El teorema del h-cobordismo

J. Ángel González Prieto

Directora: Marina Logares

Universidad Autónoma de Madrid

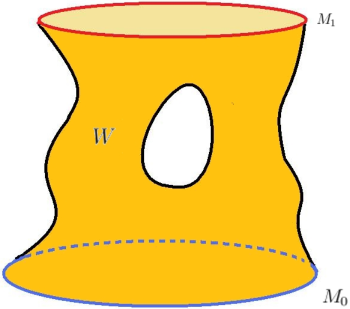
23 de mayo de 2014

Índice

Cobordismo

Definición: Cobordismo

Dadas dos variedades diferenciables cerradas y conexas M_0 y M_1, un **cobordismo** entre ellas es una variedad diferenciable compacta y conexa, W, tal que $\partial W = M_0 \sqcup M_1$.



Teorema del h-cobordismo

Definición: h-cobordismo

Un cobordismo W entre M_0 y M_1 se dice **h-cobordismo** si M_0 y M_1 son simplemente conexas y las inclusiones $M_0, M_1 \hookrightarrow W$ son retractos de deformación.

Teorema (Del h-cobordismo)

Si W es un h-cobordismo entre M_0 y M_1 con $\dim W \geq 6$, entonces W es trivial, esto es, $W \cong M_0 \times [0, 1]$

Caracterización del disco

Teorema (Caracterización del disco)

Sea M^m una variedad compacta simplemente conexa con frontera simplemente conexa y $m \geq 6$, entonces son equivalentes:

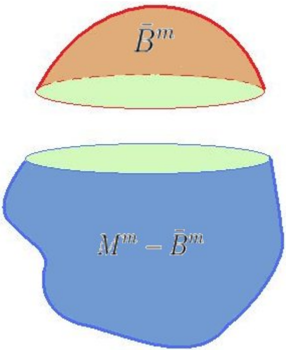
- M^m es difeomorfa a $\bar{B}^m$.
- M^m es homeomorfa a $\bar{B}^m$.
- M^m es contráctil.
- M^m tiene la homología de un punto.

Idea de la demostración.- Consideremos $M^m - B^m$. Usando la sucesión exacta del par $(M^m, \bar{B}^m)$ se tiene que $H_*(M^m - B^m, S^{m-1}) = H_*(M^m, \bar{B}^m) = 0$ luego, por el teorema del h-cobordismo, $M^m - B^m \cong S^{m-1} \times [0, 1]$.

Conjetura de Poincaré

Teorema (Conjetura generalizada de Poincaré)

Sea M^m una variedad compacta y conexa tal que $H_*(M^m) = H_*(S^m)$ de dimensión $m \geq 5$. Entonces M^m es homeomorfa a S^m.



Afinando la conjetura de Poincaré

Teorema (Kervaire y Milnor)

Si M^m es una esfera homológica para $m = 5, 6$, entonces existe una variedad compacta, simplemente conexa, y contractible W tal que $\partial W = M^m$.

Corolario

No existen esferas exóticas en dimensión 5 o 6.

Número de estructuras diferenciables en la esfera

Dim	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Estructuras	1	1	1	**?**	1	1	28	2	8	6	992	1	3	2	16256

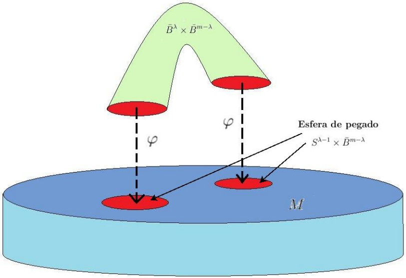
Índice

Adjunción de un asa

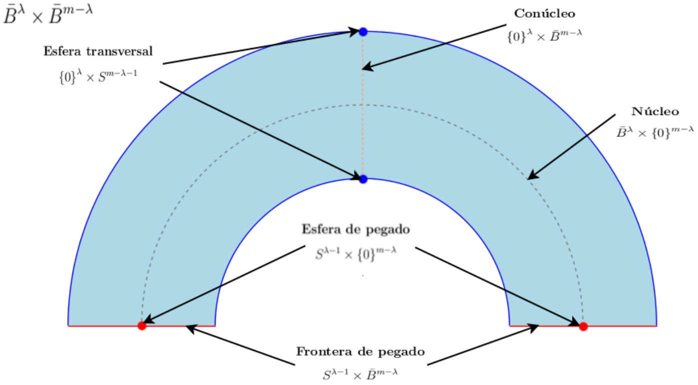
Definición: Adjunción de un asa

Sea W^m una variedad compacta y $\varphi : S^{\lambda-1} \times \bar{B}^{m-\lambda} \to \partial M$ un embebimiento. El resultado de **adjuntar una λ-asa** a W vía φ, $W + \mathcal{A}^{\lambda}_{\varphi}$, es

