# LEMA DE LA SERPIENTE

J. ÁNGEL GONZÁLEZ

**Teorema 1.1.** *Sea $R$ un anillo conmutativo y consideremos los $R$-modulos $A_1, A_2, A_3$ y $B_1, B_2, B_3$ tales que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "\mu'"] & B_2 \arrow[r, "\epsilon'"] & B_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

*Entonces, existe un homomorfismo de $R$-módulos $\partial : \mathrm{Ker}\ f_3 \to \mathrm{Coker}\ f_1$, llamado* ***homomorfismo de conexión*** *tales que, para las aplicaciones inducidas, la siguiente sucesión es exacta*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\ f_1 \arrow[r, "\tilde{\mu}"] & \mathrm{Ker}\ f_2 \arrow[r, "\tilde{\epsilon}"] & \mathrm{Ker}\ f_3 \arrow[dll, rounded corners, "\partial"] & \\
& \mathrm{Coker}\ f_1 \arrow[r, "\tilde{\mu}'"] & \mathrm{Coker}\ f_2 \arrow[r, "\tilde{\epsilon}'"] & \mathrm{Coker}\ f_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

*Demostración.* Dado que la prueba consiste en diversos cálculos y comprobaciones, la dividiremos en pequeños hitos para facilitar su comprensión.

**1.1. Definición de los morfismos inducidos.** En primer lugar, definamos rigurosamente los morfismos inducidos.

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Ker}\ f_1 \arrow[r, "\tilde{\mu}"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}\ f_2 \arrow[r, "\tilde{\epsilon}"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}\ f_3 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "\mu'"] \arrow[d] & B_2 \arrow[r, "\epsilon'"] \arrow[d] & B_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& \mathrm{Coker}\ f_1 \arrow[r, "\tilde{\mu}'"] & \mathrm{Coker}\ f_2 \arrow[r, "\tilde{\epsilon}'"] & \mathrm{Coker}\ f_3 &
\end{tikzcd}$$

Para el caso de los núcleos es sencillo, pues observemos que, por la conmutatividad del diagrama, si $x \in \text{Ker } f_1$, entonces $f_2(\mu(x)) = \mu'(f_1(x)) = \mu'(0) = 0$. Análogamente, si $x \in \text{Ker } f_2$ entonces $f_3(\epsilon(x)) = \epsilon'(f_2(x)) = \epsilon'(0) = 0$, de manera que los morfismos inducidos por restricción están bien definidos.

$$\tilde{\mu} = \mu|_{\text{Ker } f_1} : \text{Ker } f_1 \to \text{Ker } f_2 \qquad\qquad \tilde{\epsilon} = \epsilon|_{\text{Ker } f_2} : \text{Ker } f_2 \to \text{Ker } f_3$$

Para el caso de los cokernel, el cálculo es parecido. En efecto, obsérvese que $\mu'(\text{Im } f_1) \subset \text{Im } f_2$ pues si $x \in \mu'(\text{Im } f_1)$, digamos $x = \mu'(f_1(y))$, entonces, por conmutatividad del diagrama se tiene que $x = f_2(\mu(y)) \in \text{Im } f_2$. Análogamente, se tiene que $\epsilon'(\text{Im } f_2) \subset \text{Im } f_3$ y, por tanto, las siguientes aplicaciones están bien definidas

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\mu}' : & \text{Coker } f_1 & \longrightarrow & \text{Coker } f_2 \\ & x + \text{Im } f_1 & \mapsto & \mu'(x) + \text{Im } f_2 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \tilde{\epsilon}' : & \text{Coker } f_2 & \longrightarrow & \text{Coker } f_3 \\ & x + \text{Im } f_2 & \mapsto & \epsilon'(x) + \text{Im } f_3 \end{array}$$

**1.2. Exactitud en los extremos.** Obsérvese que, tal y cómo los hemos definido, $\tilde{\mu}$ es un monomorfismo por ser restricción de un monomorfismo y que $\epsilon'$ es un epimorfismo, pues es la aplicación inducida al cociente por un epimorfismo. En consecuencia, se tiene que el primer y el último eslabón de la sucesión inducida son exactos.

