FUNCTORES DERIVADOS

J. ÁNGEL GONZÁLEZ

1. Introducción a la teoría de categorías

En álgebra homológica, la teoría de categorías resulta ser un lenguaje de gran utilidad que permite formular de forma más eficiente y precisa los conceptos manejados, ya de por si profundamente abstractos. De hecho, como veremos, la teoría de categorías constituye el *framework* ideal para realizar topología algebraica, al formalizar de manera simple la noción de trasformar un problema topológico en uno algebraico.

1.1. Categorías. El concepto primigenio sobre el que descansa toda la teoría es el de categoría. Una categoría trata de capturar la esencia intuitiva de que gran parte de las teorías matemáticas pueden realizarse en terminos únicamente una serie de objetos matemáticos y las aplicaciones definidas entre ellos.

Definición 1.1. Una **categoría**, $\mathcal{C}$, esta formada por:

- Una clase[1], $Obj(\mathcal{C})$, cuyos elementos se denominan los **objetos** de la categoría.
- Para cada par de elementos $A, B \in Obj(\mathcal{C})$, una clase, $Hom(A, B)$, cuyos elementos se denominan los **morfismos** entre A y B. Además, las clases $\{Hom(A, B)\}_{A,B}$ deben ser disjuntas dos a dos.
- Una operación binaria asociativa y con unidad, $\circ$, conocida como **composición** de morfismos, tal que, para cualesquiera $A, B, C \in Obj(\mathcal{C})$, se tenga una aplicación $\circ : Hom(A, B) \times Hom(B, C) \to Hom(A, C)$ denotada $(f, g) \mapsto g \circ f$.

Ejemplos de categorías lo constituyen, **Set**, la categoría cuyos objetos son la clase de todos los conjuntos, y cuyos morfimos son todas las aplicaciones entre conjuntos.

[1]Una clase es una generalización de la noción de conjunto definida por los axiomas de Zermelo-Fraenkel. En efecto, como veremos, necesitaremos formar la clase de todos los conjuntos, la cual, por la conocida paradoja de Russell, no puede ser un conjunto. Esencialmente, una clase se comporta como un conjunto, salvo que no pueden ser miembros de otra clase (lo que elimina la paradoja del barbero). Para una formalización completa, véanse los axiomas de Von Neumann-Bernays-Gödel.

Análogamente, también tenemos la categoría **Gr** de todos los grupos con homomorfismos de grupos entre ellos, la categoría **Ab** de grupos abelianos y homomorfismos entre ellos o la categoría **Rng** de anillos con homomorfismos de anillos. Fijado un anillo R, una categoría que nos será de gran utilidad es **R-Mod**, la categoría de R-módulos con homomorfismos de módulos o, más generalmente **R-Alg** la de R-álgebras con homomorfismos de álgebras. Incluso, fijado un cuerpo k, podemos considerar la categoría **k-Vect** de k-espacios vectoriales con aplicaciones lineales entre ellos.

Sin embargo, no sólo en el mundo del álgebra encontramos categorías, sino que también la topología nutre de muchos ejemplo, como puede ser **Top**, la categoría de espacios topológicos con aplicaciones continuas, **Top***, la categoría de espacios topológicos punteados y aplicaciones punteadas o, más generalmente **Topp**, la categoría de lo pares de espacios topológicos con aplicaciones de pares entre ellos. Incluso, podemos hablar de la categoría **Diff** de variedades diferenciables con aplicaciones diferenciables entre ellas.

De hecho, un ejemplo aún más marciano es, dado un grupo G (o, incluso, más generalmente un monoide) podemos considerar la categoría **G** cuyos objetos son un único elemento (cualquier conjunto fijo) y con un morfimo por cada elemento $g \in G$, siendo el morfismo identidad el elemento identidad de G, de manera que se define la composición como el producto por la izquierda.

Como vemos en nuestro zoológico de ejemplos de categoría, simplemente por su definición vemos que hay categorías con *muchos elementos* como **Set**, de forma que sus objetos no sean un conjunto y otras con *menos elementos* como **G** cuyos objetos forman un conjunto. Tan importante es esta observación que merece ser elevada al rango de definición.

Definición 1.2. Una categoría $\mathcal{C}$ se dice **pequeña** si $Obj(\mathcal{C})$ es un conjunto. Análogamente, $\mathcal{C}$ se dice **localmente pequeña** si para cualesquiera $A, B \in Obj(\mathcal{C})$, $Hom(A, B)$ es un conjunto.

De los ejemplos anteriores, es fácil ver que **G** es la única categoría pequeña, pero sin embargo, todos los restantes ejemplos son localmente pequeños. En base a esta definición, podemos considerar la categoría **Cat** cuyos objetos son todas las categoría pequeñas y cuyos morfismos son los functores entre ellas. En ese caso, **Cat** no sería una categoría ni pequeña ni localmente pequeña.

Observación 1.3. A causa de la restricción de los axiomas de Von Neumann-Bernays-Gödel, ninguna clase propia puede ser un elemento de otra clase, lo que obliga a que **Cat** únicamente pueda estar formada por categorías pequeñas.

Definición 1.4. En una categoría $\mathcal{C}$, un morfismo $f : A \to B$ se dice **monomorfismo** si cancela por la izquierda, i.e., si para cualesquiera $g_1, g_2 : C \to A$ se cumple que $f \circ g_1 = f \circ g_2$ implica $g_1 = g_2$. Análogamente, $f : A \to B$ se dice **epimorfismo** si cancela por la derecha, i.e., si para cualesquiera $g_1, g_2 : B \to C$ se cumple que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ implica $g_1 = g_2$.

1.1.1. Categorías abelianas. En nuestra teoría, trabajaremos fundamentalmente con un tipo de categorías que tratan de capturar la esencia de la categoría de grupos abelianos o de módulos, pero con mayor generalidad. Informalmente hablando, algunas de las propiedades más importantes de los grupos abelianos son

- Los homomorfismos de grupos entre dos grupos abelianos son un grupo abeliano.
- Todo grupo abeliano, G, tiene un elemento destacado, $0 \in G$, de modo que únicamente existe un homomorfismo de $\{0\}$ en G y otro de G en $\{0\}$.
- Dados dos grupos G_1 y G_2, se puede formar su suma directa $G_1 \oplus G_2$ y su producto directo $G_1 \times G_2$.
- Si $f : G \to H$ es un homomorfismo, entonces $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(0)$ y $\operatorname{Coker} f = H/\operatorname{Im} f$ son subgrupos de G y H respectivamente tales que f es un monomorfismo si y solo si $\operatorname{Ker} f = 0$ y un epimorfismo si y solo si $\operatorname{Coker} f = 0$.
- Todo homomorfismo $f : G \to H$ se descompone en $0 \to \ker f \to G \to \operatorname{Im} f \to H \to \operatorname{Coker} f \to 0$ exacta.

Para extender estas nociones a categorías generales, en primer lugar deberemos estudiar cómo definir de forma genérica las nociones de Ker y Coker.

Definición 1.5. En una categoría $\mathcal{C}$, un morfismo $0 : A \to B$ se llama el **morfismo cero**, si $0 \circ g = 0 \circ h$ para cualesquiera $g, h : C \to A$ y $g' \circ 0 = h' \circ 0$ para cualesquiera $g', h' : B \to D$.

Definición 1.6. Una categoría $\mathcal{C}$ se dice que tiene **objeto cero** si existe un objeto $0 \in Obj(\mathcal{C})$ tal que $Hom(0, 0)$ es el grupo cero.

Observación 1.7. Si una categoría, $\mathcal{C}$, tiene objeto cero, entonces $Hom(A,0)$ y $Hom(0,A)$ tienen un único elemento. Así, dados $A, B \in Obj(\mathcal{C})$ el único morfismo resultante de la composición $A \to 0 \to B$ es un morfismo cero.

Definición 1.8. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $f : A \to B \in Hom(A,B)$ para $A, B \in Obj(\mathcal{C})$. Decimos que $k : K \to A$ es el **kernel** de f si $f \circ k = 0$ y, además, para cualquier otro morfismo $\tilde{k} : \tilde{K} \to A$ con $f \circ \tilde{k} = 0$ existe un morfismo $h : \tilde{K} \to K$ tal que $\tilde{k} = k \circ h$.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, "k"] \arrow[ddr, bend right, "0"'] & & \tilde{K} \arrow[ll, dashed, "h"'] \arrow[dl, "\tilde{k}"'] \arrow[ddl, bend left, "0"] \\
& A \arrow[d, "f"'] & \\
& B &
\end{tikzcd}$$

Análogamente, el **cokernel** del morfismo $f : A \to B \in Hom(A,B)$ es un elemento dual al kernel, esto es, es un morfismo $k^* : B \to K^*$ tal que $k^* \circ f = 0$ y, además, para cualquier otro morfismo $\tilde{k}^* : B \to \tilde{K}^*$ con $\tilde{k}^* \circ f = 0$ existe un morfismo $h : K^* \to \tilde{K}^*$ tal que $k^{*\prime} = h \circ k^*$.

$$\begin{tikzcd}
K^* \arrow[rr, dashed, "h"] & & \tilde{K}^* \\
& B \arrow[ul, "k^*"] \arrow[ur, "\tilde{k}^*"'] & \\
& A \arrow[u, "f"] \arrow[uul, bend left, "0"] \arrow[uur, bend right, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

Observación 1.9. Supongamos que, en nuestra categoría $\mathcal{C}$, todo morfismo tiene kernel y cokernel. Entonces, dada una aplicación $f : A \to B$, podemos definir la **imagen** de f, $\text{Im } f$ como $\text{Im } f = \text{Ker } k^*$, donde $B \xrightarrow{k^*} \text{Coker } f$ es el cokernel de f.

Definición 1.10. Un par de aplicaciones $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ se dice **exacta** en B si $\text{Im } f = \text{Ker } g$.

Y, con todo este lenguaje, podemos definir ya el concepto de categoría abeliana como generalización de las propiedades de grupo.

Definición 1.11. Una categoría $\mathcal{C}$ se dice **abeliana** si cumple

- Para cualesquiera $A, B \in Obj(\mathcal{C})$, $Hom(A, B)$ es un grupo abeliano y la composición de aplicaciones es lineal bilátera respecto a la operación de grupo.

$$f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h \qquad (g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f$$

- $\mathcal{C}$ tiene objeto cero.
- Para cualesquiera objetos A_1 y A_2 existe un objeto B y morfismos

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, bend right, "i_1"'] & B \arrow[l, bend right, "p_1"'] \arrow[r, bend left, "p_2"] & A_2 \arrow[l, bend left, "i_2"] \end{tikzcd}$$

tales que

$$p_1 \circ i_1 = id_{A_1} \qquad p_2 \circ i_2 = id_{A_2}$$
$$i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 = id_B \quad p_2 \circ i_1 = p_1 \circ i_2 = 0$$

- Todo morfismo $f : A \to B$ tiene kernel y cokernel.
- Para todo morfismo $f : A \to B$, se tiene la siguiente descomposición en $f = j \circ i$

$$0 \to \text{Ker } f \xrightarrow{k} A \xrightarrow{i} \text{Im } f \xrightarrow{j} B \xrightarrow{k^*} \text{Coker } f \to 0$$

donde i es un epimorfismo, j es un monomorfismo e $\text{Im } f \cong \text{Coker } k \cong \text{Ker } k^*$. Esta descomposición se denomina la **descomposición canónica** de f.

En una categoría abeliana, los monomorfismos y los epimorfismos pueden caracterizarse de igual forma que en teoría de grupos.

Proposición 1.12. *En una categoría abeliana, un morfismo $f : A \to B$ es un monomorfismo si y solo si* $\text{Ker } f = 0$. *Análogamente, es un epimorfismo si y solo si* $\text{Coker } f = 0$. *Más aún, f es un isomorfismo si y solo si* $\text{Ker } f = 0$ *y* $\text{Coker } f = 0$.

Demostración. Supongamos que f es un monomorfismo y $K \xrightarrow{k} A$ es el kernel, de manera que $f \circ k = 0 = f \circ 0$. De este modo, como f cancela por la izquierda, se tiene $k = 0$ y, por tanto $0 \to A$ cumple la propiedad universal para ser el kernel de f. La comprobación para el cokernel es análoga.

Recíprocamente, supongamos que $\text{Ker } f = 0$. En ese caso, se tiene que $id_A : A \to A$ es el cokernel de k y, por tanto, existe un isomorfismo $h : A \to \text{Im } f$. En consecuencia, si acudimos a la descomposición canónica de f, tenemos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0"] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "id_A"'] & \mathrm{Im}\, f \arrow[r, "j"] & B \arrow[r, "k^*"] & 0 \\ & A \arrow[ur, "h"'] & & & \end{tikzcd}$$

y, por tanto, i es un isomorfismo. Así, como j es un monomorfismo, se tiene que $f = j \circ i$ es un monomorfismo. Análogamente, si Coker $f = 0$, entonces $id_B : B \to B$ es el kernel de k^* y, por tanto, existe un isomorfismo $h' : B \to \mathrm{Im}\, f$ que obliga a que j sea un isomorfismo, lo que, unido a que i es un epimorfismo infiere que f es un epimorfismo.

