud del Teorema 2.1.6, una sucesión creciente de funciones simples no negativas $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ que converjan puntualmente a f. Probemos que entonces se verifica $\operatorname{Ord} s_n \uparrow \operatorname{Ord} f$. En efecto, observemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tienen las igualdades $s_n \leq s_{n+1} \leq f$, con lo que $\operatorname{Ord} s_n \subseteq \operatorname{Ord} s_{n+1} \subseteq \operatorname{Ord} f$ y por tanto $\bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ord} s_n \subseteq \operatorname{Ord} f$. Por otra parte, si $(x, y) \in \operatorname{Ord} f$, entonces $y < f(x)$, y puesto que la sucesión $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a f, debe existir algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $y < s_n(x)$, es decir, $(x, y) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ord} s_n$.

Esto es todo lo que necesitamos para concluir, pues en virtud de la Proposición 1.3.3, se tiene que

$$m(\operatorname{Ord} f) = \lim_n m(\operatorname{Ord} s_n) = \lim_n \int s \, dm \leq \int f \, dm. \qquad \square$$

Analicemos un momento la demostración de la proposición anterior. Para probar que $\operatorname{Ord} s_n \uparrow \operatorname{Ord} f$, en ningún momento se ha necesitado la hipótesis de que las funciones sean simples. Esta observación produce, en realidad, uno de los teoremas fundamentales de la integración Lebesgue:

Teorema 2.2.5. (de la convergencia monótona) *Sea $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de funciones medibles no negativas que convergen puntualmente a una función f. Entonces, f es medible, y*

$$\int f \, dm = \lim_k \int f_k \, dm$$

En otras palabras, el teorema de la convergencia monótona permite *permutar el límite con la integral*:

$$\int \left(\lim_k f_k\right) dm = \lim_k \int f_k \, dm$$

Para concluir, comprobemos que la integral, tal y como la hemos extendido para funciones medibles no negativas, sigue siendo lineal y monótona.

Proposición 2.2.6. *La integral de funciones medibles no negativas verifica las siguientes propiedades:*

i) Es lineal*; es decir, para cualesquiera funciones medibles no negativas f y g, se tiene*

$$\int (f + g) \, dm = \int f \, dm + \int g \, dm,$$

y si $c \geq 0$, entonces

$$\int (cf)\ dm = c \int f\ dm.$$

ii) Es monótona*; es decir, si f y g son dos funciones medibles no negativas tales que $f \leq g$, entonces*

$$\int f\ dm \leq \int g\ dm.$$

Demostración. Si f y g son funciones medibles no negativas, consideremos, en virtud del Teorema 2.1.6, dos sucesiones crecientes $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ y $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ de funciones simples no negativas y convergentes, respectivamente, a f y a g. Entonces, $f_k + g_k \xrightarrow{p} f + g$, y el *Teorema de la Convergencia Monótona*, (2.2.5), pág. 55, afirma que

$$\int (f+g)\ dm = \lim_k (f_k + g_k)\ dm = \lim_k \int f_k\ dm + \lim_k \int g_k\ dm =$$
$$= \int f\ dm + \int g\ dm.$$

Del mismo modo, si $c \geq 0$, entonces $cf_k \xrightarrow{p} cf$, por lo que

$$\int (cf)\ dm = \lim_k \int cf_k\ dm = c \lim_k f_k\ dm = c \int f\ dm.$$

La monotonía se demuestra análogamente que en el caso de funciones simples. □

Corolario 2.2.7. *Si $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas, entonces*

$$\int \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\ dm \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k\ dm.$$

Demostración. Basta con aplicar la linealidad de la integral y el Teorema de la Convergencia Monótona 2.2.5 a la sucesión de funciones $g_k = f_1 + \ldots + f_k$, que son medibles no negativas y convergen puntualmente a $g = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$. □

Integral de funciones no negativas sobre conjuntos medibles

Dada $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible no negativa, y $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, llamaremos *conjunto de ordenadas de f sobre A* al conjunto

$$\mathrm{Ord}_A f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in A,\ 0 \leq y < f(x)\}.$$

Es evidente que $\mathrm{Ord}_A f = \mathrm{Ord}(f \cdot I_A)$, lo que sugiere definir la *integral de f sobre A* como

$$\int_A f\, dm = \int f \cdot I_A\, dm,$$

de manera que siga siendo cierta la igualdad

$$\int_A f\, dm = m(\mathrm{Ord}_A f).$$

Así, se tiene el siguiente resultado fundamental:

Teorema 2.2.8. *Si $h : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función Lebesgue medible no negativa, entonces la aplicación*

$$\mu(B) = \int_B h\, dm$$

es una medida sobre $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Por definición, $I_\varnothing = 0$, así que

$$\mu(\varnothing) = \int_\varnothing h\, dm = \int h \cdot I_\varnothing = 0.$$

Ahora, si $(A_k)_{k=1}^\infty$ es una sucesión de conjuntos Lebesgue medibles disjuntos dos a dos, y llamamos $A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$, entonces $\mathrm{Ord}_A h = \bigcup_{k=1}^\infty \mathrm{Ord}_{A_k} h$, y la unión de la derecha es disjunta. Por lo tanto,

$$\int_A h\, dm = m(\mathrm{Ord}_A h) = \sum_{k=1}^\infty m(\mathrm{Ord}_{A_k} h) = \sum_{k=1}^\infty \int_{A_k} h\, dm. \qquad \square$$

2.2.3. Integral de funciones medibles de signo arbitrario

Finalmente, supondremos que $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función medible cualquiera, y analizaremos en qué casos podemos hablar de su integral de Lebesgue.

Definición. Dada una función medible $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, diremos que:

- *f tiene integral* si alguna de las dos integrales $\int f^+\, dm$ y $\int f^-\, dm$ es finita; es decir, si

$$\int f^+\, dm - \int f^- \neq +\infty - \infty.$$

En tal caso, llamaremos *integral* de f a

$$\int f\, dm = \int f^+\, dm - \int f^-\, dm.$$

- f es *integrable* si $\int f\ dm$ es finita.

Para funciones medibles de signo arbitrario, la integral mide la *diferencia de medidas* entre los conjuntos de ordenadas

$$\int f\ dm = m(\mathrm{Ord}\, f^+) - m(\mathrm{Ord}\, f^-).$$

siempre que tenga sentido dicha expresión.

A continuación probaremos que la integral de funciones medibles es lineal y monótona. Esto, sin embargo, requiere de algunas precisiones, pues habrá que asegurar que las expresiones correspondientes están bien definidas. Comprobaremos que, salvo en aquellos casos en los que se obtengan expresiones del tipo $\infty - \infty$, la integral se comporta como esperábamos.

Teorema 2.2.9. (Linealidad de la integral) *Sean f y g dos funciones medibles con integral.*

i) Si $f + g$ está bien definida y $\int f\ dm + \int g\ dm \neq \infty - \infty$, entonces $f + g$ tiene integral, y además

$$\int (f + g)\ dm = \int f\ dm + \int g\ dm.$$

ii) Si $c \in \mathbb{R}$, entonces cf tiene integral, y

$$\int (cf)\ dm = c \int f\ dm.$$

Demostración. Para probar *(i)*, observemos primero que las hipótesis hechas sobre f y g se traducen en las siguientes implicaciones:

($\star$) Si $\int f^+\ dm = +\infty$ o bien $\int g^+\ dm = +\infty$, entonces ambas integrales $\int f^-\ dm$ y $\int g^-\ dm$ son finitas.

($\star\star$) Si $\int f^-\ dm = +\infty$ o bien $\int g^-\ dm = +\infty$, entonces ambas integrales $\int f^+\ dm$ y $\int g^+\ dm$ son finitas.

Puesto que $(f + g)^+ \leq f^+ + g^+$, y $(f + g)^- \leq f^- + g^-$, la monotonía de la integral para funciones no negativas permite concluir que

$$\int (f + g)^+\ dm \leq \int f^+\ dm + \int g^+\ dm,$$

$$\int (f + g)^-\ dm \leq \int f^-\ dm + \int g^-\ dm,$$

y además, gracias a ($\star$) y ($\star\star$), al menos una de las integrales de la izquierda en las desigualdades anteriores es finita. Así que $f+g$ tiene integral. Ahora, descomponiendo f, g y $f+g$ en sus partes positivas y negativas, respectivamente, obtenemos la igualdad

$$f^+ + g^+ + (f+g)^- = f^- + g^- + (f+g)^+,$$

y utilizando que la integral de funciones no negativas es lineal, deducimos que

$$\begin{aligned}\int f^+\,dm + \int g^+\,dm + \int (f+g)^-\,dm = \\ = \int f^-\,dm + \int g^-\,dm + \int (f+g)^+\,dm.\end{aligned}$$

Para concluir, basta con reorganizar los términos de la igualdad anterior. Observemos que, en general, esto no puede hacerse sin obtener expresiones del tipo $\infty - \infty$. Sin embargo, bajo las hipótesis ($\star$) y ($\star\star$), la igualdad anterior sí puede convertirse en

$$\begin{aligned}\int f^+\,dm - \int f^-\,dm + \int g^+\,dm - \int g^-\,dm = \\ = \int (f+g)^+\,dm - \int (f+g)^-\,dm,\end{aligned}$$

es decir, $\int f\,dm + \int g\,dm = \int (f+g)\,dm$.

La demostración de *(ii)* es sencilla: si $c > 0$, entonces $(cf)^+ = cf^+$ y $(cf)^- = cf^-$, por lo que si f tiene integral, también cf tiene integral, y como la integral es lineal sobre las funciones no negativas, se tiene

$$\int (cf)\,dm = \int cf^+\,dm - \int cf^-\,dm = c\int f^+\,dm - c\int f^-\,dm = c\int f\,dm.$$

El caso $c < 0$ es análogo, por la salvedad de que ahora $(cf)^+ = -cf^-$ y $(cf)^- = -cf^+$. Por último, si $c = 0$, entonces $\int cf\,dm = 0 = c\int f\,dm$, entendiendo siempre que $0 \cdot (\pm\infty) = 0$. □

Teorema 2.2.10. (Monotonía de la integral) *Sean f y g dos funciones medibles tales que $f \leq g$.*

i) Si existe la integral de f y además $\int f\,dm > -\infty$, entonces existe la integral de g.

ii) Si existe la integral de g y además $\int g\,dm < +\infty$, entonces existe la integral de f.

Y en ambos casos se verifica que $\int f\ dm \leq \int g\ dm$*.*

Demostración. En primer lugar, si $f \leq g$, tenemos $f^+ \leq g^+$ y $g^- \leq f^-$. Por lo tanto, en el caso *(i)*, como $\int f^-\ dm < +\infty$, la monotonía de la integral para funciones no negativas permite concluir que $\int g^-\ dm < +\infty$, así que g tiene integral. El caso *(ii)* es similar: puesto que $\int g^+\ dm < \infty$, también $\int f^+\ dm < \infty$, de modo que f tiene integral.

Finalmente, en cualquiera de los dos casos, se tiene

$$\int f^+\ dm \leq \int g^+\ dm, \qquad \int f^-\ dm \geq \int g^-\ dm,$$

de donde se concluye que $\int f\ dm \leq \int g\ dm$. □

2.3. El retículo vectorial de las funciones integrables

Fijado $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, diremos que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible es *integrable sobre* A cuando la función $f \cdot I_A$ sea integrable, y denotaremos

$$\int_A f\ \ dm = \int f \cdot I_A.$$

Escribiremos $\mathscr{L}^1(A)$ para referirnos al conjunto formado por todas las *funciones integrables* sobre A.

La siguiente propiedad de la integral de Lebesgue es una de las más importantes.

Proposición 2.3.1. *Sea* $A \in \mathscr{A}$*, y* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función medible. Entonces* f *es integrable sobre* A *si, y solo si,* $|f|$ *lo es, y se verifica*

$$\left| \int_A f\ dm \right| \leq \int_A |f|\ dm.$$

Demostración. Observemos que f es integrable sobre A precisamente cuando

$$\int_A f^+\ dm < +\infty, \qquad \int_A f^-\ dm < +\infty,$$

lo cual equivale a que

$$\int_A |f|\ dm = \int_A f^+\ dm + \int_A f^-\ dm < +\infty,$$

es decir, f es integrable sobre A si y solamente si $|f|$ es integrable sobre A. Ahora, como $f \leq |f|$ y $-f \leq |f|$, la monotonía de la integral implica que

$$\int_A f\, dm \leq \int_A |f|\, dm, \quad -\int_A f\, dm \leq \int_A |f|\, dm$$

y concluimos. □

Corolario 2.3.2. *Fijado $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, el conjunto $\mathscr{L}^1(A)$ de las funciones integrables sobre A satisface:*

i) Es un espacio vectorial, y la integral

$$f \mapsto \int_A f\, dm$$

es un funcional lineal sobre él.

ii) Si f es una función medible para la cual existe $g \in \mathscr{L}^1(A)$ que verifica $|f(x)| \leq g(x)$ para todo $x \in A$, entonces $f \in \mathscr{L}^1(A)$, y además

$$\left|\int_A f\, dm\right| \leq \int_A g\, dm.$$

Se dice que $\mathscr{L}^1(A)$ es un *retículo vectorial*, pues es un espacio vectorial y posee un *orden parcial*

$$f \leq g \iff f(x) \leq g(x) \text{ para todo } x \in A,$$

satisfaciendo que, para cualesquiera funciones $f, g \in \mathscr{L}^1(A)$:

- las funciones $\text{máx}\{f, g\}$ y $\text{mín}\{f, g\}$ también pertenecen a $\mathscr{L}^1(A)$.
- si $f \leq g$, entonces $f + h \leq g + h$ para toda $h \in \mathscr{L}^1(A)$.
- si $f \leq g$ y $\lambda \geq 0$, entonces $\lambda f \leq \lambda g$.

Como consecuencia del corolario anterior se obtienen dos condiciones suficientes de integrabilidad muy útiles en la práctica. La demostración se deja como ejercicio al lector.

Corolario 2.3.3. *Se verifica:*

i) Toda función medible y acotada sobre un conjunto de medida finita es integrable sobre dicho conjunto.

ii) En particular, toda función continua en un conjunto compacto es integrable sobre dicho conjunto.

Por último, si f es una función integrable, también es integrable sobre cualquier conjunto A medible, ya que se verifica $|f \cdot I_A| \leq |f|$. Así que podemos definir la función de conjuntos

$$\mu(A) = \int_A f\, dm,$$

donde $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. Observemos que μ ya no es una medida, por la sencilla razón de que puede tomar valores negativos. Sin embargo, la σ-aditividad se conserva, y esto resultará útil en numerosas ocasiones.

Corolario 2.3.4. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función integrable, entonces la aplicación*

$$\mu : \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \quad , \quad \mu(A) = \int_A f\, dm$$

es σ-aditiva. En particular, si $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos medibles tales que $A_k \uparrow A$ o bien $A_k \downarrow A$, entonces

$$\lim_k \int_{A_k} f\, dm = \int_A f\, dm.$$

Demostración. La idea es probar que μ se puede escribir como la diferencia de dos medidas *finitas* –es decir, para las cuales $\mathbb{R}^n$ tiene medida finita–. En efecto:

$$\mu(A) = \int_A f\, dm = \int_A f^+\, dm - \int_A f^-\, dm.$$

Así, basta con probar que la diferencia de dos medidas finitas es una función σ-aditiva, lo cual se deja como ejercicio. □

2.4. Conjuntos de medida nula en la integral

Definición. Diremos que una propiedad de los puntos de $\mathbb{R}^n$ se verifica *casi seguro* o *en casi todo punto* si el conjunto de puntos en los que no se verifica dicha propiedad es de medida nula.

Por ejemplo:

I) Sean f y g dos funciones medibles. Diremos que f *coincide con g en casi todo punto*, o que f *es igual a g casi seguro,* si el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}$$

es de medida nula.

Del mismo modo, $f \leq g$ *casi seguro* significa que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > g(x)\}$$

es un conjunto de medida nula.

II) Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es *continua casi seguro* si el conjunto de puntos en los que f no es continua mide cero.

III) Dada una sucesión $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ de funciones medibles, diremos que $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ *converge puntualmente casi seguro* si

$$Z = \{x \in \mathbb{R}^n : \nexists \lim_k f(x)\}$$

es un conjunto de medida nula. En este caso, se puede definir una función límite puntual f como

$$f(x) = \begin{cases} \lim_n f_n(x) & \text{si } x \notin Z \\ 0 & \text{si } x \in Z \end{cases}$$

Proposición 2.4.1. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible no negativa. Se verifica que $\int f\ dm = 0$ si, y solo si, $f = 0$ casi seguro.*

Demostración. Consideremos el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$. Como f es no negativa, A es unión de los conjuntos

$$A_k = \left\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq \tfrac{1}{k}\right\}.$$

Además, para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica:

$$\int f\ dm \geq \int_{A_k} f\ dm \geq \int_{A_k} \frac{1}{k}\ dm = \frac{m(A_k)}{k}.$$

De este modo, si $\int f\ dm = 0$, entonces $m(A_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por tanto, también $m(A) = 0$.

Recíprocamente, si $m(A) = 0$, consideremos $s = \sum_{i=1}^m b_i I_{B_i}$ una función simple no negativa tal que $0 \leq s \leq f$. Entonces, $s(x) = 0$ para todo $x \in A^c$, así que

$$\begin{aligned} \int s\, dm &= \int_A s\, dm + \int_{A^c} s\, dm = \int_A s\, dm + \int_{A^c} 0\, dm = \\ &= \int_A s\, dm = \int s \cdot I_A\, dm = \sum_{i=1}^m b_j \cdot m(A \cap B_j) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la definición de la integral afirma que $\int f\, dm = 0$. □

Corolario 2.4.2. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible tal que $f = 0$ casi seguro. Entonces, $\int f\, dm = 0$. En particular, dos funciones iguales casi seguro tienen la misma integral.*

Demostración. Se deduce aplicando la proposición anterior a las partes positiva y negativa de f. □

Corolario 2.4.3. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible. Si $m(Z) = 0$, entonces $\int_Z f\, dm = 0$.*

Demostración. La función $f \cdot I_Z$ se anula en Z^c, así que $f \cdot I_Z = 0$ casi seguro, y concluimos por el corolario anterior. □

Los resultados anteriores vienen a decir, intuitivamente, que para calcular una integral $\int_A f\, dm$ solamente necesitamos conocer los valores de f en *casi todo punto* de A. En particular, podemos ignorar los valores que toma f en cualquier conjunto de medida nula a la hora de calcular integrales. Una de las principales consecuencias de este hecho es que, al trabajar con funciones integrables, podemos suponer que toman valores en $\mathbb{R}$.

Proposición 2.4.4. *Toda función $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrable es finita casi seguro.*

Demostración. Se trata de probar que el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| = +\infty\}$ tiene medida cero. Para ello, observemos que

$$\int_A |f|\, dm \leq \int |f|\, dm < +\infty,$$

pero, por otra parte, tenemos

$$\int_A |f|\, dm = m(\mathrm{Ord}_A\, |f|) = m\left(A \times [0, +\infty)\right) = m(A) \cdot m[0, +\infty)$$

Así que la única posibilidad de que $m(\mathrm{Ord}_A\, |f|) < +\infty$ es que $m(A) = 0$. □

Teoremas con hipótesis "casi seguro"

El Corolario 2.4.3 es muy útil, pues permite debilitar las hipótesis de ciertos teoremas sustituyéndolas por hipótesis "casi seguro". Por ejemplo, el *Teorema de la Convergencia Monótona*, 2.2.5, puede extenderse como sigue:

Teorema 2.4.5. (de la convergencia monótona con hipótesis casi seguro) *Sea* $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones Lebesgue medibles no negativas tales que:*

- *Para cada* $k \in \mathbb{N}$, $f_k \leq f_{k+1}$ *casi seguro.*
- $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ *converge a* f *casi seguro.*

Entonces f *es Lebesgue medible, y*

$$\int f \, dm = \lim_k \int f_k \, dm$$

Demostración. Consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned} Z_0 &= \{x \in \mathbb{R}^n : \lim_k f_k(x) \neq f(x)\}, \\ Z_k &= \{x \in \mathbb{R}^n : f_k(x) > f_{k+1}(x)\}, \ k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Por hipótesis, todos ellos son de medida nula, así que también lo es $Z = \bigcup_{k=0}^{\infty} Z_k$. Por lo tanto, podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Monótona a la sucesión de funciones $g_k = f_k \cdot I_{Z^c}$, pues son crecientes y convergen puntualmente a $g = f \cdot I_{Z^c}$. Esto, junto con el Corolario 2.4.3, permite concluir:

$$\int f \, dm = \int_{Z^c} f \, dm = \int g \, dm = \lim_k \int g_k \, dm = \lim_k \int_{Z^c} f_k \, dm = \lim_k \int f_k \, dm.$$

□

2.5. Riemann *vs.* Lebesgue

Ya tenemos acceso a la integral de Lebesgue, y además, conocemos una buena parte de sus propiedades fundamentales. Sin embargo, aún quedan dos tareas pendientes. En primer lugar, querríamos ver que la integral de Lebesgue *extiende* a la integral de Riemann; en otras palabras, que toda función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann integrable es también Lebesgue integrable, y que ambas integrales coinciden.

Por otra parte, aunque la construcción de la integral de Lebesgue no permite calcular integrales de manera sencilla. Por ejemplo, ¿cuánto vale la integral (de

Lebesgue) de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$? Calcularla como el supremo de las integrales de las funciones simples que cumplen $0 \leq s(x) \leq x^2$ para todo $x \in [0, 1]$ no parece muy práctico. Necesitamos, pues, una manera práctica de calcular integrales.

En realidad, si probamos que la integral de Lebesgue extiende a la de Riemann, obtendremos una solución al problema de cálculo de integrales, ya que podremos utilizar la *regla de Barrow* para calcular integrales de una buena colección de funciones definidas en intervalos acotados. Así que nos centraremos en probar que toda función Riemann integrable lo es también en el sentido de Lebesgue, y que ambas integrales coinciden.