**1.3. Exactitud en** $\text{Ker } f_1 \xrightarrow{\tilde{\mu}} \text{Ker } f_2 \xrightarrow{\tilde{\epsilon}} \text{Ker } f_3$**.**

$\boxed{\text{Im } \tilde{\mu} \subset \text{Ker } \tilde{\epsilon}}$

Para comprobarlo, simplemente tomemos $x \in \text{Im } \tilde{\mu}$, digamos $x = \mu(y)$ para cierto $y \in \text{Ker } f_1$. Entonces, como $A_1 \xrightarrow{\mu} A_2 \xrightarrow{\epsilon} A_3$ es exacto, se tiene

$$\epsilon'(x) = \epsilon(x) = \epsilon(\mu(y)) = 0$$

$\boxed{\text{Im } \tilde{\mu} \supset \text{Ker } \tilde{\epsilon}}$

Sea $x \in \text{Ker } \tilde{\epsilon}$. Como $\tilde{\epsilon}$ es sólo la restricción de $\epsilon$ se tiene que $x \in \text{Ker } \epsilon$, luego, por exactitud de la sucesión original se tiene que $x \in \text{Im } \mu$, digamos $x = \mu(y)$.

De este modo, basta ver que $y \in \text{Ker } f_1$. Para ello, usando la conmutatividad del diagrama, calculemos

$$\mu'(f_1(y)) = f_2(\mu(y)) = f_2(x) = 0$$

pues $x \in \text{Ker } f_2$. Ahora bien, como $\mu'$ es un monomorfismo, se tiene que $\mu'(f_1(y)) = 0$ si y solo si $f_1(y) = 0$, como queríamos ver.

**1.4. Exactitud en** Coker $f_1 \xrightarrow{\tilde{\mu}'}$ Coker $f_2 \xrightarrow{\tilde{\epsilon}'}$ Coker $f_3$**.**

$\boxed{\text{Im } \tilde{\mu}' \subset \text{Ker } \tilde{\epsilon}'}$

La prueba es análoga a la previamente realizada con el núcleo. En efecto, si $[x] \in \text{Im } \tilde{\mu}'$, digamos $[x] = \tilde{\mu}'([y]) = \mu'(y) + \text{Im } f_2$, entonces se tiene

$$\tilde{\epsilon}'([x]) = \tilde{\epsilon}'\left(\mu'(y) + \text{Im } f_2\right) = \epsilon'(\mu'(y)) + \text{Im } f_3 = \text{Im } f_3$$

puesto que $\epsilon' \circ \mu' = 0$ por exactitud de la sucesión original.

$\boxed{\text{Im } \tilde{\mu}' \supset \text{Ker } \tilde{\epsilon}'}$

Sea $[x] \in \text{Ker } \tilde{\epsilon}'$. Supongamos que también se tuviese que $x \in \text{Ker } \epsilon'$, entonces por exactitud de la sucesión original se tendría que $x = \mu'(y)$ para algún $y \in B_1$ y, por tanto, sería $[x] = \tilde{\mu}'([y])$, esto es $[x] \in \text{Im } \tilde{\mu}'$.

Desgraciadamente, en general este no es el caso. La solución pasa por encontrar un $x_0 \in \text{Ker } \epsilon'$ tal que $[x] = [x_0]$ y, entonces, por la observación anterior, habríamos terminado. Para hallarlo, nótese que, como $\tilde{\epsilon}'([x]) = 0$ se tiene que $\epsilon'(x) \in \text{Im } f_3$, digamos $\epsilon'(x) = f_3(\alpha)$ para algún $\alpha \in A_3$. Ahora bien, como $\epsilon$ es sobreyectiva, se tiene que $\alpha = \epsilon(\beta)$ para cierto $\beta \in A_2$. De este modo, por la conmutatividad del diagrama se tiene que

$$\epsilon'(f_2(\beta)) = f_3(\epsilon(\beta)) = f_3(\alpha) = \epsilon'(x)$$

En consecuencia, se tiene que $x_0 = x - f_2(\beta)$ cumple que $[x_0] = [x]$ y que $\epsilon'(x_0) = 0$, luego es el elemento buscado.