Más aún, de la demostración anterior se deduce que si Ker $f = 0$ entonces i es un isomorfismo y si Coker $f = 0$ entonces j es un isomorfismo. En particular, si ambas condiciones se cumplen, se tiene que $f = j \circ i$ es un isomorfismo. $\square$

Todos los axiomas requeridos a una categoría abeliana resultan naturales si tenemos en cuenta las propiedades previamente analizadas de los grupos abelianos, salvo quizá el tercer axioma. Como veremos, este requisito se relaciona directamente con la única propiedad de los grupos abelianos antes mencionada que no se correlaciona de forma inmediata con los axiomas de categoría abeliana, a saber, la existencia de suma directa y producto directo. Para entenderlo en profundidad, necesitaremos las nociones de pullback y pushout de un diagrama.

Definición 1.13. Dados dos morfismos $f : A \to Z$ y $g : B \to Z$, un **pullback** es par de morfismos $p_1 : P \to A$ y $p_2 : P \to B$ tales que $f \circ p_1 = g \circ p_2$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

y que son universales para este diagrama, i.e., dadas otras dos aplicaciones $q_1 : P' \to A$ y $q_2 : P' \to B$, existe una aplicación $h : P' \to P$ tal que $p_1 \circ h = q_1$ y $p_2 \circ h = q_2$.

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[rrd, bend left, "q_1"] \arrow[rdd, bend right, "q_2"'] \arrow[rd, dashed, "h"] & & \\
& P \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& B \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Análogamente, dados dos morfismos $f : Z \to A$ y $g : Z \to B$ un **pushout** es par de morfismos $i_1 : A \to P$ y $i_2 : B \to P$ tales que $i_1 \circ f = i_2 \circ g$

$$\begin{tikzcd}
P & A \arrow[l, "i_1"'] \\
B \arrow[u, "i_2"] & Z \arrow[l, "g"] \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

y que son universales para este diagrama, i.e., dadas otras dos aplicaciones $j_1 : A \to P'$ y $j_2 : B \to P'$, existe una aplicación $h : P \to P'$ tal que $p_1 \circ h = q_1$ y $p_2 \circ h = q_2$.

$$\begin{tikzcd}
P' & & \\
& P \arrow[lu, dashed, "h"'] & A \arrow[l, "i_1"'] \arrow[llu, bend right, "j_1"'] \\
& B \arrow[u, "i_2"] \arrow[luu, bend left, "j_2"] & Z \arrow[l, "g"] \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

Y, de este modo, en una categoría abeliana, dados dos objetos se puede formar su *suma directa* y su *producto directo* y ambos coinciden, como afirma la siguiente proposición.

Proposición 1.14. *En una categoría abeliana $\mathcal{C}$, para cualesquiera $A, B \in Obj(\mathcal{C})$ el pullback de los morfismos $A_1 \to 0$ y $A_2 \to 0$ y el pushout de los morfismos $0 \to A_1$ y $0 \to A_2$ coincide.*

Demostración. $\boxed{\text{TO DO}}$ □

1.2. Functores. Una de las herramientas básicas con las que deberemos lidiar es el concepto de functor. Informalmente hablando, un functor es una aplicación entre categorías que nos permite enviar diagramas en una categoría a diagramas en otra. De este modo, un functor es una forma de trasformar un problema puramente algebraico de una categoría a otra. En este sentido, podemos decir que un functor es un *morfismo de categorías.*

Definición 1.15. Dadas dos categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, un **functor covariante**, $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, es una aplicación que envía cada objeto $A \in Obj(\mathcal{A})$ a un objeto $\mathcal{F}(A) \in Obj(\mathcal{B})$ y cada morfismo $f : A \to B \in Hom(A, B)$ a un morfismo $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(B)$ tal que $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "f\circ g"] & \\ B \arrow[rr, "f"'] & & C \end{tikzcd} \quad \overset{\mathcal{F}}{\Longrightarrow} \quad \begin{tikzcd} & \mathcal{F}(A) \arrow[dl, "\mathcal{F}(g)"'] \arrow[dr, "\mathcal{F}(f\circ g)"] & \\ \mathcal{F}(B) \arrow[rr, "\mathcal{F}(f)"'] & & \mathcal{F}(C) \end{tikzcd}$$

Análogamente, el functor $\mathcal{F}$ se dice **functor contravariante** si $\mathcal{F}$ invierte los morfismos, i.e., a cada $f : A \to B \in Hom(A, B)$ le asigna $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(B) \to \mathcal{F}(A)$ tal que $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "f\circ g"] & \\ B \arrow[rr, "f"'] & & C \end{tikzcd} \quad \overset{\mathcal{F}}{\Longrightarrow} \quad \begin{tikzcd} & \mathcal{F}(A) & \\ \mathcal{F}(B) \arrow[ur, "\mathcal{F}(g)"] & & \mathcal{F}(C) \arrow[ul, "\mathcal{F}(f\circ g)"'] \arrow[ll, "\mathcal{F}(f)"] \end{tikzcd}$$

Ejemplos de functores covariantes son, por ejemplo $\pi_k : \mathbf{Top}^* \to \mathbf{Gr}$, el k-ésimo grupo de homotopía, $H_k : \mathbf{Top} \to \mathbf{Ab}$, el k-ésimo grupo de homología (singular). Como functores contravariantes podemos encontrar, por ejemplo, $\Omega^* : \mathbf{Diff} \to \mathbb{R}$-$\mathbf{Alg}$ la formas diferenciales o $H^k : \mathbf{Diff} \to \mathbf{Ab}$ el k-ésimo grupo de cohomología (de de Rham). De hecho, dos que estudiaremos con profundidad serán, dado un módulo M, los functores covariantes $M \otimes \cdot : \mathbf{R}$-$\mathbf{Mod} \to \mathbf{R}$-$\mathbf{Mod}$ y $Hom(M, \cdot) : \mathbf{R}$-$\mathbf{Mod} \to \mathbf{R}$-$\mathbf{Mod}$.

Los functores que se comportan bien respecto a la estructura de una categoría abeliana reciben un nombre especial.

Definición 1.16. Dado un functor entre categorías abelianas $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, se dice **aditivo**, si la aplicación inducida $\mathcal{F} : Hom(A, B) \to Hom(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))$ es un homomorfismo de grupos.

1.3. Transformaciones naturales. Una vez construidas nuestros objetos, las categorías, y los functores que cumplen el papel de los morfismos de categorías, nos gustaría formalizar la idea de trasformar un functor en otro. A pesar de que esta idea pueda resultar, a primera instancia, muy artificial, con la práctica comprenderemos que, una vez definido, es muy natural.

Definición 1.17. Dadas dos categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ y dos functores entre ellas $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, una trasformación natural $\mathcal{T} : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es una aplicación que, a cada $A \in Obj(\mathcal{A})$ le asigna un morfismo $\mathcal{T}(A) : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{G}(A)$ de $\mathcal{B}$ tal que, para cualesquiera $A, B \in Obj(\mathcal{A})$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(A) \arrow[r, dashed, "\mathcal{T}(A)"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{G}(A) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\
\mathcal{F}(B) \arrow[r, dashed, "\mathcal{T}(B)"'] & \mathcal{G}(B)
\end{tikzcd}$$

Otra de las utilidades principales de las trasformaciones naturales es que, en muchas ocasiones, permiten capturar el, siempre escurridizo, concepto de *morfismo canónico*. Por ejemplo, considerese el functor $(\cdot)^{**}$: **k-Vect** $\to$ **k-Vect** que, a cada espacio vectorial V le asigna su bidual V^{**} y, a cada aplicación lineal $f : V \to W$ su doble pullback $f^{**} : V^{**} \to W^{**}$. En prácticamente todos los cursos de álgebra lineal se afirma que, en algún sentido, el monomorfismo $V \hookrightarrow V^{**}$ es *canónico* pero, ahora, gracias a las herramientas de la teoría de categorías, podemos dar una definición precisa, simplemente observando que esto quiere decir que existe una trasformación natural entre el functor identidad $id_{\textbf{k-Vect}}$: **k-Vect** $\to$ **k-Vect** con el functor bidual $(\cdot)^{**}$: **k-Vect** $\to$ **k-Vect**.

1.4. Prehaces y Haces. Uno de los ejemplos más importantes de functor son los haces. Esta noción, puramente algebraica, permite capturar gran cantidad de propiedades de los espacios topológicos, incluso algunas de carácter únicamente analítico. Tal es su potencia que, con un poco de esfuerzo, es posible reducir diversas teorías muy distintas en apariencia a un único núcleo general.

Dado un espacio topológico (X, τ), denotemos con $\mathbf{Top}_X$ la categoría cuyos objetos son los abiertos de X (i.e., $Obj(\mathbf{Top}_X) = \tau$) y tal que, si $U \subset V$ son dos abiertos de X, entonces $Hom(U, V)$ está formado por un único morfismo, la inclusión $i_{U \to V} : U \to V$.

Definición 1.18. Sea X un espacio topológico y $\mathbf{Top}_X$ la categoría de sus abiertos, y, asimismo, sea $\mathcal{C}$ una categoría. Un **prehaz** con valores en $\mathcal{C}$ es un functor contravariante $\mathcal{F} : \mathbf{Top}_X \to \mathcal{C}$. A los elementos $s \in \mathcal{F}(V)$ se les denomina las secciones del prehaz sobre V y, si $U \subset V$ es otro abierto, entonces $\mathcal{F}(i_{U \to V})(s)$ se denota simplemente por $s|_U$.

Ejemplo 1.19. El ejemplo más trivial de prehaz con imagen **Gr** es el prehaz que, a cada abierto $U \subset X$ le asigna un grupo prefijado G y que, sobre los morfismos, siempre induce la identidad. Este prehaz se denomina el **haz constante** de grupo G y, abusando de la notación, se denota por G.

Ejemplo 1.20. Supongamos, ahora, que escogemos un punto $x \in X$ y un grupo abeliano G. Entonces, podemos definir el **prehaz skyscraper**, $\mathcal{S}_x^G$ que asigna el grupo G únicamente a los entornos de x, esto es

$$\mathcal{S}_x^G(U) = \begin{cases} G & \text{si} \quad x \in U \\ 0 & \text{si} \quad x \notin U \end{cases}$$

Ejemplo 1.21. Sea M una variedad topológica, entonces, el functor $C^0 : \mathbf{Top}_X \to \mathbf{Ab}$ que, a cada abierto U le asocia $C^0(U)$, el conjunto de funciones continuas sobre U y, para cada par $U \subset V$ de abiertos, induce $C^0(i_{U \to V}) : C^0(V) \to C^0(U)$ dado por $C^0(i_{U \to V})(f) = f|_U$, es un prehaz. Más aún, estos conceptos podemos extenderlos al caso diferenciable considerando el prehaz C^∞ de funciones infinitamente diferenciables o, incluso, si M es una variedad compleja, el prehaz Hol de funciones holomorfas.

Ejemplo 1.22. Avanzando un poco más en el ejemplo anterior, observemos que si M es variedad diferenciable, entonces $\Omega^* : \mathbf{Top}_M \to \mathbb{R}$-$\mathbf{Alg}$ también es un prehaz con el pullback inducido por la inclusión, o, en el caso complejo, $\Omega^{p,q} : \mathbf{Top}_M \to \mathbb{R}$-$\mathbf{Alg}$ para cualesquiera p, q.

Ejemplo 1.23. Generalizando aún más los ejemplos anteriores, observamos que, dado un fibrado $E \xrightarrow{\pi} B$, podemos definir un functor $\Gamma : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ que, a cada abierto $U \subset B$ le asigna $\gamma(U)$, el conjunto de secciones sobre U, i.e., el conjunto de funciones continuas $s : U \to E$ tal que $\pi \circ s = id_B$

Todos los ejemplos que hemos estudiado comparten una serie de propiedades que los convierte en una clase especial de prehaces, conocida como haces.

Definición 1.24. Un prehaz $\mathcal{F} : \mathbf{Top}_X \to \mathcal{C}$ se denomina un **haz** si satisface las dos propiedades siguientes para cualquier abierto $U \subset X$ y recubrimiento por abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$ de U.

