

**NOTAS DE LA ASIGNATURA “VARIETADES DIFERENCIABLES”
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
CURSO 2023/2024**

ÁNGEL GONZÁLEZ PRIETO

ÍNDICE

Introducción	2
Convenciones y notaciones	2
1. Fundamentos de variedades diferenciables y algunos ejemplos.	3
1.1. Variedades topológicas	3
1.2. Variedades diferenciables	6
1.3. Dimensión	8
1.4. Aplicaciones diferenciables. Inmersiones y encajes	9
1.5. Valores regulares y subvariedades	15
2. Espacio tangente y derivaciones.	16
2.1. Definición de espacio tangente	17
2.2. Diferencial de una aplicación	23
2.3. Campos vectoriales y flujos	25
2.4. Derivada de Lie y corchete de Lie	29
3. Espacio cotangente. Formas diferenciables.	33
3.1. Álgebra lineal de formas alternadas	33
3.2. Formas diferenciales. Diferencial exterior	37
4. Integración en variedades y el teorema de Stokes.	44
4.1. Integración en \mathbb{R}^n . Orientabilidad	44
4.2. Integrando formas en variedades	47
4.3. Otro vistazo a la orientabilidad	50
4.4. Teorema de Stokes	52
4.5. Demostración del teorema de Stokes	56
Referencias	59

Notas generadas mediante la aplicación Mathpix a partir de los apuntes de la asignatura tomados por Iván Pérez Maestre durante el curso 2022/2023.

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este curso es introducir los conceptos fundamentales de geometría diferencial y algunas de sus aplicaciones. Estas nociones generalizan las ideas de cálculo diferencial e integral a un contexto más general donde, de hecho, veremos que tienen una formulación más natural.

Prerequisitos: Álgebra lineal y cálculo diferencial e integral en varias variables. Recomendados conocimientos básicos de topología general tales como las nociones de compacidad, conexión y separabilidad en espacios topológicos arbitrarios.

Convenciones y notaciones. A lo largo de estas notas, usaremos las siguientes convenciones de forma consistente.

- Un *espacio topológico* es un par (X, τ) donde X es un conjunto y τ es una colección de subconjuntos de X , llamados *abiertos de X* , tal que $\emptyset, X \in \tau$ y de manera que τ es cerrada por uniones arbitrarias e intersecciones finitas. Además, omitiremos la mención explícita a la topología τ en la notación y denotaremos un espacio topológico simplemente por X .
- Un espacio topológico X se dice *compacto* si todo recubrimiento por abiertos de X admite un subrecubrimiento finito. También, X se dice *conexo* si no existen abiertos disjuntos U y V de X tales que $X = U \cup V$ (equivalentemente, si los únicos subconjuntos que son abiertos y cerrados simultáneamente son \emptyset y X).
- Dado un punto x de un espacio topológico X , por un *entorno de x* nos referiremos a un abierto U de X tal que $x \in U$. En particular, por definición, los entornos considerados en estas notas serán siempre abiertos.
- Una aplicación $F : X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos se dice *continua* si $F^{-1}(U)$ es un abierto de X para todo abierto U de Y . Un *homeomorfismo* es una aplicación continua con inversa continua.
- El cuerpo de los números reales se denotará por \mathbb{R} , y el espacio euclídeo n -dimensional por \mathbb{R}^n .
- Todos los *espacios vectoriales* considerados serán sobre el cuerpo \mathbb{R} de los números reales y tendrán dimensión finita. De forma muy intensa, utilizaremos espacios vectoriales que no son canónicamente isomorfos a \mathbb{R}^n , por lo que se deberá tener familiaridad con el concepto de espacio vectorial abstracto.
- Una *base* de un espacio vectorial V será una tupla ordenada (b_1, \dots, b_n) de vectores $b_1, \dots, b_n \in V$ linealmente independientes que generan V . El número n de vectores que conforman una base se llama la *dimensión* de V .
- Para el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^n$, denotaremos su *base canónica* como e_1, \dots, e_n , con

$$e_i = (0, \dots, \overbrace{1}^i, \dots, 0)$$

el vector que tiene un 1 en la posición i -ésima y el resto de entradas son 0.

- Si en una tupla (x_1, \dots, x_n) queremos omitir la entrada i -ésima, lo denotaremos por

$$(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

- El *espacio proyectivo real* de dimensión n se denotará $\mathbb{R}P^n$. Las coordenadas homogéneas de un punto de $\mathbb{R}P^n$ se denotarán $[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{R}P^n$, estando únicamente definidas salvo producto por un escalar no nulo.
- Dada una aplicación $F : U \rightarrow V$, donde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $V \subseteq \mathbb{R}^m$ son abiertos, diremos que F es C^∞ si admite todas las derivadas parciales de orden arbitrariamente alto. No exigiremos ningún requisito de analiticidad en estas funciones i.e. expansión en serie de Taylor convergente. También diremos que F es un *difeomorfismo* si F es C^∞ y admite una inversa C^∞ .
- Dada una aplicación $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que sea C^∞ y $p \in U$, la i -ésima derivada parcial de f en el punto p se denotará por

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_p$$

- Dada una aplicación $F = (F_1, \dots, F_m) : U \rightarrow V$, con $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abiertos que sea C^∞ , y $p \in U$, la *diferencial* de F en p la denotaremos por $D_p F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Recuérdese que, en las base canónicas de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m , la matriz de la aplicación lineal $D_p F$ es la matrix de derivadas parciales

$$D_p F = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right|_p & \left. \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right|_p & \dots & \left. \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \right|_p \\ \left. \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \right|_p & \left. \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right|_p & \dots & \left. \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \right|_p \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ \left. \frac{\partial F_m}{\partial x_1} \right|_p & & \dots & \left. \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \right|_p \end{pmatrix}$$

1. FUNDAMENTOS DE VARIETADES DIFERENCIABLES Y ALGUNOS EJEMPLOS.

1.1. Variedades topológicas.

Definición 1.1. Sea X un espacio topológico. Se dice que X es una variedad topológica si:

- X es Hausdorff. Es decir, si dados $x, y \in X$ distintos, existen entornos U y V de x e y respectivamente tales que $U \cap V = \emptyset$ (ver Figura 1).

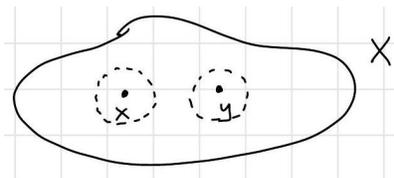


FIGURA 1. Representación de la propiedad de ser un espacio topológico Hausdorff.

2. X es segundo axioma de separabilidad. Es decir, si existe una base de entornos numerable. Esto significa que existe una base $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ de la topología de X formada por una cantidad numerable de abiertos.
3. X es localmente euclídeo. Es decir, si para todo $x \in X$, existe un entorno $U \subseteq X$ de x , un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^n$ y un homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ (ver Figura 2).

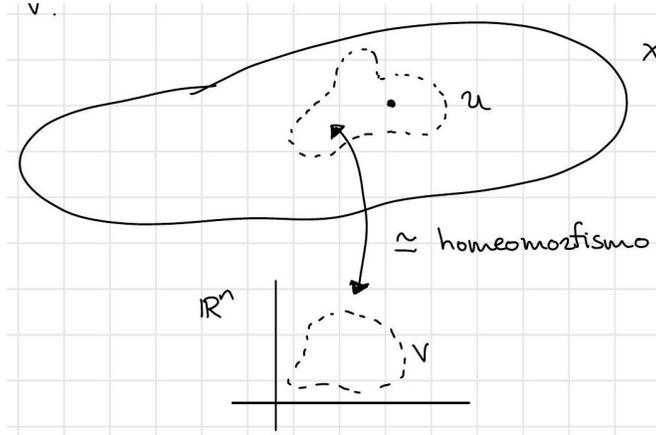
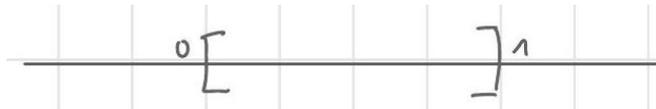


FIGURA 2. Representación de la propiedad de ser localmente euclídeo.

Ejemplo 1.2. 1. \mathbb{R}^n es una variedad topológica.

2. Si $W \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto, entonces W es una variedad topológica.
3. $[0, 1]$ no es una variedad topológica. En efecto, los entornos conexos de $0 \in [0, 1]$ son de la forma $[0, \varepsilon)$ que no son homeomorfos a abiertos de \mathbb{R}^n . Más adelante lo llamaremos variedad topológica con borde.



Ejemplo 1.3. La esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ es una variedad topológica. En efecto, es trivial que es Hausdorff (por ser subespacio de un espacio Hausdorff) y segundo axioma de numerabilidad (por ser compacta). Veamos que es localmente euclídea.