Recordemos primero algunas nociones de la integración Riemann. Consideremos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Una *partición finita* del intervalo $[a, b]$ se interpreta en este contexto como un subconjunto de $[a, b]$:

$$\mathscr{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b\}.$$

En realidad, la partición de $[a, b]$ la forman los intervalos disjuntos

$$I_1 = [x_0, x_1),\ I_2 = [x_1, x_2),\ \ldots,\ I_k = [x_{k-1}, x_k].$$

Para cada $j \in \{1, ..., k\}$, pondremos $m_j = \text{ínf}_{x \in I_j} f(x)$, $M_j = \sup_{x \in I_j} f(x)$ y diremos que

$$L(f, \mathscr{P}) = \sum_{j=1}^{k} m_j \cdot (x_j - x_{j-i}), \quad U(f, \mathscr{P}) = \sum_{j=1}^{k} M_j \cdot (x_j - x_{j-i}).$$

son la *suma inferior* y la *suma superior*[1] asociadas a $\mathscr{P}$. Se dice que f es *Riemann integrable* si

$$\sup_{\mathscr{P}} L(f, \mathscr{P}) = \text{ínf}_{\mathscr{P}}\, U(f, \mathscr{P}).$$

A este valor común lo llamaremos *integral de Riemann* de f en el intervalo $[a, b]$, y lo denotaremos $\int_a^b f(x)\ dx$.

Teorema 2.5.1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función medible acotada. Si f es Riemann integrable, entonces es Lebesgue integrable, y se tiene*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_{[a,b]} f\ dm.$$

[1] La notación para sumas inferiores y superiores proviene del inglés *"lower"* y *"upper"*, respectivamente.

Demostración. En primer lugar, observemos que f es una función acotada en un conjunto compacto, así que es Lebesgue integrable. Para comprobar que ambas integrales coinciden, fijemos $\mathscr{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$, y observemos que, si $x \in [a, b]$, entonces $x \in [x_j, x_{j+1}]$ para algún $j \in \{1, ..., k\}$, y por tanto

$$\operatorname*{ínf}_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x) = m_j \leq f(x) \leq M_j = \sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x).$$

Este hecho sugiere considerar las funciones simples

$$l(x) = \sum_{j=1}^{k} m_j \cdot I_{[x_{j-1},x_j]}(x), \qquad u(x) = \sum_{j=1}^{k} M_j \cdot I_{[x_{j-1},x_j]}(x),$$

ambas Lebesgue integrables, ya que también son acotadas. Además, para todo punto $x \in [a, b]$ se verifica $l(x) \leq f(x) \leq u(x)$. Por lo tanto, la monotonía de la integral de Lebesgue implica que

$$L(f, \mathscr{P}) = \int_{[a,b]} l\ dm \leq \int_{[a,b]} f\ dm \leq \int_{[a,b]} u\ dm = U(f, \mathscr{P}),$$

y como estas desigualdades son válidas para cualquier partición $\mathscr{P}$ del intervalo $[a, b]$, concluimos que

$$\sup_{\mathscr{P}} L(f, \mathscr{P}) \leq \int_{[a,b]} f\ dm \leq \operatorname*{ínf}_{\mathscr{P}} U(f, \mathscr{P}). \qquad \square$$

A partir de este momento, utilizaremos indistintamente las notaciones $\int_a^b f(x)\ dx$ y $\int_{[a,b]} f\ dm$ para la integral de una función f Riemann integrable en el intervalo $[a, b]$. En ocasiones, utilizaremos también la notación $\int_{[a,b]} f(x)\ dm(x)$, para resaltar que la integral se realiza *respecto* de x.

Con un poco más de trabajo, podemos caracterizar las funciones acotadas que son Riemann integrables en un intervalo $[a, b]$. La demostración utiliza el siguiente concepto:

Definición. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función. Dado $x \in A$, llamaremos *oscilación de f en un subconjunto $A \subseteq [a, b]$* a

$$\operatorname{osc}(f, A) = \sup_{y,y'\in A} |f(y) - f(y')| = \sup_{y\in A} f(y) - \operatorname*{ínf}_{y\in A} f(y),$$

y si $x \in [a, b]$, llamaremos *oscilación de f en x* a

$$\operatorname{osc}(f, x) = \operatorname*{ínf}_{\delta>0} \operatorname{osc}(f, (x - \delta, x + \delta)$$

Veamos algunos ejemplos:

1. En primer lugar, si $\mathscr{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b\}$ es una partición del intervalo $[a,b]$, y llamamos $I_j = [x_{j-1}, x_j]$, entonces

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{j=1}^{k} (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{k} \operatorname{osc}(f, I_j) \cdot m(I_j).$$

2. Para la función $f(x) = I_{[0,+\infty)}$, se comprueba fácilmente que

$$\operatorname{osc}(f,x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

3. En cambio, si $f(x) = I_{\mathbb{Q}}$, entonces $\operatorname{osc}(f,x) = 1$ para cualquier punto $x \in \mathbb{R}$. Esto ocurre porque, fijado cualquier $x \in \mathbb{R}$, en cualquier intervalo $(x-\delta, x+\delta)$ hay números racionales e irracionales, y $|f(y) - f(y')| = 1$ si y es racional e y' es irracional.

Lema 2.5.2. *Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en un punto $x_0 \in [a,b]$ si, y solo si,* $\operatorname{osc}(f, x_0) = 0$.

Demostración. Si f es continua en x_0, entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| \leq \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

y por lo tanto, dados $y, y' \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, se tiene que

$$|f(y) - f(y')| \leq |f(y) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y')| \leq \varepsilon.$$

Así, $\operatorname{osc}(f, (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) < \varepsilon$, y por lo tanto, $\operatorname{osc}(f,x) < \varepsilon$. Como esto ocurre sea cual sea el $\varepsilon > 0$, concluimos que $\operatorname{osc}(f,x) = 0$.

Recíprocamente, sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, se tiene que $\operatorname{osc}(f,x) < \varepsilon$, luego existirá un $\delta > 0$ tal que $\operatorname{osc}(f, (x-\delta, x+\delta)) < \varepsilon$. Esto implica, en particular, que

$$|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

así que f es continua en x_0. □

Teorema 2.5.3. (de Lebesgue) *Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada es Riemann integrable si, y solo si, es continua casi seguro.*

Demostración. Dado $k \in \mathbb{N}$, llamemos

$$A_n = \left\{x \in [a,b] : \operatorname{osc}(f,x) \geq \tfrac{1}{n}\right\}.$$

Como f es continua en x si y solo si $\operatorname{osc}(f,x) = 0$, se tiene que el conjunto de puntos de discontinuidad de f coincide con $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. La idea de la demostración es probar que f es Riemann integrable en $[a,b]$ precisamente cuando $m(A_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos, pues, que f es Riemann integrable. Fijados $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$, existe una partición $\mathscr{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b\}$ del intervalo $[a,b]$ tal que

$$U(f,P) - L(f,P) < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Si uno de los intervalos $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ interseca con A_n, es porque existe un punto $x \in I_j$ tal que $\operatorname{osc}(f,x) \geq \frac{1}{n}$, luego debe cumplirse que

$$M_j - m_j = \operatorname{osc}(f, [x_{j-1}, x_j]) \geq \operatorname{osc}(f,x) \geq \frac{1}{n}.$$

Así, si llamamos J al conjunto de índices $j \in \{1, ..., k\}$ tales que $A_k \cap I_j$ es no vacío, se tiene que $A \subseteq \bigcup_{j\in J} I_j$, y

$$\sum_{j\in J} \frac{1}{n}(x_{j-1} - x_j) \leq \sum_{j\in J} (M_j - m_j)(x_{j-1} - x_j) \leq U(f,P) - L(f,P) < \frac{\varepsilon}{n},$$

por lo que $\sum_{j\in J} m(I_j) < \varepsilon$, y como consecuencia, $m(A_n) < \varepsilon$. Como este argumento es válido sea cual sea $\varepsilon > 0$, se obtiene que $m(A_n) = 0$.

Recíprocamente, supongamos que $m(A_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probaremos que, fijado $\varepsilon > 0$, existe una partición P del intervalo $[a,b]$ tal que $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$. Esto será suficiente para concluir, pues en tal caso se tendría que

$$\operatorname*{ínf}_P U(f,P) - \sup_P L(f,P) \leq U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon,$$

luego sería

$$\operatorname*{ínf}_P U(f,P) = \sup_P L(f,P),$$

y concluiríamos que f es Riemann integrable en $[a,b]$.

Fijemos, pues, $\varepsilon > 0$, y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Según la definición de medida exterior, existe una colección numerable de semi-intervalos $(J_i)_{i=1}^{\infty}$ tales que $A_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$ y $\sum_{i=1}^{\infty} m(J_i) < \varepsilon$. Ahora, reemplacemos cada J_i por un intervalo abierto H_i tal que $J_i \subseteq H_i$ y $m(J_i) < m(H_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$, de manera similar a como se hacía en el Lema 1.4.3. De esta forma, también se tiene $A_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$ y ahora

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(H_i) < \sum_{i=1}^{\infty} \left(m(J_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \right) \leq 2\varepsilon.$$

Ahora, para el resto de puntos $x \in [a, b] \setminus A_n$, se tiene que $\operatorname{osc}(f, x) < \frac{1}{n} < \varepsilon$, por lo tanto, cada punto $x \in [a, b] \setminus A_n$ admite un intervalo abierto U_x tal que $x \in U_x$ y $\operatorname{osc}(f, U_x) < \varepsilon$. Así, hemos obtenido un recubrimiento por abiertos del intervalo $[a, b]$:

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i \cup \bigcup_{x \in [a,b] \setminus A_n} U_x.$$

En virtud de la compacidad de $[a, b]$, podemos extraer un subrecubrimiento finito; pongamos,

$$[a, b] \subseteq H_1 \cup \cdots \cup H_{N_1} \cup U_1 \cup \cdots \cup U_{N_2}. \tag{2.b}$$

En particular, observemos que:

- $\sum_{i=1}^{N_1} m(H_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(H_i) < 2\varepsilon$,
- $\operatorname{osc}(f, U_j) < \varepsilon$ para todo $j \in \{1, ..., N_2\}$.

Finalmente, consideremos P la partición del intervalo $[a, b]$ formada por los extremos de los intervalos del recubrimiento (2.b), que será de la forma

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b\}.$$

Sea J el conjunto de índices $k \in \{1, ..., m\}$ para los cuales el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ está contenido en algún H_i. Por lo tanto, si $k \notin J$, entonces $[x_{k-1}, x_k]$ está contenido en algún U_j, luego $\operatorname{osc}(f, [x_{k-1}, x_k]) < \operatorname{osc}(f, U_j) < \varepsilon$. Así, si consideramos M una cota de f, se verifica que

$$\begin{aligned}
U(f, \mathscr{P}) - L(f, \mathscr{P}) \leq \sum_{k \in J} &\operatorname{osc}(f, [x_{k-1}, x_k] \cdot m([x_k - x_{k-1}]) + \\
&+ \sum_{k \notin J} \operatorname{osc}(f, [x_{k-1}, x_k] \cdot m([x_k - x_{k-1}]) \leq \\
&\leq 2M \sum_{k \in J} m([x_k - x_{k-1}]) + \varepsilon \sum_{k \notin J} m([x_k - x_{k-1}]) \leq \\
&\leq 2M \sum_{i=1}^{N_1} m(H_i) + \varepsilon \sum_{k=1}^{m} m([x_k - x_{k-1}]) \leq \\
&\leq [2M + (b - a)]\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

2.5.1. La integral de Riemann impropia *vs.* la integral de Lebesgue

La *integral impropia de Riemann* es una extensión de la integral de Riemann para calcular integrales de funciones no acotadas o en intervalos no acotados. Concretamente, dado un intervalo I de extremos a y b, con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y Riemann integrable en cada intervalo cerrado contenido en I, se define la *integral impropia de Riemann* de f en I como

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{\substack{s\to a^+\\ t\to b^-}} \int_s^t f(x)\ dx,$$

siempre que el límite del miembro derecho de la igualdad exista; es decir, si para cualesquiera sucesiones $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que $s_n \downarrow a$ y $t_n \uparrow b$, existe el valor

$$\lim_n \int_{s_n}^{t_n} f(x)\ dx$$

y no depende de las sucesiones escogidas.

Observemos que, si los extremos a y b del intervalo son números reales, no importa si f está definida en ellos a la hora de calcular la integral impropia de Riemann. Igualmente, tampoco es relevante para la integral de Lebesgue, pues los extremos de un intervalo forman un conjunto de medida nula.

Veamos algunos ejemplos en relación con la integral de Riemann impropia y la integral de Lebesgue:

I) La función $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$, es acotada, pero está definida en un intervalo no acotado. Sin embargo, para cada intervalo $[0, t]$ es integrable, y se tiene

$$\int_0^t e^{-x}\ dx = [-e^{-x}]_0^t = 1 - e^{-t},$$

cuyo límite existe y vale 1. Así, f es Lebesgue integrable en $[0, +\infty)$, pues según el Corolario 2.3.4,

$$\int_{[0,+\infty)} e^{-x}\ dm(x) = \lim_{t\to+\infty} \int_{[0,t]} e^{-x}\ dm(x) = 1.$$

II) La función $f : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ no es acotada, aunque está definida en un intervalo acotado. Su integral de Riemann impropia existe, ya que en cada intervalo $[s, t] \subseteq (0, 1)$, f es Riemann integrable, se tiene

$$\int_s^t \frac{1}{x}\ dx = [\log x]_s^t = \log s - \log t,$$

y el límite de la expresión anterior cuando $s \to 0^+$ y $t \to 1^-$ existe, aunque es $+\infty$. Del mismo modo, f es también Lebesgue integrable en $(0, 1)$, pues

$$\int_{(0,1)} \frac{1}{x}\, dm(x) = \lim_{\substack{s\to 0^+\\ t\to 1^-}} \int_{[s,t]} \frac{1}{x}\, dm(x) = +\infty.$$

III) En cambio, la función

$$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot I_{[k,k+1]}(x)$$

tiene integral de Riemann impropia y es finita, pues dado $t \in [N, N + 1]$, con $N \in \mathbb{N}$, tenemos:

$$\int_0^t f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^N}{N}(t - N).$$

Tal cantidad está comprendida entre $\sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k}$ y $\sum_{k=1}^{N+1} \frac{(-1)^k}{k}$, con lo cual

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} < \infty.$$

Sin embargo, f no es Lebesgue integrable, ya que no lo es $|f|$:

$$\int_0^{\infty} |f|\, dm = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

En otras palabras, una función puede admitir integral de Riemann impropia finita en un intervalo no acotado y no ser Lebesgue integrable.

Autoevaluación

Elíjase una de las respuestas (a), (b), (c) ó (d) para cada pregunta. Solamente hay una respuesta correcta en cada caso.

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. ¿Bajo cuál de los siguientes supuestos podemos asegurar que f es medible?

   a) Existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = \alpha\}$ es medible.

b) Existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\}$ es medible.

c) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = \alpha\}$ es medible.

d) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\}$ es medible.

2. Señálese la afirmación correcta:

   a) Toda función medible no negativa tiene integral.

   b) Toda función medible no negativa es integrable.

   c) Toda función medible tiene integral.

   d) Toda función medible es integrable.

3. Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función integrable. Señálese la afirmación correcta:

   a) $\int f\, dm = m(\operatorname{Ord} f)$.

   b) $\int f\, dm = \sup\{\int s\, dm : s \text{ simple}, 0 \leq s \leq f\}$.

   c) $\int f\, dm = \int f^+\, dm + \int f^-\, dm$.

   d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

4. Para la función f real de variable real que vale $\sqrt{k}$ en el número natural k y $1/2$ en el resto de los números reales, señálese cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

   a) f es medible e integrable.

   b) f es medible y tiene integral pero no es integrable.

   c) f es medible pero no tiene integral.

   d) f no es medible.

5. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que toma el valor k en los puntos irracionales del intervalo $(k, k + \frac{1}{k2^k})$ y se anula en el resto. La integral de f respecto de la medida de Lebesgue...

   a) ...no existe, porque f no es una función medible.

   b) ...no existe, porque f no es una función simple.

   c) ...existe pero vale $+\infty$.

   d) ...existe y es finita.

6. Consideremos $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función integrable. Señálese la afirmación correcta:

a) Si A y B son subconjuntos medibles disjuntos, entonces se verifica $\int_A h\, dm + \int_B h\, dm = \int_{A\cup B} h\, dm$.

b) Si A y B son medibles y $A \subseteq B$, entonces se verifica $\int_A h\, dm \leq \int_B h\, dm$.

c) Si $\int h\, dm = 0$, entonces se verifica $\int_A h\, dm = 0$ para cualquier subconjunto A medible.

d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

7. Para la función $f = I_{\mathbb{Q}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot I_{(k,k+1)}$, señálese la afirmación correcta:

   a) $\int_{[0,+\infty)} f\, dm = 0$.

   b) $\int_{[0,1]} f\, dm = 0$.

   c) $\int f\, dm = \int_{\mathbb{Q}} f\, dm$.

   d) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

8. Consideremos f y g dos funciones medibles. ¿En cuál de los siguientes casos podemos asegurar que $f + g$ es integrable?

   a) f es no negativa y g es continua.

   b) f y g son ambas no negativas.

   c) f está acotada y g es integrable.

   d) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

9. Si $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función medible, entonces...

   a) f se puede escribir como un límite puntual de funciones simples.

   b) f toma valores finitos salvo en un conjunto de medida nula.

   c) f es Lebesgue integrable.

   d) Todas las afirmaciones anteriores son correctas.

10. Consideremos una función medible $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\int f^+\, dm = 2024$ y que $\int f^-\, dm = +\infty$. Señálese la afirmación correcta:

    a) f es integrable.

    b) f tiene integral.

    c) $|f|$ no tiene integral.

    d) $|f|$ es integrable.

Ejercicios

1. Pruébese que la función $f(x) = x^2$ es medible utilizando directamente el Lema 2.1.3.
2. Complétese la demostración del Lema (2.1.3), pág. 44.
3. Sean $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ y $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ dos funciones medibles, y $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible. Pruébese que la función
$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in A^c \end{cases}$$
es medible.
4. Pruébese que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable, entonces f y f' son Borel medibles.
5. Pruébese que toda función monótona es Borel medible.
6. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ dos funciones medibles. Pruébese que los siguientes conjuntos son también medibles:
    a) $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < g(x)\}$.
    b) $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}$.
    c) $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = g(x)\}$.
    d) $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = +\infty\}$.
7. Considérese la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ que se anula sobre los racionales y sobre cada número irracional x de $[0, 1]$ vale el número de ceros que hay antes de la primera cifra no nula de la expresión decimal de x. Pruébese que f es medible y calcúlese $\int f\, dm$.
8. Pruébese que si $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función Lebesgue medible y $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es otra función que coincide con f en casi todo punto, entonces g también es Lebesgue medible.
9. Pruébese que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función integrable sobre un conjunto medible A, entonces también es integrable sobre cualquier subconjunto medible $B \subseteq A$, pero en general
$$\int_B f\, dm \nleq \int_A f\, dm.$$
10. Pruébese que si f es una función medible no negativa, entonces
$$\int f\, dm = \lim_n \int_{[-n,n]} f\, dm.$$
¿Ocurre lo mismo si f es una función integrable?

11. Indíquese si cada uno de los enunciados siguientes son verdaderos o falsos. Si son verdaderos, propóngase una demostración; si son falsos, póngase un contraejemplo. En los siguientes enunciados, se supone que todas las funciones que aparecen son medibles.

    a) Toda función $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ acotada es integrable.

    b) Toda función $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua es integrable.

    c) Toda función $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ positiva es integrable.

    d) Toda función $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ es integrable.

    e) Si $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es continua y existe h integrable tal que $|f(x)| \leq h(x)$ para todo $x > 2024$, entonces f es integrable.

    f) Si f es integrable y $g = f$ casi seguro, entonces g es integrable.

    g) Si f es finita casi seguro, entonces es integrable.

    h) Si f es continua casi seguro y acotada en un conjunto de medida finita, entonces es integrable.

    i) Si f es continua casi seguro en un conjunto compacto, entonces es integrable.

    j) Si $|f|$ es integrable, entonces lo es f.

    k) Si f y g son integrables, entonces $f + g$ lo es.

    l) Si f no es integrable, o bien g no es integrable, entonces $f + g$ tampoco es integrable.

12. Sean f y g dos funciones continuas definidas de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Pruébese que si $f = g$ casi seguro, entonces $f = g$ en todo punto.

    Indicación: el conjunto donde coinciden dos funciones continuas es cerrado (piénsese por qué).

13. Sea una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, y consideremos las siguientes afirmaciones:

    ($\star$) f es continua casi seguro.

    ($\star\star$) Existe una función continua g tal que $g = f$ casi seguro.

    a) ¿Existe relación entre las afirmaciones ($\star$) y ($\star\star$)?

    b) Pruébese que, en cualquier caso, una función que satisfaga alguna de las dos afirmaciones anteriores es medible.

14. Póngase un ejemplo de función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $|f|$ sea Riemann integrable, pero f no lo sea.

15. **El Teorema de la Convergencia Monótona es falso para la integral de Riemann.**

Consideremos $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Puesto que se trata de un conjunto numerable, podemos escribirlo como $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$. Definamos ahora las funciones

$$f_k(x) = I_{\{q_1,\dots,q_k\}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{q_1, \dots, q_k\} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

a) Pruébese que todas las f_k son Riemann integrables, y que $\int f_k(x)dx = 0$.

b) Pruébese que $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de funciones medibles cuyo límite puntual existe, pero no es Riemann integrable.

16. Estúdiese para qué valores de $p > 0$ es integrable la función $f(x) = x^{-p}$ en los intervalos $(0,1]$ y $[1,+\infty)$, y calcúlense las integrales cuando sean finitas.

17. Sea $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ una función medible y continua en cualquier intervalo de la forma $[c,b]$ con $a < c < b$.

a) Si $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existe y es finito, pruébese que f es integrable en $(a,b]$.

b) ¿Qué ocurre si $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existe, pero no es finito?

c) ¿Qué ocurre si $\lim_{x\to a^+} f(x)$ no existe?

18. Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Lebesgue integrable y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada.

a) Pruébese que $f \cdot g$ es Lebesgue integrable.

b) ¿Es cierto que si f es Riemann integrable y g es acotada, entonces $f \cdot g$ es Riemann integrable?

c) Póngase un ejemplo de dos funciones f y g Lebesgue integrables tales que $f \cdot g$ no lo sea.