- (Localidad) Sean $s, t \in \mathcal{F}(U)$. Si $s|_{U_i} = t|_{U_i}$ para todo $i \in I$, entonces $s = t$.
- (Generalización) Para cada $i \in I$ sean $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tales que $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ para cada $i, j \in I$, entonces existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$.

Como ya hemos comentado, todos los ejemplos anteriores son haces, como demuestran los teoremas básicos de topología y geometría diferencial. Cabe, entonces, preguntarse si, de hecho, todo prehaz es un haz lo que queda respondido negativamente con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.25. Sea M una variedad topológica y definamos el prehaz C^0_b que, a cada abierto de X, le asigna las funciones continuas y acotadas definidas en ese abierto, y restringiendo por la inclusión. Evidentemente, C^0_b es un prehaz, pero no es un haz puesto que, en general, carece de la propiedad de generalización. Para comprobarlo, sea $M = \mathbb{R}$ y definamos $s_n : (-n, n) \to \mathbb{R}$ la función identidad en $(-n, n)$, que es continua y acotada en cada intervalo. Ahora bien, no existe $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ acotada y continua tal que $s|_{(-n,n)} = s_n$, pues la única función continua que lo cumple es la identidad, que no es acotada en $\mathbb{R}$. En consecuencia C^0_b no satisface la propiedad de generalización y, por tanto, no es un haz.

A pesar del problema detectado en el ejemplo anterior, dado un prehaz $\mathcal{F}$, es posible asignarle un haz, $\tilde{\mathcal{F}}$, de forma canónica, de manera que los prehaces que ya sean haces no sufran alteración (salvo isomorfismo). Para ello, la clave está en generalizar el ejemplo 1.23.

Definición 1.26. Una aplicación $E \xrightarrow{\pi} B$ entre espacios topológicos se dice que es un **espacio étalé** si π es un homeomorfismo local. En ese caso, se define el haz de sus secciones $\Gamma : \mathbf{Top}_B \to \mathbf{Set}$ que, a cada abierto $U \subset B$ le asigna el espacio de secciones continuas, esto es, el conjunto de aplicaciones continuas $s : U \to E$ tales que $\pi \circ s = id_B$.

Consideremos $x \in X$ y sea $\{U_i\}_{i\in I}$ el conjunto todos los entornos de x. Los $\{U_i\}_{i\in I}$ forman un conjunto dirigido con respecto a la inclusión y, por tanto, $\{\mathcal{F}(U_i)\}_{i\in I}$ también es un conjunto dirigido respecto a la restricción. En particular, tiene un límite directo[2], $\mathcal{F}_x = \varinjlim \mathcal{F}(U)$, que se denomina el **stalk** del prehaz $\mathcal{F}$ en x. Generalmente, el límite directo en una categoría está en la categoría y, por tanto, si $\mathcal{F}$ es un prehaz de grupos, $\mathcal{F}_x$ es un grupo, si es un prehaz de anillos el límite es un anillo o si es un prehaz de módulos el límite es un módulo.

Ejemplo 1.27. Una de las características del haz skyscraper, $\mathcal{S}_x^G$, es que sus stalk son $(\mathcal{S}_x^G)_y = 0$ para todo $y \neq x$ y $(\mathcal{S}_x^G)_x = G$.

Utilizando los stalk del prehaz, podemos unirlos todos y formar el espacio $E_{\mathcal{F}} = \bigsqcup_{x\in X} \mathcal{F}_x := \bigcup_{x\in X} \mathcal{F}_x \times \{x\}$, donde existe trivialmente una aplicación $\pi : E_{\mathcal{F}} \to X$. Ahora bien, dado un abierto $U \subset X$ y $s \in \mathcal{F}(U)$, podemos definir la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \bar{s}: & U & \longrightarrow & E_{\mathcal{F}} \\ & x & \mapsto & s_x \end{array}$$

donde s_x es la clase de (U, s) en el límite directo en x. Más aún, se tiene que $\pi \circ \bar{s} = id_U$ y, por tanto, si dotamos a $E_{\mathcal{F}}$ de la topología más débil que hace a todas las $\bar{s}$ continuas, entonces se tiene que $E_{\mathcal{F}}$ es un espacio étalé sobre X y, en particular, disponemos de su haz de secciones, que denotaremos $\tilde{\mathcal{F}} : \mathbf{Top}_X \to \mathbf{Set}$.

Definición 1.28. Si $\mathcal{F}$ es un prehaz, entonces $\tilde{\mathcal{F}}$ se denomina el **haz asociado** a $\mathcal{F}$.

Ahora bien, en general no utilizaremos haces con valores en cualquier categoría, sino que restringiremos nuestra atención a los haces $\mathcal{F} : \mathbf{Top}_X \to \mathbf{Ab}$ con valores en los grupos abelianos.

Definición 1.29. Dado un espacio topológico X, definimos la categoría de los haces abelianos sobre X, que denotaremos con $\mathbf{ASh}_X$ (o simplemente $\mathbf{Ash}$ cuando se sobreentienda X), como la categoría cuyos objetos es la clase de los functores con valores en grupos abelianos y cuyos morfismos son trasformaciones naturales aditivas entre haces.

[2]En el caso que nos ocupa, es fácil dar una descripción explícita del límite directo. En efecto, los elementos de $\mathcal{F}_x$ son pares (U, s) donde U es un entorno de x y $s \in \mathcal{F}(U)$, bajo la relación de equivalencia de que dos pares (U, s) y (V, s') están relacionados si $s|_{U\cap V} = s'|_{U\cap V}$. Obsérvense las semejanzas con la noción de germen de función en un punto.

Lo más importante es que, con esta restricción, esta categoría tiene una estructura muy rica.

Proposición 1.30. *La categoría de haces abelianos, **ASh**, es una categoría abeliana.*

Observemos que como el límite directo de grupos abelianos es un grupo abeliano, se tiene que $\mathcal{F}_x \in Obj(\mathbf{Ab})$ para cada $x \in X$.

Proposición 1.31. *Una trasformación natural aditiva entre haces abelianos $\tau : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un monomorfismo (resp. epimorfismo) si y sólo si la aplicación inducida $\tau_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ lo es para cada $x \in X$.*

Siguiendo con esta idea, si $E_{\mathcal{F}}$ es el espacio étalé asociado a un prehaz con valores en grupos abelianos, al espacio de secciones se le puede dotar de estructura de grupo abeliano, y, por tanto, se tiene que $\tilde{\mathcal{F}} \in Obj(\mathbf{ASh})$. Más aún, recordemos de la construcción del espacio étalé que podemos construir la trasformación natural $\tau : \mathcal{F} \to \tilde{\mathcal{F}}$ tal que $\tau(U) : \mathcal{F}(U) \to \tilde{\mathcal{F}}(U)$ hace $\tau(U)(s) = \bar{s}$.

Proposición 1.32. *Si $\mathcal{F} : \boldsymbol{Top}_X \to \boldsymbol{Ab}$ un haz abeliano, entonces la trasformación natural $\tau : \mathcal{F} \to \tilde{\mathcal{F}}$ es un isomorfismo.*

2. Objetos inyectivos y proyectivos

2.1. Motivación. El principal problema que motiva estas notas es la pérdida de exactitud en algunos functores. Pongamos por caso la categoría **R-Mod** de módulos sobre un anillo y el functor covariante $Hom(M, \cdot)$. No es dificil ver que este functor es exacto por la izquierda, esto es, que si

$$0 \to N' \to N \to N'' \to 0$$

es una sucesión exacta de módulos, entonces

$$0 \to Hom(M, N') \to Hom(M, N) \to Hom(M, N'')$$

es exacta. Sin embargo, no se puede garantizar que $Hom(M, N) \to Hom(M, N'')$ sea sobreyectiva y, por tanto, en general la sucesión resultante no es exacta corta.

Definición 2.1. Un functor $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ se dice **exacto por la izquierda** si a toda sucesión exacta corta

$$0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$$

le hace corresponder una sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{F}(A_1) \to \mathcal{F}(A_2) \to \mathcal{F}(A_3)$$

Análogamente, un functor se dice **exacto por la derecha** si en ese caso hace corresponder la sucesión exacta

$$\mathcal{F}(A_1) \to \mathcal{F}(A_2) \to \mathcal{F}(A_3) \to 0$$

Un functor se dice **exacto** si es exacto por la derecha y por la izquierda.

Ejemplo 2.2. Como ya hemos visto, el functor $Hom(M, \cdot)$: **R-Mod** $\to$ **R-Mod** es covariante y exacto por la izquierda. Asimismo, el functor contravariante $Hom(\cdot, M)$: **R-Mod** $\to$ **R-Mod** es contravariante y exacto por la izquierda.

Ejemplo 2.3. El functor $\cdot \otimes_R M$: **R-Mod** $\to$ **R-Mod** es covariante y exacto por la derecha.

Ejemplo 2.4. El functor Γ : **ASh** $\to$ **Ab** es exacto por la izquierda.

Aunque en el caso del functor $Hom(M, \cdot)$ pueda resultar una característica molesta, el problema es mucho más grave si nos enfrentarmos a functores más generales. En efecto, uno de los motivos por el que la sucesiones exactas son importantes son el siguiente.

Definición 2.5. Dada una categoría abeliana $\mathcal{C}$ una función $\lambda : Obj(\mathcal{C}) \to \mathbb{Z}$ se dice **aditiva** si para cualquier sucesión exacta corta

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

se tiene que $\lambda(B) = \lambda(A) + \lambda(C)$,

Proposición 2.6. *Si λ es una función aditiva sobre una categoría abeliana $\mathcal{C}$, entonces para toda sucesión exacta*

$$0 \to A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n \to 0$$

se tiene

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\lambda(A_k) = 0$$

Esquema de la demostración. Escindir la sucesión exacta larga en sucesiones exactar cortas y sumar alternado. □

En particular, si tenemos un functor exacto $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, podemos usar una función aditiva en $\mathcal{B}$ para analizar el resultado de aplicar el functor sobre una sucesión exacta larga, de forma parecida a cómo se puede calcular la cohomología de de Rham de una variedad usando la suma alternada de sus dimensiones en la sucesión de Mayer-Vietoris.

Sin embargo, si el functor no es exacto, esta capacidad se pierde, en tanto que la sucesión resultante no es exacta. La idea del functor derivado por la izquierda (resp. por la derecha) es precisamente proveer objetos de la categoría *fácilmente calculables*, $L^i\mathcal{F}(A)$ (resp. $R^i\mathcal{F}(A)$), que completen la sucesión por la izquierda (resp. por la derecha) hasta convertirla en exacta larga.

Lamentablemente, la construcción de estos functores derivados no es tan simple como puediera parecer, sino que para crearlos necesitaremos trasformar nuestro problema de sucesiones exactas en un problema de complejos de cadenas y luego analizar la homología de ese complejo. Más aún, las cadenas utilizadas deben ser de un tipo concreto, conformadas por unos objetos particulares llamados inyectivos o proyectivos.

2.2. Objetos proyectivos e inyectivos.

Definición 2.7. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Un objeto $P \in Obj(\mathcal{C})$ se dice **proyectivo** si para cualquier epimorfismo $\pi : A \twoheadrightarrow B$ y cualquier morfismo $\varphi : P \to B$, existe un morfismo $\tilde{\varphi} : P \to A$ tal que $\pi \circ \tilde{\varphi} = \varphi$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, dashed, "\tilde{\varphi}"'] & \\ A \arrow[r, "\pi"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Dualmente, un objeto $I \in Obj(\mathcal{C})$ se dice **inyectivo** si para cualquier monomorfismo $i : A \hookrightarrow B$ y cualquier morfismo $\varphi : A \to I$, existe un morfismo $\tilde{\varphi} : B \to I$ tal que

$\tilde{\varphi} \circ i = \varphi$.

$$\begin{tikzcd} & & I & \\ B & & A \arrow[ll, "i"] \arrow[u, "\varphi"'] \arrow[ull, dashed, "\tilde{\varphi}"] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Como veremos más adelante, los objetos proyectivos e inyectivos nos serán de gran utilidad para generar resoluciones, que son cruciales para construir los functores derivados. Por este motivo, aquellas categorías que los tienen en abundancia reciben un nombre especial.

Definición 2.8. Una categoría abeliana $\mathcal{C}$ se dice que tiene **suficientes proyectivos** si para todo $A \in Obj(\mathcal{C})$ existe un objeto proyectivo P y un epimorfismo $\phi : P \twoheadrightarrow A$. Análogamente, una categoría se dice que tiene **suficientes inyectivos** si para todo $A \in Obj(\mathcal{C})$ existe un objeto inyectivo I y un monomorfismo $\psi : A \hookrightarrow I$.

2.3. Caracterización de proyectivos e inyectivos. Los objetos proyectivos e inyectivos pueden caracterizarse perfectamente en algunas categorías, como la de módulos.