Consideramos los abiertos

$$U_x^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : x > 0\} \subseteq \mathbb{S}^2, \quad V_x^+ = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Sobre ellos, definimos las aplicaciones continuas

$$\begin{aligned} \varphi_x^+ : U_x^+ &\longrightarrow V_x^+ & (\varphi_x^+)^{-1} : V_x^+ &\longrightarrow U_x^+ \\ (x, y, z) &\longmapsto (y, z) & (u, v) &\longmapsto (\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v) \end{aligned}$$

Un cálculo directo prueba que son, en efecto, aplicaciones inversas. Análogamente, tomamos

$$U_x^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : x < 0\} \subseteq \mathbb{S}^2, \quad V_x^- = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

y las aplicaciones

$$\begin{aligned} \varphi_x^- : U_x^- &\longrightarrow V_x^- & (\varphi_x^-)^{-1} : V_x^- &\longrightarrow U_x^- \\ (x, y, z) &\longmapsto (y, z) & (u, v) &\longmapsto (-\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v) \end{aligned}$$

Para cubrir los puntos con $x = 0$, de igual forma tomamos

$$U_y^\pm = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : y > 0 \text{ (resp. } y < 0)\} \subseteq \mathbb{S}^2, \quad V_y^\pm = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

junto con las aplicaciones

$$\begin{aligned} \varphi_y^\pm : U_y^\pm &\longrightarrow V_y^\pm & (\varphi_y^\pm)^{-1} : V_y^\pm &\longrightarrow U_y^\pm \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, z) & (u, v) &\longmapsto (u, \pm\sqrt{1-u^2-v^2}, v) \end{aligned}$$

Con estos abiertos, hemos cubierto toda la esfera salvo los dos polos con $x = y = 0$. Para ellos, tomamos

$$U_z^\pm = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z > 0 \text{ (resp. } z < 0)\} \subseteq \mathbb{S}^2, \quad V_z^\pm = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

junto con las aplicaciones

$$\begin{aligned} \varphi_z^\pm : U_z^\pm &\longrightarrow V_z^\pm & (\varphi_z^\pm)^{-1} : V_z^\pm &\longrightarrow U_z^\pm \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y) & (u, v) &\longmapsto (u, v, \pm\sqrt{1-u^2-v^2}) \end{aligned}$$

Observación 1.4. Para demostrar que un espacio topológico es localmente euclídeo basta con exhibir un recubrimiento por abierto $\{U_\alpha\}$ de X y homeomorfismos $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$.

Notación 1.5. ■ El par $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ se llama una carta de X .

- La colección $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ con $\bigcup_\alpha U_\alpha = X$ se llama un atlas de X .
- La inversa $\varphi_\alpha^{-1} : V_\alpha \longrightarrow U_\alpha$ se llama una parametrización.

Ejemplo 1.6. La esfera n -dimensional $\mathbb{S}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ es una variedad topológica. Para todo $1 \leq i \leq n+1$, consideramos los abiertos de \mathbb{S}^n

$$U_i^+ = \{(x_1 \dots x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid x_i > 0\}, \quad U_i^- = \{(x_1 \dots x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid x_i < 0\}.$$

Consideremos también el abierto $V = \{(U_1, \dots, U_n) \in \mathbb{R}^n \mid U_1^2 + \dots + U_n^2 < 1\}$. Definimos así las aplicaciones

$$\begin{aligned} \varphi_i^\pm : U_i^\pm &\longrightarrow V \\ (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}) \\ (\varphi_i^\pm)^{-1} : V &\longrightarrow U_i^\pm \\ (U_1, \dots, U_n) &\longmapsto (U_1, U_2, \dots, \underbrace{\pm\sqrt{1-U_1^2-\dots-U_n^2}}_{i\text{-ésima posición}}, U_i, \dots, U_n) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.7. Consideremos el espacio proyectivo $\mathbb{RP}^n = (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) / \sim$, con la relación de equivalencia $x \sim y$ si y solo si $y = \lambda x$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. Obsérvese que \mathbb{RP}^n es un espacio topológico con la topología cociente. Más aún, puede comprobarse que es un espacio Hausdorff y segundo axioma de numerabilidad (de hecho es compacto).

Veamos que es localmente euclídeo. Para ello, consideramos los abiertos para $0 \leq i \leq n$ dados por

$$U_i = \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{RP}^n \mid x_i \neq 0\}, \quad V_i = \mathbb{R}^n,$$

junto con las cartas

$$\begin{aligned} \varphi_i : \quad U_i &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ [x_0 : x_1 : \dots : x_n] &\longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \widehat{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) \end{aligned}$$

cuya inversa es

$$\begin{aligned} \varphi_i^{-1} : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow U_i \\ (u_1 \dots u_n) &\longmapsto [u_1 : u_2 : \dots : \underbrace{1}_i : u_i : \dots, u_n] \end{aligned}$$

Obsérvese que la carta $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ se conoce en geometría proyectiva como *deshomogeneizar* las coordenadas, mientras que la parametrización φ_i^{-1} corresponde a la *homogeneización*. Tenemos entonces que $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=0}^n$ forman un atlas de \mathbb{RP}^n y, por tanto, \mathbb{RP}^n es una variedad topológica.

1.2. Variedades diferenciables. La intuición detrás de una variedad diferenciable es una variedad topológica en el que las mapas coordenados son C^∞ . Sin embargo, no existe una noción de diferenciable intrínseca en la variedad topológica, pues no hay una noción de “derivada” en un mero espacio topológico.

Para abordar este problema, supongamos que $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y (U_β, φ_β) son dos cartas de una variedad topológica. Podemos formar la aplicación continua

$$\varphi_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta} \circ \varphi_\alpha^{-1} \Big|_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n$$

Esta aplicación se conoce como *cambio de cartas*. Obsérvese que esta aplicación está definida entre dos abiertos de \mathbb{R}^n , por lo que sí tiene sentido preguntarse si es diferenciable.

Definición 1.8. Una variedad diferenciable es un par $M = (X, \mathcal{A})$, donde X es una variedad topológica, $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ es un atlas para X y todos los cambios de carta

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

son aplicaciones C^∞ de \mathbb{R}^n .

Notación 1.9. El atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de una variedad diferenciable se llama el *atlas diferenciable*.

Notación 1.10. Cuando el atlas diferenciable \mathcal{A} de una variedad diferenciable $M = (X, \mathcal{A})$ se sobreentiende por el contexto, lo omitiremos de la notación y confundiremos M con el espacio topológico X subyacente.

Observación 1.11. El atlas diferenciable en una variedad diferenciable está fijado, y no es arbitrario. Como veremos posteriormente, una misma variedad topológica puede equiparse con múltiples atlas diferenciables no equivalentes.

Observación 1.12. En ocasiones, en lugar de hablarse de una variedad/atlas “diferenciable” se habla de una variedad/atlas “suave”.

Ejemplo 1.13. Consideremos $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Para las cartas $\varphi_x^+ : U_x^+ \rightarrow V$ y $\varphi_x^- : U_x^- \rightarrow V_x^-$ tenemos que $U_x^+ \cap U_x^- = \emptyset$ y, por tanto, este cambio de carta es automáticamente diferenciable.

Consideremos ahora la carta $\varphi_y^- : U_y^- \rightarrow V$. Tenemos que $U_x^+ \cap U_y^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \mid x > 0, y < 0\}$.

La aplicación de cambio de cartas está dada por

$$\varphi_y^- \circ (\varphi_x^+)^{-1}(u, v) = \varphi_y^- \left(\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v \right) = \left(\sqrt{1 - u^2 - v^2}, v \right)$$

Obsérvese que esta es una aplicación C^∞ como aplicación de (un abierto de) \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^2 ya que $1 - u^2 - v^2 \neq 0$ en el dominio del cambio de cartas. Para ser precisos, el abierto imagen es $\varphi_x^+(U_x^+ \cap U_y^-) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1, v < 0\}$ y el abierto codominio está dado por $\varphi_y^-(U_x^+ \cap U_y^-) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1, u > 0\}$. El resto de los cambios de cartas son similares, y demuestran que \mathbb{S}^2 con este atlas es una variedad diferenciable.

Ejemplo 1.14. Generalizando el Ejemplo 1.13, tenemos que \mathbb{S}^n con el atlas del Ejemplo 1.6 es una variedad diferenciable.

Ejemplo 1.15. $\mathbb{R}P^n$ con el atlas afin del Ejemplo 1.7 es una variedad diferenciable. En efecto, recordemos que el atlas está dado por $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{0 \leq i \leq n}$ con

$$U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_i \neq 0\}$$

y $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ es tal que $\varphi_i([x_0 : \dots : x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$. Su inversa es $\varphi_i^{-1}(u_1, \dots, u_n) = [u_1 : \dots : \underbrace{1}_i : \dots : u_n]$.