19. Consideremos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no negativa que admita integral impropia de Riemann finita. Pruébese que entonces, f es Lebesgue integrable, y se tiene

$$\int f\, dm = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Indicación: ejercicio 10.

20. Estúdiese si las siguientes funciones son integrables en los intervalos que se indica:

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ en el intervalo $[0,+\infty)$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en el intervalo $(-1, 1)$.

c) $f(x) = \log(x) \cdot \log(1-x)$ en el intervalo $(0, 1)$.

d) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ en el intervalo $[0, +\infty)$.

e) $f(x) = e^{-x^2}$ en todo $\mathbb{R}$.

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ en el intervalo $(0, \pi)$.

21. Pruébese que la función $f(x) = x^k e^{-x}$ es integrable en $[0, +\infty)$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$, y calcúlese $\int f\, dm$ utilizando el método de integración por partes.

    Dedúzcase de lo anterior que la función $f(x) = x^\alpha e^{-x}$ es integrable incluso si α es un número real positivo.

22. Consideremos la familia de funciones $f_k(x) = x \cdot \log^k x$, donde $k \in \mathbb{N}$. Si llamamos $I_k = \int_0^1 f_k(x)\, dx$, demuéstrese que $I_k = -\frac{k}{2} I_{k-1}$. Dedúzcase de aquí que f_k es integrable en $(0, 1)$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$, y además, el valor de I_k.

23. **Una función Riemann integrable que no es Borel medible.**

    Sea Δ un subconjunto no numerable de $[0, 1]$ tal que $m(\Delta) = 0$ –por ejemplo, el conjunto ternario de Cantor. Aceptemos la existencia de un subconjunto Lebesgue medible $A \subseteq \Delta$ que no es de Borel, y consideremos la función $f = I_A$, que por definición no es Borel medible.

    a) Pruébese que, sin embargo, f es Riemann integrable.

    Indicación: para cada $\varepsilon > 0$, existen intervalos $I_k = (a_k, b_k)$, con $a_k < b_k < a_{k+1}$, tales que $A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty I_k$ y $\sum_{k=1}^\infty m(I_k) < \varepsilon$. Fijado $N \in \mathbb{N}$, considérese la partición $\mathscr{P}_{N,\varepsilon} = \{0, a_1, b_1, ..., a_N, b_N, 1\}$, y calcúlense $L(f, \mathscr{P}_{N,\varepsilon})$ y $U(f, \mathscr{P}_{N,\varepsilon})$.

    b) Pruébese que, a pesar de no ser Borel medible, f coincide con una función Borel medible en casi todo punto.

Tema 3

Teoremas fundamentales de la integración Lebesgue

Los resultados estructurales básicos de la teoría de integración Lebesgue pueden resumirse en tres:

- el *Teorema de la Convergencia Dominada*, que nos indica condiciones suficientes para garantizar la igualdad

$$\lim_k \int f_k\, dm = \int \lim_k f_k\, dm, \qquad (\star)$$

- el *Teorema de Fubini-Tonelli,* que reduce el cálculo de integrales en varias variables a integrales de una variable,

- y el *Teorema de Cambio de Variable*, útil para simplificar el cálculo de integrales en ciertos conjuntos.

El marco de la teoría de integración Lebesgue permitirá enunciar y demostrar el Teorema de Fubini-Tonelli y el Teorema de Cambio de Variables en contextos mucho más generales. Por ejemplo, en la integración Riemann, es habitual exigir continuidad para demostrar estos dos teoremas, cosa que no necesitaremos hacer nosotros.

Con todo, aún podríamos preguntarnos: ¿por qué no nos hemos contentado con extender la teoría de integración de Riemann a varias variables? Pues bien, una de las razones más poderosas para descartar la integración Riemann es la dificultad con la que se permite *pasar al límite*. En otras palabras, las hipótesis que deben imponerse sobre $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ para que se verifique la igualdad $(\star)$ son excesivas si trabajamos con la integral de Riemann. El resultado habitual en este contexto (en una variable) exige *convergencia uniforme*:

Teorema de convergencia e integrabilidad. *Si $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones (acotadas) Riemann integrables en un intervalo $[a,b]$ que convergen uniformemente a una función f, entonces f es Riemann integrable en $[a,b]$, y se verifica*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_n \int_a^b f_n(x)\, dx.$$

El fallo de la integración Riemann en este sentido puede justificarse por la relativa escasez de funciones Riemann integrables. Es decir, el límite puntual de funciones Riemann integrables ya ni siquiera es Riemann integrable, como veíamos en el ejercicio 15 del tema anterior.

En cambio, para la integral de Lebesgue ya hemos visto el Teorema de la Convergencia Monótona, (2.2.5), pág. 55, y a partir de él, demostraremos el Teorema de la Convergencia Dominada, que garantiza la igualdad ($\star$) bajo condiciones de convergencia puntual. Ambos resultados son falsos en general para la integración Riemann.

3.1. Teorema de la Convergencia Dominada

Los dos resultados fundamentales de la integración Lebesgue que permiten intercambiar el límite con la integral son el *Teorema de la Convergencia Monótona*, válido para sucesiones crecientes de funciones no negativas, que vimos en (2.2.5), pág. 55, y el *Teorema de la Convergencia Dominada*, mucho más general, que desarrollaremos a continuación. La demostración del Teorema de la Convergencia Dominada descansa, como es lógico, en el Teorema de la Convergencia Monótona. Así que el primer paso será analizar hasta qué punto pueden debilitarse las hipótesis de este último.

Supongamos que tenemos una sucesión *creciente* de funciones $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ que convergen puntualmente a f, pero sin que sean necesariamente no negativas. Entonces, podríamos pensar en aplicar el Teorema de la Convergencia Monótona a la sucesión de funciones no negativas $g_k = f_k - f_1$, que también son crecientes y convergen puntualmente a $g = f - f_1$. Obtendríamos, por lo tanto, que

$$\lim_k \int (f_k - f_1)\, dm = \int (f - f_1)\, dm. \tag{3.a}$$

Ahora, querríamos aplicar el Teorema de Linealidad 2.2.9 para concluir que $\int f_k \to \int f$. El problema es que no podemos. No disponemos de las hipótesis necesarias para hacerlo: podría ser, por ejemplo, que $\int f\, dm = \int f_1 = +\infty$.

Sin embargo, si exigimos, además, que f_1 sea integrable, nuestros problemas desaparecen. En efecto, como $f_1 \leq f_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, deducimos que todas las funciones f_k tienen integral, y por el mismo motivo, también la tiene f. Ahora, como f_1 es integrable, entonces por la Proposición 2.4.4, es finita en un conjunto A tal que $m(A^c) = 0$. Por lo tanto, todas las funciones $f_k - f_1$ están bien definidas en A, y utilizando el Teorema de Linealidad 2.2.9 junto con el Corolario 2.4.3, llegamos a que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\int (f_k - f_1)\, dm = \int_A (f_k - f_1)\, dm = \int_A f_k\, dm - \int_A f_1\, dm =$$
$$= \int_A f_k\, dm - \int_A f_1\, dm = \int f_k\, dm - \int f_1\, dm.$$

Razonando de igual manera, concluimos que

$$\int (f - f_1)\, dm = \int f\, dm - \int f_1\, dm.$$

Por lo tanto,

$$\int f\, dm - \int f_1\, dm = \int (f - f_1)\, dm = \lim_k \int (f_k - f_1)\, dm =$$
$$= \lim_k \int f_k\, dm - \int f_1\, dm,$$

y simplificando, $\lim_k \int f_k\, dm = \int f\, dm$.

Ahora, ¿qué ocurre si f_1 no es integrable? Veamos:

- Si $\int f_1\, dm = +\infty$, entonces el Teorema de Linealidad no funciona en (3.a). Sin embargo, en este caso se tiene $\int f_k\, dm = +\infty$, ya que $f_1 \leq f_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por el mismo motivo, $\int f \ \ dm = +\infty$, y entonces se tiene trivialmente que
$$\lim_k \int f_k\, dm = \int f\, dm.$$
- En cambio, si $\int f_1\, dm = -\infty$, ya no podemos garantizar nada. La sucesión de funciones constantes $f_k(x) = -\frac{1}{k}$ convergen puntualmente a la función constante igual a cero, pero
$$\lim_k \int f_k\, dm = -\infty \neq 0 = \int \lim_k f_k\, dm.$$

A la vista del razonamiento anterior, en realidad lo que necesitamos pedir es que *para alguna* función f_{k_0} –y por lo tanto, para todas las f_k con $k \geq k_0$– se tenga $\int f_k\, dm > -\infty$. En la mayoría de los casos, es más cómodo exigir la existencia de una *función auxiliar* h tal que

- $h \leq f_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

- $\int h \, dm > -\infty$.

Así, tenemos:

Lema 3.1.1. (de la convergencia monótona extendido) *Sea $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles que convergen puntualmente a una función f. Bajo cualquiera de los siguientes supuestos,*

i) $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ es creciente, y existe una función h con integral tal que $\int h \, dm > -\infty$ y $h \leq f_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$;

ii) $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ es decreciente, y existe una función h con integral tal que $\int h \, dm < +\infty$ y $f_k \leq h$ para todo $k \in \mathbb{N}$;

se verifica

$$\lim_k \int f_k \, dm = \int f \, dm.$$

Demostración. El caso *(i)* queda probado con el razonamiento anterior, salvo por el hecho de que el papel de h lo juega f_1. El caso *(ii)* se deduce de *(i)* aplicado a la sucesión $(-f_k)_{k=1}^{\infty}$. □

Ahora, ¿qué podemos hacer si tenemos una sucesión de funciones medibles $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ que no es monótona? En ese caso, podemos considerar

$$g_k = \sup\{f_k, f_{k+1}, \ldots\} = \sup_{j \geq k} f_j,$$

que también son medibles, pues fijado $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\{x : g_k(x) < \alpha\} = \bigcap_{j=k}^{\infty} \{x : f_j(x) < \alpha\}.$$

Además, $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ es decreciente, y converge a $g = \limsup_k f_k$. Supongamos que nos encontramos ante las hipótesis del lema anterior, es decir, que existe una función h tal que $f_k \leq h$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\int h \, dm < +\infty$. Entonces, también se cumple $g_k \leq h$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y podemos concluir que

$$\int \limsup_k f_k \, dm = \int \lim_k g_k \, dm = \lim_k \int g_k \, dm = \limsup_k \int g_k \, dm \geq$$

$$\geq \limsup_k \int f_k \, dm,$$

donde la última desigualdad se tiene utilizando que $g_k \geq f_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

También podríamos haber considerado las funciones $\tilde{g}_k = \text{ínf}_{j\geq k} f_j$, y el resultado es análogo: $(\tilde{g}_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de funciones medibles que convergen a $\tilde{g} = \liminf_k f_k$. Si asumimos, como antes, que existe una función $\tilde{h}$ tal que $\int \tilde{h}\, dm > -\infty$ y $\tilde{h} \leq f_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces también $\tilde{h} \leq \tilde{g}_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y se tendría

$$\int \liminf_k f_k\, dm = \int \lim_k \tilde{g}_k\, dm = \lim_k \int \tilde{g}_k\, dm = \liminf_k \int \tilde{g}_k\, dm \leq$$
$$\leq \liminf_k \int f_k\, dm.$$

Ahora bien, el siguiente detalle es crucial: en ningún momento hemos necesitado que la sucesión $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ sea convergente o no. Hemos probado, por tanto:

Lema 3.1.2. (de Fatou) *Sea $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles.*

i) Si existe una función h medible con integral tal que $h \leq f_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\int h\, dm > -\infty$, entonces

$$\liminf_k \int f_k\, dm \geq \int \liminf_k f_k.$$

ii) Si existe una función h medible con integral tal que $f_k \leq h$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\int h\, dm < +\infty$, entonces

$$\limsup_k \int f_k\, dm \leq \int \limsup_k f_k.$$

Finalmente, si además sabemos que $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ converge puntualmente a f, entonces $\limsup_k f_k = \liminf_k f_k = \lim_k f_k$, y el Lema de Fatou se convierte en el

Teorema 3.1.3. (de la convergencia dominada) *Sea $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles. Supongamos que:*

i) $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ converge puntualmente a una función f.

ii) Existe una función h integrable tal que, sea cual sea $k \in \mathbb{N}$, se verifica $|f_k(x)| \leq h(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Entonces f es integrable, y se tiene

$$\int f\, dm = \lim_k \int f_k\, dm.$$

Demostración. Puesto que $f_k \xrightarrow{p} f$, también $|f_k| \xrightarrow{p} |f|$, y como $|f_k(x)| \leq h(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, debe ser $|f(x)| \leq h(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Así que f es integrable. Ahora, aplicando el lema de Fatou dos veces, se deduce que

$$\int f \, dm = \int \liminf_k f_k \leq \liminf_k \int f_k \, dm \leq \limsup_k \int f_k \, dm \leq$$

$$\leq \int \limsup_k f_k \, dm \leq \int f \, dm.$$

Por lo tanto, todas las desigualdades anteriores son igualdades. En particular, como $\liminf_k \int f_k \, dm = \limsup_k \int f_k \, dm$, deducimos que existe $\lim_k \int f_k \, dm$ y coincide con $\int f \, dm$. □

Veamos algunos ejemplos sencillos.

Ejemplo 3.1.4. Para estudiar la existencia de

$$\lim_k \int_0^1 x^k \cos(2k\pi x) \, dx,$$

podemos considerar las funciones $f_k(x) = x^k \cos(2k\pi x)$, que son medibles en $[0,1]$. Fijado $x_0 \in [0,1]$, se tiene que

$$\lim_k f_k(x_0) = \lim_k x_0^k \cos(2k\pi x_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

así que $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ converge puntualmente en $[0,1]$ a la función $f(x) = I_{\{1\}}(x)$. Además, para cada $k \in \mathbb{N}$ y $x \in [0,1]$, se tiene

$$|f_k(x)| \leq x^k \leq 1$$

y la función $h(x) = 1$ es integrable en el intervalo $[0,1]$. Por tanto, el Teorema de la Convergencia Dominada permite concluir que

$$\lim_k \int_0^1 x^k \cos(2k\pi x) \, dx = \int_0^1 f(x) \, dx = 0$$

ya que f se anula en casi todo punto del intervalo $[0,1]$. ☺

Ejemplo 3.1.5. Veamos cómo estudiar la existencia del límite

$$\lim_k \int \frac{1+x^k}{1+x^{2k}} \, dx.$$

Consideremos la sucesión de funciones medibles

$$f_k(x) = \frac{1+x^k}{1+x^{2k}},$$

que verifican

$$\lim_k f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1 \text{ ó } x = 1 \\ 1 & \text{si } |x| < 1 \\ \nexists & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

Así que podemos modificar el valor de f_k en el punto $x = -1$ para obtener convergencia puntual en todo $\mathbb{R}$, sin por ello alterar el valor de las integrales. Con todo rigor, definimos:

$$g_n(x) = \begin{cases} f_k(x) & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

que son medibles, pues lo son las f_k, y convergen puntualmente a la función $g(x) = I_{[-1,1]}(x)$. Además, se satisface $\int f_k\, dm = \int g_k\, dm$, para todo $k \in \mathbb{N}$, pues f_k coincide con g_k en caso todo punto.

Para poder aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada, necesitamos acotar las funciones g_k por una función integrable. Para ello, observemos que:

- Si $|x| > 1$, entonces $|x|^k \leq |x|^{2k}$, con lo cual

$$\left|\frac{1+x^k}{1+x^{2k}}\right| \leq \frac{1+|x|^k}{1+x^{2k}} \leq \frac{1+|x|^k}{x^{2k}} \leq \frac{1}{x^{2k}} + \frac{|x|^k}{x^{2k}} \leq \frac{2}{x^k}.$$

  Por lo tanto, para $|x| > 1$ y $k \geq 2$ –podemos eliminar el caso $k = 1$ si nos conviene–, $|f_k(x)| \leq \frac{2}{x^2}$. Esto sugiere tomar la función $h_1(x) = \frac{1}{x^2}$, que es integrable en el conjunto $\{x : |x| > 1\}$.

- Ahora, en $|x| \leq 1$, se tiene

$$\left|\frac{1+x^k}{1+x^{2k}}\right| \leq 1 + |x|^k \leq 2$$

  y la función $h_2(x) = 2$ es integrable en $[-1, 1]$.

Por lo tanto, la función

$$h(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

es integrable en todo $\mathbb{R}$, y si $n \geq 2$, $|g_n(x)| \leq h(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Así en virtud el Teorema de la Convergencia Dominada obtenemos que

$$\lim_k \int \frac{1+x^k}{1+x^{2k}}\, dx = \lim_k \int g_n(x)\, dx = \int I_{[-1,1]}(x)\, dx = 2. \quad ☺$$

Observemos que, si no se dispone de una función h integrable que "domine" a las funciones $(f_k)_{k=1}^{\infty}$, entonces no es cierto, en general, que pueda permutarse el límite con la integral.

Ejemplo 3.1.6. La sucesión

$$f_k(x) = \frac{1}{k} \cdot I_{[0,k]}(x)$$

converge puntualmente (incluso *uniformemente*) a la función constante igual a 0. Pero $\int f_k\, dm = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, con lo cual $\lim_k \int f_k \neq 0$.

La razón de este fenómeno es que no hay ninguna función integrable h tal que $|f_k(x)| \leq h(x)$: cualquier función h debe cumplir $h(x) \geq \frac{1}{k}$ para todo $x \in (k-1, k]$, con lo cual

$$h(x) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot I_{(k-1,k]}(x),$$

así que h no puede ser integrable:

$$\int h\, dm \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot m\big([0,k]\big) = +\infty. \quad ☺$$

3.2. Integrales dependientes de un parámetro

Como aplicación del Teorema de la Convergencia Dominada, podemos estudiar propiedades de funciones definidas mediante una integral. Fijemos I un intervalo de extremos a y b, con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, un subconjunto medible $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, y consideremos una función medible

$$f : I \times \Omega \to \mathbb{R}, \quad (t,x) \mapsto f(t,x)$$

de forma que para cada $t \in I$, la función $f_t(x) = f(t,x)$ sea integrable. Podemos pensar que f es una *familia* de funciones integrables parametrizadas por $t \in I$. En tal caso, tiene sentido considerar la función

$$F(t) = \int_{\Omega} f(t,x)\, dm(x),$$

donde hemos denotado $dm(x)$ para recordar que la integral se realiza respecto de x. En la mayoría de los casos, la integral que define a F no es expresable en términos de funciones elementales. Sin embargo, es posible conocer propiedades de F a partir de las propiedades de f, sin calcular F explícitamente. En esta lección veremos cómo hacerlo apoyándonos en el Teorema de la Convergencia Dominada.

Fijado $x \in \Omega$, denotaremos

$$f_x : I \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f_x(t) = f(t, x).$$

Observemos que, si interpretamos f como una familia de funciones parametrizadas por el intervalo I, pedir que, por ejemplo, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, f_x sea continua (o que f_x sea diferenciable) equivale a pedir que la familia de funciones $\{f_t : t \in I\}$ dependa *continuamente* (o *diferenciablemente*) del parámetro t. De hecho, probaremos que, asumiendo ciertas hipótesis sobre la familia de funciones $\{f_t : t \in I\}$, el carácter continuo o diferenciable del parámetro t implica la continuidad o diferenciabilidad, respectivamente, de F.

Teorema 3.2.1. (dependencia de un parámetro en la integral) *Fijemos $t_0 \in [a, b]$, y supongamos que:*

i) Sea cual sea $x \in \Omega$, existe el límite $\lim_{t\to t_0} f(t, x)$.

ii) Existe una función integrable h tal que $|f(t, x)| \leq h(x)$ para todo $t \in I$.

Entonces

$$\lim_{t\to t_0} \int_\Omega f(t, x)\, dm(x) = \int_\Omega \lim_{t\to t_0} f(t, x)\, dm(x).$$

En particular, si para cada $x \in \Omega$, f_x es continua en t_0, también es continua

$$F(t) = \int_\Omega f(t, x)\, dm(x).$$

Demostración. Sea $(t_k)_{k=1}^\infty$ una sucesión convergente a t_0, y consideremos la sucesión de funciones medibles $g_k(x) = f(t_k, x)$. Por hipótesis, todas ellas están acotadas por una función integrable h, y además, $(g_k)_{k=1}^\infty$ converge puntualmente a la función $g(x) = \lim_{t\to t_0} f(t, x)$, sin más que comprobar que, para cada $x \in \Omega$,

$$\lim_k g_k(x) = \lim_k f(t_k, x) = \lim_{t\to t_0} f(t, x) = g(x).$$

El *Teorema de la Convergencia Dominada*, (3.1.3), pág. 83, afirma entonces que $\lim_k \int g_k\ dm = \int g\ dm$, en otras palabras, que

$$\lim_k \int_\Omega f(t_k, x)\, dx = \int_\Omega \lim_{t\to t_0} f(t, x)\, dm(x).$$

Como esto es válido para cualquier sucesión $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ convergente a t_0, se tiene que

$$\lim_{t\to t_0}\int_\Omega f(t,x)\,dm(x)=\int_\Omega \lim_{t\to t_0} f(t,x)\,dm(x).$$

En particular, si para cada $x\in\mathbb{R}^n$, f_x es continua en t_0, también F es continua en t_0, ya que

$$\lim_{t\to t_0}F(t)=\lim_{t\to t_0}\int_\Omega f(t,x)\,dm(x)=\int_\Omega \lim_{t\to t_0} f(t,x)\,dm(x)=$$
$$=\int_\Omega f(t_0,x)\,dm(x)=F(t_0).$$ □

Teorema 3.2.2. (de derivación bajo la integral) *Supongamos que $I=(a,b)$, y que se tiene*

i) Para cada $t\in I$, la función f_t es integrable en Ω.

ii) Existe la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial t}$ en $I\times\Omega$.

iii) Existe una función integrable h tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right|\le |h(x)| \quad \forall t\in I.$$

Entonces $F(t)=\int_\Omega f(t,x)\,dm(x)$ es diferenciable en (a,b), y para cada $t\in I$ se verifica

$$F'(t)=\frac{d}{dt}\left[\int_\Omega f(t,x)\,dm(x)\right]=\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(t_0,x)\,dm(x).$$

Demostración. Tratemos de ponernos en las hipótesis del teorema anterior. Para ello, fijemos $t_0\in I$ y consideremos las funciones

$$g(t,x)=\frac{f(t,x)-f(t_0,x)}{t-t_0},\ t\neq t_0,$$
$$G(t)=\int_\Omega g(t,x)\,dm(x)=\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0},\ t\neq t_0.$$

En primer lugar, para cada $x\in\Omega$, el límite $\lim_{t\to t_0} g(t,x)$ existe, pues coincide con $\frac{\partial f}{\partial t}(t_0,x)$. Ahora, si fijado $x\in\Omega$, aplicamos el teorema del valor medio a las funciones $f_x(t)=f(t,x)$, se obtiene que

$$|g(t,x)|=\left|\frac{f(t,x)-f(t_0,x)}{t-t_0}\right|\le\left|\frac{\partial f}{\partial t}(\xi,x)\right|\le |h(x)|.$$

De esta manera, el teorema anterior afirma que

$$\lim_{t\to t_0} G(t) = \lim_{t\to t_0}\int_\Omega g(t,x)\,dm(x) = \int_\Omega \lim_{t\to t_0} g(t,x)\,dm(x) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(t_0,x)\,dm(x),$$

es decir, existe $F'(t_0)$ y coincide con $\int \frac{\partial f}{\partial t}(t_0,x)\,dm(x)$. □

Fijémonos en que, en las hipótesis del Teorema de derivación bajo la integral, si además para todo $x \in \Omega$ las funciones f_x son de clase 1, entonces aplicando el Teorema 3.2.1, se deduce que F' es continua en todo punto de I; en otras palabras, que F también es de clase 1.