Proposición 2.9. *Un módulo P es proyectivo si y solo sí es sumando directo de un módulo libre, i.e., si existe un módulo libre F tal que $F = P \oplus P'$ para cierto módulo P'.*

Demostración. En primer lugar, observemos que si F es un módulo libre entonces es proyectivo. En efecto, sean $\{f_i\}_{i\in I}$ los generadores de F, entonces, dado el problema de proyección

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "\varphi"] & \\ M \arrow[r, "\pi"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

escojamos $e_i \in M$ tales que $\pi(e_i) = \varphi(f_i)$ (existen por ser π sobreyectiva). Entonces, basta definir $\tilde{\varphi} : P \to M$ por $\tilde{\varphi}(f_i) = e_i$ para conseguir el levantamiento deseado.

Más aún supongamos que $F = P \oplus P'$ y que queremos levantar un morfismo $\varphi : P \to N$ como en el diagrama anterior. Definimos entonces $\varphi \times 0 : F \to N$ por $\varphi(p, p') = \varphi(p)$ y sea $\tilde{\varphi} \times \tilde{0} : P \oplus P' \to M$ su levantamiento, de manera que $\tilde{\varphi} : P \to M$ es el levantamiento buscado.

Recíprocamente, supongamos que P es proyectivo. Sea F un módulo libre en algún conjunto de sus generadores y sea $\pi : F \to P$ la proyección obvia. Entonces, se tiene que existe $\psi : P \to F$ tal que

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \arrow[d, "id_P"] & \\ F \arrow[r, "\pi"'] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

En particular, ψ debe ser inyectivo y, por tanto, esto quiere decir que la sucesión exacta corta

$$0 \to P \overset{\psi}{\to} F \to F/P \to 0$$

tiene a $\pi : F \to P$ como split luego, por el splitting lemma, $F = P \otimes F/P$. $\square$

Corolario 2.10. *La categoría **R-Mod** tiene suficientes proyectivos.*

Nuestros pasos, ahora, se dirigen a probar que la categoría de módulos también tiene suficientes inyectivos. Lamentablemente, al contrario que con los módulos proyectivos, la cuestión resulta mucho más complicada y requiere estudiar con cuidado el caso particular de grupos abelianos (i.e., $\mathbb{Z}$-módulos). El resultado clave lo proporcionó Baer en 1940.

Teorema 2.11 (Baer)**.** *Un R-módulo I es inyectivo si y solo si para cada ideal J de R todo homomorfismo de R-módulos $\varphi : J \to I$ se extiende a un homomorfismo de R-módulos $\tilde{\varphi} : R \to I$.*

$$\begin{tikzcd} & I & \\ 0 \arrow[r] & J \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, hook] & R \arrow[ul, dashed, "\tilde{\varphi}"'] \end{tikzcd}$$

Demostración. Si I es inyectivo, la existencia de la extensión es justamente la definición de que I es inyectivo. Para la implicación contraria, sea $N \subset M$ un submódulo de M y sea $\varphi : N \to I$ la aplicación que se desea levantar. Definimos el conjunto $\mathcal{S}$ de las aplicaciones $\tilde{N} \to I$ donde $N \subset \tilde{N} \subset M$ es un submódulo de M, al que ordenamos parcialmente por la inclusión de sus dominios (i.e., $\alpha : N_1 \to I$ es menor que $\beta : N_2 \to I$ si $N_1 \subset N_2$).

Claramente, toda cadena creciente de $\mathcal{S}$ tiene un elemento maximal, por lo que, en virtud del lema de Zorn, existe un elemento maximal en $\mathcal{S}$, digamos $\psi : N' \to I$. Basta probar, entonces, que $N' = M$.

Supongamos, por contra, que existiese $m \in M - N'$ y consideremos el ideal cociente de R

$$J = (N' : m) = \{r \in R \,|\, rm \in N'\}$$

De este modo, por hipótesis, la aplicación $f : J \to I$ dada por $f(r) = \psi(rm)$ se extiende a una aplicación $\tilde{f} : R \to I$. Definimos, entonces, el morfismo

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\psi} : & N' \oplus Rm & \longrightarrow & I \\ & n + rm & \mapsto & \psi(n) + \tilde{f}(r) \end{array}$$

Obsérvese que $\tilde{\psi}$ está bien definido porque si $rm \in N'$, entonces $r \in J$ y, por tanto, $\tilde{f}(r) = f(r) = \psi(rm)$. En consecuencia, el morfismo ψ puede ser extendido, contradiciendo la hipótesis de maximalidad. □

Corolario 2.12. *Sea R un DIP. Entonces un R-módulo, I, es inyectivo si y solo si es divisible, i.e., si para todo $m \in I$ y todo $r \in R$, $r \neq 0$, existe $m' \in I$ tal que $m = rm'$.*

Demostración. Para la parte dificil, sea $\varphi : (r) \to I$ un homomorfimo de R-módulos desde un ideal de R y sea $m = \varphi(r)$. Entonces, como I es divisible, se tiene que $m = rm'$ para cierto $m' \in I$. Así, basta definir la extensión $\tilde{\varphi} : R \to I$ mediante $\tilde{\varphi}(1) = m'$ y extender por linealidad. □

Corolario 2.13. *Sea G un grupo abeliano y H un subgrupo. Se tiene que si G es inyectivo, entonces G/H también es inyectivo.*

Demostración. Si G es divisible, entonces G/H también lo es. □

Corolario 2.14. *La categoría **Ab** de los grupos abelianos tiene suficientes inyectivos.*

Demostración. En primer lugar, observemos que, claramente, $\mathbb{Q}$ es un grupo abeliano divisible y, por tanto, es inyectivo. Más aún, por el corolario anterior, también lo es $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Sea, ahora, G un grupo abeliano y consideremos el grupo inyectivo resultante de sumar tantas copias de $\mathbb{Q}/\mathbb{Q}$ como elementos tiene $Hom(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, esto es

$$G_I = \bigoplus_{f \in Hom(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

De este modo, se tiene definida una aplicación $\psi_G : G \to G_I$ definida mediante $\phi_G(g) = (f(g))_{f \in Hom(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})}$.

Para ver que es un monomorfismo, sea ahora $g \in G$ y sea $|g|$ su orden. Entonces la aplicación $f : \langle g \rangle \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ dada por $f(g) = \frac{1}{|g|} + \mathbb{Z}$ está bien definida y puede extenderse a una aplicación $\tilde{f} : G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ con $\tilde{f}(g) \neq 0$. En consecuencia, ϕ_G es un monomorfismo. $\square$

Para finalizar apoteósicamente nuestra discusión y extender nuestro resultado a R-módulos necesitamos antes una nueva caracterización de objetos inyectivos y proyectivos y la noción de dualidad de functores.

Proposición 2.15. *Un objeto P es proyectivo si y solo si el functor $Hom(P, \cdot)$ es exacto.*

Demostración. Sea la sucesión exacta corta

$$0 \to M' \to M \xrightarrow{f} M'' \to 0$$

Como $Hom(P, \cdot)$ siempre es exacto por la izquierda, se tiene que

$$0 \to Hom(P, M') \to Hom(P, M) \xrightarrow{f_*} Hom(P, M'')$$

es exacto y, por tanto, basta ver que f_* es sobreyectivo. Sea, así $\varphi \in Hom(P, M'')$, de manera que tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\varphi"] & \\ M \arrow[r, "f"'] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

y sea $\tilde{\varphi} : P \to M$ el levantamiento de φ. Entonces, se tiene que $f_*(\tilde{\varphi}) = f \circ \tilde{\varphi} = \varphi$, luego f_* es sobreyectiva.

Recíprocamente, si $\pi : M \to N$ es una sobreyección, construyamos la sucesión exacta corta

$$0 \to \ker \pi \to M \xrightarrow{\pi} N \to 0$$

de manera que la aplicación inducida $\pi_* : Hom(P, M) \to Hom(P, N)$ es sobreyectiva. Así, al igual que en el caso anterior, dada $\varphi : P \to N$, el levantamiento deseado viene dado por cualquier elemento de $\pi_*^{-1}(\varphi)$. $\square$

Corolario 2.16. *Un objeto I es inyectivo si y solo si el functor $Hom(\cdot, I)$ es exacto.*

Definición 2.17. Sean $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ un par de functores. Se dice que L y R son **adjuntos** si existe una trasformación natural biyectiva entre los functores $\mathcal{L} : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{B} \to \mathbf{Set}$ dado por $\mathcal{L}(A, B) = Hom_{\mathcal{B}}(L(A), B)$ y $\mathcal{R} : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{B} \to \mathbf{Set}$ dado por $\mathcal{R}(A, B) = Hom_{\mathcal{A}}(A, R(B))$, i.e., si para cualesquiera $f : A \to A'$ y $g : B \to B'$ existen biyecciones τ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{B}}(L(A'), B) \arrow[r, "\mathcal{T}(A',B)"] \arrow[d, "Lf^*"'] & Hom_{\mathcal{A}}(A', R(B)) \arrow[d, "f^*"'] \\
Hom_{\mathcal{B}}(L(A), B) \arrow[r, "\mathcal{T}(A,B)"] \arrow[d, "g_*"'] & Hom_{\mathcal{A}}(A, R(B)) \arrow[d, "Rg_*"'] \\
Hom_{\mathcal{B}}(L(A'), B') \arrow[r, "\mathcal{T}(A,B')"] & Hom_{\mathcal{A}}(A, R(B'))
\end{tikzcd}$$

En ese caso, se dice que R es el **adjunto a derechas** y que L es el **adjunto a izquierdas**.

El motivo por el que los functores adjuntos resultan relevantes para nuestra discusión es el siguiente teorema.

Teorema 2.18. *Sean $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ functores aditivos adjuntos entre categorías abelianas y supongamos que L es exacto. Entonces, si I es un objeto inyectivo de $\mathcal{B}$, entonces $R(I)$ es un objeto inyectivo de $\mathcal{A}$.*

Demostración. Por el corolario 2.16 basta ver que el functor contravariante $Hom(\cdot, R(I))$ es exacto. Sea, pues, una sucesión exacta corta

$$0 \to A' \xrightarrow{f} A \to A'' \to 0$$

entonces, como $Hom(\cdot, R(I))$ siempre es exacto por la izquierda, se tiene que la siguiente sucesión es exacta.

$$0 \to Hom(A'', R(I)) \to Hom(A, R(I)) \xrightarrow{f^*} Hom(A', R(I))$$

Basta, por tanto, ver que f^* es un epimorfismo. Para ello, obsérvese que, por ser L adjunto de R se tiene que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathcal{B}}(L(A),B) & \xrightarrow{\mathcal{T}} & Hom_{\mathcal{A}}(A,R(B)) \\ {\scriptstyle Lf^*}\downarrow & & {\scriptstyle f^*}\downarrow \\ Hom_{\mathcal{B}}(L(A'),B) & \xrightarrow{\mathcal{T}} & Hom_{\mathcal{A}}(A',R(B)) \end{array}$$

Ahora bien, como L es exacto, se tiene que

$$0 \to L(A') \xrightarrow{Lf} L(A) \to L(A'') \to 0$$

es exacto y, por tanto, como I es inyectivo, se tiene que

$$0 \to Hom(L(A''),I) \to Hom(L(A),I) \xrightarrow{Lf^*} Hom(L(A'),I) \to 0$$

es exacta luego, en particular, Lf^* es un epimorfismo y, por tanto, f^* lo es. $\square$

Exhibamos el primer ejemplo de functores adjuntos. Sea, R-módulo M y un grupo abeliano G. Entonces, olvidando el producto por escalares de M se tiene que M es también un grupo abeliano y, por tanto, se puede formar $Hom_{\mathbf{Ab}}(M,G)$. Más aún, $Hom_{\mathbf{Ab}}(M,G)$ puede ser dotado de estructura de R-módulo definiendo $rf(m) = f(rm)$, de manera que $Hom_{\mathbf{Ab}}(R,\cdot)$ puede verse como un functor $Hom_{\mathbf{Ab}}(R,\cdot) : \mathbf{Ab} \to \mathbf{R\text{-}Mod}$.