En ese caso, tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(u_1, \dots, u_n) &= \varphi_j \left([u_1 : \dots : \underbrace{1}_i : \dots : u_n] \right) \\ &= \begin{cases} \left(\frac{u_1}{u_{j+1}}, \frac{u_2}{u_{j+1}}, \dots, \frac{1}{u_{j+1}}, \dots, \frac{u_n}{u_{j+1}} \right) & \text{si } j < i, \\ \left(\frac{u_1}{u_j}, \frac{u_2}{u_j}, \dots, \frac{1}{u_j}, \dots, \frac{u_n}{u_j} \right) & \text{si } j > i. \end{cases} \end{aligned}$$

Obsérvese que, en ambos casos, esta aplicación es C^∞ porque el denominador no se anula en el dominio del cambio de carta. De este modo, $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ es una variedad diferenciable con esta carta.

Definición 1.16. Sea $M = (X, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable y $(U, \varphi : U \rightarrow V) \in \mathcal{A}$ una carta del atlas diferenciable. Se dice que una carta $(U', \varphi' : U' \rightarrow V')$, no necesariamente de \mathcal{A} , es *compatible con* (U, φ) si los cambios de carta $\varphi \circ (\varphi')^{-1} : \varphi'(U' \cap U) \rightarrow \varphi(U' \cap U)$ y $\varphi' \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U') \rightarrow \varphi'(U \cap U')$ son C^∞ . Se dice que (U', φ') es *compatible con* \mathcal{A} si es compatible con cada carta de \mathcal{A} .

Si (U', φ') es compatible con \mathcal{A} , entonces el nuevo atlas $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{(U', \varphi')\}$ también es un atlas diferenciable para M .

En ese caso, si $M = (X, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable, el *atlas maximal* para M es

$$\mathcal{A}_{\text{máx}} = \{(U', \varphi') \mid (U', \varphi') \text{ es compatible con } \mathcal{A}\}.$$

Sin pérdida de generalidad, siempre podemos suponer que M está equipado con su atlas maximal.

1.3. Dimensión.

Definición 1.17. Sea $M = (X, \mathcal{A})$ es una variedad diferenciable y sea $p \in M$. Si $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ es una carta alrededor de p , con $\varphi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$, diremos que n es la *dimensión de M en p* .

Observación 1.18. La definición anterior no depende de la carta escogida. En efecto, si $(U', \varphi' : U' \rightarrow V' \subseteq \mathbb{R}^m)$ es otra carta de \mathcal{A} alrededor de p , tenemos que el cambio de cartas

$$\varphi' \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U') \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi'(U \cap U') \subseteq \mathbb{R}^m$$

es una aplicación C^∞ y biyectiva (pues tiene una inversa, $\varphi \circ \varphi'^{-1}$) con inversa C^∞ . En consecuencia, $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ es un difeomorfismo y, por tanto, su diferencial

$$D_x(\varphi' \circ \varphi^{-1}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

es un isomorfismo lineal, lo que obliga a que $n = m$.

Observación 1.19. La Definición 1.17 también puede considerarse para variedades topológicas de forma totalmente análoga. En este caso, la dimensión también resulta no depender de la carta escogida, aunque la demostración de este hecho es más complicada pues el cambio de cartas $\varphi' \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U') \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi'(U \cap U') \subseteq \mathbb{R}^m$ es solo un homeomorfismo. En este contexto, también es cierto que sendos abiertos de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m respectivamente pueden ser homeomorfos solo si $n = m$, lo que nuevamente implica que la definición de dimensión alrededor de p no depende de la carta. No obstante, la demostración de este hecho no es tan sencilla como en el caso diferenciable, y en ocasiones recibe el nombre de “teorema de invariancia del dominio”.

Gracias a la definición anterior, tenemos una función bien definida

$$\dim_\bullet(M) : M \rightarrow \mathbb{N}$$

que asigna a cada punto $p \in M$ su dimensión, denotada $\dim_p(M)$.

Lema 1.20. Si M es conexa, entonces la función $\dim_{\bullet}(M)$ es constante.

Demostración. Tomemos un punto $p_0 \in M$ y sea $n = \dim_{p_0}(M)$ su dimensión. Consideremos el conjunto

$$U_n = \{p \in M \mid \dim_p(M) = n\}.$$

Vamos a demostrar que U_n es abierto y cerrado. Como es no vacío (pues $p_0 \in U_n$) y M es conexa, eso implicará que $U_n = M$ o, lo que es lo mismo, la función $\dim_{\bullet}(M)$ es constante.

En primer lugar, obsérvese que U_n es abierto pues, si $p \in U_n$ y $(U, \varphi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n)$ es una carta para p , entonces también es una carta para cualquier $q \in U$ con destino el mismo \mathbb{R}^n . Así, $\dim_q(M) = n$ para todo $q \in U$ y, por tanto, $U \subseteq U_n$. Análogamente, se tiene que U_n es cerrado pues si $p \notin U_n$, digamos $\dim_p(M) = m \neq n$, entonces una carta $(U, \varphi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m)$ alrededor de p demuestra que $\dim_q(M) = m$ para todo $q \in U$ y, por tanto, $U \subseteq M - U_n$. \square

Notación 1.21. Gracias al resultado anterior, si M es conexa tiene sentido hablar de la *dimensión* de M , sin hacer referencia a ningún punto, que se denotará $\dim M$.

Observación 1.22. Revisando la demostración del Lema 1.20, puede observarse que lo que hemos demostrado en general es que la aplicación $\dim_{\bullet}(M) : M \rightarrow \mathbb{N}$ es continua cuando dotamos a \mathbb{N} de la topología discreta. En particular, en general eso implica que $\dim_{\bullet}(M)$ es localmente constante i.e. constante en cada componente conexa de M . Ahora bien, la dimensión sí puede variar entre componentes conexas, como en la Figura 3.

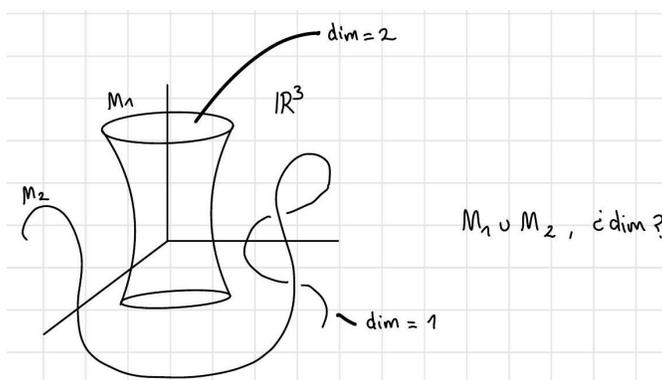


FIGURA 3. Variedad diferenciable con componentes conexas de distinta dimensión.

1.4. Aplicaciones diferenciables. Inmersiones y encajes.

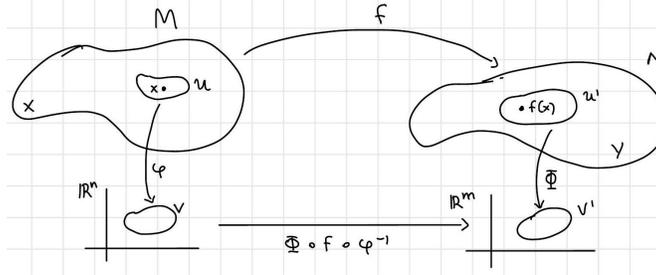
Definición 1.23. Sean $M = (X, \mathcal{A})$ y $N = (Y, \mathcal{A}')$ dos variedades diferenciables. Una *aplicación diferenciable*

$$F : M \rightarrow N$$

es una aplicación continua $F : X \rightarrow Y$ tal que, para cualquier carta $(U, \varphi : U \rightarrow V) \in \mathcal{A}$ y cualquier carta $(U', \varphi' : U' \rightarrow V') \in \mathcal{A}'$ se tiene que

$$\varphi' \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(F^{-1}(U')) \subseteq V \longrightarrow V'$$

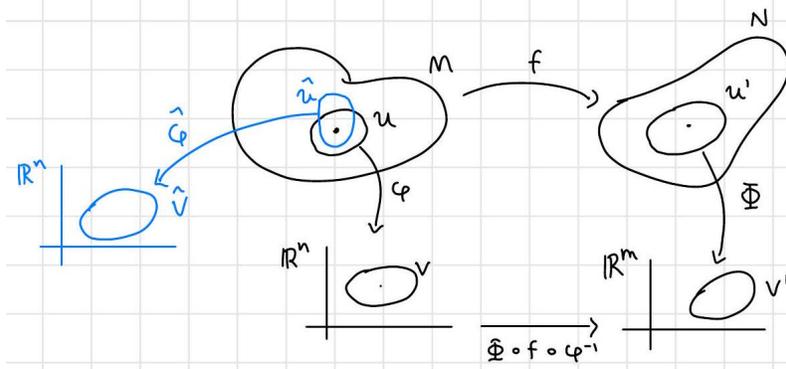
es una aplicación C^∞ .