Así, combinando los dos teoremas anteriores, se obtiene que para cualquier $k \in \mathbb{N}$, el carácter de clase k de la familia de funciones $\{f_x : x \in \Omega\}$ implica, bajo las hipótesis de integrabilidad adecuadas, que F también es de clase k.

Corolario 3.2.3. *Supongamos que I es un intervalo $I = (a,b)$ un intervalo abierto. Supongamos que se satisfacen las siguientes hipótesis:*

i) Para cada $x \in \Omega$, $f_x(t)$ es de clase k.

ii) Para $1 \le j \le k$, existen funciones integrables h_k tales que

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial t^k}(t,x)\right| \le |h_k(x)| \quad \forall t \in I.$$

Entonces $F(t) = \int_\Omega f(t,x)\,dm(x)$ es de clase k en I, y para cada $j \in \{1,\dots,k\}$,

$$F^{(j)}(t) = \int_\Omega \frac{\partial^j f}{\partial t^j}(t,x)\,dm(x).$$

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 3.2.4. Dado $t \in \mathbb{R}$, la función $f(t,x) = \cos(tx^2)$ es claramente integrable en el intervalo $(0,\pi)$, así que tiene sentido definir la función

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(t) = \int_0^\pi \cos(tx^2)\,dx.$$

Tratemos de aplicar el Teorema 3.2.1. Primero, observemos que la función $f(t,x)$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$. Por otra parte, para cualquier $t \in \mathbb{R}$, la función f_t está acotada en módulo por la función constante 1, que es integrable en $(0,\pi)$. Por lo tanto, podemos elegir $h(x) = 1$ en $(0,\pi)$. El Teorema 3.2.1. afirma ya que F es continua en todo $\mathbb{R}$.

Veamos a continuación si estamos en las hipótesis del Teorema de Derivación bajo la integral 3.2.2. Primero, observemos que f admite derivada parcial respecto de t en todo punto de $\mathbb{R}^2$, y su valor es

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -x^2 \sin(tx^2).$$

Ahora, para cualquier $t \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| = |x^2 \sin(tx^2)| \leq x^2,$$

lo cual sugiere llamar $h(x) = x^2$, que es integrable en $(0,\pi)$. Estamos en condiciones de aplicar el Teorema de derivación bajo la integral, por lo que F es derivable, y se tiene

$$F'(t) = \int_0^{\pi} -x^2 \sin(tx^2)\; dx. \quad ☺$$

A la hora de aplicar los resultados anteriores, conviene darse cuenta de que, en realidad, las hipótesis que exigen son *locales*. Para concretar, pongamos que queremos aplicar el Teorema de Derivación bajo la integral para probar que una determinada función $F(t) = \int_\Omega f(t,x)\; dm(x)$ es derivable en cada punto de un intervalo abierto I. Entonces, debemos recordar que una función es derivable en I si, y solo si, para cada punto $t_0 \in I$ existe un intervalo $I_t = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subseteq I$ tal que F es derivable en I_{t_0}. De esta manera, basta con encontrar una función h integrable tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq |h(x)| \quad \forall t \in I_{t_0}.$$

Esto facilita mucho el trabajo en la práctica, pues es habitual que la elección de la función auxiliar h dependa del punto t. En el siguiente ejemplo, utilizaremos esta idea.

Ejemplo 3.2.5. Consideremos la función

$$F : [0,+\infty) \to \mathbb{R}, \quad F(t) = \int_1^{+\infty} \frac{t^3}{t^3 + x^3}\; dx.$$

Es claro que la función

$$f(t,x) = \frac{t^3}{t^3 + x^3}$$

es continua en $[0,+\infty) \times [1,+\infty)$. Además, para cada $t > 0$, f_t es integrable sin más que observar que

$$|f(t,x)| \leq \frac{t^3}{x^3}.$$

Pero esto no es, en principio, suficiente para concluir que F es continua en $[0,+\infty)$, pues la cota es una función que también depende de t. Razonemos como sigue: fijemos un $t_0 \geq 0$ y consideremos el entorno $[0,a)$, con a un número real fijo mayor que t_0. Si $t \in [0,a)$, entonces claramente

$$|f(t,x)| \leq \frac{t^3}{x^3} \leq \frac{a^3}{x^3},$$

lo cual sugiere tomar $h(x) = \frac{a^3}{x^3}$, que ya *no depende de* t. Este razonamiento prueba, ahora sí, que F es continua en t_0. Pero como t_0 era un número real no negativo arbitrario, se deduce que en realidad F es continua en $[0,+\infty)$.

Del mismo modo, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \frac{3t^2x^3}{(t^3+x^3)^2},$$

de manera que, fijado un $t_0 > 0$ y considerando un número real $a > t_0$, para todo $t \in (0,a)$ ocurre que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq \frac{3a^2x^3}{x^6} = \frac{3a^2}{x^2},$$

así que, en virtud del teorema de derivación bajo la integral, concluimos que F es derivable en todo $(0,+\infty)$, y

$$F'(t) = \int_1^{+\infty} \frac{3t^2x^3}{(t^3+x^3)^2}\,dx. \quad ☺$$

En muchos casos, el Teorema de Derivación bajo la integral 3.2.2. puede utilizarse para calcular integrales. Veamos cómo hacerlo:

Ejemplo 3.2.6. Consideremos la función

$$F : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x}\,dx.$$

En primer lugar, veamos que F está bien definida. En otras palabras, comprobemos que la función

$$f(t,x) = \frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x},$$

es integrable en $(0,+\infty)$ para cada $t > 0$. Debemos estudiar el comportamiento de f_t cuando $x \longrightarrow 0^+$ y cuando $x \longrightarrow +\infty$:

- Para el primer caso, observemos que, aplicando la regla de l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0^+} f_t(x) = \lim_{x\to 0^+} (-e^{-x} + te^{-tx}) = 1 + t.$$

  de donde se sigue que $|f_t(x)| \leq 2 + t$ en un cierto intervalo $[0, \delta]$, y por tanto, f_t es integrable en dicho intervalo.

- Ahora, si $x \geq 1$, entonces

$$|f_t(x)| \leq \frac{e^{-x} + e^{-tx}}{x} \leq e^{-x} + e^{-tx},$$

  así que f_t es integrable en $[1, +\infty)$.

- Por último, habría que analizar el comportamiento de f_t en $[\delta, 1]$, pero esto es directo: f_t es continua en el compacto $[\delta, 1]$, así que es integrable.

El integrando anterior no admite, en general, una primitiva en términos de funciones elementales. Sin embargo, observemos que

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = e^{-tx},$$

de manera que, si fijamos un $t > 0$ y elegimos un cierto $a < t$, para cualquier $t \in (a, +\infty)$ y cualquier $x \in [0, +\infty)$ se verifica

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)\right| = \frac{1}{e^{tx}} \leq \frac{1}{e^{ax}}.$$

Con lo cual, el Teorema de derivación bajo la integral permite concluir que F es derivable, y que

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\, dx.$$

La clave está en que *la integral que define F' es inmediata:* para cualquier $t > 0$, la función e^{-tx} es Lebesgue integrable en cada intervalo compacto $[0, b]$, así que utilizando la regla de Barrow,

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx}\, dm(x) = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-tx}\, dx = \frac{1}{t}.$$

Así que $F'(t) = \frac{1}{t}$ para todo $t > 0$, de donde se deduce que $F(t) = \log t + C$, con C una cierta constante. Por último, como

$$F(1) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-x}}{x}\, dx = 0,$$

se deduce que $C = 0$. Así que $F(t) = \log t$ para todo $t > 0$. En otras palabras, para todo $t > 0$ se verifica

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x}\, dx = \log t. \quad ☺$$

3.3. Teorema de Fubini-Tonelli

A pesar de ser relativamente intuitiva, la definición de la integral de Lebesgue no resulta particularmente útil para calcular integrales de funciones de varias variables reales. En realidad, nuestros problemas son mucho mayores: ni siquiera sabemos calcular de manera eficiente la *medida* de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, el círculo unidad de $\mathbb{R}^2$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

debería cumplir $m(C) = \pi$. Pero lo único que sabemos por el momento es que

$$m(C) = \text{ínf} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} m(I_k) : C \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_k,\ I_k \text{ semi-rectángulos} \right\}.$$

En otras palabras, ni siquiera sabemos calcular integrales de funciones indicadoras de borelianos. Así pues, no es demasiado sorprendente que, por el momento, no dispongamos de un método eficiente para calcular la integral de una función $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ cuando $n > 1$. Para funciones de una variable, resolvimos este asunto mediante la regla de Barrow, cuando probamos que la integral de Lebesgue extendía a la integral de Riemann. El objetivo de esta sección es desarrollar los teoremas de Fubini y Tonelli, que constituyen el método habitual para reducir el cálculo de integrales de funciones de varias variables reales al de funciones de una sola variable.

Para fijar ideas, consideremos E un boreliano de $\mathbb{R}^2$. Entonces, no es difícil comprobar que, por la propia definición de medida de Lebesgue, $m(E)$ puede calcularse como el ínfimo de las medidas de las sumas de los recubrimientos numerables por semi-rectángulos de "anchura" menor que un cierto ε fijado de antemano. Esto sugiere que la *medida* –el área– de E pueda estar relacionado con la *medida* –en este caso, *longitud*– de las intersecciones de E con cada una de las rectas verticales $x = a$, con $a \in \mathbb{R}$. Por supuesto, análogamente ocurre si reemplazamos "anchura" por "altura" y rectas verticales por rectas horizontales. Este razonamiento nos lleva a introducir el siguiente concepto:

Definición. Dado $E \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, llamaremos:

- *sección de E* por un $x \in \mathbb{R}^n$ al conjunto $E_x = \{y \in \mathbb{R}^p : (x,y) \in E\}$.
- *sección de E* por un $y \in \mathbb{R}^p$ al conjunto $E^y = \{y \in \mathbb{R}^p : (x,y) \in E\}$.

  De la misma manera, si $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ es una función, llamaremos:
- *sección de f* por un $x \in \mathbb{R}^n$ a la función $f_x : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $f_x(y) = f(x,y)$.
- *sección de f* por un $y \in \mathbb{R}^p$ a la función $f^y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f^y(x) = f(x,y)$.

La relación entre secciones de funciones y secciones de conjuntos se manifiesta mediante las igualdades

$$(I_E)_x = I_{(E_x)}, \quad (I_E)^y = I_{(E^y)},$$

cuya demostración es directa, pues basta con observar que, para un $x \in \mathbb{R}^n$ fijo,

$$(I_E)_x(y) = \left\{ \begin{matrix} 1 & \text{si } (x,y) \in E \\ 0 & \text{si } (x,y) \in E \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1 & \text{si } y \in E_x \\ 0 & \text{si } y \in E_x \end{matrix} \right\} = I_{E_x}(y).$$

La otra igualdad es análoga.

Veamos algunos ejemplos:

I) Si $I = (a,b] \times (c,d]$ es un semi-rectángulo en $\mathbb{R}^2$, entonces para cada $x \in \mathbb{R}$, tenemos

$$I_x = \{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in I\} = \left\{ \begin{matrix} (c,d] & \text{si } x \in (a,b] \\ \varnothing & \text{si } x \notin (a,b] \end{matrix} \right\},$$

y análogamente se comprueba que, si $y \in \mathbb{R}$,

$$I^y = \left\{ \begin{matrix} (a,b] & \text{si } y \in (c,d] \\ \varnothing & \text{si } y \notin (c,d] \end{matrix} \right\}.$$

Lo mismo ocurre para cualquier semi-rectángulo I de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, pues podemos escribir $I = J_1 \times J_2$, donde $J_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $J_2 \subseteq \mathbb{R}^p$ son semi-rectángulos. En general, si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $B \subseteq \mathbb{R}^p$, entonces

$$(A \times B)_x = \left\{ \begin{matrix} B & \text{si } x \in A \\ \varnothing & \text{si } x \notin A \end{matrix} \right\}, \quad (A \times B)^y = \left\{ \begin{matrix} A & \text{si } y \in B \\ \varnothing & \text{si } y \notin B \end{matrix} \right\}.$$

II) Consideremos el círculo unidad:

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Fijado $x \in \mathbb{R}$, tenemos

$$C_x = \{y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1\} = \left\{y \in \mathbb{R} : |y| \leq \sqrt{1 - x^2}\right\},$$

y por lo tanto,

$$C_x = \begin{cases} \left[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}\right] & \text{si } x \in [-1,1] \\ \varnothing & \text{si } x \notin [-1,1] \end{cases}$$

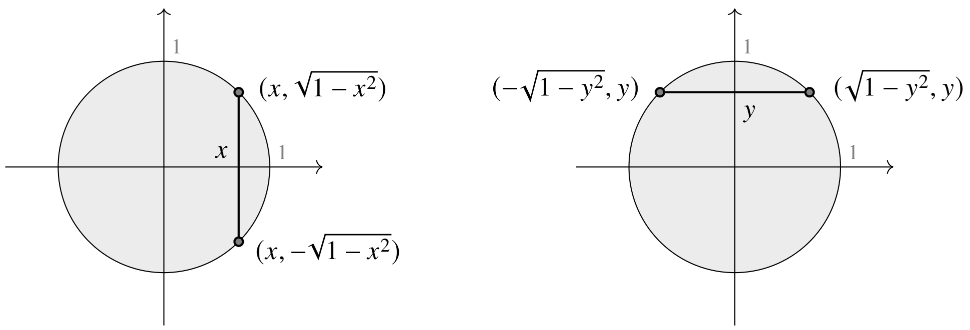


Figura 3.1: Secciones del círculo unidad.

Gráficamente –véase la Figura 3.1–, la sección de C por un punto $x_0 \in [-1,1]$ puede interpretarse como la intersección de C con la recta de ecuación $x = x_0$. Pero, en realidad, esto no es del todo correcto, ya que dicha intersección no es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Precisamente para solucionar este inconveniente, se define C_{x_0} como el *subconjunto de los puntos* $y \in \mathbb{R}$ tales que $(x_0, y) \in C$; es decir, el subconjunto de los puntos $y \in \mathbb{R}$ tales que (x, y) pertenece a la intersección de C con la recta $x = x_0$. Lo mismo ocurre con las secciones por un punto y.

iii) Para un subconjunto $B \subseteq \mathbb{R}^3$, tenemos varias posibilidades para definir secciones. Por ejemplo, sea

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

Si fijamos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$B_{(x,y)} = \{z \in \mathbb{R} : (x, y, z) \in B\} = \left\{\begin{array}{ll} [0,1] & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1 \\ \varnothing & \text{si } x^2 + y^2 \geq 1 \end{array}\right\},$$

mientras que, dado $z \in \mathbb{R}$,

$$B^z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in B\} = \\ = \begin{cases} \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\} & \text{si } z \in [0,1] \\ \varnothing & \text{si } z \notin [0,1] \end{cases}.$$

De otra manera, podemos fijar $(y,z) \in \mathbb{R}^2$, en cuyo caso

$$B^{(y,z)} = \{x \in \mathbb{R} : (x,y,z) \in B\} = \\ = \begin{cases} \left[-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}\right] & \text{si } (y,z) \in [-1,1] \times [0,1] \\ \varnothing & \text{si } (y,z) \notin [-1,1] \times [0,1] \end{cases},$$

y dado $x \in \mathbb{R}$, se tiene

$$B_x = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in B\} = \\ = \begin{cases} \left[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}\right] \times [0,1] & \text{si } x \in [-1,1] \\ \varnothing & \text{si } x \notin [-1,1] \end{cases}.$$

Observemos que B es un cilindro de altura 1 y radio 1. Las secciones de B por un punto $z_0 \in R$ se pueden interpretar como las intersecciones de B con el plano $z = z_0$, mientras que las secciones de B por un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ se corresponden con la intersección de B y la recta de ecuaciones $x = x_0, y = y_0$. En el primer caso, se obtiene un círculo de radio 1, siempre que $z_0 \in [-1,1]$, y en el segundo caso, se obtiene un segmento de longitud 1, siempre que (x_0, y_0) sea un punto del círculo unidad.

Del mismo modo, las secciones B por un punto (y_0, z_0) son segmentos de longitud variable en función de y_0, siempre que $|y_0| \le 1$ y $0 \le z_0 \le 1$, mientras que las secciones de B por un punto x_0 son rectángulos de base variable y altura fija igual a 1, siempre que $|x_0| \le 1$.

Proposición 3.3.1. *Las secciones de conjuntos Borel medibles y de funciones Borel medibles son medibles. Es decir, se verifica:*

i) Si $E \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ es un boreliano, entonces para todo $x \in \mathbb{R}^p$ y para todo $y \in \mathbb{R}^n$, tanto E_x como E^y son borelianos.

ii) Si $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función Borel medible, entonces para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y para todo $y \in \mathbb{R}^p$, las funciones f_x y f^y son Borel medibles.

Demostración. Probaremos los enunciados *(i)* y *(ii)* para las secciones por puntos $x \in \mathbb{R}^n$, pues para las secciones por puntos $y \in \mathbb{R}^p$ es análogo.

Para probar *(i)*, fijemos $x \in \mathbb{R}^n$ y consideraremos la familia

$$\mathscr{F} = \{B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p) : B_x \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^p)\}.$$

Es sencillo probar que $\mathscr{F}$ contiene a los semi-rectángulos, pues si $I = J_1 \times J_2 \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$, entonces se tiene

$$m(I) = \left\{ \begin{matrix} J_2 & \text{si } x \in J_1 \\ \varnothing & \text{si } x \notin J_1 \end{matrix} \right\}.$$

Además, $\mathscr{F}$ es una σ-álgebra, lo cual se deduce trivialmente de las igualdades –pruébense–

$$(E^c)_x = (E_x)^c \quad , \quad \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right)_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x.$$

Por lo tanto, $\mathscr{F} = \mathscr{B}(\mathbb{R}^n \times R^p)$.

Para probar *(ii)*, basta con observar que f_x es la composición de las aplicaciones

$$y \mapsto (x, y) \mapsto f(x, y)$$

la primera de las cuales es continua, y la segunda es f, que es Borel medible. □

Las secciones de conjuntos y funciones son la clave de los teoremas de Fubini-Tonelli, que enunciamos a continuación. Para ello, introduciremos la siguiente notación: si $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función medible con integral, suele escribirse

$$\int f \, dm = \int f(x, y) \, dm(x, y) = \iint f(x, y) \, dx \, dy$$

para resaltar que la integral se produce respecto de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Por otra parte, la notación

$$\int f(x, y) \, dm(x)$$

significa que estamos integrando la función $f_x : \mathbb{R}^p \to \overline{\mathbb{R}}$, $f_x(y) = f(x, y)$, para un $x \in \mathbb{R}^n$ fijo, respecto de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^p$ –es decir, respecto de y. Del mismo modo,

$$\int f(x, y) \, dm(y)$$

es la integral de la función $f_x : \mathbb{R}^p \to \overline{\mathbb{R}}$, $f^y(x) = f(x, y)$, para un $y \in \mathbb{R}^p$ fijo, respecto de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.3.2. (de Tonelli) *Si $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función medible no negativa, entonces las funciones*

$$x \mapsto \int f_x(y)\ dm(y), \quad y \mapsto \int f^y(x)\ dm(x)$$

son medibles, y se verifica

$$\int f(x,y)\ dm(x,y) = \int \left(\int f_x(y)\ dm(y) \right) dm(x) =$$
$$= \int \left(\int f^y(x)\ dm(x) \right) dm(y)$$

Teorema 3.3.3. (de Fubini) *Consideremos $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible con integral. Entonces:*

i) Las funciones

$$x \mapsto \int f_x(y)\ dm(y), \quad y \mapsto \int f^y(x)\ dm(x)$$

están bien definidas en casi todo punto. Además, si f es integrable, ambas funciones son finitas casi seguro.

ii) Se verifica:

$$\int f(x,y)\ dm(x,y) = \int \left(\int f_x(y)\ dm(y) \right) dm(x) =$$
$$= \int \left(\int f^y(x)\ dm(x) \right) dm(y)$$

Las igualdades que se deducen como consecuencia de los teoremas de Fubini-Tonelli suelen escribirse en la forma

$$\int f(x,y)\ dm(x,y) = \int \left(\int f(x,y)\ dm(y) \right) dm(x) =$$
$$= \int \left(\int f(x,y)\ dm(x) \right) dm(y).$$

Con esta notación, recordamos que al escribir $\int f(x,y) dm(x)$ estamos integrando una función que solo depende de x, para un valor de y fijo, y análogamente ocurre cuando escribimos $\int f(x,y) dm(y)$.