Proposición 2.19. *El functor aditivo $Hom_{\mathbf{Ab}}(R,\cdot) : \mathbf{Ab} \to \mathbf{R\text{-}Mod}$ es el adjunto a derechas del functor olvido $\mathbf{R\text{-}Mod} \to \mathbf{Ab}$, esto es*

$$Hom_{\mathbf{Ab}}(M,G) \cong Hom_{\mathbf{R\text{-}Mod}}(M, Hom_{\mathbf{Ab}}(R,G))$$

Demostración. Sea G un grupo abeliano y M un R-módulo. Definimos la aplicación $\tau_{(M,G)} : Hom_{\mathbf{Ab}}(M,G) \to Hom_{\mathbf{R\text{-}Mod}}(M, Hom_{\mathbf{Ab}}(R,G))$ definida por

$$(\tau_{(M,G)}f)(m)(r) = f(rm)$$

Para ver que es biyectiva, simplemente obsérvese que su inversa es la aplicación $\tau^{-1}_{(M,G)} : Hom_{\mathbf{R\text{-}Mod}}(M, Hom_{\mathbf{Ab}}(R,G)) \to Hom_{\mathbf{Ab}}(M,G)$ dada por

$$(\tau^{-1}_{(M,G)}g)(m) = g(m)(1)$$

$\square$

Corolario 2.20. *La categoría $\mathbf{R\text{-}Mod}$ de los R-módulos tiene suficientes inyectivos.*

Demostración. Gracias la proposición anterior y al teorema 2.18, se tiene que, si I es un grupo abeliano inyectivo, entonces $Hom_{\mathbf{Ab}}(R, I)$ es un R-módulo inyectivo, luego en particular $Hom_{\mathbf{Ab}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es un R-módulo inyectivo.

Sea, ahora, M un R-módulo y construyamos el módulo inyectivo que resulta de tomar tantas copias de $I_0 := Hom_{\mathbf{Ab}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ como elementos tenga $Hom_{\mathbf{R\text{-}Mod}}(M, I_0)$, es decir,

$$M_I = \bigoplus_{f \in Hom_{\mathbf{R\text{-}Mod}}(M, I_0)} I_0$$

Análogamente al caso de los grupos abelianos, podemos definir un monomorfismo $\phi_M : M \to M_I$ que hace que M_I sea el módulo inyectivo asociado a M. □

Pero, más aún, utilizando el teorema 2.18 podemos probar que la categoría de los haces abelianos, **ASh**, también tiene suficientes inyectivos. Recordemos que, si $\mathcal{F} : \mathbf{Top}_X \to \mathbf{Ab}$ es un haz sobre un expacio topológico X, $\mathcal{F}_x$ denota el stalk del haz en el punto $x \in X$ y que, elegido un grupo abeliano G, $\mathcal{S}_x^G$ denota el haz skyscraper sobre x con grupo G.

Proposición 2.21. *Para cualquier espacio topológico X, cualquier $x \in X$ y cualquier grupo abeliano G se tiene que*

$$Hom_{\boldsymbol{Ab}}(\mathcal{F}_x, G) \cong Hom_{\boldsymbol{ASh}}(\mathcal{F}, \mathcal{S}_x^G)$$

Demostración. $\boxed{\text{TO DO}}$ □

De este modo, gracias nuevamente al teorema 2.18 podemos encontrar los primeros haces inyectivos.

Corolario 2.22. *Sea I un grupo abeliano inyectivo, entonces $\mathcal{S}_x^I$ es un haz abeliano inyectivo. Más aún, si I_x es un grupo abeliano inyectivo para cada $x \in X$, entonces $\prod \mathcal{S}_x^{I_x}$ es un haz inyectivo.*

Corolario 2.23. *La categoría **ASh** de haces abelianos tiene suficientes inyectivos.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un haz abeliano. Para cada $x \in X$ escojamos un módulo proyectivo $\mathcal{F}_x \to I_x$ y formemos el haz abeliano inyectivo $\mathcal{F}_I = \prod_{x \in X} \mathcal{S}_x^{I_x}$.

Entonces, como $(\mathcal{F}_I)_x = I_x$, se tiene que la trasformación natural $\mathcal{F} \to \mathcal{F}_I$ es un monomorfismo, pues a nivel de stalks se reduce a $\mathcal{F}_x \to I_x$ que es un monomorfismo, y, por tanto, es el monomorfismo de haces abelianos buscado. □

3. Complejos de cadena

Antes de sumergirnos en las resoluciones y cómo estas pueden ser empleadas para definir los fuctores derivados, deberemos estudiar algunos conceptos de complejos de cadenas que nos resultarán útiles posteriormente. Los complejos de cadena son casi ubícuos en topología algebraica y álgebra homológica, en tanto que son el germen a partir del cual se define la (co)homología de un complejo.

Definición 3.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Un **complejo de cadena** es una sucesión de objetos $\{A_i\}_{i=-\infty}^{\infty} \subset Obj(\mathcal{C})$ y unos morfismos entre ellos $d_i : A_i \to A_{i-1}$ tales que $d_i \circ d_{i+1} = 0$.

$$\cdots \to A_{i+1} \overset{d_{i+1}}{\to} A_i \overset{d_i}{\to} A_{i-1} \to \cdots$$

Análogamente, un **complejo de co-cadena** es una sucesión de objetos $\{A_i\}_{i=-\infty}^{\infty} \subset Obj(\mathcal{C})$ y unos morfismos entre ellos $d^i : A_i \to A_{i+1}$ tales que $d^i \circ d^{i-1} = 0$.

$$\cdots \to A_{i-1} \overset{d^{i-1}}{\to} A_i \overset{d^i}{\to} A_{i+1} \to \cdots$$

En todo lo que sigue, centraremos nuestra discusión en los complejos de co-cadena, si bien todas las observaciones y resultados que extraigamos son también aplicables a los complejos de cadena por dualidad.

Definición 3.2. Sean (A^*, d) y (B^*, ∂) sendos complejos de co-cadena en una categoría $\mathcal{C}$. Un morfismo de cadenas $f : A^* \to B^*$ es una colección de morfismos de $\mathcal{C}$, $f^i : A^i \to B^i$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{d^{i-2}} & A^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & A^i & \xrightarrow{d^i} & A^{i+1} & \xrightarrow{d^{i+1}} & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f^{i-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f^i} & & \downarrow{\scriptstyle f^{i+1}} & & \\
\cdots & \xrightarrow{\partial^{i-2}} & B^{i-1} & \xrightarrow{\partial^{i-1}} & B^i & \xrightarrow{\partial^{i+1}} & B^{i+1} & \xrightarrow{\partial^{i+1}} & \cdots
\end{array}$$

Y con todo esto, ya tenemos lo necesario para formar una categoría.

Definición 3.3. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, definimos la categoría $\mathcal{C}-\mathbf{CoCh}$ como aquella cuyo objetos son los complejos de co-cadena sobre $\mathcal{C}$ y cuyos morfismos son las aplicaciones entre co-cadenas. Análogamente, $\mathcal{C}-\mathbf{Ch}$ es la categoría de las cadenas sobre $\mathcal{C}$ y los morfismos sobre ellas.

La primera observación relevante es que, como $d^2 = 0$, se tiene que $\text{Im } d^{i-1} \subset \text{Ker } d^i$. Sin embargo, no necesariamente se tiene que $\text{Im } d^{i-1} = \text{Ker } d^i$ (piensese, por ejemplo, en el complejo de de Rham) y, por tanto, la sucesión que define el complejo de cadena no tiene porqué ser exacta. Precisamente esta desviación de la exactitud es medida por la cohomología.

Definición 3.4. Sea (A^*, d) un complejo de co-cadena. Se define el **n-ésimo objeto de cohomología**, $H^n(A^*, d)$ como

$$H^n(A^*, d) = \text{Coker } \alpha^n = \text{Ker } \beta^n$$

donde $\alpha^{n-1} : A^{n-1} \to \text{Ker } d^n$ y $\beta^n : \text{Coker } d^{n-1} \to A^{n+1}$ son las aplicaciones que hacen conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{Coker } d^{n-1} \arrow[dr, dashed, "\beta^n"] & & \\
\cdots \arrow[r, "d^{n-2}"] & A^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] \arrow[dr, dashed, "\alpha^n"'] & A^n \arrow[u] \arrow[r, "d^n"] & A^{n+1} \arrow[r, "d^{n+1}"] & \cdots \\
 & & \text{Ker } d^n \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

Pero, por supuesto, esto no estaría bien definido sin la siguiente proposición.

Proposición 3.5. *Ambas definiciones de cohomología son equivalentes, i.e.,* $\text{Coker } \alpha^{n-1} \cong \ker \beta^n$.

Demostración. □

Observación 3.6. En el caso de que $\mathcal{C}$ sea, por ejemplo, la categoría **R-Mod** de R-módulos, obsérvese que esta definición concuerda con la clásica de topología algebraica, pues

$$\text{Coker } \alpha^{n-1} = \frac{\text{Ker } d^n}{\text{Im } d^{n-1}} = \text{Ker } \beta^n$$

Ahora bien, dados dos complejos de cadena, es perfectamente posible que ambos no sean isomorfos (algún objeto no es isomorfo a su homólogo en la otra cadena) pero, sin embargo, que ambas cadenas tengan los mismos grupos de homología. Una forma débil de comprobar este hecho es teniendo una homotopía de cadenas.

Definición 3.7. Dados dos complejos de co-cadena (A^*, d) y (B^*, ∂) sobre una categoría abeliana $\mathcal{C}$ y dos aplicaciones $\alpha, \beta : A^* \to B^*$, una **homotopía de cadenas** entre α y β es una sucesión de aplicaciones $K^i : A^i \to B^{i-1}$ tales que $\alpha - \beta = Kd + \partial K$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d^{i-2}"] & A^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "K^{i-1}"'] & A^{i} \arrow[r, "d^{i}"] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "K^{i}"'] & A^{i+1} \arrow[r, "d^{i+1}"] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "K^{i+1}"'] & \cdots \arrow[dl, dashed, "K^{i+2}"'] \\
\cdots \arrow[r, "\partial^{i-2}"] & B^{i-1} \arrow[r, "\partial^{i-1}"] & B^{i} \arrow[r, "\partial^{i+1}"] & B^{i+1} \arrow[r, "\partial^{i+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

En ese caso, denotaremos $\alpha \simeq \beta$.

Proposición 3.8. *Si $\alpha, \beta : A^* \to B^*$ son homotópicamente equivalentes en cadenas, entonces inducen la misma aplicación en cohomología.*

Demostración. □

Afortunadamente, uno de los lemas más importantes para la construcción de la cohomología de de Rham puede generalizarse al caso de categorías abelianas cualesquiera.

Lema 3.9 (de la serpiente)**.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y supongamos que tenemos una sucesión exacta corta de co-cadenas*

$$0 \to A^* \to B^* \to C^* \to 0$$

entonces esta sucesión exacta corta induce en homología una sucesión exacta larga

$$\begin{tikzcd}
H^{-1}(A^*) \arrow[r] & H^{-1}(B^*) \arrow[r] & H^{-1}(C^*) \arrow[dll, "\delta^{-1}"] \\
H^{0}(A^*) \arrow[r] & H^{0}(B^*) \arrow[r] & H^{0}(C^*) \arrow[dll, "\delta^{0}"] \\
H^{1}(A^*) \arrow[r] & H^{1}(B^*) \arrow[r] & H^{1}(C^*) \arrow[dll, dashed] \\
H^{n}(A^*) \arrow[r] & H^{n}(B^*) \arrow[r] & H^{n}(C^*)
\end{tikzcd}$$

4. Resoluciones

Finalizado nuestro periplo por los complejos de cadena, ya disponemos de las herramientas necesarias para estudiar el concepto crucial en la defición de functor derivado.

Definición 4.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y sea $A \in Obj(\mathcal{C})$. Una **resolución inyectiva** de A es un complejo de co-cadena (I^*, d) y un monomorfismo $d^0 : A \to I^1$ tal que la sucesión

$$A \overset{d^0}{\to} I^0 \overset{d^1}{\to} I^1 \overset{d^2}{\to} I^2 \overset{d^3}{\to} \cdots$$

es exacta en I^n para todo $n > 0$. En ese caso, se denotará $A \to I^*$.

Análogamente, una **resolución proyectiva** de A es un complejo de cadena (J^*, ∂) y un epimorfismo $\partial_1 : J^1 \to A$ tal que la sucesión

$$\cdots \overset{\partial_3}{\to} P^3 \overset{\partial_2}{\to} P^2 \overset{\partial_1}{\to} P^1 \overset{\partial_0}{\to} A$$

es exacta en J^n para todo $n > 0$. En ese caso, se denotará $J^* \to A$.

No es, para nada, claro si dada una categoría abeliana cualquiera será posible encontrar una resolución inyectiva para cualquier objeto. Sin embargo, meditando un poco más al respecto, observamos que, en caso de existir tales resoluciones, entonces la categoría tiene suficientes inyectivos, pues basta escoger el primer elemento de la resolución $A \to I^0$. Lo destacado del siguiente lema es que, de hecho, esta condición es suficiente.