Observación 1.24. La noción de diferenciabilidad no depende de la carta compatible escogida. En efecto, si tenemos dos cartas compatibles (U, φ) y $(\hat{U}, \hat{\varphi})$ alrededor del mismo $x \in X$, tenemos que

$$\varphi' \circ F \circ \hat{\varphi}^{-1} = \underbrace{(\varphi' \circ F \circ \varphi^{-1})}_{C^\infty} \circ \underbrace{(\varphi \circ \hat{\varphi}^{-1})}_{C^\infty},$$

y análogamente para otra carta en N . En particular, para demostrar que un mapa es diferenciable basta con comprobarlo en algún atlas compatible.



Notación 1.25. Denotaremos por \tilde{F} a la aplicación entre abiertos del espacio euclídeo

$$\tilde{F} = \varphi' \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(F^{-1}(U')) \subseteq V \longrightarrow V',$$

y la llamaremos la *expresión en cartas de F* .

Definición 1.26. Una aplicación diferenciable $F : M \rightarrow N$ se dice:

- *Difeomorfismo* si $F : M \rightarrow N$ tiene una inversa $F^{-1} : N \rightarrow M$ diferenciable.
- *Difeomorfismo local* si para cada $p \in M$ existen entornos $U \subseteq M$ y $U' \subseteq N$ de p y $F(p)$ respectivamente, tales que $F|_U : U \rightarrow U'$ es un difeomorfismo.

Recuérdese que existe un criterio perfecto para decidir si una aplicación diferenciable entre abiertos de \mathbb{R}^n es un difeomorfismo local.

Teorema 1.27 (de la aplicación inversa). *Una aplicación diferenciable*

$$\tilde{F} : V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow V' \subseteq \mathbb{R}^n$$

es un difeomorfismo local si y solo la diferencial $D_x \tilde{F}$ es un isomorfismo lineal para todo $x \in V$.

Observación 1.28. El teorema de la aplicación inversa implica que \tilde{F} es un difeomorfismo si y solo si es un difeomorfismo local biyectivo.

Definición 1.29. Dos variedades diferenciables M y N se dicen *difeomorfas* si existe un difeomorfismo $F : M \rightarrow N$ entre ellas.

Ejemplo 1.30. Si $M = (X, \mathcal{A})$ es una variedad diferenciable y \mathcal{A}' es un atlas compatible con \mathcal{A} , entonces $M = (X, \mathcal{A})$ y $M' = (X, \mathcal{A}')$ son difeomorfas (de hecho, el difeomorfismo es la aplicación identidad $\text{id} : X \rightarrow X$). En particular, una variedad diferenciable siempre es difeomorfa a ella misma equipada con su atlas maximal.

Observación 1.31. Una pregunta fundamental en geometría es: “Dadas dos variedades diferenciables, ¿cómo saber si son difeomorfas?”. Sin embargo, a pesar de su importancia, esta pregunta es extremadamente difícil de responder, y en dimensión ≥ 4 está mayormente abierto.

Observación 1.32. Los conceptos de variedad topológica y diferenciable son en general muy distintos, por ejemplo, por los siguientes motivos:

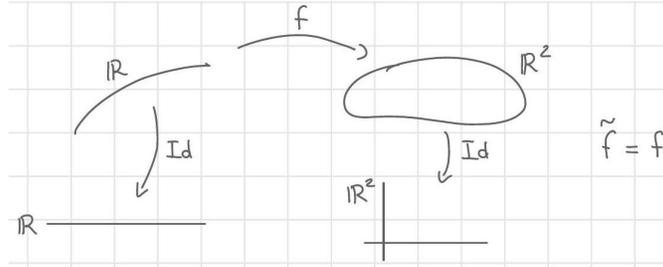
- No toda variedad topológica admite un atlas diferenciable. Dicho de otro modo, hay variedades topológicas que no admiten una estructura de variedad diferenciable.
- Existen variedades topológicas que pueden admitir diferentes estructuras diferenciables no difeomorfas. En otras palabras, sobre el mismo espacio topológico, es posible tomar varios atlas diferenciables no difeomorfos. El ejemplo más famoso a ese respecto es la esfera 7-dimensional S^7 , que admite 28 estructuras diferenciables distintas. Estas estructuras “no estándar” se conocen como estructuras exóticas.
- Sin embargo, en dimensión $n \leq 3$, si es cierto que toda variedad topológica admite una y solo una estructura diferenciable.

Definición 1.33. Una aplicación diferenciable $F : M \rightarrow N$ se dice una *inmersión* si, para todo $p \in M$ y toda carta (U, φ) alrededor de p y (U', φ') alrededor de $F(p)$, se tiene que $D_{\varphi(p)} \tilde{F}$ es inyectiva, donde $\tilde{F} = \varphi' \circ F \circ \varphi^{-1}$ es la expresión en cartas de F .

Ejemplo 1.34. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable de la forma $F(t) = (F_1(t), \dots, F_n(t))$. Se tiene que $\tilde{F} = F$, y la diferencial es

$$D_t F = \begin{pmatrix} F'_1(t) \\ F'_2(t) \\ \vdots \\ F'_n(t) \end{pmatrix}.$$

De este modo, $D_t F$ es inyectiva si $F'_i(t) \neq 0$ para algún $1 \leq i \leq n$. Esta es la definición usual de una *curva regular*.



Ejemplo 1.35. Consideremos una aplicación diferenciable $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Como $\tilde{F} = F$, su diferencial está dada por

$$D_p f = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} \Big|_p & \frac{\partial F_1}{\partial v} \Big|_p \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} \Big|_p & \frac{\partial F_2}{\partial v} \Big|_p \\ \frac{\partial F_3}{\partial u} \Big|_p & \frac{\partial F_3}{\partial v} \Big|_p \end{pmatrix}.$$

De este modo, se tiene que F es una inmersión si y solo si los vectores $\frac{\partial F}{\partial u} \Big|_p = \left(\frac{\partial F_1}{\partial u} \Big|_p, \frac{\partial F_2}{\partial u} \Big|_p, \frac{\partial F_3}{\partial u} \Big|_p \right)$ y $\frac{\partial F}{\partial v} \Big|_p = \left(\frac{\partial F_1}{\partial v} \Big|_p, \frac{\partial F_2}{\partial v} \Big|_p, \frac{\partial F_3}{\partial v} \Big|_p \right)$ son linealmente independientes para todo $p \in U$ o, equivalentemente, si $\frac{\partial F}{\partial u} \Big|_p \times \frac{\partial F}{\partial v} \Big|_p \neq 0$ para todo $p \in U$. Esta es la definición usual de una *superficie regular*.

Definición 1.36. Una aplicación diferenciable $F : M \rightarrow N$ se dice un *encaje*, también llamado un *embedding* si:

- F es inmersión.
- F es un homeomorfismo sobre su imagen.

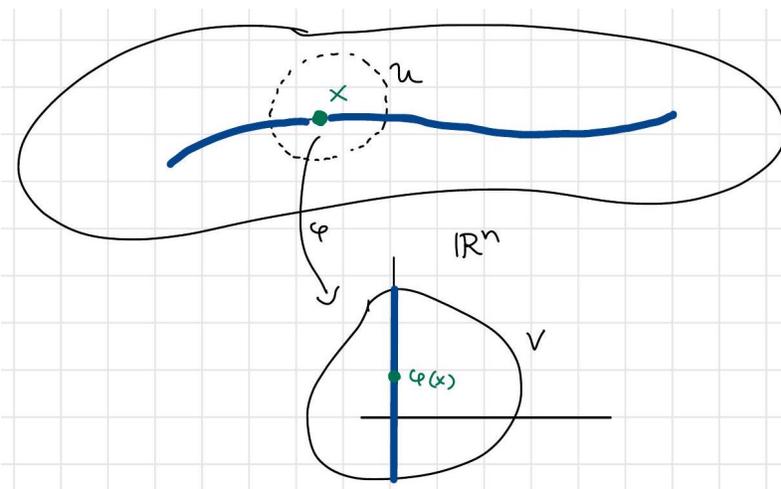
Observación 1.37. La segunda condición sobre F , que sea homeomorfismo sobre su imagen, quiere decir que F es un homeomorfismo entre M y $F(M)$. En particular, F es una biyección entre M y $F(M)$ o, lo que es lo mismo, F es inyectiva. Sin embargo, no basta con que F sea una inmersión inyectiva para que sea un encaje. En efecto, debe cumplirse también que la inversa $F^{-1} : F(M) \rightarrow M$ sea continua. De este modo, una reformulación equivalente de la condición de encaje es que la inmersión F sea inyectiva y abierta.