Pospondremos la demostración de los teoremas de Fubini-Tonelli por el momento. Veamos cómo aplicarlos:

Ejemplo 3.3.4. La función $f(x,y) = xy$ es no negativa sobre el conjunto $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$. Como, fijado $x \in \mathbb{R}$, se tiene

$$E_x = \{y : (x,y) \in E\} = \begin{Bmatrix} [x,1] & \text{si } x \in [0,1] \\ \emptyset & \text{si } x \notin [0,1] \end{Bmatrix},$$

el Teorema de Fubini afirma que

$$\begin{aligned} \iint_E xy\, dxdy &= \iint xy \cdot I_E(x,y)\, dxdy = \int \left(\int xy \cdot I_{E_x}(x,y) dy \right) dx = \\ &= \int \left(\int_{E_x} xy\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_x^1 xy\, dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_x^1 dx = \int_0^1 \frac{x - x^3}{2}\, dx = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Alternativamente, también puede calcularse la integral haciendo secciones por y:

$$E^y = \{x : (x,y) \in E\} = \begin{Bmatrix} [0,y] & \text{si } y \in [0,1] \\ \emptyset & \text{si } y \notin [0,1] \end{Bmatrix}.$$

En tal caso, tenemos:

$$\begin{aligned} \iint_E xy\, dxdy &= \int \left(\int_{E_y} xy\, dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^y xy\, dx \right) dy = \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^2 y}{2} \right]_0^y dy = \int_0^1 \frac{y^3}{2}\, dy = \left[\frac{y^4}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Naturalmente, ambos procedimientos dan el mismo resultado. ☺

Ejemplo 3.3.5. La función $f(x,y) = y \cdot \sin(2\pi x)$ es continua sobre el conjunto compacto $E = [0,1] \times [-1,1]$, así que es integrable en él. Así, el Teorema de Fubini asegura que

$$\begin{aligned} \iint_E f(x,y)\, dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 y \cdot \sin(2\pi x)\, dx \right) dy = \\ &= \int_0^1 y \left(\int_0^1 \sin(2\pi x)\, dx \right) dy = \\ &= \left(\int_0^1 y\, dy \right) \cdot \left(\int_0^1 \sin(2\pi x)\, dx \right) = 0. \end{aligned}$$

☺

Ejemplo 3.3.6. Consideremos la función

$$f(x,y) = \frac{y - x^2}{\sqrt{xy}}$$

sobre el conjunto $E = (0,1] \times (0,1]$. Por una parte, es claro que f no tiene signo constante sobre E. Tratemos de probar que f es integrable sobre E. Para ello, escribiremos

$$|f(x,y)| = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{y}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}},$$

que es una función no negativa e integrable. Luego f es integrable sobre E, y podemos calcular $\iint_E f\,dxdy$ utilizando el Teorema de Fubini:

$$\iint_E f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{y}} \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{2}{3} \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} - 2x^{\frac{3}{2}} \sqrt{y} \right]_0^1 dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{3\sqrt{x}} - 2x^{\frac{3}{2}} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{4}{3}\sqrt{x} - \frac{4}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = \frac{4}{3} - \frac{4}{5} = \frac{8}{15}.$$

Alternatlvamente, cuando no parece sencillo probar directamente la integrabilidad de una función f sobre el dominio de integración, podemos tratar de dividirlo en regiones más pequeñas de manera que f tenga signo constante en cada una de ellas. En nuestro caso, es sencillo comprobar que f es no negativa en el conjunto

$$E^+ = \{(x,y) \in E : y \geq x^2\},$$

así que podemos aplicar el Teorema de Tonelli para calcular $\iint_{E^+} f(x,y)\,dxdy$:

$$\iint_{E^+} f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 \left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{y}} \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{2}{3} \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} - 2x^{\frac{3}{2}} \sqrt{y} \right]_{x^2}^1 dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2}{3\sqrt{x}} - 2x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3} x^{\frac{5}{2}} \right) dx = \frac{4}{3} - \frac{4}{5} + \frac{8}{21}.$$

Por otra parte, f tiene signo negativo en el conjunto

$$E^- = \{(x,y) \in E : y < x^2\},$$

así que, de nuevo por el Teorema de Tonelli,

$$\iint_{E^-} f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \left(\sqrt{\frac{y}{x}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{y}} \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{2}{3} \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} - 2x^{\frac{3}{2}}\sqrt{y} \right]_0^{x^2} dx = -\int_0^1 \frac{4}{3} x^{\frac{5}{2}}\,dx = \frac{-8}{21}.$$

Por lo tanto, se concluye que

$$\iint_E f(x,y)\,dxdy = \iint_{E^+} f(x,y)\,dxdy + \iint_{E^-} f(x,y)\,dxdy = \frac{4}{3} - \frac{4}{5} = \frac{8}{15}. \quad ☺$$

Una de las hipótesis más habituales que permiten aplicar los teoremas de Fubini-Tonelli es la que recoge el siguiente resultado:

Corolario 3.3.7. *Sea $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ una función medible. Si se satisface cualquiera de las siguientes hipótesis:*

i) $\int \left(\int |f(x,y)|\,dm(x) \right) dm(y) < +\infty$.

ii) $\int \left(\int |f(x,y)|\,dm(y) \right) dm(x) < +\infty$.

entonces f es integrable, y

$$\int f(x,y)\,dm(x,y) = \int \left(\int f(x,y)\,dm(x) \right) dm(y) =$$

$$= \int \left(\int f(x,y)\,dm(y) \right) dm(x).$$

Demostración. Como f es medible, $|f|$ es una función medible no negativa, así que por el teorema de Tonelli,

$$\int |f(x,y)|\,dm(x,y) = \int \left(\int |f(x,y)|\,dm(x) \right) dm(y) =$$

$$= \int \left(\int |f(x,y)|\,dm(y) \right) dm(x).$$

Así, en cualquiera de los dos casos, las hipótesis aseguran que $|f|$ es integrable, luego también lo es f, y concluimos por el teorema de Fubini. □

Demostración de los teoremas de Fubini-Tonelli

El núcleo de la demostración de los teoremas de Fubini-Tonelli se encuentra en el siguiente resultado:

Lema 3.3.8. (Principio de Cavalieri) *Si $B \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ es un subconjunto Borel medible, entonces la función*

$$x \mapsto m(B_x)$$

es Borel medible, y

$$m(B) = \int m(B_x)\, dm(x). \tag{3.b}$$

Demostración. Si aceptamos que la función $x \mapsto m(B_x)$ es medible para cualquier boreliano B, la igualdad (3.b) se prueba sin dificultad. Para ello, observemos que la aplicación

$$\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p) \to [0, +\infty] \quad , \quad \mu(B) = \int m(B_x)\, dm(x)$$

es una medida. En efecto, claramente $\mu(\varnothing) = 0$, y si $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de borelianos disjuntos dos a dos tales que $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, entonces $B_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n)_x$, y la unión es disjunta, de manera que

$$\mu(B) = \int m(B_x)\, dm(x) = \int \sum_{n=1}^{\infty} m[(B_n)_x]\, dm(x) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int m[(B_n)_x]\, dm(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n),$$

donde la penúltima igualdad es consecuencia del Corolario 2.2.7. Además, si $I = J_1 \times J_2$ es un semi-rectángulo de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, entonces

$$\mu(I) = \int m(I_x)\, dm(x) = \int_{J_1} m(J_2)\, dm(x) = m(J_1) \cdot m(J_2) = m(I).$$

De esta forma, el *Primer Teorema de Unicidad* (1.7.1), pág. 30 permite concluir que μ es la medida de Lebesgue sobre $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$.

Ahora, probaremos que la función $x \mapsto m(B_x)$ es medible para cualquier boreliano B de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Sin duda alguna, esta es la parte más técnica de la demostración. Vamos a fijar I un semi-rectángulo de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, y consideremos la familia

$$\mathscr{F} = \{B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p) : x \mapsto m((B \cap I)_x) \text{ es medible}\}.$$

Se trata de probar que $\mathscr{F} = \mathscr{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$. Observemos primero que esto basta para concluir que la función $x \mapsto m(B_x)$ es medible, pues escribiendo $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ como unión disjunta de semi-rectángulos $(I_n)_{n=1}^{\infty}$, se tiene que

$$m(B_x) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(B \cap I_n)_x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m\big((B \cap I_n)_x\big),$$

y de esta forma, si la función $x \mapsto m((B \cap I)_x)$ es medible para cualquier semi-rectángulo I, entonces también lo es la función $x \mapsto m(B_x)$ por tratarse de un límite de funciones medibles.

Lamentablemente, para probar que $\mathscr{F}$ es una σ-álgebra que contiene a los semi-rectángulos, será necesario dar un rodeo. La razón estriba en que, en general, resulta difícil dar una fórmula para la medida de $A \cup B$ que dependa únicamente de las medidas de A y de B. En cambio, sí que es sencillo dar estas fórmulas para la unión disjunta, o para la diferencia $A \setminus B$ cuando $B \subseteq A$ y $m(B) < +\infty$. Así pues, observemos que:

- $\mathscr{F}$ contiene a los semi-rectángulos, pues si $J \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ es un semi-rectángulo, entonces $I \cap J$ también lo es, así que escribamos $I \cap J = H_1 \times H_2$, donde $H_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $H_2 \subseteq \mathbb{R}^p$ son también semi-rectángulos. Así,

$$m((I \cap J)_x) = \begin{Bmatrix} m(H_2) & \text{si } x \in J_1 \\ 0 & \text{si } x \notin J_1 \end{Bmatrix},$$

  que es claramente medible.

- Si $B_1, B_2 \in \mathscr{F}$ son tales que $B_1 \subseteq B_2$, entonces $B_1 \setminus B_2 \in \mathscr{F}$. En efecto, se tiene $(B_1 \setminus B_2)_x = (B_1)_x \setminus (B_2)_x$, y todos los subconjuntos involucrados tienen medida finita, de manera que

$$\begin{aligned} m\big[\big((B_1 \setminus B_2) \cap I\big)_x\big] &= m\big[\big((B_1 \cap I \setminus (B_2 \cap I)\big)_x\big] = \\ &= m[(B_1 \cap I)_x \setminus (B_2 \cap I)_x] = \\ &= m((B_1 \cap I)_x) - m((B_2 \cap I)_x). \end{aligned}$$

- Si $(B_k)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos de $\mathscr{F}$ *disjuntos* dos a dos, entonces el mismo argumento que utilizamos al principio de la demostración permite concluir que $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathscr{F}$, sin más que observar que

$$m\,[(B \cap I)_x] = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(B_k \cap I)_x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k \cap I)_x.$$

Así que, para concluir, necesitamos garantizar que las propiedades que conocemos de $\mathscr{F}$ garantizan que es una σ-álgebra.

Lema 3.3.9. (de Dynkin) *La σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^d$ es la menor familia de conjuntos $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R}^d)$ tal que:*

i) *$\mathscr{F}$ contiene a los semi-rectángulos.*

ii) *$\mathscr{F}$ es* cerrada frente a diferencias propias; *es decir, si $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ son tales que $F_1 \subseteq F_2$, entonces $F_1 \setminus F_2 \in \mathscr{F}$.*

iii) *$\mathscr{F}$ es* cerrada frente a uniones numerables disjuntas*; es decir, si $(F_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos en $\mathscr{F}$, entonces $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \in \mathscr{F}$.*

Cualquier familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ que verifique las propiedades (ii) y (iii) del enunciado anterior se denomina *d-sistema*. Así que se trata de probar que el menor d-sistema $\mathscr{F}$ que contiene a los semi-rectángulos es la σ-álgebra de Borel.

Observemos que $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ cumple las propiedades (i) – (iv) del enunciado, así que, por definición de $\mathscr{F}$, debe darse $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$. Para probar el otro contenido, solo necesitamos ver que $\mathscr{F}$ es σ-álgebra. Veamos: como $\mathbb{R}^d$ es unión numerable disjunta de semi-rectángulos, $\mathbb{R}^d \in \mathscr{F}$, de manera que si $F \in \mathscr{F}$, entonces $F^c = \mathbb{R}^d \setminus F$, así que $\mathscr{F}$ es cerrada por paso al complementario. Falta por probar que $\mathscr{F}$ es cerrada frente a uniones numerables arbitrarias. Para ello, intentemos razonar *hacia atrás:*

1. Dada $(F_k)_{k=1}^{\infty}$ una colección de conjuntos de $\mathscr{F}$, querríamos escribir $E_k = F_k \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_{k-1})$, ya que los E_k son disjuntos dos a dos y $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$. Para que este argumento funcione, necesitamos que $E_k \in \mathscr{F}$. Pero como $\mathscr{F}$ es cerrada por paso al complementario, y se tiene

$$E_k = F_k \cap (F_1^c \cap \cdots \cap F_{n-1}^c),$$

   será suficiente con probar que $\mathscr{F}$ es cerrada frente a intersecciones finitas.

2. Consideremos, pues, $F_1, F_2 \cap \mathscr{F}$, y tratemos de probar que $F_1 \cap F_2 \in \mathscr{F}$. Para ello, tendría sentido fijar $E \in \mathscr{F}$ y considerar

$$\mathscr{F}_1 = \{F \in \mathscr{F} : E \cap F \in \mathscr{F}\}.$$

   Nuestro objetivo es demostrar que $\mathscr{F}_1$ es un d-sistema que contiene a los semi-rectángulos. De esta forma, se tendría $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}$, y como este hecho no depende del $E \in \mathscr{F}$ considerado, habríamos probado que $\mathscr{F}$ es cerrada frente a la intersección finita. Es sencillo probar que $\mathscr{F}_1$ es un d-sistema, ya que:

- si $F_1, F_2 \in \mathscr{F}_1$, en particular pertenecen a $\mathscr{F}$, con lo cual $E \cap (F_1 \setminus F_2) = (E \cap F_2) \setminus (E \cap F_1)$ también pertenece a $\mathscr{F}_1$.
- si $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_k$ es unión disjunta de elementos de $\mathscr{F}_1$, $E \cap F = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap f_k)$ es unión disjunta de elementos de $\mathscr{F}$, así que $F \in \mathscr{F}_1$.

Sin embargo, no parece fácil probar que $E \cap J \in \mathscr{F}$ para todo semi-rectángulo J.

3. Para solucionar el inconveniente del punto anterior, utilizaremos el hecho de que la familia de los semi-rectángulos es cerrada frente a la intersección. Lo que haremos será fijar un semi-rectángulo J y considerar la familia

$$\mathscr{F}_2 = \{F \in \mathscr{F} : F \cap J \in \mathscr{F}\}.$$

Ahora sí es claro que $\mathscr{F}_2$ contiene a los semi-rectángulos, y los mismos razonamientos del punto anterior permiten comprobar que $\mathscr{F}_2$ es un d-sistema. Con lo cual, $\mathscr{F}_2 = \mathscr{F}$.

Ahora bien, esto es suficiente para concluir: el punto (3) indica que $\mathscr{F}_2 = \mathscr{F}$; con lo cual, la familia $\mathscr{F}_1$ del punto (2) contiene a los semi-rectángulos, y por lo tanto, $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}$. Pero esta igualdad se traduce en que $\mathscr{F}$ es cerrada frente a intersecciones finitas. Por tanto, según (1), $\mathscr{F}$ es cerrada frente a uniones numerables, es decir, $\mathscr{F}$ es una σ-álgebra. De aquí se deduce que $\mathscr{F} = \mathscr{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$, y así se concluye que para cualquier boreliano B de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, la función $x \mapsto m(B_x)$ es medible. □

El principio de Cavalieri afirma esencialmente que la medida de un conjunto $B \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ está determinada por sus secciones. Equivalentemente, podemos decir:

Corolario 3.3.10. *Si dos subconjuntos medibles E y E' de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ satisfacen $E_x = E'_x$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $m(E) = m(E')$.*

Demostración del teorema de Tonelli

A continuación extenderemos el principio de Cavalieri para funciones medibles no negativas, con lo que demostraremos el Teorema de Tonelli 3.3.2. De hecho, el principio de Cavalieri es, en realidad, el Teorema de Tonelli cuando f es la función indicador de un conjunto $B \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$:

$$\int I_B(x,y)\, dm(x,y) = m(B) = \int m(B_x)\, dm(x) = \int \left(\int I_{B_x}(y)\, dm(y) \right) dm(x).$$

Por lo tanto, no resulta difícil probar que el teorema de Tonelli es válido para una función simple no negativa y Borel medible $s = \sum_{j=1}^{k} na_j \cdot I_{A_j}$:

$$\begin{aligned}\int s(x,y)\,dm(x,y) &= \sum_{j=1}^{k} a_j \int I_{A_j}(x,y)\,dm(x,y) = \\ &= \sum_{j=1}^{k} a_j \int \left(\int I_{(A_j)_x}(y)\,dm(y)\right)\,dm(x) = \\ &= \sum_{j=1}^{k} \int \left(\int a_j I_{(A_j)_x}(y)\,dm(y)\right)\,dm(x) = \\ &= \int \left(\int s_x(y)\,dm(y)\right)\,dm(x).\end{aligned}$$

Ahora, si $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es una función medible no negativa, consideremos $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de funciones simples no negativas que convergen puntualmente a f. En primer lugar, el *Teorema de la Convergencia Monótona*, (2.2.5), pág. 55, afirma que

$$\int f(x,y)\,dm(x,y) = \lim_k \int s_k(x,y)\,dm(x,y). \tag{3.c}$$

Por otra parte, fijado $x \in \mathbb{R}^n$, la sucesión $\left((s_k)_x\right)_{k=1}^{\infty}$ también es creciente y converge puntualmente a f_x, así que de nuevo por el Teorema de la Convergencia Monótona tenemos que

$$\int f_x(y)\,dm(y) = \lim_k \int (s_k)_x(y)\,dm(y).$$

De esta forma, las funciones $h_k(x) = \int (s_k)_x(y)\,dm(y)$ forman una sucesión creciente, gracias a la monotonía de la integral, y además, el límite puntual de $(h_k)_{k=1}^{\infty}$ es $h(x) = \int f_x(y)\,dm(y)$. Por lo tanto, gracias una vez más al Teorema de la Convergencia Monótona, deducimos que $\lim_k \int h_k(x)\,dm(x) = \int h(x)\,dm(x)$, es decir,

$$\lim_k \int \left(\int (s_k)_x(y)\,dm(y)\right)\,dm(x) = \int \left(\int f_x(y)\,dm(y)\right)\,dm(x). \tag{3.d}$$

Juntando 3.c y 3.d, concluimos:

$$\int f(x,y)\,dm(x,y) = \lim_k \int s_k(x,y)\,dm(x,y) =$$
$$= \lim_k \int \left(\int (s_k)_x(y)\,dm(y) \right) dm(x) =$$
$$= \int \left(\int f_x(y)\,dm(y) \right) dm(x). \quad \square$$

Demostración del teorema de Fubini

Finalmente, probaremos el Teorema de Fubini 3.3.3, a partir del Teorema de Tonelli. Puesto que f tiene integral, la idea es aplicar el Teorema de Tonelli a sus partes positiva y negativa. Concretamente, puesto que

$$\int f(x,y) dm(x,y) = \int f^+(x,y)\,dm(x,y) - \int f^-(x,y)\,dm(x,y)$$

al menos una de las integrales del miembro derecho de la igualdad anterior, pongamos $\int f^+\,dm$, es finita. Esto nos dice, en virtud del teorema de Tonelli, que la función

$$x \mapsto \int f_x^+(y)\,dm(y)$$

es finita casi seguro, pues es integrable:

$$\int \left(\int f_x^+(y)\,dm(y) \right) dm(x) = \int f^+(x,y)\,dm(x,y) < +\infty.$$

Si además f fuera integrable, también tendríamos que la función

$$x \mapsto \int f_x^-(y)\,dm(y)$$

es finita casi seguro, así que podríamos encontrar un conjunto de medida nula fuera del cual la función

$$x \mapsto \int f_x(y)\,dm(y) = \int f_x^+(y)\,dm(y) - \int f_x^-(y)\,dm(y)$$

es finita. En cualquier caso, extendiendo la función $x \mapsto \int f_x(y)\, dm(y)$ por cero en el conjunto de medida nula donde no esté definida, tenemos:

$$
\begin{aligned}
\int f(x,y)\, dm(x,y) = \\
&= \int f^+(x,y)\, dm(x,y) - \int f^-(x,y)\, dm(x,y) = \\
&= \int \left(\int f_x^+(y)\, dm(y) \right) dm(x) \;-\; \int \left(\int f_x^-(y)\, dm(y) \right) dm(x) = \\
&= \int \left(\int f_x^+(y)\, dm(y) - \int f_x^-(y)\, dm(y) \right) = \\
&= \int \left(\int f_x(y)\, dm(y) \right) dm(x). \quad \square
\end{aligned}
$$

3.4. La medida de Lebesgue bajo transformaciones lineales

Una de las cuestiones fundamentales de la medida es cómo se comporta mediante transformaciones. Es decir, dado un boreliano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ y una aplicación $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, ¿existe alguna relación entre $m(E)$ y $m[T(E)]$?

A la hora de plantear dicha pregunta, debemos resaltar que, si T es una aplicación cualquiera, en principio $T(E)$ no tiene por qué ser ni siquiera medible. Sin embargo, el Corolario 1.2.2 garantiza que $T(E) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ siempre que pidamos que T sea *inyectiva*. Por otra parte, sabemos qué relación existe entre$m(E)$ y $m[T(E)]$ si, por ejemplo, T es una *traslación* ($T(x) = a + x$ para cierto $a \in \mathbb{R}^n$) o si T es una *homotecia* ($T(x) = \lambda x$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$). Así que parece razonable analizar, en primera instancia, qué ocurre cuando T es una transformación lineal.

Este tipo de cuestiones nos conducirá de manera natural al *Teorema de Cambio de Variables*, otro de los resultados fundamentales de la integración Lebesgue, y que resulta particularmente útil en el cálculo de integrales.

Proposición 3.4.1. *Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un isomorfismo lineal. Dado $B \subseteq \mathbb{R}^n$, se tiene que B es Borel medible si, y solo si, lo es $T(B)$, y se verifica:*

$$m[T(B)] = |\det T| \cdot m(B).$$

Demostración. La aplicación $\mu(B) = m[T(B)]$ define una medida sobre $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ –pruébese– y como T es lineal, μ es invariante por traslaciones:

$$\mu(x + B) = m[T(x + B)] = m[T(x) + T(B)] = m[T(B)] = \mu(B)$$

Además, como T es una aplicación lineal entre espacios de dimensión finita, es continua, por lo tanto lleva conjuntos compactos en conjuntos compactos. De esto se deduce que, si $Q = (0, 1]^n$, entonces

$$\mu(Q) \leq \mu(\overline{Q}) = m[T(\overline{Q})] < +\infty.$$

Así, en virtud del *Segundo Teorema de Unicidad*, (1.7.2), pág. 31, concluimos que $\mu(B) = m[T(B)] = c \cdot m(B)$, donde $c = m[T(Q)]$.