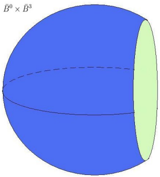
$$W + \mathcal{A}^{\lambda}_{\varphi} = W \cup_{\varphi} \bar{B}^{\lambda} \times \bar{B}^{m-\lambda}$$



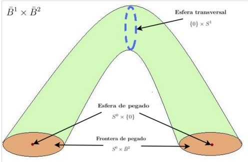
Anatomía de un asa



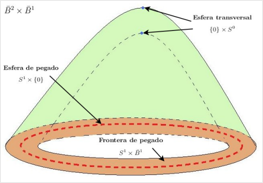
Zoológico de asas en dimensión 3



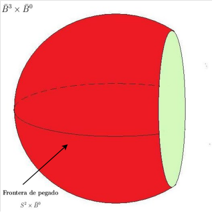
0-asa



1-asa



2-asa



3-asa

Descomposición en asas de un cobordismo

Teorema

Para todo cobordismo W entre M_0 y M_1 existen $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_r$ tales que

$$W \cong M_0 \times [0,1] + \sum_{s=1}^{n_1} \mathcal{A}^{\lambda_1}_{\varphi_{1,s}} + \sum_{s=1}^{n_2} \mathcal{A}^{\lambda_2}_{\varphi_{2,s}} + \cdots + \sum_{s=1}^{n_r} \mathcal{A}^{\lambda_r}_{\varphi_{r,s}}$$

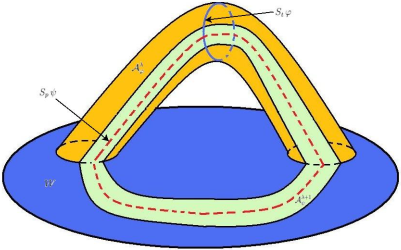
para ciertos k-embebimientos engrosados $\varphi_{k,s}$ respetando el borde M_0.

Simplificando el cobordismo

Objetivo: Cancelar las asas entre si para conseguir un cobordismo trivial.

Lema de desentrelazamiento

Si $\varphi : S^{\lambda-1} \times \bar{B}^{m-\lambda} \to \bar{\partial} W$ y $\psi : S^{\lambda} \times \bar{B}^{m-\lambda-1} \to \bar{\partial}(W + \mathcal{A}^{\lambda}_{\varphi})$ son dos embebimientos tales que $S_p\psi \pitchfork S_t\varphi$ es un solo punto, entonces $W \cong W + \mathcal{A}^{\lambda}_{\varphi} + \mathcal{A}^{\lambda+1}_{\psi}$



Handle trading

Objetivo: Cambiar un asa por otra de dimensión mayor.

Teorema de cancelación de asas

Sea W^m un cobordismo y $0 < \lambda < m-2$ y supongamos que W no tiene asas de índice menor que λ. Fijemos un asa $\varphi_{k_0}^{\lambda}$ y supongamos que existe $\psi : S^{\lambda} \times \bar{B}^{m-\lambda-1} \to \overline{\partial}^0 W_{\lambda}$ tal que

- En $\overline{\partial} W_{\lambda}$: ψ es isótopo a un embebimiento desentrelazado de $\varphi_{k_0}^{\lambda}$ y cuya esfera transversal es disjunta a de las de otras λ-asas.
- En $\overline{\partial} W_{\lambda+1}$: ψ es isótopo a un embebimiento trivial.

Entonces, $\varphi_{k_0}^{\lambda}$ puede ser sustituido por un $(\lambda+2)$-asa, i.e., existe $\phi : S^{\lambda+1} \times \bar{B}^{m-\lambda-2} \to \overline{\partial} W_{\lambda+1}$ tal que

$$W = M_0 \times [0,1] + \sum_{k=0, k\neq k_0}^{n_{\lambda}} \mathcal{A}_{\varphi_k^{\lambda}}^{\lambda} + \sum_{k=1}^{n_{\lambda+1}} \mathcal{A}_{\varphi_k^{\lambda+1}}^{\lambda+1} + \mathcal{A}_{\phi}^{\lambda+2} + \sum_{\mu=\lambda+2}^{m} \sum_{k=1}^{n_{\mu}} \mathcal{A}_{\varphi_k^{\mu}}^{\mu}$$

El poder del álgebra

Sea W^m un h-cobordismo con $m \geq 6$.