**1.5. Definición de $\partial$.** Sea $x \in \text{Ker } f_3$. Como $\epsilon$ es sobreyectiva, se tiene que $x = \epsilon(y)$ para cierto $y \in A_2$. Entonces, por la conmutatividad del diagrama, se tiene que

$$\epsilon'(f_2(y)) = f_3(\epsilon(y)) = f_3(x) = 0$$

luego $f_2(y) \in \text{Ker } \epsilon'$. Así, por exactitud de $B_1 \xrightarrow{\mu'} B_2 \xrightarrow{\epsilon'} B_3$ se tiene que $f_2(y) \in \text{Im } \mu'$, digamos $f_2(y) = \mu'(z)$ para cierto $z \in B_1$. Definimos, entonces $\partial(x) = [z]$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Ker}\ f_1 \arrow[r, "\tilde{\mu}"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}\ f_2 \arrow[r, "\tilde{\epsilon}"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}\ f_3 \arrow[d] \arrow[dddll, dashed, "\partial"'] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "\mu'"] \arrow[d] & B_2 \arrow[r, "\epsilon'"] \arrow[d] & B_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \mathrm{Coker}\ f_1 \arrow[r, "\tilde{\mu}'"] & \mathrm{Coker}\ f_2 \arrow[r, "\tilde{\epsilon}'"] & \mathrm{Coker}\ f_3 &
\end{tikzcd}$$

**1.6. $\partial$ está bien definido.** En la caza de diagramas anterior, en principio hemos realizado dos elecciones arbitrarias, a saber, hemos hecho $x = \epsilon(y)$ y $f_2(y) = \mu'(z)$. Sin embargo, observemos que, como $\mu'$ es inyectiva, la segunda elección no es arbitraria. Debemos, por tanto, comprobar que la definición de $\partial(x)$ no depende del $y \in \epsilon^{-1}(x)$ escogido.

Supongamos que $x = \epsilon(y_1) = \epsilon(y_2)$. Entonces se tendría que $f_2(y_1) = \mu'(z_1)$ y que $f_2(y_2) = \mu'(z_2)$ y, por tanto, hay que comprobar que $[z_1] = [z_2]$, esto es, que $z_1 - z_2 \in \mathrm{Im}\ f_1$. Para ello, obsérvese que $y_1 - y_2 \in \mathrm{Ker}\ \epsilon$ y, por tanto, por exactitud se tiene que $y_1 - y_2 = \mu(\alpha)$ para cierto $\alpha \in A_1$. Ahora bien, en ese caso se tiene que

$$\mu'(f_1(\alpha)) = f_2(\mu(\alpha)) = f_2(y_1 - y_2) = \mu'(z_1 - z_2)$$

luego, como $\mu'$ es inyectiva, se tiene que $z_1 - z_2 = f_1(\alpha)$ y, por tanto, $[z_1] = [z_2]$ como queríamos demostrar.

En consecuencia, de las dos secciones anteriores hemos comprobado que podemos definir $\partial(x)$ como la única clase de

$$\partial(x) = \left[\mu'^{-1} \circ f_2 \circ \epsilon^{-1}(x)\right]$$

y que esta definición es correcta, i.e., todos los elementos están en la imágenes correspondientes y no dependen del elemento de la contraimagen escogido.

