Deligne-Hodge Polynomials of Character Varieties of Doubly Periodic Instantons

J. Ángel González Prieto

Directores
Marina Logares
Vicente Muñoz

Tutor Dpto: Rafael Hernández

Universidad Autónoma de Madrid

10 de septiembre de 2015

Índice

Teorías gauge y Ecuaciones de Yang-Mills

Sea $E \to M$ un G-fibrado vectorial y $\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(E) \otimes \Omega^1(M)$ una G-**conexión.**

$$\Downarrow$$

$$d_\nabla : \Gamma(E) \otimes \Omega^k(M) \to \Gamma(E) \otimes \Omega^{k+1}(M)$$

$$\Downarrow$$

$$F_\nabla = d_\nabla \circ d_\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(E) \otimes \Omega^2(M) \Leftrightarrow F_\nabla \in \Omega^2(End(E))$$

Ecuaciones de Yang-Mills

∇ se dice de **Yang-Mills** si y solo si

$$d_\nabla \star F_\nabla = 0 \qquad\qquad d_\nabla F_\nabla = 0 \quad (Bianchi)$$

Reducción Dimensional

Soluciones Especiales a las Ecuaciones de Yang-Mills

- **Planas:** $F_\nabla = 0$
- **(Anti) Instantones:** $\star F_\nabla = \pm F_\nabla$ (Dimensión 4)

$$\begin{matrix} \nabla \ \text{Instantón} \\ \text{en } \mathbb{R}^4 \text{ independiente de} \\ \text{dos direcciones} \end{matrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} F_\nabla + [\Phi, \Phi^*] = 0 \\ \bar{\partial}_\nabla \Phi = 0 \end{cases} \quad (\text{en } \mathbb{R}^2)$$

Fibrado de Higgs

X superficie de Riemann compacta, $G \subseteq GL(n, \mathbb{C})$. $E \to X$ G-fibrado vectorial.

- $\Phi \in \Omega^2(X, \mathfrak{g}_E)$ se llama **campo de Higgs**.
- (E, Φ) se llama **fibrado de Higgs**.

Índice

Espacios de Móduli

Problema: Estudiar los fibrados de Higgs sobre una superficie de Riemann compacta fija.
Solución: Dar estructura geométrica al conjunto de fibrados de Higgs.

Espacio de Móduli

En un problema de clasificación, un espacio de moduli es una variedad cuyos:

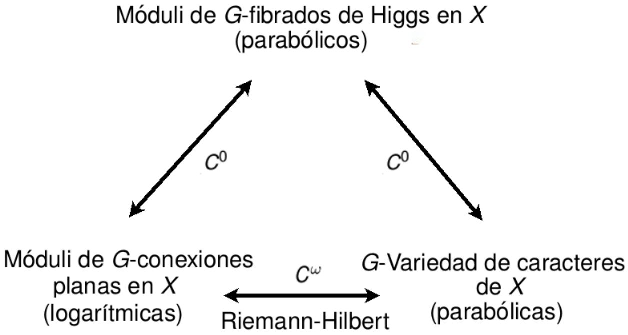
- **Puntos:** Clases de isomorfía del problema.
- **Geometría:** Noción de proximidad del problema.

Ejemplos

- $\mathbb{P}^n_k$: Móduli de rectas vectoriales en k^{n+1}.
- $Gr(d, V)$ (Grassmanniana): Móduli de d-planos en V.

Correspondencia entre Espacios de Móduli

Sea X una superficie de Riemann compacta y $G \subseteq GL(n, \mathbb{C})$.



Transformada de Nahm

$SL(2, \mathbb{C})$-Variedad de caracteres dos puntos marcados, semisimples $\longleftrightarrow$ Móduli de instantones doblemente periódicos

Variedades de Caracteres

Variedad de caracteres

Γ grupo discreto finitamente generado y G grupo algebraico complejo reductivo.

$$R_G(\Gamma) = Hom(\Gamma, G) /\!\!/ G$$

G actúa por conjugación y $/\!\!/$ es **cociente GIT.**

Si $\Gamma = \pi_1(\Sigma_g)$, grupo fundamental de una superficie de Riemann de género g:

$$\mathcal{M}^g = R_G(\pi_1(\Sigma_g)) = \left\{ \begin{pmatrix} A_1, \ldots, A_g \\ B_1, \ldots, B_g \end{pmatrix} \in G^{2g} \mid \prod_{k=1}^{g} [A_k, B_k] = 1 \right\} /\!\!/ G$$