Observación 1.38. Si M es compacta, entonces toda inmersión inyectiva es un encaje, pues toda aplicación continua entre un espacio compacto y un Hausdorff es cerrada (y, por tanto, abierta).

Definición 1.39. Sea M una variedad diferenciable. Un subespacio $N \subseteq M$ se dice una *subvariedad regular* (también llamada subvariedad diferenciable o suave) si, para todo punto $p \in N$, existe una carta $(U, \varphi : U \rightarrow V)$ de M alrededor de p tal que

$$\varphi(U \cap N) = V \cap (\{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d)$$

para cierto $d \geq 0$.



Observación 1.40. Implícitamente, estamos equipando a $N \subseteq M$ con la topología del subespacio. De este modo, los abiertos de N son precisamente los conjuntos de la forma $U \cap N$ con U un abierto de M .

Consideremos la aplicación proyección sobre las últimas coordenadas $\pi : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-d} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, dada por $\pi(x_1, \dots, x_{n-d}, x_{n-d+1}, \dots, x_n) = (x_{n-d+1}, \dots, x_n)$.

Proposición 1.41. Si $N \subseteq M$ es una subvariedad regular, entonces $(U \cap N, \pi \circ \varphi : U \cap N \rightarrow \pi(U))$ es una carta para N .

Demostración. Sea $\varphi : U \rightarrow V$ tal que $\varphi(U \cap N) = V \cap (\{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d)$. Como φ era un homeomorfismo, entonces $\varphi|_{U \cap N}$ es un homeomorfismo entre $U \cap N$ y $V \cap (\{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d)$. Pero este último espacio es homeomorfo a $\pi(V)$ mediante π . Además, los cambios de cartas para estas nuevas cartas son restricciones de cambios de cartas de M y, por tanto, son automáticamente C^∞ . \square

Notación 1.42. Las cartas (U, φ) de M como antes se llaman *cartas de subvariedad*, y las cartas $(U, \varphi|_N) = (U \cap N, \pi \circ \varphi : U \cap N \rightarrow \pi(U))$ construidas a partir de ellas se llaman *cartas adaptadas para N* (ver Figura 4).

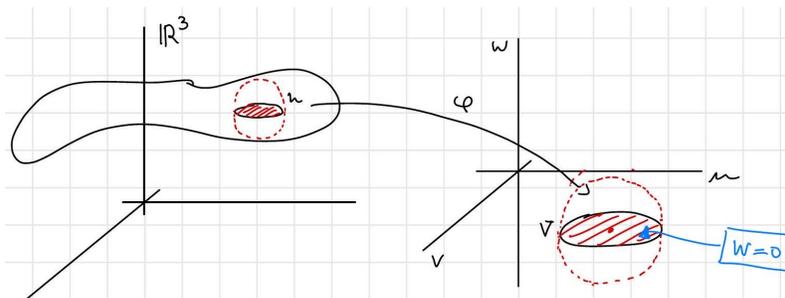


FIGURA 4. Carta adaptada a una subvariedad.

Observación 1.43. Si $N \subseteq M$ es una subvariedad regular de M , el conjunto de cartas adaptadas para N es un atlas diferenciable en N . En particular, N es una variedad diferenciable de dimensión d .

Teorema 1.44. Sean M y N variedades diferenciables con $N \subseteq M$. Se tiene que N es una subvariedad regular si y solo si el mapa inclusión $i : N \hookrightarrow M$ es un encaje.

Demostración. \Rightarrow) Sea (U, φ) una carta de M de subvariedad para N . Recordemos que esta carta induce una carta $(U, \varphi|_N) = (U \cap N, \pi \circ \varphi : U \cap N \rightarrow \pi(U))$ para N . De este modo, en coordenadas, la aplicación $i : N \rightarrow M$ se escribe

$$\begin{aligned} \tilde{i}(x_1, \dots, x_d) &= \varphi \circ i \circ \varphi|_N^{-1}(x_1, \dots, x_d) = \varphi \circ i(\varphi^{-1}(0, \dots, 0, x_1, \dots, x_d)) \\ &= \varphi(\varphi^{-1}(0, \dots, 0, x_1, \dots, x_d)) = (0, \dots, 0, x_1, \dots, x_d) \end{aligned}$$

En consecuencia, tenemos que su diferencial es

$$D_x \tilde{i} = \begin{pmatrix} 0_{n-d} \\ I_d \end{pmatrix},$$

donde 0_{n-d} denota la matrix cuadrada de orden $(n-d) \times (n-d)$ con entradas todo ceros e I_d es la matrix identidad de tamaño $d \times d$. En particular, el rango de $D_x \tilde{i}$ es d , que es el rango máximo. Luego i es una inmersión.

Adicionalmente, el mapa inverso a \tilde{i} sobre su imagen es $\tilde{i}^{-1}(0, \dots, 0, x_1, \dots, x_d) = (x_1, \dots, x_d)$ que es continuo, luego \tilde{i} es un homeomorfismo. Como tanto φ como $\varphi|_N$ son también homeomorfismos, eso implica que $i = \varphi^{-1} \circ \tilde{i} \circ \varphi|_N$ también es un homeomorfismo sobre su imagen y, por ende, es un encaje.

\Leftarrow) Para demostrarlo, usaremos el teorema de rectificación de la imagen (un corolario del teorema de la función inversa). Este teorema afirma que si $F : U \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$, con $d < n$, es una aplicación diferenciable tal que $D_x F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ es inyectiva (i.e. un monomorfismo) para todo $x \in U$, entonces existen abiertos $V' \subseteq V$ y $W \subseteq \mathbb{R}^n$ y una aplicación diferenciable $H : V' \rightarrow W$ tal que

$$H \circ F(x_1 \dots x_d) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-d}, x_1, \dots, x_d)$$

para todo $(x_1 \dots x_d) \in U \cap F^{-1}(V')$.

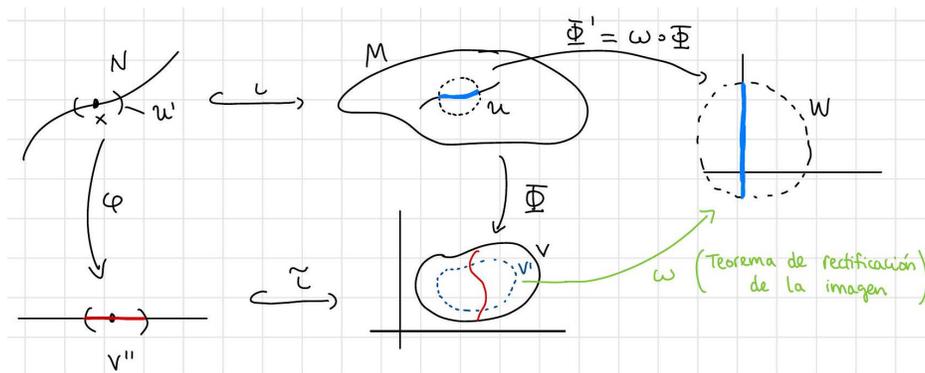
Usando este teorema, vemos la implicación \Leftarrow). Sea $p \in N$ y consideremos cartas (U', φ') en N y (U, φ) en M alrededor de p . La función $\tilde{i} = \varphi \circ i \circ \varphi'^{-1} : V' \rightarrow V$ cumple que $D\tilde{i}$ es inyectiva, pues i es un encaje. Así, por el teorema de rectificación de la imagen, existe una aplicación $H : V' \rightarrow W$ tal que

$$H \circ \tilde{i}(x_1 \dots x_n) = (0, \dots, 0, x_1, \dots, x_n).$$

De este modo, la carta de subvariedad de M para N alrededor de p es así $H \circ \phi$. En efecto, para todo $p \in N$ tenemos

$$H \circ \varphi(p) = H \circ \varphi \circ i(p) = H \circ \tilde{i} \circ \varphi'(p) = (0, \dots, 0, x_1, \dots, x_d),$$

donde $(x_1, \dots, x_d) = \varphi'(d)$. □



Observación 1.45. El Teorema 1.44 demuestra en particular que si M es una variedad diferenciable y $U \subseteq M$ es un abierto, entonces U es una subvariedad regular de M .

1.5. Valores regulares y subvariedades. En este apartado, daremos un criterio muy útil para construir ejemplos de subvariedades regulares de \mathbb{R}^n , utilizando contraimagen de valores regulares.

Definición 1.46. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^m$ y $V \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos y sea $F : U \rightarrow V$ una aplicación diferenciable con $m > n$. Un punto $x \in U$ se dice un *punto regular* si la diferencial de F en x , $D_x F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, tiene rango máximo. Un valor $y \in V$ se dice un *valor regular* si todo $x \in F^{-1}(y)$ es un punto regular. En caso contrario, se dice que y es un *valor singular*.