Lema 4.2. *Si una categoría abeliana $\mathcal{C}$ tiene suficientes inyectivos, entonces todo objeto tiene una resolución inyectiva. Análogamente, si $\mathcal{C}$ tiene suficientes proyectivos, entonces todo objeto tiene una resolución proyectiva.*

Demostración. Estudiaremos únicamente el caso inyectivo, siendo el proyectivo completamente análogo. Sea $A \in Obj(\mathcal{C})$, en primer lugar, como $\mathcal{C}$ tiene suficientes inyectivos, existe un objeto inyectivo I^0 y una inyección $A \stackrel{d^0}{\to} I^0$.

Para continuar con la construcción, sea ahora $k^{*0} : I^0 \to \text{Coker } d^0$ la proyección al cokernel. Entonces, como $\mathcal{C}$ tiene suficientes inyectivos, existe un objeto inyectivo I^1 y una inyección $\mu_0 : \text{Coker } d^0 \to I^1$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "d^0"] & I^0 \arrow[rr, "d^1"] \arrow[dr, "k^{*0}"'] & & I^1 \arrow[r, "d^2"] & \cdots \\
& & \text{Coker } d^0 \arrow[ur, "\mu_0"'] \arrow[dr] & & \\
& 0 \arrow[ur] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Definimos, ahora, la aplicación composición $d^1 : I^0 \stackrel{k^{*0}}{\to} \text{Coker } d^0 \stackrel{\mu_0}{\to} I^1$. Ahora bien, como μ_0 es un monomorfismo, se tiene que $\text{Ker } d^1 = \text{Ker } k^{*0} = \text{Im } d^0$, donde la última igualdad es por definición. Procediendo recursivamente, se construye una sucesión de objetos inyectivos exacta. $\square$

Al igual que lo ocurrido con los complejos de cadena, estudiaremos únicamente en profundidad las resoluciones inyectivas, siendo todos los resultados aquí expuestos completamente análogos para resoluciones proyectivas.

Teorema 4.3. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y sean $A, B \in Obj(\mathcal{C})$. Supongamos dadas $A \to (I^*, d)$ y $B \to (J^*, \partial)$ sendas resoluciones inyectivas de A y B. Entonces todo morfismo $f : A \to B$ induce un morfismo de co-cadenas $\tilde{f} : I^* \to J^*$ tal que $\partial^0 \circ f = \tilde{f}^1 \circ d^0$.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "f"'] & I^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, "\tilde{f}^1"'] & I^2 \arrow[r, "d^2"] \arrow[d, "\tilde{f}^2"'] & I^3 \arrow[r, "d^3"] \arrow[d, "\tilde{f}^3"'] & \cdots \\
B \arrow[r, "\partial^0"] & J^1 \arrow[r, "\partial^1"] & J^2 \arrow[r, "\partial^2"] & J^3 \arrow[r, "\partial^3"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Más aún, si $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : I^* \to J^*$ *son dos morfismos de cadenas inducidos por la misma* $f : A \to B$*, entonces* $\tilde{f}_1$ *es homotópicamente equivalente a* $\tilde{f}_2$*.*

Corolario 4.4. *Sean* $A \to I^*$ *y* $A \to J^*$ *sendas resoluciones inyectivas del mismo objeto* $A \in \mathcal{C}$*. Entonces,* I^* *y* J^* *son homotópicamente equivalentes, i.e., existen morfismos de co-cadena*

$$\begin{tikzcd} I^* \arrow[r, bend right, "\alpha"'] & J^* \arrow[l, bend right, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

tales que $\alpha \circ \beta \simeq id_{J^*}$ *y* $\beta \circ \alpha \simeq id_{I^*}$*.*

Demostración. Basta considerar las aplicaciones inducidas $\alpha : I^* \to J^*$ y $\beta : J^* \to I^*$ por la aplicación $id_A : A \to A$. □

Corolario 4.5. *Si* $A \to I^*$ *y* $A \to J^*$ *son resoluciones inyectivas del mismo objeto* $A \in \mathcal{C}$*, entonces* $H^n(I^*) \cong H^n(J^*)$ *para todo* $n > 0$*.*

Demostración. Utilizando el teorema [**?**], se tiene que

$$id_{H^n(J^*)} = H^n(id_{J^*}) = H^n(\alpha \circ \beta) = H^n(\alpha) \circ H^n(\beta)$$

$$id_{H^n(I^*)} = H^n(id_{I^*}) = H^n(\beta \circ \alpha) = H^n(\beta) \circ H^n(\alpha)$$

y, por tanto, $H^n(\alpha)$ y $H^n(\beta)$ son mútuamente inversas. □

Supongamos, ahora, que $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un functor aditivo exacto a la izquierda entre dos categorías abelianas. Sea $A \in Obj(\mathcal{A})$ y sea $A \to I^*$ una resolución inyectiva de A. Entonces, es fácil ver que, en ese caso, la sucesión

$$\mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(I^1) \to \mathcal{F}(I^2) \to \mathcal{F}(I^3) \to \cdots$$

es una resolución inyectiva de $\mathcal{F}(A)$, que denotaremos con $\mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(I^*)$. Así, usando el corolario anterior, tenemos:

Corolario 4.6. *Sean* $A \to I^*$ *y* $A \to J^*$ *sendas resoluciones inyectivas del mismo objeto* $A \in \mathcal{C}$ *y sea* $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *un functor aditivo exacto a la izquierda entre categorías abelianas. Entonces se tiene*

$$H^n(\mathcal{F}(I^*)) \cong H^n(\mathcal{F}(J^*))$$

para todo $n > 0$*.*

5. Functores derivados

Definición 5.1. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías abelianas y supongamos que $\mathcal{A}$ tiene suficientes inyectivos. Sea $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un functor exacto por la izquierda, definimos el k-ésimo **functor derivado** de $\mathcal{F}$ por la derecha, $R^k\mathcal{F}$ como el functor que, a cada $A \in Obj(\mathcal{A})$ le hace corresponder

$$R^k\mathcal{F}(A) := H^k(\mathcal{F}(I^*))$$

donde $A \to I^*$ es una resolución inyectiva de A.

Análogamente supongamos que $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos y sea $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un functor exacto por la derecha. Definimos el k-ésimo **functor derivado** de $\mathcal{F}$ por la izquierda, $L_k\mathcal{F}$ como el functor que, a cada $A \in Obj(\mathcal{A})$ le hace corresponder

$$L_k\mathcal{F}(A) := H_k(\mathcal{F}(P^*))$$

donde $P^* \to A$ es una resolución proyectiva de A.

Observación 5.2. Obsérvese que, gracias al corolario 4.6, la definición del functor derivado no depende de la resolución escogida.

Proposición 5.3. *Si $\mathcal{F}$ es un functor exacto a la izquierda, entonces $R^0\mathcal{F} = \mathcal{F}$ y si es exacto a la derecha, entonces $L_0\mathcal{F} = \mathcal{F}$.*

Proposición 5.4. *Si I es un objeto inyectivo, entonces $R^n\mathcal{F}(I) = 0$ para todo $n > 0$ y, si P es un objeto proyectivo, entonces $L_n(P) = 0$ para todo $n > 0$.*

Teorema 5.5. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos y supongamos dada una sucesión exacta corta en $\mathcal{A}$*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

Entonces, todo functor exacto por la izquierda, $\mathcal{F}$, induce una sucesión exacta larga

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(A) \arrow[r] & \mathcal{F}(B) \arrow[r] & \mathcal{F}(C) \arrow[dll, "\delta^0"] \\
& R^1\mathcal{F}(A) \arrow[r] & R^1\mathcal{F}(B) \arrow[r] & R^1\mathcal{F}(C) \arrow[dll, "\delta^1"] \\
& R^2\mathcal{F}(A) \arrow[r] & R^2\mathcal{F}(B) \arrow[r] & R^2\mathcal{F}(C) \arrow[dll, dashed] \\
& R^n\mathcal{F}(A) \arrow[r] & R^n\mathcal{F}(B) \arrow[r] & R^n\mathcal{F}(C)
\end{tikzcd}$$

Proposición 5.6. *El morfismo de conexión $\delta^n : R^n\mathcal{F}(C) \to R^{n+1}\mathcal{F}(A)$ es natural, en el sentido de que, si tenemos morfismos entre sucesiones exactas*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

entonces el siguiente diagrama conmuta para todo $n \geq 0$.

$$\begin{tikzcd}
R^n\mathcal{F}(C) \arrow[r, dashed, "\delta^n"] \arrow[d, "R^n\mathcal{F}(\gamma)"'] & R^{n+1}\mathcal{F}(A) \arrow[d, "R^{n+1}\mathcal{F}(\alpha)"] \\
R^n\mathcal{F}(C') \arrow[r, dashed, "\delta^n"'] & R^{n+1}\mathcal{F}(A')
\end{tikzcd}$$

5.1. Resoluciones acíclicas.

5.1. Resoluciones acíclicas. Para calcular un functor derivado ya vimos que se podían usar distintas resoluciones inyectivas para calcular los distintos objetos $R^k(\mathcal{F}(A))$ en la observación 5.2. Por otro lado, podemos usar otras resoluciones que **no** sea inyectivas para calcular el functor derivado. Una muestra de este fenómeno nos lo dan las resoluciones acíclicas.

Definición 5.7. Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos (resp. proyectivos) y sea $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un functor exacto por la izquierda (resp. por la derecha). Decimos que $A \in Obj(\mathcal{A})$ es *acíclico para $\mathcal{F}$* si para cualquier $k \geq 1$ verifica que

$$R^k(\mathcal{F}(A)) = 0 \qquad \text{(resp. } L_k(\mathcal{F}(A)) = 0\text{)}$$

Y entonces tenemos la siguiente proposición

Teorema 5.8 (de Rham-Weil)**.** *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos y sea $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un functor exacto por la izquierda. Sea $A \in Obj(\mathcal{A})$ tal que $A \to M^*$ es una resolución de A donde M^k es acíclico para $\mathcal{F}$ para cualquier k. Entonces*

$$R^k(\mathcal{F}(A)) = H^k(\mathcal{F}(M^*))$$

es decir, se puede calcular el functor derivado usando una resolución acíclica de A.

Análogamente, si $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos y si $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es exacto por la derecha, entonces si $M^* \to A$ es una resolución de un objeto A donde M^i es acíclico para $\mathcal{F}$ para cualquier k se tiene

$$L_k(\mathcal{F}(A)) = H_k(\mathcal{F}(M^*))$$

La lectura de este teorema es increiblemente potente. No es necesario buscar una resolución inyectiva, sino simplemente una donde ya conozcamos el functor derivado y que sepamos que se anula. Aunque a priori pueda parecer incluso más difícil descubrir si un cierto objeto es acíclico, en muchas ocasiones estos gozan de propiedades tan notables que son fácilmente reconocibles.

6. Ejemplos de functores y sus derivados

6.1. Hom. Unos de los ejemplos de functores más importantes son, dada una categoría $\mathcal{A}$ y un objeto $A \in Obj(\mathcal{A})$, los functores $h^A = Hom(A, \cdot) : \mathcal{A} \to \mathbf{Set}$ (covariante) y $h_A = Hom(\cdot, A) : \mathcal{A} \to \mathbf{Set}$ (contravariante), conocidos como los **functores de Yoneda**.

Una propiedad importante de estos functores es que caracterizan perfectamente la exactitud.

Proposición 6.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría localmente pequeña y $Z \in Obj(\mathcal{C})$ fijo. Entonces, una sucesión*

$$A \to B \to C \to 0$$

es exacta si y solo si

$$0 \to Hom(C, Z) \to Hom(B, Z) \to Hom(A, Z)$$

Análogamente, una sucesión

$$0 \to A \to B \to C$$

es exacta si y solo si

$$0 \to Hom(Z, A) \to Hom(Z, B) \to Hom(Z, C)$$

es exacta.

Corolario 6.2. *Dado $A \in \mathcal{C}$, los functores h^A y h_A son exactos por la izquierda.*

Corolario 6.3. *Sean $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ functores autoadjuntos por la izquieda y por la derecha respectivamente, i.e., existe una equivalencia natural τ tal que*

$$Hom(L(A), B) \overset{\tau}{\cong} Hom(A, R(B))$$

entonces L es exacto por la derecha y R es exacto por la izquierda.