Variedades de Caracteres Parabólicas

Si $\Gamma = \pi_1(\Sigma_g - \{p_1, \ldots, p_s\})$, superficie de Riemann de género g punteada en s puntos:

$$\mathcal{M}_s^g = \left\{ \begin{pmatrix} A_1, \ldots, A_g \\ B_1, \ldots, B_g \\ C_1, \ldots, C_s \end{pmatrix} \in G^{2g+s} \mid \prod_{k=1}^{g} [A_k, B_k] \prod_{i=1}^{s} C_i = 1 \right\} /\!\!/ G$$

Variedad de Caracteres Parabólica

$\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_s \subseteq G$ clases de conjugación fijadas.

$$\mathcal{M}^g_{\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_s} = \left\{ \begin{pmatrix} A_1, \ldots, A_g \\ B_1, \ldots, B_g \\ C_1, \ldots, C_s \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} \prod_k [A_k, B_k] \prod_s C_i = 1 \\ C_1 \in \mathcal{C}_1, \ldots, C_s \in \mathcal{C}_s \end{array} \right\} /\!\!/ G$$

Estudiaremos los casos $g = 1$ ***y*** $G = SL(2, \mathbb{C})$ ***con*** $s = 1, 2$

Índice

Teoría de Hodge Clásica

Sea M una variedad compleja.

- $H^k_{\mathbb{C}}(M)$: Cohología de de Rham complexificada.
- $H^{p,q}(M)$: Cohomología de Dolbeault.

$$H^{p,q}(M) = \frac{Ker\,\overline{\partial} : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p,q+1}(M)}{Im\,\overline{\partial} : \Omega^{p,q-1}(M) \to \Omega^{p,q}(M)}$$

Descomposición de Hodge

M variedad Kähler compacta.

$$H^k_{\mathbb{C}}(M) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(M)$$

Generalizando: *Estructura de Hodge pura de peso k*

Generalizando aún más

Sea H un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita. Una **estructura de Hodge mixta** compleja es un par de filtraciones.

- **Filtración de pesos:** Filtración finita creciente

$$0 \subseteq \ldots \subseteq W^{k-1}H \subseteq W^k H \subseteq W^{k+1}H \subseteq \ldots \subseteq H$$

- **Filtración de Hodge:** Filtración finita decreciente

$$H_{\mathbb{C}} \supseteq \ldots \supseteq F_{p-1}H \supseteq F_p H \supseteq F_{p+1}H \supseteq \ldots \supseteq 0$$

  Tal que la filtración inducida por F_* en $Gr_W^k H$ cree una estructura de Hodge compleja pura de peso k en $Gr_W^k H$.

Teorema de Deligne

La cohología de variedades complejas tienen una estructura de Hodge mixta compleja con buenas propiedades functoriales.

Polinomio de Deligne-Hodge

$$H_c^{k;p,q}(X) := Gr_p^F\left(Gr_W^{p+q} H_c^k(X)\right) \qquad h_c^{k;p,q}(X) := \dim_{\mathbb{C}} H_c^{k;p,q}(X)$$

Polinomio de Deligne-Hodge

$$e(X)(u,v) := \sum_{p,q}\left(\sum_k (-1)^k h_c^{k;p,q}(X)\right) u^p v^q$$

Propiedades del polinomio de Deligne-Hodge

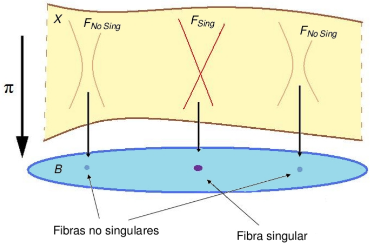
- *(Aditividad)* Si $X = X_1 \sqcup X_2$, entonces $e(X) = e(X_1) + e(X_2)$
- *(Logares-Muñoz-Newstead)* Si $F \to X \to B$ es una fibración con buenas propiedades, entonces

$$e(X) = e(F)e(B)$$

Técnica de Estratificación

Idea de la Técnica de Estratificación

Descomponer la variedad X en subvariedades más simples y utilizar las propiedades del polinomio de Deligne-Hodge para realizar los subsiguientes cálculos.