Se trata de ver a continuación que $m[T(Q)] = |\det T|$. Para ello, utilizaremos la siguiente idea, que viene sugerida por el método de Gauss-Jordan para el cálculo de una matriz inversa. Diremos que un isomorfismo lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es *elemental* si es de alguna de las siguientes formas:

i) Intercambiar dos coordenadas.

$$T(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots x_n) = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n).$$

ii) Multiplicar una coordenada por un número real $a \neq 0$.

$$T(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_n) = (x_1, \ldots, ax_i, \ldots, x_n).$$

iii) Sumar a una coordenada otra coordenada multiplicada por un número real.

$$T(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots x_n) = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j + ax_i, \ldots, x_n).$$

Los isomorfismos elementales están asociados a las *transformaciones elementales* que se realizan sobre una matriz para calcular la matriz inversa o para hacer ceros en el cálculo del determinante. Es sencillo probar que la matriz en las bases usuales de $\mathbb{R}^n$ de un isomorfismo elemental es la matriz obtenida al aplicar la transformación elemental correspondiente sobre la matriz identidad. De hecho, la propia definición del producto de matrices implica que efectuar una *transformación elemental* sobre una matriz A equivale a multiplicar A por la izquierda por la matriz que resulta de aplicar a la matriz identidad esa misma transformación elemental.

La utilidad de los isomorfismos elementales radica en el siguiente lema:

Lema 3.4.2. (de Gauss-Jordan) *Todo isomorfismo lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ descompone como composición de isomorfismos elementales.*

Demostración del Lema 3.4.2. El procedimiento es conocido. Primero, se transforma la matriz del isomorfismo T en una matriz cuya primera columna es la primera columna de la matriz identidad de orden n. Para ello:

1. Intercambiar, si es necesario, la primera fila por otra fila cuyo primer elemento sea no nulo; pongamos, c.

2. Multiplicar la primera fila por $1/c$ para obtener un 1 en la posición $(1, 1)$.

3. Sumar a las otras filas un múltiplo adecuado de la primera fila para obtener ceros en las posiciones $(1, j)$ con $j \in \{2, ..., n\}$.

Análogamente se obtiene un 1 en la posición $(2, 2)$ –intercambiando la segunda fila por otra, si fuese necesario, y después multiplicándola convenientemente por un número real–, y un 0 en las posiciones $(2, j)$ con $j \neq 2$ –sumando un múltiplo adecuado de la segunda fila al resto de filas–. □

Utilizando el lema de Gauss-Jordan, podemos escribir un isomorfismo lineal como $T = E_1 \cdots E_m$, donde E_1, ..., E_m son isomorfismos elementales. Puesto que el determinante es multiplicativo, tendremos que

$$\det T = \det E_1 \cdots \det E_m.$$

Por lo tanto, solo será necesario probar que $m[T(Q)] = |\det T|$ para un isomorfismo lineal T *elemental*:

1. Si T es del tipo *(i)*, es decir, "intercambia dos coordenadas", entonces es claro que $T(Q) = Q$, así que $m[T(Q)] = 1 = |\det T|$.

2. Si T consiste en multiplicar un coordenada i-ésima por un número real $a > 0$, entonces

$$T(Q) = (0, 1] \times \cdots \times \overbrace{(0, a]}^{i\text{-ésimo}} \times \cdots \times (0, 1]$$

y entonces $m[T(Q)] = a = |\det T|$. Si $a < 0$, es totalmente análogo,.

3. Finalmente, si T consiste en sumar a una coordenada otra coordenada multiplicada por un número real, pongamos

$$T(x_1, x_2, ..., x_n) = T(x_1, x_2 + ax_1, ...x_n),$$

entonces

$$T(Q) = A \times (0, 1]^{n-2},$$

donde $A = \{(x_1, x_2 + ax_1) : x_1, x_2 \in (0, 1]\}$, y $m(A)$ se puede calcular fácilmente utilizando el principio de Cavalieri: fijado $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene

$$A_x = \{y : (x, y) \in A\} = \{y : y = x + az,\ z \in (0, 1]\} =$$
$$= \begin{Bmatrix} [x, x+a] & \text{si } x \in [0,1] \\ \varnothing & \text{si } x \notin [0,1] \end{Bmatrix},$$

con lo que

$$m[A] = \int_0^1 \int_x^{x+a} dy\, dx = a = |\det T|. \qquad \square$$

La proposición anterior puede utilizarse para calcular la medida de algunos conjuntos. Este es el punto de partida del Teorema de Cambio de Variable, que veremos en la siguiente sección.

Ejemplo 3.4.3. Si $T(x, y) = (ax, by)$, con $a, b > 0$, entonces la imagen del círculo unidad $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ es

$$T(C) = \{(ax, by) : x^2 + y^2 = 1\} = \left\{(u, v) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\},$$

la elipse de semiejes a y b. De manera que

$$m[T(C)] = |\det T| \cdot m(C) = ab \cdot m(C),$$

y si aceptamos que $m(C) = \pi$ –se probará más adelante–, concluimos que el área de una elipse de semiejes a y b es πab. ☺

Observemos, para terminar, que la Proposición 3.4.1 también es válida aunque la aplicación T no sea inyectiva:

Proposición 3.4.4. *Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal. Si T no es inyectiva, entonces $m[T(B)] = 0$ para todo $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Es suficiente con probar que $m[T(\mathbb{R}^n)] = 0$. Observemos que, como T no es inyectiva, $T(\mathbb{R}^n)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $k < n$, así que podemos encontrar un "cambio de base" $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ –es decir, un isomorfismo lineal– tal que

$$S[T(\mathbb{R}^n)] = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\} = \mathbb{R}^k \times \{0\}.$$

Por lo tanto, $m[S[T(\mathbb{R}^n)]] = 0$. Pero, en virtud de la Proposición 3.4.1,

$$0 = m[S[T(\mathbb{R}^n)]] = |\det S| \cdot m[T(\mathbb{R}^n)],$$

así que, necesariamente, $m[T(\mathbb{R}^n)] = 0$. $\square$

3.5. Teorema del cambio de variables

Los resultados de la sección anterior establecen relaciones entre $m[F(E)]$ y $m(E)$ cuando E es un boreliano de $\mathbb{R}^n$ y $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal. Nuestro objetivo es extender este tipo de ideas a una colección más amplia de funciones F. Parece razonable considerar que F sea de clase 1, pues estas son las aplicaciones que pueden "aproximarse continuamente" mediante aplicaciones lineales en cada punto.

Recordemos que, dado U un abierto de $\mathbb{R}^n$, una función $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $F(x) = (F_1(x), ..., F_p(x))$, es *diferenciable* sobre U si para cada punto $x_0 \in U$ existe una aplicación lineal $DF_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ tal que

$$\lim_{\|x\| \to 0} \frac{\|F(x) - F(x_0) - DF_{x_0}(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

La aplicación $DF(x_0)$, si existe, es única, y recibe el nombre de *aplicación lineal tangente* o *diferencial* de F en el punto x_0. Puesto que $DF(x_0)$ es una aplicación lineal que actúa entre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^p$, puede interpretarse como una matriz de dimensiones $p \times n$. Así, el elemento que está en la posición (i, j) de dicha matriz es la *derivada parcial* de la componente i-ésima respecto de la coordenada j-ésima en el punto x_0, es decir, $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0)$. Podemos definir, por lo tanto, la aplicación

$$DF : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \simeq \mathscr{M}_{p\times n}(\mathbb{R}), \quad x \mapsto DF_x,$$

que se conoce con el nombre de *derivada* de F.

Si colocamos normas en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^p$ entonces podemos dotar al espacio vectorial $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ de las aplicaciones lineales $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ de una norma, sin más que definir

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|,$$

aunque, en realidad, como $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ es un espacio de dimensión $n \cdot p$, todas las normas que definamos en él son equivalentes. Sea cual sea la norma que se ponga, la cuestión es que podemos hablar de continuidad en el espacio $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$

De esta forma, se dice que F es *de clase 1* en U si la aplicación DF es continua en U; lo cual equivale a decir que todas las derivadas parciales

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) : U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)$$

son continuas en U. Finalmente, si, en el caso de que que $p = n$, F es biyectiva, y su inversa F^{-1} es también de clase 1, entonces diremos que F es un *difeomorfismo* de clase 1. Una condición necesaria y suficiente para que F sea difeomorfismo en un entorno de un punto $x \in U$ es que $DF(x)$ sea invertible. Es más, se tiene:

Proposición 3.5.1. *Una aplicación inyectiva $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to F(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo si, y solo si, para cada punto $x \in U$, $DF(x)$ es invertible.*

Consideremos ahora $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to F(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo de clase 1. Dado $B \subseteq F(U)$ un boreliano, debe ser $B = F(A)$ para un cierto boreliano $B \subseteq U$. ¿Podemos establecer alguna relación entre $m(B)$ y $m(A)$?

La misma pregunta puede extenderse al caso de funciones medibles. Si $g : F(E) \to \mathbb{R}$ es una función medible, la composición $g \circ F : E \to \mathbb{R}$ también es medible. Así que podemos preguntarnos por la relación entre las integrales $\int_E g \circ F \, dm$ y $\int_{F(E)} g \, dm$.

El resultado fundamental que da respuesta a estas cuestiones se conoce generalmente como Teorema del Cambio de Variables.

Teorema 3.5.2. (del Cambio de Variables) *Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to F(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo de clase 1. Entonces, para cualquier boreliano $E \subseteq F(U)$ y cualquier función medible $g : F(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se verifica*

$$\int_E g \, dm = \int_{F^{-1}(E)} g \circ F \cdot |\det DF| \, dm,$$

en el sentido de que si alguna de las integrales existe, entonces existe la otra y son iguales.

Es necesario hacer algunas observaciones al resultado anterior:

1. En el caso particular de que $g = I_B$, se tiene que $g \circ F = I_{F^{-1}(B)}$, y por lo tanto, el Teorema del Cambio de Variables permite calcular $m(B)$:

   $$m(B) = \int_{F^{-1}(B)} |\det DF| \, dm.$$

   De otra forma, si ponemos $B = F(A)$ para un boreliano $A \subseteq U$, obtenemos

   $$m[F(A)] = \int_A |\det DF| \, dm,$$

   fórmula que permite calcular la medida de la imagen de un boreliano por un difeomorfismo de clase 1. En este sentido, el Teorema del Cambio de Variables viene motivado por la Proposición 3.4.1, sin más que recordar que, para cada $x \in U$, DF_x es la aplicación lineal que mejor aproxima a los valores de F en un entorno del punto x.

2. Observemos que, si $F : (a,b) \to (c,d)$ es un difeomorfismo de clase 1 entre intervalos abiertos de $\mathbb{R}$, entonces

$$|\det DF_x| = |F'(x)| \quad \forall x \in (a,b).$$

Por lo tanto, el Teorema del Cambio de Variables 3.5.2 indica que, para cualquier función medible $g : (a,b) \to \mathbb{R}$, se tiene

$$\int_{F(a,b)} g\, dm = \int_{(a,b)} g \circ F \cdot |F'|\, dm$$

Esta fórmula extiende al resultado que conocíamos para la integración Riemann, aunque con una apariencia ligeramente distinta. Primero, observemos que, como F es una aplicación continua y biyectiva en (a,b), debe ser estrictamente creciente o bien estrictamente decreciente. Si además, F puede extenderse a una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces $F[a,b]$ es el intervalo de extremos $c = F(a)$ y $d = F(b)$; si no es así, podemos interpretar las integrales de Riemann en el sentido impropio. Con estas notaciones, el teorema fundamental del cálculo para la integración Riemann permitía escribir, si F es creciente,

$$\int_c^d g(x)\, dx = \int_a^b g[F(x)] \cdot F'(x)\, dx, \tag{3.e}$$

y, si F es decreciente,

$$\int_c^d g(x)\, dx = -\int_d^c g(x)\, dx = -\int_b^a g[F(x)] \cdot F'(x)\, dx. \tag{3.f}$$

Así, el miembro derecho de las igualdades 3.e y 3.f coincide con $\int_{(a,b)} g \circ F \cdot |F'|\, dm$, sin más que observar que $F'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$ en el primer caso, y $F' < 0$ en el segundo.

Antes de dar una demostración del Teorema del Cambio de Variables, veremos algunos ejemplos de aplicación.

Ejemplo 3.5.3. Calculemos

$$\iint_D \frac{2y^3}{x}\, dxdy,$$

donde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le xy \le 4,\ 0 < \frac{x}{4} \le y \le x\right\}$. En otras palabras, D es la región del primer cuadrante encerradas por las hipérbolas $y = \frac{1}{x}$ e $y = \frac{4}{x}$ y las rectas $y = x$ e $y = x/4$ –véase la Figura 3.2.

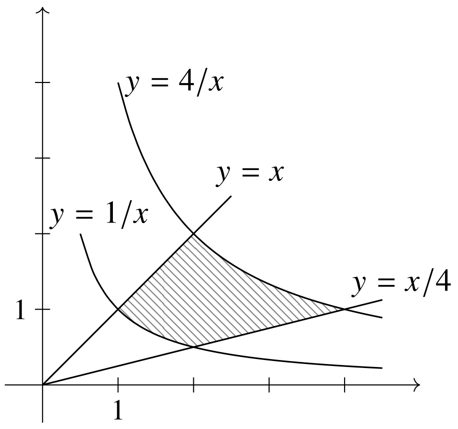


Figura 3.2: La región D.

Para ello, elegiremos un cambio de variables adecuado. Fijémonos en que

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq xy \leq 4,\ \tfrac{1}{4} \leq \tfrac{y}{x} \leq 1,\ x > 0\right\},$$

lo cual sugiere considerar como "nuevas variables" $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$, y como "nueva región"

$$E = \{(u, v) : 1 \leq u \leq 4,\ \tfrac{1}{4} \leq v \leq 1\} = [1, 4] \times [\tfrac{1}{4}, 1].$$

En tal caso, la propia definición de D nos daría que

$$(u, v) \in E \iff (x, y) \in D,$$

con el añadido de que integrar sobre E es mucho más fácil que integrar sobre D. Para encontrar el difeomorfismo F adecuado, deberemos expresar (x, y) en función de (u, v). Esto puede hacerse sin más que despejar: se tiene que $x = \sqrt{u/v}$, $y = \sqrt{uv}$. Así que, si llamamos

$$F : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2, \quad F(u, v) = (\sqrt{u/v}, \sqrt{uv}),$$

entonces F es un difeomorfismo de clase 1 en el abierto $U = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$, y se verifica que $D = F(E)$. En efecto, la segunda afirmación está clara por el razonamiento anterior, y la primera se comprueba fácilmente mediante la Proposición 3.5.1:

$$DF_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{uv}} & -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v^3}} \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{v}{u}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v}} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\det DF_{(u,v)}| = \frac{1}{2v} > 0$$

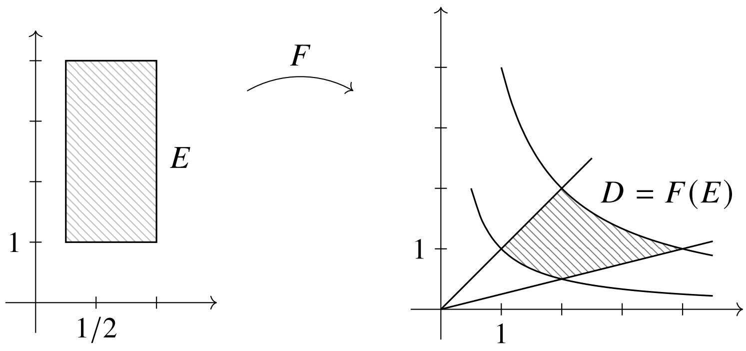


Figura 3.3: La región E bajo el cambio de variables $F(u, v) = (\sqrt{u/v}, \sqrt{uv})$.

De esta manera, el Teorema del Cambio de Variables afirma que, para $g(x, y) = 2y^3/x$, se tiene

$$\int_{F(E)} g(x, y)\,dx\,dy = \int_E (g \circ F)(u, v) \cdot |\det DF_{(u,v)}|\,du\,dv. \tag{3.g}$$

Así,

$$\int_{F(E)} \frac{2y^3}{x}\,dx\,dy = \int_E \frac{2(\sqrt{uv})^3}{\sqrt{u/v}} \cdot \frac{1}{2v}\,du\,dv = \int_1^4 \int_{\frac{1}{4}}^1 u\,du\,dv = 3. \quad ☺$$

Cambios de coordenadas habituales

En el contexto del Teorema del Cambio de Variables, los difeomorfismos de clase 1 suelen denominarse *cambios de coordenadas*. Hay algunos cambios que ocurren con mucha frecuencia en problemas físicos y geométricos, así que conviene conocerlos bien.

Coordenadas polares

Todo punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que no pertenezca al semieje positivo de las x puede representarse en función de la *distancia al origen* r y del *ángulo* θ que forma con el semieje positivo de las x. Explícitamente,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan\frac{y}{x}, \tag{3.h}$$

con la precaución de tomar el ángulo θ en el cuadrante correspondiente, y entendiendo que

$$\arctan\frac{y}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } y > 0,\ x = 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{si } y < 0,\ x = 0 \end{cases}$$

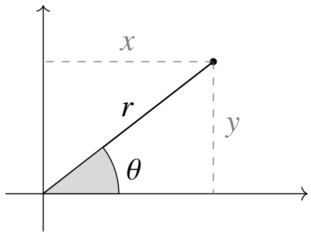


Figura 3.4: Coordenadas polares.

La Figura 3.4 indica que

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{3.i}$$

Así, podemos considerar $U = (0, +\infty) \to (0, 2\pi)$ y definir la aplicación

$$F : U \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}, \quad F(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta),$$

a la que llamaremos *aplicación de cambio de coordenadas polares*. Las ecuaciones anteriores 3.h y 3.i implican que F es biyectiva. Además, su matriz jacobiana en un punto $(r, \theta) \in U$ es

$$DF_{(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix},$$

con lo cual, F es de clase 1. Finalmente, puesto que

$$|\det DF_{(r,\theta)}| = r,$$

se deduce que $DF_{(r,\theta)}$ es invertible en todo punto de U, y por lo tanto F es un difeomorfismo de clase 1.

El Teorema del Cambio de Variables nos permite conocer que para cualquier boreliano $B \subseteq U$ y cualquier función Borel medible $f : U \to \mathbb{R}$, se tiene

$$\int_{F(B)} f(x, y)\, dx\, dy = \int_B f(r\cos\theta, r\sin\theta) \cdot r\, dr\ \ d\theta.$$

Fijémonos en que $F(U)$ no es todo $\mathbb{R}^2$, lo cual podría ser un inconveniente. Sin embargo, el complementario de $F(U)$ en $\mathbb{R}^2$ es un conjunto de *medida nula* en $\mathbb{R}^2$, con lo cual, no necesitaremos preocuparnos por este detalle.

Ejemplo 3.5.4. Veamos cómo calcular en coordenadas polares el área del círculo unidad. Se trata, entonces, de calcular la medida de

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Para ello, observemos que los puntos $(x, y) \in D$ son aquellos cuyas coordenadas polares (r, θ) cumplen $0 \leq r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Esto sugiere considerar

$$E = \{(r, \theta) \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi) : 0 < r \leq 1,\ 0 < \theta < 2\pi\},$$

ya que $D = F(E)$. El conjunto E se utiliza para describir en coordenadas polares al conjunto $D = F(E)$, tal y como se indica en la Figura 3.5. En la práctica se dice que E se obtiene "expresando E en coordenadas polares".

Así, el Teorema del Cambio de Variables afirma que

$$m[F(E)] = \int_{F(E)} dm = \int_E |\det DF_{(r,\theta)}|\, dm = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\, d\theta dr =$$
$$= 2\pi \int_0^1 r\ \ dr = \pi. \quad ☺$$

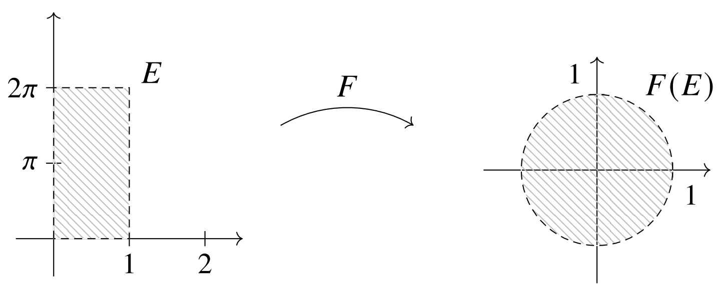


Figura 3.5: Transformación en coordenadas polares.

Ejemplo 3.5.5. Calculemos el volumen del sólido que queda entre el círculo unidad en $\mathbb{R}^2$ y bajo la gráfica de la función $f(x, y) = \sin\left(\pi(x^2 + y^2)\right)$. Observemos que $f(x, y)$ es no negativa en $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, así que el volumen pedido coincide con la integral

$$\int_D \sin(\pi(x^2 + y^2))\, d(x, y).$$

Para calcularla, observemos de nuevo que $D = F(E)$, para $E = \{(r,\theta) \in (0,+\infty) \times (0,2\pi) : 0 \le r \le 1\}$, por lo tanto,

$$\int_{F(E)} \sin\left(\pi(x^2+y^2)\right) dx\, dy = \int_E r \sin(\pi r^2)\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^1 2\pi r \sin(\pi r^2)\, dr \right) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\, d\theta = 2. \quad ☺$$

Ejemplo 3.5.6. La curva cuyas ecuaciones en coordenadas polares es $r(\theta) = 1+\cos\theta$, se conoce como *caracol de Pascal*. Se puede hacer un esbozo de la curva dando algunos valores a $\theta \in (0,2\pi)$, como se muestra en la Figura 3.6.