Teorema 1.47. Consideremos enteros $m > n$ y abiertos $U \subseteq \mathbb{R}^m$ y $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Dada una aplicación diferenciable $F : U \rightarrow V$, si $y^0 \in V$ es un valor regular de F , entonces $F^{-1}(y^0)$ es una subvariedad regular de \mathbb{R}^m .

Para demostrar este resultado, nos apoyaremos en el siguiente teorema fundamental de cálculo diferencial, que es una versión alternativa (de hecho, equivalente) del teorema de la función inversa.

Teorema 1.48 (de la función implícita). Consideremos enteros $m > n$, abiertos $U \subseteq \mathbb{R}^m$ y $V \subseteq \mathbb{R}^n$ y una aplicación diferenciable $F : U \rightarrow V$. Supongamos que, en un punto $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, x_{n+1}^0, \dots, x_m^0) \in U$, se cumple que el menor de tamaño $n \times n$ de la matriz diferencial formada por las primeras n columnas

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x^0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x^0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x^0) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(x^0) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial F_n}{\partial x_2}(x^0) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x^0) \end{pmatrix}$$

es de rango máximo. Entonces, denotando por $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ la aplicación proyección sobre las últimas $m - n$ coordenadas e $y^0 = F(x^0)$, se tiene que existe un abierto $U' \subseteq \pi(U)$ alrededor de

$(x_{n+1}^0, \dots, x_m^0)$ y una función diferenciable $\phi : U' \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $F(\phi(x), x) = y^0$ para todo $x \in U'$ y todo punto $(x', x) \in F^{-1}(y^0)$ con $x \in U'$ es de esta forma.

Demostración del Teorema 1.47. Sea $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, x_{n+1}^0, \dots, x_m^0) \in F^{-1}(y^0) \subseteq U$. Como x^0 es un punto regular, la matriz diferencial de F en x_0

$$D_{x^0}F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x^0) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(x^0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m}(x^0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x^0) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(x^0) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_m}(x^0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial F_n}{\partial x_2}(x^0) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x^0) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m}(x^0) \end{pmatrix}$$

tiene n columnas linealmente independientes. Por simplicidad notacional, supongamos que las columnas linealmente independientes de $D_{x^0}F$ son las n primeras. Entonces, por el teorema de la función implícita, existe una función diferenciable $\phi : U' \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ tal que $F(\phi(x), x) = y^0$ para todo $x \in U'$. Consideremos el abierto $W = \pi^{-1}(U') \cap U \subseteq \mathbb{R}^m$, sobre el que definimos la función φ dada por

$$\varphi(x', x) = (x, x' - \phi(x)),$$

donde hemos escrito un punto $(x_1, \dots, x_m) \in W$ como (x', x) , con $x' = (x_1, \dots, x_n)$ y $x = (x_{n+1}, \dots, x_m)$. Obsérvese que si $(x', x) \in F^{-1}(y^0) \cap W$, entonces se tiene que $x' = \psi(x)$ y, por tanto

$$\varphi(x', x) = (x, x' - \phi(x)) = (x, \phi(x) - \phi(x)) = (x, 0).$$

Más aún, como φ es una función diferenciable, se tiene que (W, φ) es una carta compatible con el atlas estándar de \mathbb{R}^m . En consecuencia, (W, φ) es una carta de subvariedad para $F^{-1}(y^0)$, como queríamos demostrar. \square

Observación 1.49. Utilizando la carta (W, φ) de \mathbb{R}^m de la demostración anterior, se tiene que la carta inducida en $F^{-1}(y^0)$ es $(W \cap F^{-1}(y^0), \varphi_{F^{-1}(y^0)})$, donde $\varphi_{F^{-1}(y^0)}(x', x) = x$. En particular, la dimensión de $F^{-1}(y^0)$ es $m - n$.

2. ESPACIO TANGENTE Y DERIVACIONES.

En esta sección, definiremos el espacio tangente a un punto de una variedad diferenciable. Obsérvese que, en principio, esta definición no es obvia, pues no podemos utilizar nuestra intuición de \mathbb{R}^n de hablar del hiperplano “tangente” a la variedad. En efecto, una variedad diferenciable es en principio un espacio topológico abstracto no encajado dentro de ningún \mathbb{R}^n y, por tanto, no podemos usar la estructura lineal del ambiente para definir el espacio tangente.

Para salvar ese problema, utilizaremos en su lugar la noción de derivación, como se explota en la Sección 2.1. La idea crucial es que, si bien en una variedad abstracta no tiene sentido hablar de la “dirección tangente definida por v ”, sí tiene sentido hablar de la “derivada direccional en la

dirección de v ". De este modo, en cierto modo el espacio tangente a un punto en una variedad se define como el conjunto de posibles "derivadas direccionales" en dicho punto.

Esto tendrá como consecuencia que los vectores tangentes tendrán en sí mismos una estructura adicional de derivación. Esto puede resultar confuso en primera instancia pero, como veremos, una vez nos acostumbremos a trabajar con esta definición, ésta resulta mucho más operativa y natural, y convierte a muchas definiciones derivadas en casi tautológicas.

2.1. Definición de espacio tangente.

Definición 2.1. Sea M una variedad diferenciable y $p \in M$ un punto cualquiera. El conjunto de las *funciones diferenciables definidas en un entorno de p* , y denotado por $C^\infty(p)$, es el conjunto de funciones diferenciables de la forma $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ donde U es un entorno abierto de p .

Observación 2.2. El conjunto $C^\infty(p)$ es un \mathbb{R} -espacio vectorial. En efecto, tenemos las operaciones

- Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función entorno a p , entonces $\lambda f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es la función dada por $(\lambda f)(q) = \lambda f(q)$ para todo $q \in U$.
- Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : U' \rightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones entorno a p , entonces podemos definir $f + g : U \cap U' \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(f + g)(q) = f(q) + g(q)$ para todo $q \in U \cap U'$.

Más aún, $C^\infty(p)$ puede dotarse de una estructura de anillo con el producto $(f \cdot g)(q) = f(q)g(q)$ en el dominio común de definición. Con esta estructura, se dice que $C^\infty(p)$ es una álgebra sobre \mathbb{R} .

Definición 2.3. Sea M una variedad diferenciable y $p \in M$. Una derivación en p es una función:

$$X : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

1. X es \mathbb{R} -lineal.
2. X satisface la "regla de Leibniz": $X(f \cdot g) = X(f)g(p) + X(g)f(p)$ para cualesquiera $f, g \in C^\infty(p)$.

Ejemplo 2.4. 1. Consideremos $M = \mathbb{R}$ y $p = 0$, de manera que $C^\infty(0)$ es el conjunto de las funciones diferenciables $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ donde $U \subseteq \mathbb{R}$ es un abierto conteniendo a 0. Podemos considerar la derivación $X = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} : C^\infty(0) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$X(f) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f = f'(0).$$

Obsérvese que las propiedades (1.) y (2.) son propiedades estándar de la derivada.

2. Consideremos $M = \mathbb{R}^n$ y $p = (0, \dots, 0)$. Dado $1 \leq i \leq n$, podemos considerar la derivación dada por la i -ésima derivada parcial

$$X = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0 : C^\infty(0) \rightarrow \mathbb{R}, \quad X(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_0.$$

Nuevamente, las propiedades (1.) y (2.) son consecuencia directa de las propiedades de la derivada.

3. En general, si tomamos $M = \mathbb{R}^n$ y $p \in \mathbb{R}^n$ un punto cualquiera, para cualquier $v \in \mathbb{R}^n$ podemos definir la derivación dada por “tomar la derivada direccional en la dirección de v evaluada en p ”, esto es

$$X = \left. \frac{\partial}{\partial v} \right|_p : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}, \quad X(f) = \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_p.$$

Explícitamente, si $v = (v_1, \dots, v_n)$ entonces $\left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_p = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_p \cdot v_i = \nabla f|_p \cdot v$, donde $\nabla f|_p$ es el gradiente de f evaluado en p .

Definición 2.5. Sea M una variedad diferenciable y $p \in M$. Definimos el *espacio tangente a M en p* como

$$T_p M = \{X : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R} \mid X \text{ es una derivación}\}.$$

Observación 2.6. El espacio tangente $T_p M$ tiene una estructura natural de \mathbb{R} -espacio vectorial, dado por

- $(\lambda X)(f) = \lambda X(f)$ para $X \in T_p M$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in C^\infty(p)$.
- $(X + Y)(f) = X(f) + Y(f)$ para $X, Y \in T_p M$ y $f \in C^\infty(p)$.

Ejemplo 2.7. Vamos a generalizar la construcción del Ejemplo 2.4 a una variedad arbitraria. Sea M una variedad diferenciable y $p \in M$. Consideremos una carta

$$\varphi : U \subseteq M \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Observemos que, dada $f \in C^\infty(p)$, la composición $f \circ \varphi^{-1}$ es una función diferenciable en el sentido usual de un abierto de \mathbb{R}^n a \mathbb{R} (en concreto, es la expresión de f en cartas).