Demostración. Sea $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$ una sucesión exacta en $\mathcal{B}$ y sea $A \in Obj(\mathcal{A})$. Entonces, por la proposición anterior se tiene que $Hom(A, \cdot)$ es exacto por la izquierda y, por tanto,

$$0 \to Hom(L(A), B') \to Hom(L(A), B) \to Hom(L(A), B'')$$

es exacta. Ahora bien, vía la equivalencia natural τ esto quiere decir que, entonces, la sucesión

$$0 \to Hom(A, R(B')) \to Hom(A, R(B)) \to Hom(A, R(B''))$$

es exacta. No obstante, usando nuevamente la proposición anterior, la exactitud de esta sucesión es equivalente a que la sucesión

$$0 \to R(B') \to R(B) \to R(B'')$$

sea exacta, es decir, que R sea exacto por la izquierda. La prueba para L es análoga. □

6.1.1. Lema de Yoneda. Más allá su comportamiento con la exactitud, otra de las propiedades fundamentales del functor Hom es que es capaces de capturar toda la información contenida en la categoría $\mathcal{A}$. En efecto, es una idea recurrente en geometria y en topología que un cierto espacio puede ser entendido a través de las funciones que se definen sobre él. Ejemplos de esta filosofía es, por ejemplo, la teoría Morse; o la observación de que en un espacio topológico compacto X, las funciones continuas sobre él, $C^0(X) = \{f : X \to \mathbb{R}\}$, permiten reconstruir a X mediante el homeomorfismo $\mu : X \to Max(C^0(X))$ (el espectro maximal con la topología de Zariski heredada) dado por $\mu(x) = \{f \in C^0(X) \mid f(x) = 0\}$.

Una expresión púramente algebraica de este principio geométrico es lo que se conoce como el **lema de Yoneda**.

Lema 6.4 (Yoneda)**.** *Sea $\mathcal{A}$ una categoría localmente pequeña y sea $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to$ **Set** un functor covariante. Denotemos con $Hom(h^A, \mathcal{F})$ el conjunto de transformaciones naturales entre h^A y $\mathcal{F}$. Entonces, para todo $A \in Obj(\mathcal{A})$, se tiene que la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & Hom(h^A, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(A) \\ & \psi & \mapsto & \psi(A)(id_A) \end{array}$$

es una biyección.

Demostración. Sea $X \in Obj(\mathcal{A})$ y $f \in h^A(X) = Hom(A, X)$. Veamos, en primer lugar, que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} Hom(A,A) \arrow[rrr, "h^A(f)"] \arrow[ddd, "\psi(A)"'] & & & Hom(A,X) \arrow[ddd, "\psi(X)"] \\ & id_A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & f \arrow[d, mapsto] & \\ & \psi(A)(id_A) \arrow[r, mapsto] & \mathcal{F} f(\psi(A)(id_A)) & \\ \mathcal{F}(A) \arrow[rrr, "\mathcal{F} f"'] & & & \mathcal{F}(X) \end{tikzcd}$$

En efecto, por definición del morfismo $h^A(f) : Hom(A, A) \to Hom(A, X)$ se tiene que $h^A(f)(g) = f \circ g$ y, por tanto $f = h^A(f)(id_A)$. De este modo, aplicando esta igualdad, se tiene

$$\psi(X)(f) = (\psi(X) \circ h^A(f))(id_A) = (\mathcal{F} f \circ \psi(A))(id_A) = \mathcal{F} f(\psi(A)(id_A))$$

donde la segunda igualdad se debe a que, por ser $\psi : h^A \to \mathcal{F}$ una trasformación natural, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
h^A(A) = Hom(A, A) \arrow[r, "\psi(A)"] \arrow[d, "h^A(f)"'] & \mathcal{F}(A) \arrow[d, "\mathcal{F} f"] \\
h^A(X) = Hom(A, X) \arrow[r, "\psi(X)"'] & \mathcal{F}(X)
\end{tikzcd}$$

Pero, entonces, ya hemos terminado, pues a raíz de esta igualdad se observa que ψ queda unívocamente identificado por $\psi(A)(id_A)$ y que cualquier elemento en $\mathcal{F}(A)$ induciría una transformación natural definiéndola para que cumpliese dicha igualdad. En consecuencia, φ es la biyección deseada. $\square$

Corolario 6.5. *Para toda categoría localmente pequeña $\mathcal{A}$ y cualesquiera $A, B \in Obj(A)$, se tiene una biyección*

$$Hom(h^A, h^B) \cong Hom_{\mathcal{A}}(B, A)$$

La potencia de este lema da origen a una definición.

Definición 6.6. Un functor $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to$ **Set** se dice **representable** si es naturalmente equivalente a $h^A = Hom(A, \cdot)$ para algún $A \in Obj(A)$. Definimos, entonces, la categoría $\mathbf{Repr}_{\mathcal{A}}$ cuyos objetos son functores representables sobre $\mathcal{A}$ y cuyos morfismos son las transformaciones naturales entre ellos.

Corolario 6.7. *Para toda categoría localmente pequeña $\mathcal{A}$, se tiene que $\boldsymbol{Repr}_{\mathcal{A}}$ y $\mathcal{A}$ son naturalmente equivalentes.*

6.2. Tor. Trabajaremos con la categoría **R-Mod** de módulos sobre un anillo fijo R. Consideremos un R-módulo B y definamos el functor covariante $\cdot \otimes_R B$: **R-Mod** $\to$ **R-Mod** del producto tensorial por la izquierda con B. En primer lugar observemos que este functor se relaciona fuertemente con el functor Hom que antes hemos estudiado.

Proposición 6.8. *El functor* $\cdot \otimes_R B$ *es el adjunto a izquierdas del functor* $Hom(B, \cdot)$, *esto es*

$$Hom(A \otimes_R B, C) \cong Hom(A, Hom(B, C))$$

para cualesquiera R*-módulos* A, B *y* C.

Demostración. Dada cualquier aplicación R-bilineal $f : A \times B \to C$ esta induce una aplicación $\tau(f) : A \to Hom(B, C)$ definida por $\tau(f)(a) = f(a, \cdot)$. Análogamente, cada aplicación $g : A \to Hom(B, C)$ define una aplicación R-bilineal $\mu(g) : A \times B \to C$ dada por $\mu(g)(a, b) = g(a)(b)$. De este modo, τ y μ son trasformaciones naturales entre el conjunto de las aplicaciones bilineales y $Hom(A, Hom(B, C))$. La prueba termina observando que, por la propiedad universal del producto tensorial, $Hom(A \otimes_R B, C)$ es naturalmente equivalente al conjunto de las aplicaciones bilineales $A \times B \to C$. $\square$

Corolario 6.9. *El functor* $\cdot \otimes_R B$ *es exacto por la derecha.*

Definición 6.10. Dados dos R-módulos A y B, se define el **k-ésimo módulo Tor** de A y B, denotado $Tor_k^R(A, B)$, como el k-ésimo functor derivado por la izquierda de $\cdot \otimes_R B$ evaluado en A, esto es

$$Tor_k^R(A, B) = L_k(\cdot \otimes_R B)(A)$$

Definición 6.11. Un R-módulo M se dice **plano** si $\cdot \otimes_R M$ es exacto por la izquierda o, equivalentemente, si $Tor_n^R(N, M) = 0$ para todo $n \geq 1$.

Dedicaremos el resto de la sección a comenzar a entender cuál es la relación de grupo Tor con la torsión de un grupo y calcularemos algunos ejemplos.

Ejemplo 6.12. Sea G un grupo abeliano (i.e., un $\mathbb{Z}$-módulo). Dado un entero n, consideremos la sucesión exacta

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n \to 0$$

donde el primer morfismo está dado por multiplicar por n. Observemos que, como $\mathbb{Z}$ es libre, en particular es proyectivo y, por tanto, ésta es una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}_n$. De este modo, para calcular el functor derivado a izquierdas, debemos calcular la homología de

$$0 \otimes_{\mathbb{Z}} G \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} G \xrightarrow{\cdot n \otimes id_G} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} G \to 0$$

lo que, usando la propiedad de que $R \otimes_R M \cong M$ se tiene que es isomorfa a la homología del complejo

$$0 \to G \xrightarrow{\cdot p} G \to 0$$

En consecuencia, recordando la definición de Tor se tiene que

$$Tor_0^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, G) = G/pG \quad Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, G) = \{g \in G \,|\, pg = 0\} \quad Tor_k^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_p, G) = 0$$

para todo $k \geq 2$.

Observación 6.13. En el cálculo anterior, $\mathbb{Z}$ no ha tenido ningún papel preponderante y, perfectamente podíamos haber realizado los cálculos con un anillo R cualquiera. De este modo, para cualquier R-módulo M se tendría que $Tor_1^R(R/(x), M) = \{m \in M \,|\, xm = 0\}$ para cualquier x que no fuese divisor de 0.

Resulta que el grupo Tor es simétrico en sus argumentos.

Proposición 6.14. *Para cualesquiera R-módulos A y B se tiene*

$$Tor_*^R(A, B) \cong Tor_*^R(B, A)$$

Corolario 6.15. *Un R-módulo M es plano si y solo si es acíclico para el functor $\cdot \otimes_R N$ para todo R-módulo N.*

Corolario 6.16. *Para todo grupo abeliano G y todo $k > 0$ se tiene $Tor_k^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, G) = 0$.*

Demostración. $\mathbb{Z}$ es libre, ergo es proyectivo y, por tanto, es acíclico. □

Para calcular los grupos de torsión más generales, deberemos *reensamblar* las piezas de Tor a partir de otras más simples. Para ello, la herramienta más utilizada será la clasificación de grupos abelianos finitamente generados, que afirma que, para todo grupo abeliano G finitamente generado, existe $r \geq 0$, primos distintos $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ y enteros $m_1, \ldots, m_n$ tales que

$$G \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{m_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_n^{m_n}}$$

Más aún, las descomposiciones de esta forma son únicas. En particular, el número r está unívocamente determinado y se denomina el **rango** de G, que resulta ser el cardinal de un conjunto maximal de elementos linealmente independientes.

Una vez que tenemos las piezas, debemos tener la herramienta para reensamblarlas.

Definición 6.17. Dadas dos categoría $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, un **diagrama** es simplemente un functor $\mathcal{F}:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$. Dado un objeto $A\in Obj(\mathcal{A})$, un **morfismo de diagrama** entre el diagrama $\mathcal{F}$ y el objeto A, es una transformación natural entre $\mathcal{F}$ y el functor constante A, es decir, un conjunto de aplicaciones $\tau(B):\mathcal{F}(B)\to A$ para cada $B\in Obj(\mathcal{B})$ tales que para todo morfismo $f:B\to B'$ en $\mathcal{B}$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(B) \arrow[dd, "\mathcal{F}(f)"'] \arrow[dr, "\psi(B)"] & \\
& A \\
\mathcal{F}(B') \arrow[ur, "\psi(B')"'] &
\end{tikzcd}$$

Observación 6.18. En general, $\mathcal{B}$ será una subcategoría de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{F}$ será únicamente el functor inclusión, lo que concuerda con nuestra noción intuitiva de lo que es un diagrama. En ese caso, confundiremos el functor $\mathcal{F}$ con $\mathcal{B}$ y diremos que $\mathcal{B}$ es el diagrama.

Definición 6.19. Dado un diagrama $\mathcal{F}:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$, un **colímite** para $\mathcal{F}$, denotado por $\varinjlim\mathcal{F}$, es un objeto $Z\in Obj(\mathcal{A})$ y un morfismo de diagramas $\tau:\mathcal{F}\to Z$ con la propiedad universal de que, para cualquier otro objeto $Z'\in Obj(\mathcal{A})$ y morfismo $\tau':\mathcal{F}\to Z$, existe un morfismo en $\mathcal{A}$ $\alpha:Z\to Z'$ tal que $\alpha\circ\tau=\tau'$ (en el sentido obvio).

Observación 6.20. Usando un argumento típico de propiedad universal, es fácil ver que el colímite, de existir, es único.

En general, no queda para nada claro si en una categoría cualquiera el colímite existe. Al igual que el problema de tener suficientes inyectivos, esto deberá ser estudiado para cada categoría. Afortunadamente, para el caso de **R-Mod**, el problema está resuelto.

Proposición 6.21. *Para cualquier subcategoría pequeña $\mathcal{B}\subset$ **R-Mod**, el colímite $\varinjlim\mathcal{B}$ existe y es único. En ese caso, se dice que, en **R-Mod**, los colímites existen.*

Teorema 6.22. *En todo R-módulo, Tor_k^R conmuta con colímites, esto es*

$$\varinjlim Tor_k^R(A,B_i)=Tor_k^R(A,\varinjlim B_i)$$

donde B_i son los elementos de una categoría pequeña, que forma un diagrama por inclusión.

La noción de colímite es justo la que nos permite dar el salto de $\mathbb{Z}_n$ a grupos abelianos gracias al siguiente resultado.

Proposición 6.23. *Todo grupo abeliano es el límite directo de sus subgrupos finitamente generados.*

Gracias a ello, ya estamos a las puertas de demostrar el principal resultado de esta sección, que relaciona a **Tor** con el subgrupo de torsión de un grupo abeliano.

Definición 6.24. En un grupo G (escrito multiplicativamente), el subgrupo de torsión, $Tor(G)$, es el subgrupo formado por todos los elementos $g \in G$ tales que $g^n = 1$ para algún $n \geq 0$.