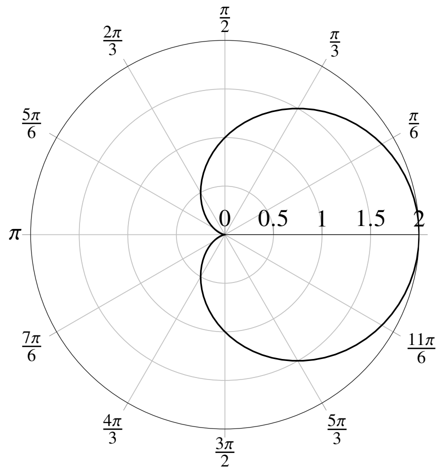


Figura 3.6: Caracol de Pascal $r = 1 + \cos\theta$.

El área que encierra dicha curva puede calcularse mediante una integral doble, pues coincide con la medida del conjunto $F(E)$, donde

$$E = \{(r,\theta) : r \le 1+\cos\theta,\ \theta \in (0,2\pi)\}$$

Por lo tanto,

$$m[F(E)] = \int_{F(E)} d(x,y) = \int_E |\det DF_{(r,\theta)}|\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} r\, dr\, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)^2\, d\theta =$$

$$= \left[\sin\theta + \frac{1}{8}\sin 2\theta + \frac{3}{4}\theta \right]_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\pi. \quad ☺$$

Coordenadas cilíndricas

Dado un punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que no pertenezca al semieje positivo de las x, podemos considerar (r, θ) las coordenadas polares de su proyección sobre el plano $z = 0$. De esta manera se obtienen las *coordenadas cilíndricas*.

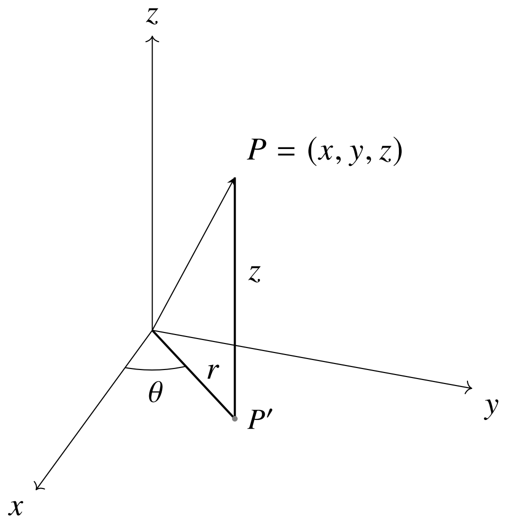


Figura 3.7: Coordenadas cilíndricas.

Formalmente, consideramos $U = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ y definimos

$$F : U \to \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x > 0\}, \quad F(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z),$$

que recibe el nombre de *aplicación de cambio de coordenadas cilíndricas*. Se trata, claro está, de un difeomorfismo de clase 1, ya que su matriz jacobiana es

$$DF_{(r,\theta,z)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y, por lo tanto, $\det(DF_{(r,\theta,z)}) = r > 0$ para todo $(r, \theta, z) \in U$. Fijémonos en que los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que pertenecen al semiplano $y = 0, z > 0$ no tienen "coordenadas cilíndricas", pero se trata de un conjunto de medida nula en $\mathbb{R}^3$. Así que podemos utilizar el Teorema del Cambio de Variables para calcular integrales de funciones en $\mathbb{R}^3$ mediante el difeomorfismo F de cambio de coordenadas cilíndricas sin tener en cuenta este detalle.

Ejemplo 3.5.7. El volumen de un tronco de paraboloide hiperbólico de altura $h > 0$,

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z,\ 0 \leq z \leq h\},$$

se calcula fácilmente utilizando coordenadas cilíndricas. Para ello, basta con observar que, salvo un conjunto de medida nula, D coincide con $F(E)$, donde F es el difeomorfismo de cambio de coordenadas cilíndricas y E se obtiene "expresando D en coordenadas cilíndricas", es decir,

$$E = \{(r, \theta, z) \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} : r \leq \sqrt{z},\ 0 \leq z \leq h\}.$$

Por lo tanto,

$$m(D) = \int_{F(E)} d(x, y, z) = \int_E |\det DF_{(r,\theta,z)}|\, d(r, \theta, z) =$$
$$= \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} r\, dr\, d\theta\, dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{z}{2}\, d\theta\, dz = \pi h. \quad ☺$$

Coordenadas esféricas

Dado un punto $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que no pertenezca al eje z ni al semieje positivo de las x, podemos asignarle tres valores (r, θ, ϕ) como se muestra en la Figura 3.8. Es decir,

- r es la distancia al origen.
- ϕ es el ángulo *polar*, es decir, el ángulo que forma P con el semieje positivo de las z.
- θ es el ángulo *azimutal*, es decir, el ángulo que forma la proyección del punto P sobre el plano XY con el semieje positivo de las x.

Concretamente, utilizando que el triángulo OPP' de la figura 3.8 es rectángulo, se tiene

$$z = r \sin(\tfrac{\pi}{2} - \phi) = r \cos \phi, \quad r' = r \cos(\tfrac{\pi}{2} - \phi) = r \sin \phi,$$

y puesto que (r', θ) son las coordenadas polares del punto (x, y), deducimos que

$$x = r' \cos \theta = r \sin \phi \cos \theta, \quad y = r' \sin \theta = r \sin \phi \sin \theta$$

Así, si llamamos $U = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$, la aplicación

$$F : U \to \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \geq 0, z \in \mathbb{R}\},$$
$$F(r, \theta, \phi) = (r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi),$$

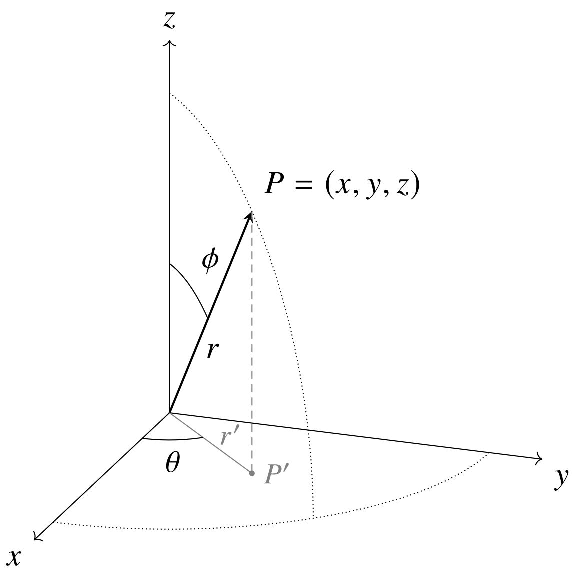


Figura 3.8: Coordenadas esféricas.

es biyectiva en U, según el razonamiento anterior. Además,

$$DF_{(r,\theta,\phi)} = \begin{pmatrix} \sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta & r\sin\phi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\phi \end{pmatrix},$$

luego

$$|\det(DF_{(r,\theta,\phi)})| = r^2\sin\phi,$$

que es distinto de cero para todo punto $(r,\theta,\phi) \in U$. Por tanto, F es un difeomorfismo de clase 1.

De nuevo, $\mathbb{R}^3 \setminus F(U)$ mide cero, con lo cual, el difeomorfismo anterior puede utilizarse para el cálculo de integrales triples sin ninguna dificultad añadida.

Ejemplo 3.5.8. El volumen de la esfera centrada en el origen y radio R, es decir

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < R^2\},$$

puede calcularse observando que, salvo un conjunto de medida nula, D coincide con $F(E)$, donde F es el difeomorfismo de cambio de coordenadas esféricas y

$$E = \{(r,\theta,\phi) : 0 < r \leq R\} = (0,R) \times (0,2\pi) \times (0,\pi).$$

Por lo tanto,

$$m(D) = \int_{F(E)} d(x,y,z) = \int_E |\det(DF_{(r,\theta,\phi)})|\, d(r,\theta,\phi) =$$
$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin\phi \, d\phi \, d\theta \, dr = \frac{4\pi}{3} R^3. \quad ☺$$

Demostración del Teorema del Cambio de Variables

Fijemos, durante toda esta sección, $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow F(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo de clase 1. Se trata de probar la fórmula

$$\int_E g \, dm = \int_{F^{-1}(E)} g \circ F \cdot |\det DF| \, dm,$$

donde $E \subseteq F(U)$ es un boreliano de $\mathbb{R}^n$ y $g : F(U) \to \mathbb{R}$ es una función medible. En primer lugar, observemos que si probamos una de las desigualdades, pongamos

$$\int_E g \, dm \leq \int_{F^{-1}(E)} g \circ F \cdot |\det DF| \, dm, \tag{3.j}$$

la otra desigualdad se sigue utilizando el difeomorfismo F^{-1}. En segundo lugar, basta con probar la fórmula (3.j) para el caso particular de $g = 1_{F(B)}$, con $B \subseteq U$, y tomando $E = U$:

Lema fundamental 3.5.9. *Dado un boreliano $B \subseteq U$, se verifica que $F(B)$ es un boreliano de $F(U)$, y*

$$m[F(B)] \leq \int_B |\det DF(x)| \, dm(x).$$

En efecto, una vez probado el lema anterior, el Teorema del Cambio de Variables se obtiene a partir de él aplicándolo primero a funciones simples, después a funciones medibles no negativas con la ayuda del Teorema de la Convergencia Monótona, y finalmente a funciones integrables. En efecto, si $g = \sum_{k=1}^m a_k I_{A_k}$, entonces por linealidad,

$$\int_E g \, dm = \sum_{k=1}^m a_k \cdot m(A_k \cap E) \leq \sum_{k=1}^m a_k \left(\int_{F^{-1}(A_k \cap E)} |\det DF| \, dm \right) =$$
$$= \int_{F^{-1}(E)} \left(\sum_{k=1}^m a_k I_{F^{-1}(A_k)} \right) \cdot |\det DF| \, dm = \int_{F^{-1}(E)} g \circ F \cdot |\det DF| \, dm.$$

Si g es medible no negativa, existe una sucesión creciente de funciones simples $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ convergentes a g. Entonces, la sucesión de funciones $s_k \circ F \cdot |\det DF|$ converge puntualmente a $g \circ F \cdot |\det DF|$, y

$$\int_E g\, dm = \lim_k \int_E s_k\, dm \leq \lim_k \int_{F^{-1}(E)} s_k \circ F \cdot |\det DF|\, dm =$$
$$= \int_{F^{-1}(E)} g \circ F \cdot |\det DF|\, dm,$$

aplicando el apartado anterior y el Teorema de la Convergencia Monótona. Finalmente, si g es integrable,

$$\int_{F^{-1}(E)} (g \circ F \cdot |\det DF|)^+\, dm = \int_{F^{-1}(E)} g^+ \circ F \cdot |\det DF|\, dm \leq \int_E g^+\, dm < +\infty,$$
$$\int_{F^{-1}(E)} (g \circ F \cdot |\det DF|)^-\, dm = \int_{F^{-1}(E)} g^- \circ F \cdot |\det DF|\, dm \leq \int_E g^-\, dm < +\infty,$$

con lo cual, la función $g \circ F \cdot |\det DF|$ es integrable en $F^{-1}(E)$, y la suma de las dos igualdades anteriores es justamente la fórmula (3.j).

La prueba del Lema fundamental 3.5.9 se hará por etapas. Durante todo el desarrollo, denotaremos, $Q(x_0, \delta)$ al *semi-cuadrado* de centro $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y radio $\delta > 0$; es decir,

$$Q(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_0 - \delta < x \leq x_0 + \delta\}.$$

La idea fundamental es que, para difeomorfismos de clase 1, las distancias $\|F(x) - F(x_0)\|$ pueden aproximarse por las distancias $\|DF_{x_0}(x - x_0)\|$ en un entorno del punto x_0.

Lema 3.5.10. *Sea $x_0 \in U$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, si $x, y \in Q(x_0, \delta)$, entonces*

$$\|F(x) - F(x_0)\| \leq (1 + \varepsilon)\|DF_{x_0}(x - x_0)\|. \tag{3.k}$$

Demostración. La definición de diferenciabilidad de F en el punto x_0 afirma que, dado $\eta > 0$, existe δ de manera que si $\|x_0 - x\| \leq \delta$, entonces

$$\|F(x) - F(x_0) - DF_{x_0}(x - x_0)\| \leq \eta\|x - x_0\|.$$

Ahora bien, como DF_{x_0} es invertible, $\|DF_{x_0}(x)\| > 0$ en todo punto x de la esfera unidad de $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, la compacidad de la esfera unidad y la continuidad de

DF_{x_0} garantizan la existencia de un $M > 0$ tal que $\|DF_{x_0}(x)\| \geq M$ para todo x tal que $\|x\| = 1$, con lo cual

$$\|DF_{x_0}(x - x_0)\| = \|x - x_0\| \cdot \left\| DF_{x_0}\left(\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}\right) \right\| \geq M\|x - x_0\|.$$

Así, obtenemos que

$$\|F(x) - F(x_0)\| \ \leq \eta\|x - y\| + \|DF_{x_0}(x - x_0)\| \leq \left(1 + \frac{\eta}{M}\right)\|DF_{x_0}(x - x_0)\|,$$

de modo que eligiendo $\eta < M\varepsilon$ se concluye. $\square$

Consideremos, pues, $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to F(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo de clase 1. Es esencialmente una consecuencia del Corolario 1.2.2 que $F(B)$ es un boreliano de $\mathbb{R}^n$ para todo boreliano B contenido en U. ¿Qué podemos decir, en este caso, de la medida de $F(B)$? Pongámoslo fácil: veamos qué ocurre si tomamos como B un semi-cuadrado $Q(x_0, \delta)$, al cual denotaremos simplemente Q. El Teorema del Valor Medio afirma que

$$\|F(x) - F(x_0)\| \leq M\|x - x_0\| \tag{3.1}$$

donde M es una cota de los valores $\|DF_x\|$, con $x \in Q$. Por lo tanto, la propia definición de Q implica que $F(Q) \subseteq Q(F(x_0), M\delta)$, así que $m[F(Q)] \leq M^n \cdot m(Q)$.

Nuestra desigualdad (3.k) es más fina que (3.1), y de hecho puede aplicársele el mismo razonamiento sin más que reescribirla utilizando el difeomorfismo $G = DF_{x_0}^{-1} \circ F$:

$$\|G(x) - G(x_0)\| \ \leq (1 + \varepsilon)\|x - x_0\|.$$

Deducimos, pues, que $G(Q) \subseteq Q(G(x_0), (1 + \varepsilon)\delta)$, y así

$$F(Q) = DF_{x_0}[G(Q)] \subseteq (1 + \varepsilon) \cdot DF_{x_0}[Q(G(x_0), \delta)].$$

De esta manera, podemos comparar la medida de $F(Q)$ con la medida de $DF_{x_0}(Q)$. Hemos probado, por tanto:

3.5.11. *Dado $x_0 \in U$, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ de manera que el semi-cuadrado $Q = Q(x_0, \delta)$ verifica*

$$m[F(Q)] \leq (1 + \varepsilon)^n \cdot |\det DF_{x_0}| \cdot m(Q).$$

Ahora, trataremos de extender el resultado a borelianos *contenidos* en un cierto semi-cuadrado de lado suficientemente pequeño. Fijado $x_0 \in U$, consideremos un semi-cuadrado $Q \subseteq U$ centrado en x_0 y de radio δ que satisfaga 3.5.11. Dado $B \subseteq Q$ un boreliano, consideremos un recubrimiento numerable de B por semi-cuadrados $Q_k = Q(x_k, \delta_k)$ contenidos en Q. Entonces, $F(B) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} F(Q_k)$, y la desigualdad 3.5.11 afirma que

$$m[F(B)] \leq \sum_{k=1}^{\infty} m[F(Q_k)] \leq (1+\varepsilon)^n \sum_{k=1}^{\infty} |\det DF_{x_k}| \cdot m(Q_k). \tag{3.m}$$

La desigualdad anterior no es demasiado útil, pues depende de los centros de los semi-cuadrados elegidos. Para solucionar esto, utilizaremos que, si δ es suficientemente pequeño, los valores de $\det DF_x$ con $x \in Q$ oscilan poco. En otras palabras, la aplicación $x \mapsto \det DF_x$ es continua en x_0 y no se anula en x_0, así que si $\delta > 0$ es suficientemente pequeño, podemos asegurar que $\det DF_x$ es no nulo para todo $x \in Q(x_0, \delta)$, y además

$$(1+\varepsilon)^{-1} \cdot |\det DF_x| \leq |\det DF_{x_0}| \leq (1+\varepsilon) \cdot |\det DF_x| \tag{3.n}$$

Por lo tanto, utilizando (3.n), se deduce de (3.m) que

$$m[F(B)] \leq (1+\varepsilon)^{n+1} \cdot |\det DF_{x_0}| \sum_{k=1}^{\infty} m(Q_k).$$

Ahora, tomando ínfimos, llegaríamos a la desigualdad

$$m[F(B)] \leq (1+\varepsilon)^{n+1} \cdot |\det DF_{x_0}| \cdot m(B)$$

siempre que pudiéramos garantizar que la medida de Lebesgue de B puede calcularse considerando únicamente recubrimientos por *semi-cuadrados de lado menor que* δ. Pero esto es cierto, y se deduce fácilmente del Lema 1.2.6: dado un semi-rectángulo I, fijemos un $\varepsilon > 0$ y sea J un semi-rectángulo tal que $I \subseteq \mathring{J}$ y $m(J) \leq m(I) + \varepsilon$. Como $\mathring{J}$ es unión disjunta de semi-cuadrados $(Q_k)_{k=1}^{\infty}$, y es fácil ver que dichos semi-cuadrados pueden tomarse de lado menor o igual que un cierto $\delta > 0$ prefijado, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(Q_k) = m(J) \leq m(I) + \varepsilon,$$

y por tanto, $m(I)$ coincide con el ínfimo de las sumas $\sum_{k=1}^{\infty} m(Q_k)$, donde $(Q_k)_{k=1}^{\infty}$ es un recubrimiento numerable de I por semi-cuadrados de lado menor que δ. La propia definición de medida (exterior) de Lebesgue permite extender esta igualdad para cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^n$

En resumidas cuentas, hemos probado:

3.5.12. *Sea $x_0 \in U$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ de manera que, si B es un boreliano contenido en $Q(x_0, \delta) \cap U$, entonces*

$$m[F(B)] \leq (1+\varepsilon)^{n+1} \cdot |\det DF_{x_0}| \cdot m(B)$$

Para terminar la demostración, necesitamos extender 3.5.12 para cualquier boreliano B. Fijémonos en que no podemos hacer directamente $\varepsilon \to 0$: el radio del semi-cuadrado δ depende de ε, y si $\delta \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$, entonces no tendremos nada de interés. Lo primero que debemos eliminar es la dependencia del punto x_0 en 3.5.12. Esto no es difícil utilizando de nuevo las desigualdades (3.n):

$$m[F(B)] \leq (1+\varepsilon)^{n+1} \int_B |\det DF_{x_0}|\, dm \leq (1+\varepsilon)^{n+2} \int_B |\det DF_x|\, dm.$$

Así pues, llegamos a:

3.5.13. *Sea $x_0 \in U$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ de manera que, si B es un boreliano contenido en $Q(x_0, \delta) \cap U$, entonces*

$$m[F(B)] \leq (1+\varepsilon)^{n+2} \int_B |\det DF|\, dm.$$

Finalmente, consideremos B un boreliano contenido en U. Como, según el Lema 1.2.6, U puede escribirse como unión disjunta de semi-cuadrados con adherencia contenida en U, entonces B puede escribirse, a su vez, como unión disjunta de borelianos, cada uno de ellos contenido en un semi-cuadrado con adherencia en U. Así que vamos a fijarnos en un boreliano C que está contenido en un semi-cubo Q cuya adherencia está, a su vez, contenida en U. Fijado $\varepsilon > 0$, cada punto $x \in C$ posee, según 3.5.13, un δ_x de manera que para cualquier boreliano $C_x \subseteq Q(x, \delta_x)$ se verifica

$$m[F(C_x)] \leq (1+\varepsilon)^{n+2} \int_{C_x} |\det DF|\, dm.$$

Pero $\overline{Q}$ es compacto, y los semi-cuadrados abiertos $\mathring{Q}(x, \delta_x)$ forman un recubrimiento suyo, así que podemos extraer un subrecubrimiento finito

$$C \subseteq \overline{Q} \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} \mathring{Q}(x_k, \delta_k) \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} Q(x_k, \delta_k)$$

Ahora, escribiremos C como unión *disjunta* de borelianos $C_1, ..., C_m$, cada uno de ellos contenido en un semi-cuadrado $Q(x_k, \delta_k)$, y apliquemos 3.5.13, para concluir que

$$m[F(C)] = \sum_{k=1}^{m} m[F(C_k)] \leq (1+\varepsilon)^{n+2} \sum_{k=1}^{m} \int_{C_k} |\det DF| \, dm =$$
$$= (1+\varepsilon)^{n+2} \int_C |\det DF| \, dm.$$

Y, ahora sí, hemos eliminado la dependencia de δ en la cadena de desigualdades anterior. Luego, como esto se tiene para todo $\varepsilon > 0$, concluimos que todo boreliano C contenido en un semi-cuadrado con adherencia contenida en U verifica el Lema Fundamental 3.5.9:

$$m[F(C)] \leq \int_C |\det DF| \, dm.$$

Pero hemos quedado en que nuestro boreliano B era, a su vez, unión numerable disjunta de borelianos B_k, con $k \in \mathbb{N}$, cada uno de ellos contenido en un semi-cuadrado con adherencia contenida en U. Por lo tanto, escribiendo $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ concluimos que

$$m[F(B)] = \sum_{k=1}^{\infty} m[F(B_k)] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_k} |\det DF| \, dm = \int_B |\det DF| \, dm,$$

lo cual es suficiente para concluir la demostración del Lema Fundamental 3.5.9, y con ello, la demostración del Teorema de Cambio de Variables 3.5.2.

Autoevaluación

Elíjase una de las respuestas (a), (b), (c) ó (d) para cada pregunta. Solamente hay una respuesta correcta en cada caso.

1. ¿A cuál de las siguientes sucesiones de funciones puede aplicársele el Teorema de la Convergencia Dominada?

   a) $f_k(x) = x^k$.

   b) $f_k(x) = I_{[0,k]}(x)$.

   c) $f_k(x) = I_{[0,\frac{1}{k}]}(x)$.

   d) $f_k(x) = k \cdot I_{[k,k+\frac{1}{2^k}]}(x)$.