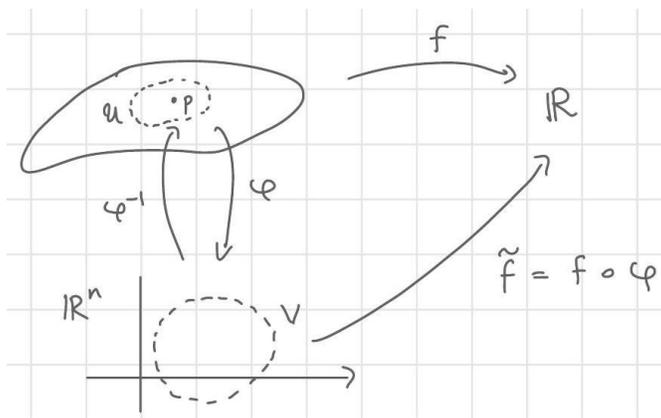
De este modo, dado $1 \leq i \leq n$, definimos la derivación

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$$

definida, para $f \in C^\infty(p)$, por

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p (f) = \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1}).$$

Es decir, tomamos la derivada direccional i -ésima de la función $f \circ \varphi^{-1}$ y la evaluamos en el punto $\varphi(p)$.



Teorema 2.8. Sea \$M\$ una variedad diferenciable y \$p \in M\$, con dimensión \$n\$ entorno a \$p\$. Entonces, \$T_pM\$ es un \$\mathbb{R}\$-espacio vectorial de dimensión \$n\$. Más aún, las derivaciones

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p$$

forman una base de \$T_pM\$.

Antes de demostrar este resultado, hagamos algunas observaciones al respecto.

Observación 2.9. Moralmente, el Teorema 2.8 muestra que, en algún sentido, todos los elementos de \$T_pM\$ son “derivadas direccionales”, pues son una combinación lineal de derivadas parciales.

Observación 2.10. La base \$\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p\$ no es canónica. Depende, por contra, profundamente de una elección: la carta escogida para definirla. Esto es una característica central de las variedades diferenciables, en las que \$T_pM\$ es un espacio vectorial de dimensión \$n\$ pero es totalmente abstracto, pues no tiene ninguna base “preferida”.

Demostración del Teorema 2.8. Para ver que forman una base, demostraremos que son linealmente independientes y un sistema generador.

Linealmente independientes. Consideremos una combinación lineal

$$\lambda_1 \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p + \dots + \lambda_n \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p = 0$$

para ciertos \$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\$. Queremos ver que todos los \$\lambda_i = 0\$.

Para ello, consideramos la función \$\tilde{x}_1 = x_1 \circ \varphi\$, donde \$x_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1 \dots x_n) \mapsto x_1\$ es la proyección sobre la primera variable. Se tiene que \$\tilde{x}_1 : U \to \mathbb{R}\$, luego \$x_1 \in C^\infty(p)\$. Además, tenemos que

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p (\tilde{x}_1) = \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_{\varphi(p)} (\tilde{x}_1 \circ \varphi^{-1}) = \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_{\varphi(p)} (x_1 \circ \varphi \circ \varphi^{-1}) = \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_{\varphi(p)} (x_1) = 1.$$

Análogamente, para $i \neq 1$ tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (\tilde{x}_1) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(p)} (\tilde{x}_1 \circ \varphi^{-1}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(p)} (x_1 \circ \varphi \circ \varphi^{-1}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(p)} (x_1) = 0.$$

De este modo, tenemos que

$$0 = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p (\tilde{x}_1) + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_p (\tilde{x}_1) + \dots + \lambda_n \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p (\tilde{x}_1) = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 + \dots + \lambda_n \cdot 0,$$

luego $\lambda_1 = 0$.

Análogamente, para cualquier $j = 1, \dots, n$, definimos $\tilde{x}_j = x_j \circ \varphi$, donde $x_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1 \dots x_n) \mapsto x_j$ es la proyección sobre la i -ésima variable. En ese caso tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (\tilde{x}_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Por lo que, argumentando como anteriormente, obtenemos que $\lambda_j = 0$ para todo j , como queríamos demostrar.

Sistema generador. Para demostrarlo, necesitaremos antes un pequeño lema de cálculo diferencial.

Lema 2.11. *Sea $h : V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ y sea $p \in V$ fijo. Entonces, para todo $x \in V$, tenemos que*

$$(1) \quad h(x) = h(p) + \sum_{i=1}^n (x_i - p_i) g_i(x),$$

donde $g_1, \dots, g_n : V \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones C^∞ satisfaciendo

$$g_i(p) = \frac{\partial h}{\partial x_i} \Big|_p.$$

Demostración. Recuérdesse que la regla de Barrow implica que

$$h(x) - h(p) = \int_0^1 \frac{d}{dt} h(p + t(x - p)) dt.$$

De este modo, tenemos que

$$\begin{aligned} h(x) - h(p) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} h(p + t(x - p)) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} (p + t(x - p)) (x_i - p_i) dt = \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - p_i) \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x_i} (p + t(x - p)) dt. \end{aligned}$$

Así, si llamamos $g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x_i} (p + t(x - p)) dt$, tenemos (1). Además, se tiene que

$$g_i(p) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x_i} (p + t(p - p)) dt = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x_i} (p) dt = \frac{\partial h}{\partial x_i} (p) \int_0^1 dt = \frac{\partial h}{\partial x_i} \Big|_p$$

□

Corolario 2.12. *Sea M una variedad diferenciables arbitraria, $p \in M$ y $f \in C^\infty(p)$. Entonces si (U, φ) es una carta de M alrededor de U , se tiene que*

$$(2) \quad f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n (\varphi(x)_i - \varphi(p)_i) g_i(x).$$

para ciertas funciones diferenciables $g_1, \dots, g_n \in C^\infty(p)$ satisfaciendo $g_i(p) = \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p (f)$.

Volvamos a la demostración del Teorema 2.8. Sea $X \in T_p M$ una derivación cualquiera y sea $f \in C^\infty(p)$. Entonces, usando (2) tenemos que

$$\begin{aligned} X(f) &= X \left(f(p) + \sum_{i=1}^n (\varphi(x)_i - \varphi(p)_i) g_i(x) \right) = X(f(p)) + \sum_{i=1}^n X((\varphi(x)_i - \varphi(p)_i) g_i(x)) \\ &= f(p)X(1) + \sum_{i=1}^n X(\varphi(x)_i - \varphi(p)_i) g_i(p) + (\varphi(p)_i - \varphi(p)_i) X(g_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n X(\varphi(x)_i - \varphi(p)_i) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p (f) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p (f), \end{aligned}$$

donde hemos definido $\lambda_i = X(\varphi(x)_i - \varphi(p)_i)$ y, en la penúltima igualdad, hemos usado que $X(1) = 0$, pues $X(1) = X(1 \cdot 1) = X(1) \cdot 1 + 1 \cdot X(1) = 2X(1)$. Obsérvese que los coeficientes λ_i no dependen de f y, por tanto, hemos probado que

$$X = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p,$$

como queríamos demostrar. □

Observación 2.13. En el transcurso de la demostración anterior, hemos observado un hecho de gran importancia que utilizaremos en múltiples ocasiones futuras. Como ya hemos visto, si fijamos una carta (U, φ) alrededor de un punto $p \in M$, esto nos induce una base

$$T_p M = \left\langle \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p \right\rangle.$$

Ahora, para $1 \leq i \leq n$, definimos las funciones

$$\tilde{x}_i = x_i \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R},$$

donde $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es la proyección sobre la i -ésima variable. Entonces, tenemos que

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p (\tilde{x}_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Esta propiedad suele indicarse sucientemente como que $\left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p (\tilde{x}_i) = \delta_{i,j}$, donde $\delta_{i,j}$ es la llamada *delta de Kronecker*, que satisface $\delta_{i,i} = 1$ y $\delta_{i,j} = 0$ para $i \neq j$.

De este modo, las funciones \tilde{x}_i actúan como “indicadores” para estas bases. Estas funciones se conocen como la *función coordenada i -ésima* y, cuando el contexto no da lugar a confusión, se denotan simplemente por $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Observación 2.14. La Observación 2.13 sirve, en particular para encontrar la expresión de cualquier vector $X \in T_p M$ en términos de la base $\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p$ inducida por una carta. En efecto, como es una base, tenemos

$$X = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p,$$

para ciertos coeficientes $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Ahora, si evaluamos esta expresión en \tilde{x}_j , usando que $\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p (\tilde{x}_j) = \delta_{i,j}$ tenemos

$$X(\tilde{x}_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p (\tilde{x}_j) = \lambda_j.$$

De este modo, tenemos la expresión en coordenadas

$$(3) \quad X = \sum_{i=1}^n X(\tilde{x}_i) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p.$$

Como hemos visto, la base $\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p$ de $T_p M$ depende de la carta (U, φ) escogida. De este modo, si tenemos otra carta (U', φ') alrededor de p , también tenemos otra base asociada $\left. \frac{\partial}{\partial x'_1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x'_n} \right|_p$, como se muestra en la Figura 5. Vamos a calcular el cambio de base entre ambas bases.