Teorema 6.25. *Para cualquier grupo abeliano G, $Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, G)$ es el subgrupo de torsión de G.*

Demostración. Por la proposición 6.23, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es el colímite de todos sus subgrupos finitamente generados, que son todos isomorfos a $\mathbb{Z}_n$ para algún $n > 0$. De este modo, se tiene

$$Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, G) = Tor_1^{\mathbb{Z}}(\lim_{\rightarrow} \mathbb{Z}_n, G) = \lim_{\rightarrow} Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, G) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{g \in G \,|\, ng = 0\} = Tor(G)$$

$\square$

Proposición 6.26. *Si G es un grupo abeliano libre de torsión, entonces $Tor_*^{\mathbb{Z}}(G, G') = 0$ para cualquier grupo abeliano G'.*

Demostración. Como G es el colímite de sus subgrupos finitamente generados y estos son isomorfos a $\mathbb{Z}^r$ para algún $r \geq 0$, se tiene

$$Tor_*^{\mathbb{Z}}(G, G') = Tor_*^{\mathbb{Z}}(\lim_{\rightarrow} Z^r, G') = \lim_{\rightarrow} Tor_*^{\mathbb{Z}}(Z^r, G') = 0$$

$\square$

Corolario 6.27. *Un grupo abeliano es plano si y solo sí es libre de torsión.*

Proposición 6.28. *Para cualesquiera grupos abelianos A y B, $Tor_1^{\mathbb{Z}}(A, B)$ es un grupo de torsión (i.e., todo elemento es nilpotente) y $Tor_k^{\mathbb{Z}}(A, B) = 0$ para todo $k \geq 2$.*

Demostración. Es fácil ver que el colímite de grupos de torsión es un grupo de torsión. En consecuencia, como A es el colímite de sus subgrupos finitamente generados, podemos suponer que A es finitamente generado, digamos de la forma

$$A \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{m_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_n^{m_n}}$$

De este modo, como $Tor_k^{\mathbb{Z}}(A_1 \oplus A_2, B) \cong Tor_k^{\mathbb{Z}}(A_1, B) \oplus Tor_k^{\mathbb{Z}}(A_2, B)$ por las propiedades elementales del producto tensorial, y $Tor_k^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, G) = 0$ para todo $k \geq 1$, se tiene que, para $k \geq 1$

$$Tor_k^{\mathbb{Z}}(A, B) = Tor_k^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p_1^{m_1}}, B) \oplus \cdots \oplus Tor_k^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p_n^{m_n}}, B)$$

y el resultado se sigue del ejemplo 6.12. □

6.3. Ext.

7. Cohomología de haces

Una de las utilidades más importantes de los functores derivados es que pueden ser utilizados para definir unos invariantes topológicos asociados a ciertos haces, lo que se conoce como la cohomología de haces.

Definición 7.1. Sea X un espacio topológico. El functor $\Gamma : \mathbf{ASh}_X \to \mathbf{Ab}$ que a cada haz abeliano $\mathcal{F} \in Obj(\mathbf{ASh}_X)$ le asocia $\Gamma(\mathcal{F}) := \mathcal{F}(X)$ y a cada morfismo de haces $\tau : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ le asocia $\Gamma(\tau) := \tau(X) : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)$ se denomina el functor de **secciones globales**.

Se puede comprobar que Γ es un functor exacto por la izquierda, por lo que podemos utilizar la teoría desarrollada en la sección anterior y definir el functor derivado por la derecha de Γ, donde I^* es una resolución inyectiva de $\mathcal{F}$

$$R^i(\Gamma(\mathcal{F})) = H^i(\Gamma(I^*)).$$

Definición 7.2. Definimos el *k-ésimo* grupo de **cohomología de haces** del haz $\mathcal{F}$ sobre X como

$$H^k(X, \mathcal{F}) := R^k(\Gamma(\mathcal{F})).$$

7.1. Métodos efectivos de cálculo de la cohomología. Como vimos con el teorema de de Rham-Weil (teorema 5.8), los functores derivados pueden ser computados a partir de resoluciones acíclicas objetos. Esta idea es especialmente potente en haces, pues si esa reducción, el cálculo de las cohomología sería súmamente complejo. Piénsese, por ejemplo, cúan difícil es hallar una resolución inyectiva para el haz constante $\mathbb{R}$.

Ahora bien, encontrar haces acíclicos de por sí también parece una tarea harto complicada. Sin embargo, como veremos, existen ciertas condiciones fácilmente comprobables que se pueden imponer a los haces que garantizan que el haz sea acíclico.

Proposición 7.3. *Sea $\mathcal{F}$ un haz sobre X tal que para cualesquiera $V \subset U$ se tiene que*

$$\mathcal{F}(i_{V\to U}) : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V),$$

*es sobreyectiva (que es lo que llamaremos **haz flácido**). Entonces $\mathcal{F}$ es acíclico para Γ, o lo que es lo mismo, $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ para todo $i > 0$.*

Y gracias a estos haces flácidos vamos a ser capaces de construir resoluciones acíclicas. Veamos el proceso: sea $\mathcal{F}$ un haz. Le podemos asociar un haz $\mathcal{F}_{God}$ que se comporta sobre los abiertos de X como

$$\mathcal{F}_{God}(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x.$$

Para ese nuevo haz, tenemos la inclusión de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}_{God}$. Entonces, luego podemos repetir el proceso para el cociente $\mathcal{F}_{God}/\mathcal{F}$, obteniendo otro paso de la resolución

$$\mathcal{F} \to \mathcal{F}_{God} \to (\mathcal{F}_{God}/\mathcal{F})_{God} \to \dots$$

Es fácil comprobar a partir de la definición que el haz que le asociamos ($\mathcal{F}_{God}$) siempre es flácido, y en consecuencia esta resolución (llamada de **Godement**) es una resolución de un complejo cuyos elementos son siempre acíclicos. En consecuencia, podemos usarla para calcular la cohomología de haces de $\mathcal{F}$. La siguiente definición técnica es la condición necesaria para poder hacer ese uso de la resolución de Godement.

Definición 7.4. Sea $\mathcal{F}$ un haz sobre X. Se dice que $\mathcal{F}$ es un **buen haz** si $\mathcal{F}$ es un haz de R-módulos con R un haz de anillos sobre X. Además, se tiene que para cualquier recubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ de X existe una partición de la unidad para la suma que nos da la estructura de anillo de A.

Proposición 7.5. *Sea $\mathcal{F}$ un buen haz de X. Entonces $H^i(X,\mathcal{F}) = 0$ para cualquier $i > 0$.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} \to I^*$ la resolución de Godement para $\mathcal{F}$. Como ya hemos visto, esta resolución tiene todos sus elementos acíclicos, por lo que tenemos que

$$H^k(X,\mathcal{F}) = H^k(\Gamma(I^*)) = \frac{ker(\Gamma(I^k) \to \Gamma(I^{k+1}))}{Im(\Gamma(I^{k-1}) \to \Gamma(I^k))}.$$

Sea ahora $\alpha \in ker(\Gamma(I^k) \to \Gamma(I^{k+1}))$. Tenemos por la exactitud local de d que existe un recubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ y unos β_i correspondientes con $\alpha|_{U_i} = d\beta_i$. Como $\mathcal{F}$ es un buen haz, tenemos que existe una partición de la unidad asociada a este recubrimiento. Sea

$$\beta = \sum_{i\in I} f_i\beta_i \in I^{k-1}(X).$$

Es evidente que $d\beta = \alpha$, por lo que $\alpha \in Im(\Gamma(I^{k-1}) \to \Gamma(I^k))$, por lo que para cualquier $k > 0$

$$H^k(X,\mathcal{F}) = 0.$$

□

8. Hipercohomología

La hipercohomología es un giro más en la complejidad de la cohomología de haces, gracias a la cual podremos definir un grupo de cohomología asociado no a un haz, sino a un complejo de haces. Para ello, lo primerlo que debemos hacer es extender la noción de functor derivado para complejos.

Consideremos un complejo de co-cadena de haces $\mathcal{F}^*$. Queremos extender la noción de *resolución inyectiva* a $\mathcal{F}$ para lo cual escojamos un complejo de co-cadena de haces inyectivos, $\mathcal{I}^*$ y un quasi-isomorfismo (i.e., induce isomorfismos en homologia) $i : \mathcal{F}^* \to \mathcal{I}^*$ tal que $i^k : \mathcal{F}^k \to \mathcal{I}^k$ es un monomorfismo para todo $k \in \mathbb{N}$. A esta construcción se la conoce como una **resolución inyectiva** del complejo $\mathcal{F}^*$ y se denota por $\mathcal{F}^* \to \mathcal{I}^*$.

Definición 8.1. Sea $\mathcal{F}^*$ un complejo de co-cadena de haces y $F : \mathbf{ASh} \to \mathcal{C}$ un functor exacto a la izquierda. Definimos el k-ésimo **functor derivado de complejos** de F como

$$R^kF(\mathcal{F}^*) = H^k(F(\mathcal{I}^*))$$

donde $\mathcal{I}^*$ es una resolución de $\mathcal{F}^*$ por haces inyectivos.

Observación 8.2. Al igual que lo ocurrido con la definición de functor derivado de un objeto, no es difícil probar una serie de lemas análogos al caso de objetos que muestran que el functor derivado de complejos está bien definido salvo isomorfismo.

Definición 8.3. Sea la categoría **ASh** sobre el espacio topológico X y $\Gamma : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(X) = \Gamma(X, \mathcal{F})$ el functor de secciones globales. Definimos el **k-ésimo grupo de hipercohomología** del complejo de haces $\mathcal{F}^*$ como

$$\mathbb{H}^k(X, \mathcal{F}^*) = R^k\Gamma(\mathcal{F}^*)$$

donde $\mathcal{F}^*$ es un complejo de haces de la categoría **ASh** y $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^*$ es una resolución inyectiva.

8.1. Relación entre cohomología e hipecohomología.

Vamos a describir la interesante relación entre los grupos de cohomología y de hipercohomología utilizando convenientemente el trabajo que hemos desarrollado en las páginas previas.

Dadas las categorías $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ donde las dos primeras tienen suficientes objetos inyectivos, y los functores $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $\mathcal{G} : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, ambos exactos por la izquierda.

En particular, estamos suponiendo que $\mathcal{F}$ transforma los objetos inyectivos de $\mathcal{A}$, es decir, los que son acíclicos para $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$, en objetos que son acíclicos para $\mathcal{G}$.

Si $A \to I^*$ es una resolución inyectiva (es decir, acíclica para $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$), por la definición que hemos dado para la cohomología de haces, tenemos que

$$R^k(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(A) \cong H^k(\mathcal{G} \circ \mathcal{F}(I^*)).$$

Por otro lado, como la resolución $\mathcal{F}(I^*)$ es acíclica para $\mathcal{G}$, por el teorema 5.8, tenemos que el k-ésimo grupo de cohomología del functor compuesto es el $k$ésimo functor derivado por la derecha, es decir

$$H^k(\mathcal{G} \circ \mathcal{F}(I^*)) = R^k\mathcal{G}(\mathcal{F}(I^*))$$

con lo que podemos calcular $R^k(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(A)$ aplicando el complejo $\mathcal{F}(I^*)$ por el functor derivado a la derecha de $\mathcal{G}$.

Ahora bien, por el teorema 4.6, sabemos que $R^k\mathcal{G}(\mathcal{F}(I^*))$ únicamente depende del complejo $\mathcal{F}(I^*)$ y es invariante bajo isomorfismo en los componentes del complejo.

Esta discusión tiene una aplicación importante en cohomología de haces: consideremos una función continua entre espacios topológicos $\phi : X \to Y$ y $\mathcal{F}$ un haz sobre X.

Definimos el push-forward de ϕ como el functor $\phi_* :$$\mathbf{ASh}_X \to$$\mathbf{ASh}_Y$ tal que

$$\phi_*(\mathcal{F}(\cdot)) = \mathcal{F}(\phi^{-1}(\cdot))$$

Tendremos que las secciones globales se preservan por medio de la identidad $\Gamma(X, \mathcal{F}) = \Gamma(Y, \phi_*\mathcal{F})$, por lo que podremos ver el functor de secciones globales en X como la composición del functor ϕ_* : con el functor de secciones globales en Y ya que ϕ_* transforma haces flácidos sobre X en haces flácidos sobre Y.

En síntesis, para cada resolución floja $\mathcal{F}^*$ de $\mathcal{F}$, tenemos que

$$H^k(X, \mathcal{F}) = \mathbb{H}^k(Y, \phi_*(\mathcal{F}^*))$$

para cualquier complejo de haces, por lo que la cohomología y la hipercohomología coinciden en este sentido.