$$e(X) = e(X_{Sing}) + e(X_{No\ Sing}) = e(X_{Sing}) + e(B_{No\ Sing})e(F_{No\ Sing})$$

Índice

Un Punto Marcado

$SL(2,\mathbb{C})$-Variedad de Caracteres con Un Punto Marcado

Sea $\mathcal{C} \subseteq SL(2,\mathbb{C})$ una clase de conjugación.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}} = \left\{ (A,B) \in SL(2,\mathbb{C})^2 \mid [A,B] \in \mathcal{C} \right\} /\!\!/ \, SL(2,\mathbb{C})$$

Polinomios de Deligne-Hodge

- $e\left(\mathcal{M}_{Id}\right) = q^2 + 1.$
- $e\left(\mathcal{M}_{-Id}\right) = 1.$
- $e\left(\mathcal{M}_{J_+}\right) = q^2 - 2q - 3.$
- $e\left(\mathcal{M}_{J_-}\right) = q^2 + 3q.$
- $e\left(\mathcal{M}_{D_\lambda}\right) = q^2 + 4q + 1.$

Y números de Hodge de todas las variedades

Dos Puntos Marcados

$SL(2,\mathbb{C})$-Variedad de Caracteres con Dos Puntos Marcados

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2} = \left\{ (A,B,C_1,C_2) \;\middle|\; \begin{array}{c} [A,B]C_1C_2 = Id \\ C_1 \in \mathcal{C}_1, \quad C_2 \in \mathcal{C}_2 \end{array} \right\} /\!\!/ SL(2,\mathbb{C})$$

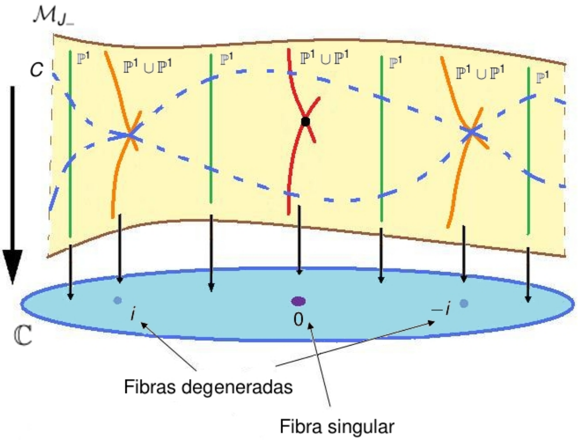
Polinomios de Deligne-Hodge

- $e\left(\mathcal{M}_{[J_+],[J_-]}\right) = q^4 - 3q^2 + 6q.$
- $e\left(\mathcal{M}_{[J_+],[J_+]}\right) = q^4 + q^3 - q + 7.$
- $e\left(\mathcal{M}_{[J_+],[D_\lambda]}\right) = q^4 + q^3 + q^2 - 3q.$[a]
- $e\left(\mathcal{M}_{[D_\lambda],[D_\mu]}\right) = q^4 + 2q^3 + 6q^2 + 2q + 1$ para $\lambda \neq \mu, \mu^{-1}$.
- $e\left(\mathcal{M}_{[D_\lambda],[D_\lambda]}\right) = q^4 + q^3 + 7q^2 + 3q.$

[a] Errata en el artículo de Logares-Muñoz.

Descripción de $\mathcal{M}_{J_-}$

Nuevas descomposiciones que dan una descripción geométrica más visual de las variedades de caracteres



Nuevos Resultados y Trabajo Futuro

Números de Hodge para $\mathcal{M}_{J_-}$

Los números de Hodge no nulos de $\mathcal{M}_{J_-}$ son:

$$h^{1;0,0}(\mathcal{M}_{J_-}) = 1 \quad h^{2;0,0}(\mathcal{M}_{J_-}) = 1 \quad h^{2;1,1}(\mathcal{M}_{J_-}) = 4$$

$$h^{3;1,1}(\mathcal{M}_{J_-}) = 1 \quad h^{4;2,2}(\mathcal{M}_{J_-}) = 1$$

Trabajo Futuro

- Cálculo de números de Hodge para el móduli de instantones doblemente periódicos.
- Generalización para género mayor y más puntos marcados.
- Formulación mediante *Topological Quantum Field Theory*.

Muchas gracias por su atención