Lema de homología

Sea $1 < \lambda < m - 2$ tal que W no tiene asas de índice menor que λ. Sea $f : S^\lambda \to \overline{\partial} W_\lambda$ un embebimiento tal que $[f] = \pm[\mathcal{A}^\lambda_{\varphi_{k_0}}]$, entonces f es isótopo a una aplicación desentrelazada de φ_{k_0}

Lema de modificación

Sea $f : S^\lambda \to \overline{\partial}^0 W_\lambda$ un embebimiento. Escojamos un borde $b \in \operatorname{Im} \partial : C_{\lambda+1} \to C_\lambda$, entonces existe un embebimiento $g : S^\lambda \to \overline{\partial}^0 W_\lambda$ isotópico a f en $\overline{\partial} W_{\lambda+1}$ tal que $[g] = [f] + b$

La forma normal

Cancelación de asas en dimensión baja

Si (W, M_0, M_1) es un cobordismo con $\dim W \geq 6$ y tal que la inclusión $M_0 \hookrightarrow W$ es 1-conexa, entonces W es 2-trivial.

Lema de la forma normal

Sea W un h-cobordismo orientado con $m = \dim W \geq 6$. Entonces, para cualquier $1 < \lambda < m - 2$ existe un difeomorfismo

$$W \cong M_0 \times [0,1] + \sum_{k=1}^{n_\lambda} \mathcal{A}^{\lambda}_{\varphi_k} + \sum_{k=1}^{n_{\lambda+1}} \mathcal{A}^{\lambda+1}_{\psi_k}$$

Finalización de la demostración

Gracias al lema de la forma normal, escogido cualquier $1 < \lambda < m - 2$, el operador $\partial : C_{\lambda+1} \to C_\lambda$ es un isomorfismo, luego define una matriz A con coeficientes en $\mathbb{Z}$.

Objetivo: Convertir A en diagonal usándo el método de Gauss y alterar el cobordismo en consecuencia. Entonces aplicar el lema de homología y convertir el cobordismo en trivial.

Operación Gauss	***Operación cobordismo***
$F_i := F_i + \alpha F_j$	Lema de modificación para homotopar con $[\mathcal{A}^\lambda_{\tilde{\varphi}_i}] = [\mathcal{A}^\lambda_{\varphi_i}] + \alpha[\mathcal{A}^\lambda_{\varphi_j}]$
$F_i := -F_i$	Precomponer con automorfismo $S^{\lambda-1} \to S^{\lambda-1}$ de grado -1
$F_i \leftrightarrow F_j$	Renombrar asas

Truco de Whitney

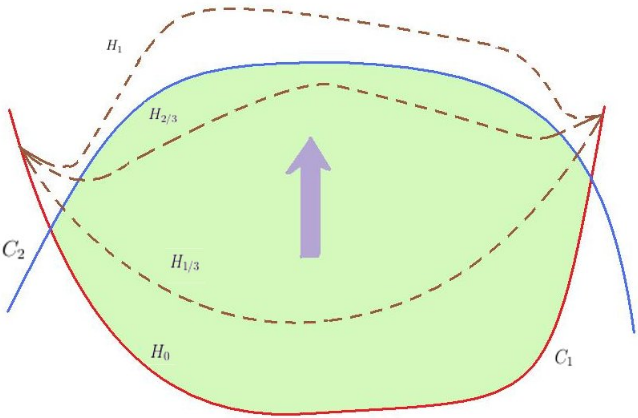
Teorema (Truco de Whitney)

Sea $M_1^r, M_2^s \hookrightarrow W^{r+s}$ cerradas y transversales, con $\underline{r+s \geq 5}$ y $\underline{s \geq 3}$[a]. Sean $x, y \in M_1 \cap M_2$ con $\epsilon_x = -\epsilon_y$ unidos por dos caminos tales que el lazo que definen es contráctil. Entonces existe una isotopía $f : M_1 \times [0,1] \to V$ tal que

- $f_0 = id_{M_1}$
- $f_1(M_1) \cap M_2 = M_1 \cap M_2 - \{x, y\}$
- La isotopía es constante un entorno de $M_1 \cap M_2 - \{x, y\}$ y fuera de una bola abierta conteniendo a Im γ_1 y Im γ_2.

[a] Además, si $r = 1$ o $r = 2$, debemos pedir que la aplicación inducida por la inclusión $\pi_1(W - M_2) \to \pi_1(W)$ sea inyectiva.

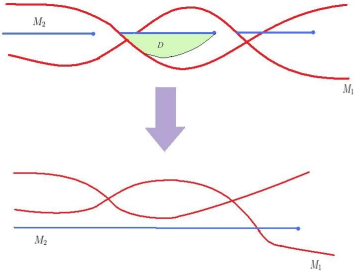
Dibujo estándar



Embebiendo un disco

Teorema débil del embebimiento de Whitney

Sea $f : M \to W$ una función continua que es embebimiento en un conjunto cerrado $A \subset M$. Entonces, si $\underline{\dim W \geq 2 \dim M + 1}$, existe un embebimiento $g : M \to W$ homótopo a f y tal que $g|A = f|A$.



Muchas gracias
por su atención