Más aún, con esta descripción explícita, queda patente que $\partial : \mathrm{Ker}\ f_3 \to \mathrm{Coker}\ f_1$ **es un homomorfismo**, simplemente recordando que, para cualquier homomorfismo de $R$-módulos $f : M \to N$ se tiene que $f^{-1}(N_1 + \lambda N_2) = f^{-1}(N_1) + \lambda f^{-1}(N_2)$ para cualesquiera submódulos $N_1, N_2 \subset N$.

**1.7. Exactitud en** Ker $f_2 \xrightarrow{\tilde{\epsilon}}$ Ker $f_3 \xrightarrow{\partial}$ Coker $f_1$**.**

$\boxed{\text{Im } \tilde{\epsilon} \subset \text{Ker } \partial}$

Sea $x \in \text{Im } \tilde{\epsilon}$, esto es, $x = \epsilon(y)$ para cierto $y \in \text{Ker } f_2$. Entonces, computando según la fórmula se tiene

$$\partial(x) = \left[\mu'^{-1}(f_2(\epsilon^{-1}(x)))\right] = \left[\mu'^{-1}(f_2(y))\right] = [\mu'^{-1}(0)] = [0] = 0$$

$\boxed{\text{Im } \tilde{\epsilon} \supset \text{Ker } \partial}$

Sea $x \in \text{Ker } \partial$. Como $\epsilon$ es sobreyectiva, se tiene que $x = \epsilon(y)$ para cierto $y \in A_2$. Observemos que, si tuviesemos que $f_2(y) = 0$, entonces se tendría que $x = \tilde{\epsilon}(y)$ para un $y \in \text{Ker } f_2$ y habríamos terminado.

Desafortunadamente, en general este no es el caso, por lo que deberemos buscar otro $y_0 \in \epsilon^{-1}(x)$ con $f_2(y_0) = 0$. Para ello, obsérvese que, como $\partial(x) = [\mu'^{-1}(f_2(\epsilon^{-1}(x)))] = [\mu'^{-1}(f_2(y))] = 0$ se tiene que existe $z \in \text{Im } f_1$ tal que $f_2(y) = \mu'(f_1(z))$. De este modo, por conmutatividad del diagrama se tiene que $f_2(y) = \mu'(f_1(z)) = f_2(\mu(z))$ y, por tanto, si hacemos $y_0 = y - \mu(z)$ se tiene que $f_2(y_0) = 0$. Además, como $\epsilon \circ \mu = 0$ se tiene que $\epsilon(y_0) = \epsilon(y) - \epsilon(\mu(z)) = \epsilon(y) = x$, luego $y_0 \in \text{Ker } f_2 \cap \epsilon^{-1}(x)$ es el elemento buscado.

**1.8. Exactitud en** Ker $f_3 \xrightarrow{\partial}$ Coker $f_1 \xrightarrow{\tilde{\mu}'}$ Coker $f_2$**.**

$\boxed{\text{Im } \partial \subset \text{Ker } \tilde{\mu}'}$

Consideremos $[x] \in \text{Im } \partial$, digamos $[x] = \partial(y)$. Siguiendo la definición de $\partial$ previamente descrita, se tiene que existe $x_0 \in A_1$ con $[x] = [x_0]$ tal que $\mu'(x_0) = f_2(z)$ para cierto $z \in \epsilon^{-1}(y)$. En consecuencia, calculando se tiene

$$\tilde{\mu}'([x]) = \tilde{\mu}'([x_0]) = \mu'(x_0) + \text{Im } f_2 = f_2(z) + \text{Im } f_2 = 0$$

$\boxed{\text{Im } \partial \supset \text{Ker } \tilde{\mu}'}$

Sea $[x] \in \text{Ker } \tilde{\mu}'$. Esto quiere decir que $0 = \tilde{\mu}'([x]) = [\mu'(x)]$, luego $\mu'(x) \in \text{Im } f_2$, digamos $\mu'(x) = f_2(y)$. Entonces, por construcción de $\partial$ se tiene que $[x] = \partial(\epsilon(y))$ y, por tanto, $[x] \in \text{Im } \partial$. $\square$