2. Dada $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función medible, consideremos la sucesión $a_n = \int_k^{+\infty} f(x)dx$. ¿Qué hipótesis necesitamos añadir para concluir que $\lim_k a_k = 0$?

    a) f es integrable.

    b) f es acotada.

    c) f es no negativa.

    d) No es necesario añadir ninguna hipótesis.

3. Consideremos la sucesión de funciones $f_k(x) = \frac{1}{k} \cdot I_{[k,k+1]}(x)$. Señálese la afirmación correcta:

    a) Existe el límite puntual f, y en virtud del Teorema de la Convergencia Dominada, se tiene $\int f\, dm = \lim_k \int f_k\, dm$.

    b) Existe el límite puntual f, se cumple $\int f\, dm = \lim_k \int f_k\, dm$, pero no se puede aplicar el teorema de la convegencia dominada.

    c) Existe el límite puntual f, pero no es integrable, y por tanto no se puede aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada.

    d) No existe el límite puntual, y por tanto, no se puede aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada.

4. Consideremos la sucesión de funciones $f_{2k}(x) = I_{[0,1]}(x)$ y $f_{2k+1}(x) = (1 + \frac{1}{k})I_{[1,2]}(x)$. Señálese la afirmación correcta:

    a) Se puede aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada.

    b) Se puede aplicar el lema de Fatou, pero se tiene $\limsup \int f_k < \int \limsup f_k$.

    c) Se puede aplicar el lema de Fatou, y además $\limsup \int f_k = \int \limsup f_k$.

    d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

5. Consideremos una sucesión de funciones $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ tales que $\int f_k\, dm = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Señálese la afirmación correcta:

    a) Si $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ converge puntualmente a 0, entonces no se puede aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada.

    b) Si existe M tal que $|f_k| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces se puede aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada.

    c) Si $f_k \leq f_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces se puede aplicar el Teorema de la Convergencia Monótona.

d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

6. Sean $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ funciones medibles de las que conocemos que $\int_0^1 f(x)dx = 1$. La función $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x,y) = f(x) \cdot g(y)$...

   a) ...es integrable.

   b) ...cumple que $\int_0^1 \int_0^1 h(x,y)\, dx\, dy = 0$ si $\int_0^1 g(x)\, dx = 0$.

   c) ...cumple que $\int_0^1 \int_0^1 h(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 h(x,y)\, dy\, dx$, si asumimos que g es no negativa.

   d) Todas las afirmaciones anteriores son correctas.

7. Sea $B = [0,1] \times [0,1]$, y consideremos $f : B \to \mathbb{R}$ una función continua en $B \setminus \{(0,0)\}$. Si queremos asegurar que $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dx\, dy$, ¿qué hipótesis necesitamos añadir sobre f?

   a) $f \geq 0$ en una bola centrada en $(0,0)$ de radio $1/4$.

   b) El límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ es finito.

   c) Las dos afirmaciones anteriores son correctas.

   d) No es necesario añadir ninguna condición.

8. Sea el conjunto $B = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2,\ \sqrt{2} \leq x - y \leq 2\}$. ¿Cuál de las siguientes expresiones da como resultado el área de B?

   a) $\int_1^2 \int_{-\pi/2}^0 r\, d\theta dr$.

   b) $\int_1^2 \int_{-\pi/2}^0 x\, dxdy$.

   c) $\int_1^2 \int_{\sqrt{2}}^2 d\theta dr$.

   d) $\int_1^2 \int_{\sqrt{2}}^2 2(x-y)\, dxdy$.

9. ¿Cuál de los siguientes cambios de variable transforma el triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$ en el triángulo de vértices $(1,2)$, $(2,3)$ y $(3,1)$?

   a) $T(x,y) = (x+1, y+2)$.

   b) $T(x,y) = (x+2y+1, y-2x+2)$.

   c) $T(x,y) = (2x+y+1, -x+y+2)$.

   d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

10. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo de clase 1 y E un boreliano de $\mathbb{R}^n$. Señálese la afirmación correcta:

    a) Si $m(E) = 0$, entonces $m[T(E)] = 0$.

    b) Si $|\det DT_x| \leq 1$ en todo punto $x \in E$, entonces $m[T(E)] \leq m(E)$.

    c) Si E es compacto y f es integrable sobre $T(E)$, entonces $f \circ T$ es integrable sobre E.

    d) Todas las afirmaciones anteriores son correctas.

Ejercicios

1. Sea la sucesión de funciones $f_{2k} = I_{[0,1]}$ y $f_{2k+1} = I_{[1,2]}$.

    a) Escríbanse explícitamente las sucesión $g_k = \liminf f_k$ y $h_k = \limsup f_k$.

    b) ¿Puede aplicarse el lema de Fatou? En caso afirmativo, ¿se da la igualdad?

2. Considérese la sucesión de funciones $f_k = \frac{1}{k}(I_{[0,k]} - I_{(k,2k]})$.

    a) Pruébese que $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ converge puntualmente a una función f.

    b) ¿Se puede aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada para probar que $\lim_k \int f_k = \int f\, dm$?

3. Sea $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles reales definidas en $[0, +\infty)$ que convergen puntualmente a 0. ¿Bajo cuáles de las siguientes hipótesis se puede asegurar que $\int_{[0,+\infty)} f_k\, dm = 0$?

    a) Para todo $k \geq 2026$, $|f_k(x)| < e^{-x}$.

    b) Para cada $x > 0$ y $k \in \mathbb{N}$, $f_k(x) \geq f_{k+1}(x)$.

    c) Para cada $x > 0$ y $k \in \mathbb{N}$, $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$.

    d) Para cada $x > 0$ y $k \in \mathbb{N}$, $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$, y además, f_{2026} es integrable.

    e) $f_k(x) \leq \frac{1}{k}$ para todo $x > 0$.

    f) Todas las f_k son continuas.

    g) Todas las f_k están acotadas.

    h) Todas las f_k se anulan fuera del intervalo $[0, 1]$.

    i) Todas las f_k están acotadas, y además, se anulan fuera del intervalo $[0, 1]$.

4. Para los siguientes límites, se pide calcular su valor, o probar que no existen. El *Teorema de la Convergencia Dominada* (3.1.3), pág. 83, puede ser de ayuda, pero el hecho de que no se pueda aplicar no implica que el límite no exista.

   a) $\lim_k \int_0^{2\pi} \sin^k x \, dx.$

   b) $\lim_k \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^3 + k\cos^2 x} \, dx.$

   c) $\lim_k \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(kx) \, dx.$

   d) $\lim_k \int_1^{+\infty} \frac{k^2}{\sqrt{1 + k^4 x^4}} \, dx.$

   e) $\lim_k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-k)^2} \, dx.$

   f) $\lim_k \int_0^1 \frac{kx\log x}{1 + k^2x^2} \, dx.$

5. Sea $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles no negativas tales que $f_k \leq f$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y $f_k \xrightarrow{p} f$. Pruébese que, aunque la sucesión $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ no sea creciente, se tiene igualmente que $\int f_k \to \int f$.

6. Enúnciese y demuéstrese una versión del *Teorema de la Convergencia Dominada* con hipótesis casi seguro.

7. Sea $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Recordemos que $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ converge *uniformemente* a f si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ de manera que, si $n > N$, entonces $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in A$.

   Pruébese que si $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f, y además $m(A) < +\infty$, entonces

$$\lim_k \int_A f_k \, dm = \int_A f \, dm.$$

   ¿Puede suprimirse la hipótesis de $m(A) < +\infty$?

8. **Un corolario del Teorema de la Convergencia Dominada para series.**

   a) Consideremos $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles para las cuales $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ es integrable. Pruébese que la función

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

está bien definida en casi todo punto, es integrable, y se puede *permutar el límite con la integral*, es decir,

$$\int f\,dm = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k\,dm.$$

b) Como aplicación del apartado anterior, considérese la función

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos(kx)}{2^k},$$

calcúlese $\int_0^{\pi} f\,dm$, y dedúzcase el valor de $\int_0^{+\infty} f\,dm$.

9. Consideremos la función

$$f(t,x) = \frac{\sin tx}{x},\ x > 0.$$

a) Pruébese que para todo $t \in \mathbb{R}$, la función $f_t(x) = f(t,x)$ es integrable; es decir, que la integral

$$\int_0^1 \frac{\sin tx}{x}$$

es finita sea cual sea $t \in \mathbb{R}$.

b) En virtud del apartado anterior, podemos considerar

$$F(t) = \int_0^1 \frac{\sin tx}{x}\,dx.$$

Pruébese que F es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, y calcúlese F'.

10. Sea la función

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+x^2}\,dx$$

a) Demuéstrese que F está definida en $[0,+\infty)$.

b) Calcúlese $\lim_{t\to+\infty} F(t)$.

c) ¿Existe $\lim_{t\to 0^+} F(t)$? Si es así, ¿coincide con $F(0)$?

d) Pruébese que F es de clase 2 en $(0,+\infty)$, y que verifica la ecuación $F''(t) + F(t) = \frac{1}{t}$.

11. Consideremos la función

$$f(t,x) = \begin{cases} \dfrac{xt^3}{(x^2+t^2)^2} & \text{si}(t,x) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si}(t,x) = (0,0) \end{cases}$$

a) Pruébese que no se cumplen las hipótesis del teorema de derivación bajo la integral en ningún entorno de $t = 0$.

b) En cambio, compruébese mediante un cálculo directo de la integral, que $F(t) = \int_0^1 f(t,x)\,dx$ es derivable en todo $\mathbb{R}$, aunque

$$F'(0) \neq \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(0,x)\,dx.$$

12. **La función Gamma.**

Consideremos la función

$$\Gamma : (-1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}\,dx.$$

a) Pruébese que Γ está bien definida, y que es continua. Puede ayudar estudiar el comportamiento del integrando por separado en $(0,1)$ y en $(1,+\infty)$.

b) Pruébese que Γ es de clase 1, y calcúlese una expresión integral para $\Gamma'(t)$.

c) Generalícese el argumento del apartado anterior para probar que Γ es de clase infinito.

Indicación: los ejercicios 21 y 22 del tema anterior pueden ser útiles.

d) Pruébese que $\Gamma(t+1) = t\cdot\Gamma(t)$, y que $f(1) = 1$, y por lo tanto, $\Gamma(n+1) = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Nota: el Teorema de Bohr-Mollerup caracteriza la función Gamma como la única función $f : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ positiva que verifica $f(t+1) = t\cdot f(t)$, $f(1) = 1$, y con la propiedad de que $F(t) = \log[f(t)]$ es convexa.

13. **Fórmulas de derivación de Leibniz.**

Fijemos, durante todo el ejercicio, I y Ω dos intervalos abiertos de $\mathbb{R}$. Sea $f : I\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de dos variables tal que, para cada $t \in I$, la función $f_t(x) = f(t,x)$ es integrable en $\mathbb{R}$.

a) En este apartado supondremos, para simplificar, que $\Omega = (0,+\infty)$, y consideraremos

$$F(t) = \int_0^t f(t,x)\,dx.$$

Asumiendo que f cumple las hipótesis del teorema de derivación bajo la integral, pruébese que F está bien definida en todo $t > 0$, es diferenciable y verifica

$$F'(t) = f(t,t) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx.$$

Indicación: para cada $t > 0$ fijo, el cambio de variable $x = tu$ elimina la dependencia de t de los límites de integración.

b) Como aplicación, pruébese por inducción sobre n que dada una función $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua, la función

$$F_n(t) = \frac{1}{n!} \int_0^t f(x)(t-x)^{n-1}\, dx$$

es n veces derivable, y $F_n^{(n)}(t) = f(t)$. Esta igualdad se conoce como *fórmula de Cauchy para integrales iteradas*, y es un de los puntos de partida del llamado *cálculo fraccional.*

14. Para las siguientes integrales iteradas, se pide expresarlas como integrales dobles, cambiar el orden de integración, y calcular la integral:

a) $\int_0^1 \int_y^1 \sin x^2\, dxdy$.

b) $\int_{-2}^0 \int_{x^2}^{-4x-x^2} dxdy$.

c) $\int_0^1 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} y\, dxdy$.

d) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{2+\sqrt{1-x^2}} xy\, dydx$.

15. Calcúlese el valor de las siguientes integrales triples:

a) $\iiint_A ze^{xy}\, dxdydz$, donde A es la pirámide de base el cuadrado de lados $(1,1,0)$, $(1,-1,0)$, $(-1,1,0)$ y $(-1,-1,0)$ y vértice $(0,0,2)$.

b) $\iiint_A (x+y+z)\, dxdydz$, donde A es el tetraedro de vértices $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$ y $(1,0,0)$.

c) $\iiint_A (xz-y)\, dxdydz$ donde A es el recinto comprendido entre el cilindro $x^2+y^2=1$ y el plano $x-3y+2z=5$.

16. Para la integral

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y xyz\, dzdydx$$

cámbiese el orden de integración, indicando todas las maneras de calcular la integral, y hállese el valor de la misma.

17. **Un contraejemplo para el teorema de Fubini-Tonelli**.

Consideremos la función

$$f(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

a) Pruébese que f es medible en $[0,1]\times[0,1]$, pero no tiene integral.

b) Pruébese que las integrales iteradas

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx\right) dy, \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy\right) dx$$

no coinciden.

Indicación: las igualdades

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = f(x,y)$$

pueden simplificar el cálculo.

18. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función medible. Pruébese que su *gráfica*

$$\Gamma(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) = y\}$$

es un conjunto de medida nula.

19. Sea el recinto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y < 2x, x < y^2 < 2x\}$.

   a) Dibújese el recinto D.

   b) Justifíquese que la función $\varphi(x,y) = \left(\frac{x}{y}, \frac{y^2}{x}\right)$ define un cambio de variables admisible en D.

   c) Utilizando el cambio de variable anterior, hállese el valor de $\iint_D \frac{y}{x}\, dxdy$.

20. La recta $x + y = 6$ y la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0$ dividen a $\mathbb{R}^2$ en cuatro regiones. Si llamamos A a la región que contiene al punto $(1,1)$, calcúlese

$$\iint_A \frac{y}{x^2+y^2}\, dxdy.$$

21. Halla el valor de

$$\iiint_A \frac{xyz}{x^2+y^2}\, dxdydz$$

donde $A = \{(x,y,z) : 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 2\}$.

En los ejercicios del 22 al 26, ambos inclusive, se trata de calcular las integrales que aparecen utilizando los teoremas fundamentales de la integración Lebesgue, según se indica.

22. Calcúlese la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

Para ello, síganse los pasos indicados a continuación:

   a) Considérense las funciones

$$F(t) = \int_0^t e^{-x^2}\, dx, \quad G(t) = \int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\, dx.$$

   Pruébese que G está bien definida y que puede derivarse bajo la integral, y calcúlese $G'(t)$.

b) Dedúzcase que la función $[F(t)]^2 + G(t)$ es constante.

c) Calcúlese $\lim_{t\to+\infty} F(t)$, y conclúyase que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

d) Como aplicación, calcúlese $\Gamma(\frac{1}{2})$ y $\Gamma(k+\frac{1}{2})$ con $k \in \mathbb{N}$, donde $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}\,dx$ es la *función Gamma* –véase el ejercicio 12.

23. Calcúlese la integral $\int_0^1 \frac{\log x}{x-1}\,dx$. Para ello, escríbase

$$\frac{\log x}{x-1} = \sum_{k=0}^{\infty} -x^k \cdot \log x,$$

y utilícese el Corolario 8 para intercambiar el límite con la integral.

24. **Una función que no es integrable Lebesgue pero tiene integral de Riemann impropia finita.**

Sea $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ en el intervalo $(0, +\infty)$.

a) Pruébese que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se verifica

$$\int_{[\pi n, \pi(n+1)]} |f|\,dm \geq \frac{2}{\pi(n+1)}$$

y dedúzcase de lo anterior que f no es Lebesgue integrable.

b) Aplíquese el teorema de derivación bajo la integral a la función

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}\sin x}{x}\,dx$$

para deducir que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

25. Hállese el valor de la integral

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\log x}\,dx.$$

Para ello, exprésese la integral $\iint_{(0,1)\times(0,1)} x^y\,d(x,y)$ de dos maneras distintas cambiando el orden de integración mediante el teorema de Fubini-Tonelli.

26. La integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

puede calcularse también a través del teorema de Fubini o mediante el teorema de cambio de variables.

a) Primero, obsérvese que

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,d(x,y).$$

b) A continuación, introdúzcase una nueva variable $y = sx$ y pruébese, mediante el teorema de Fubini, que

$$I^2 = 4\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dy\right)dx = 4\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} x\cdot e^{-x^2(1+s^2)}ds\right)dx$$

Cámbiese el orden de integración en el miembro derecho de la igualdad anterior y conclúyase que $I = \sqrt{\pi}$.

Obsérvese que este cálculo sugiere la elección aparentemente misteriosa de la función G en el ejercicio 22.

c) Por otra parte, la integral

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}d(x,y)$$

puede calcularse directamente mediante coordenadas polares. Hágase y dedúzcase nuevamente que $I = \sqrt{\pi}$.

En los ejercicios del 27 al 30, ambos inclusive, el objetivo es representar algunas curvas habituales en coordenadas polares y calcular el área que encierran.

27. La curva cuya ecuación en coordenadas cartesianas es $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$ se denomina *lemniscata*. Esbócese y calcúlese el área que encierra.

28. Las curvas cuya ecuación en coordenadas polares es $r = \cos(n\theta)$, con $n \in \mathbb{N}$, se denominan *rosas polares*. Hállese el área que encierran. Puede ser conveniente distinguir entre n par y n impar.

29. Hállese el área que encierra el *cardioide*, cuya ecuación en coordenadas polares es $r = a(1+\cos\theta)$, con $a > 0$.

30. Las curvas cuya ecuación en coordenadas polares son de la forma $r = a + b\cos\theta$ con $a, b > 0$ y $a < b$ reciben el nombre de *caracoles de Pascal.*

    a) Compruébese, mediante un esbozo, que la curva del enunciado divide al plano en tres regiones, dos de las cuales están acotadas.

    b) Calcúlese el área de cada una de las dos regiones acotadas del apartado anterior.

En los ejercicios del 31 al 41, ambos inclusive, se trata de calcular el volumen de algunos conjuntos utilizando el teorema de Fubini-Tonelli y el teorema de cambio de variables.

31. Un *casquete esférico* es el recinto que queda contenido en una esfera y a un lado de un plano que la corta transversalmente.

    a) Hállese el volumen de un casquete esférico de radio R y altura h.

b) Hállese el volumen del conjunto

$$C = \left\{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1,\ z \geq h\right\},$$

es decir, un *"casquete elipsoidal"* de altura h correspondiente a un elipsoide de semiejes a, b y c.

32. Hállese el volumen comprendido entre el plano $z = 0$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$ de dos formas distintas; utilizando una integral doble y utilizando una integral triple.

33. Hállese el volumen de la región interior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ y al cilindro $x^2 + y^2 = 16$.

34. Hállese el volumen encerrado por la esfera de centro el origen de coordenadas y radio R y el cilindro que pasa por el origen de coordenadas, por el punto $(\frac{R}{2}, 0, 0)$ y cuyo eje es paralelo al eje Z.

35. Hállese el volumen que encierran las esferas de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

36. Un vaso cilíndrico de radio R y altura h está inclinado de modo que el agua del interior bisecta la base y toca el borde superior del vaso. Hállese el volumen del agua contenida en el vaso.

37. Las superficies cuya ecuación en coordenadas esféricas es

$$r = (1 + a\sin(b\theta)\sin(c\phi))^{\frac{1}{3}}$$

con $0 < a < 1$ y $b, c > 0$, se utilizan para modelar tumores. En inglés reciben el nombre de *"bumpy spheres"*.

a) Plantéese una integral triple cuyo resultado sea el volumen que contiene dicha superficie en función de a, b y c.

b) Hállese el valor de dicha integral.

c) Estúdiese, en función de a, b y c, cuándo el volumen es máximo o mínimo. En particular, analícese qué ocurre cuando b y c son números naturales.

38. Un flan tiene forma del tronco de paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ limitado por los planos $z = 0$ y $z = 1$.

a) Hállese el volumen del flan.

b) Hállese el volumen del trozo de flan que se obtiene mediante un corte vertical tangente a la base superior.

39. La base de un sólido tridimensional es una circunferencia de radio R, y todas las intersecciones del sólido por planos verticales paralelos a una dirección fija son rectángulos de altura la mitad de la base. Hállese el volumen de dicho sólido.

40. **Volúmenes de cuerpos de revolución.**

    Consideremos $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función medible no negativa.

    a) Pruébese que el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la gráfica de f alrededor del eje X es

    $$\pi \int_0^{+\infty} [f(x)]^2 \, dx.$$

    b) Pruébese que el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la gráfica de f alrededor del eje Y es

    $$2\pi \int_0^{+\infty} x f(x) \, dx.$$

41. Al hacer girar un círculo alrededor de una recta que no lo corta, se obtiene un sólido de revolución llamado *toro*. Calcúlese el volumen de dicho sólido en función del radio del círculo y la distancia del centro del círculo a la recta de giro.

42. **Una solución al problema de Basilea.**

    Utilizando los teoremas fundamentales de la integración Lebesgue podemos dar una demostración de que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Para ello, considérese la integral

    $$I = \int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{1}{1 - xy} \, dm(x, y),$$

    y síganse los pasos detallados a continuación:

    a) Utilizando que si $|t| < 1$, entonces $\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0} t^k$, pruébese que $I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Para ello, utilícese el Corolario 2.2.7 y el Teorema de Tonelli 3.3.2.

    b) Pruébese que, efectuando el cambio de variable

    $$u = \frac{1}{2}(x + y) \quad , \quad v = \frac{1}{2}(x - y)$$

    se tiene

    $$I = 2 \int_A \frac{1}{1 - u^2 + v^2} \, d(u, v), \tag{3.ñ}$$

    donde A es el cuadrado de vértices $(0, 0)$,$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(1, 0)$ y $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

c) Pruébese que

$$I = 4\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du\right],$$

utilizando que $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C$.

d) Conclúyase, utilizando las igualdades

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)\, dt = \frac{1}{2}\arctan^2\left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \arctan\left(\frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}\right)\, dt = -\arctan^2\left(\frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}\right).$$

Estas integrales no son difíciles de calcular: basta con hacer los cambios de variables $z = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ (para la primera) y $z = \frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}$ (para la segunda).