Proyecto III

Ángel González Prieto

1 de noviembre de 2021

1. Determinante

En este documento vamos a explicar la utilidad del *determinante* para caracterizar aplicaciones lineales que sean isomorfismos.

1.1. Determinante de una matriz

Definición 1.1. Consideremos una matriz $n \times n$ de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

El determinante de A, denotado por $\det(A)$, está dado por

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Para una interpretación geométrica del determinante, véase la Figura 1.

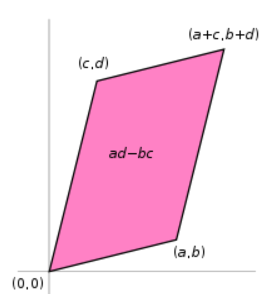

Figura 1: Intepretación geométrica del determinante

Teorema 1.2. *El determinante* det *respeta el producto, esto es*

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

para cualesquiera matrices A y B.

Corolario 1.3. *Sea A una matriz $n \times n$. Se tiene que*

$$\det(PAP^{-1}) = \det(A)$$

para toda matrix invertible P.

Demostración. Por la proposición anterior, tenemos que

$$\det(PAP^{-1}) = \det(P)\det(A)\det(P^{-1}) = \det(P)\det(A)\det(P)^{-1} = \det(A),$$

como queríamos demostrar. □

1.2. Determinante de una aplicación lineal

Definición 1.4. Sea $f : V \to V$ una aplicación lineal. Consideremos una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ de V y sea $A = (a_{ij})$ la matriz de f en la base $\mathcal{B}$. El determinante de f se define como

$$\det(f) = \det(A).$$

Proposición 1.5. *El determinante de una aplicación lineal $f : V \to V$ no depende de la base escogida.*

Demostración. Si A es la matriz de f en una cierta base, entonces la matriz de f en otra base es PAP^{-1} para cierta matriz invertible P. Entonces, el resultado se sigue del Corolario 1.3. □

Teorema 1.6. *Una aplicación lineal f es invertible si y solo si* $\det(f) \neq 0$.

Corolario 1.7. *Consideremos un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas y n ecuaciones de la forma*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & 0, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & 0, \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & = & 0. \end{cases} \tag{1}$$

Entonces (1) *admite una solución no trivial si y solo si* $\det(A) = 0$, *donde* $A = (a_{ij})$.