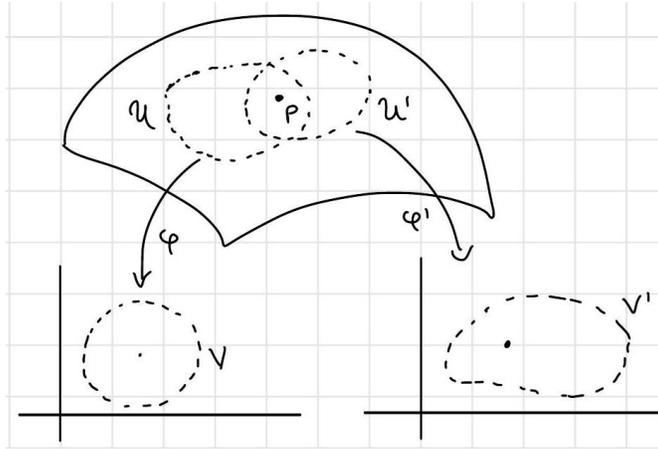


FIGURA 5. Cambio de base inducido por el cambio de cartas.

Para ello, observemos que, para todo $j = 1, \dots, n$, existen coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{R}$ tales que

$$\left. \frac{\partial}{\partial x'_j} \right|_p = a_{1j} \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p + \dots + a_{nj} \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p.$$

Para calcular estos coeficientes a_{ij} , recuérdese de la Observación 2.13 que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (\tilde{x}_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k, \\ 0 & \text{si } i \neq k. \end{cases}$$

De este modo, tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x'_j} \Big|_p (\tilde{x}_k) = \sum_{i=0}^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (\tilde{x}_k) = a_{jk}.$$

En consecuencia, tenemos que

$$a_{ij} = \frac{\partial}{\partial x'_j} \Big|_p (\tilde{x}_i) = \frac{\partial}{\partial x'_j} \Big|_{\varphi'(p)} (\tilde{x}_i \circ (\varphi')^{-1}) = \frac{\partial}{\partial x'_j} \Big|_{\varphi'(p)} (x_i \circ \varphi \circ (\varphi')^{-1}) = \frac{\partial}{\partial x'_j} \Big|_{\varphi'(p)} (\varphi \circ (\varphi')^{-1})_i,$$

donde $(\varphi \circ (\varphi')^{-1})_i$ denota la i -ésima coordenada de la función de cambio de cartas $\varphi \circ (\varphi')^{-1} : \varphi'(U \cap U') \rightarrow \varphi(U \cap U')$. Dicho de otro modo, la matriz de los coeficientes a_{ij} es

$$(a_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x'_1} (\varphi \circ (\varphi')^{-1})_1 & \frac{\partial}{\partial x'_2} (\varphi \circ (\varphi')^{-1})_1 & \dots & \frac{\partial}{\partial x'_n} (\varphi \circ (\varphi')^{-1})_1 \\ \frac{\partial}{\partial x'_1} (\varphi \circ (\varphi')^{-1})_2 & \frac{\partial}{\partial x'_2} (\varphi \circ (\varphi')^{-1})_2 & \dots & \frac{\partial}{\partial x'_n} (\varphi \circ (\varphi')^{-1})_2 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x'_1} (\varphi \circ (\varphi')^{-1})_n & \frac{\partial}{\partial x'_2} (\varphi \circ (\varphi')^{-1})_n & \dots & \frac{\partial}{\partial x'_n} (\varphi \circ (\varphi')^{-1})_n \end{pmatrix} \Big|_{\varphi'(p)}$$

Es decir, la matriz de cambio de base es la matriz jacobiana del cambio de carta.

Observación 2.15. En el caso de que $M = \mathbb{R}^n$ (o un abierto de \mathbb{R}^n), visto como una variedad diferenciable tenemos una carta “preferida” que es la carta identidad $\text{id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Para la base inducida por esta carta, tenemos que $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$ son las derivadas parciales usuales.

Esta carta induce, en este caso, un isomorfismo natural $T_x \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$, que permite identificar implícitamente

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \longleftrightarrow e_i.$$

2.2. Diferencial de una aplicación.

Definición 2.16. Sea $F : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables y sea $p \in M$. La *diferencial de F en p* es la aplicación lineal

$$\begin{aligned} d_p F : T_p M &\longrightarrow T_{F(p)} N \\ X &\longmapsto X(\bullet \circ F) \end{aligned}$$

donde \bullet indica que el argumento se inserta en ese lugar. Explícitamente, el vector $d_p F(X) \in T_{F(p)} N$ es la derivación que para $g \in C^\infty(F(p))$ asigna

$$d_p F(X)(g) = X(g \circ F).$$

Tomemos una carta (U, φ) de M alrededor de p y una carta (U', φ') de N alrededor de $F(p)$. Estas inducen sendas bases

$$T_p M = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\rangle, \quad T_{F(p)} N = \left\langle \frac{\partial}{\partial x'_1} \Big|_{F(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial x'_n} \Big|_{F(p)} \right\rangle.$$

En efecto, tenemos coeficientes a_{ij} tales que

$$d_p F \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial x'_i} \Big|_{F(p)}.$$

Para encontrar estos coeficientes, usamos la Observación 2.13, que dice que $\frac{\partial}{\partial x'_i} \Big|_{F(p)} (\tilde{x}'_k) = \delta_{i,j}$, con $\delta_{i,j}$ la delta de Kronecker. De este modo, tenemos

$$\begin{aligned} a_{ij} &= d_p F \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) (\tilde{x}'_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p (\tilde{x}'_i \circ F) = \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p (x_i \circ \varphi' \circ F) = \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{\varphi(p)} (x_i \circ \varphi' \circ F \circ \varphi^{-1}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{\varphi(p)} (\varphi' \circ F \circ \varphi^{-1})_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{\varphi(p)} \tilde{F}_j, \end{aligned}$$

donde $\tilde{F} = \varphi' \circ F \circ \varphi^{-1}$ denota la expresión de F en cartas y \tilde{F}_j es su j -ésima coordenada.

De este modo, la matriz de $d_p F : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ en las bases $\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p$ de $T_p M$ y $\frac{\partial}{\partial x'_1} \Big|_{F(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial x'_n} \Big|_{F(p)}$ de $T_{F(p)} N$ es

$$\left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \tilde{F}_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{F}_3}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \tilde{F}_3}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{F}_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{F}_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \tilde{F}_n}{\partial x_n} \end{array} \right) \Big|_{\varphi(p)}$$

Dicho de otro modo, la matriz de $d_p F$ en las bases anteriores es la matriz diferencial de \tilde{F} (a veces llamada la jacobiana de \tilde{F}).

Observación 2.17. Consideremos el caso de que $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sea una función diferenciable entre espacios euclídeos. Como se explicó en la Observación 2.15, estos espacios son variedades diferenciables equipadas con la carta identidad. De este modo, tenemos que $\tilde{F} = \text{id} \circ F \circ \text{id}^{-1} = F$. Así, en las bases inducidas por la carta identidad, tenemos que la aplicación diferencial $d_p F$ coincide con la diferencial usual $D_p F$ cuya matriz es, en efecto, la matriz de derivadas parciales de F . Sin embargo, seguiremos manteniendo ambas notaciones para poder resaltar la diferencia conceptual de que $d_p F$ es una aplicación lineal entre espacios tangentes mientras que $D_p F$ es una mera matriz de derivadas parciales.

Gracias a esta definición de diferencial de una aplicación, tiene sentido hablar de inmersiones y encajes de una forma más intrínseca. De este modo, una aplicación diferenciable

$$F : M \rightarrow N$$

se dice:

- *Inmersión* si $d_p F : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ es un monomorfismo para todo $p \in M$.
- *Encaje* si F es inmersión y un homeomorfismo sobre la imagen.

Adicionalmente, si $\dim M \geq \dim N$, un punto $q \in N$ se dice un *valor regular* si para todo $p \in F^{-1}(q)$ se tiene que $d_p F : T_p M \rightarrow T_q N$ es de rango máximo (epimorfismo). En este lenguaje, una adaptación del Teorema 1.47 demuestra el siguiente resultado.

Teorema 2.18. *Consideremos una aplicación diferenciable $F : M \rightarrow N$ con $\dim M \geq \dim N$. Si $q \in N$ es un valor regular de F , entonces $F^{-1}(q)$ es una subvariedad regular de M .*

2.3. Campos vectoriales y flujos. En esta sección, veremos cómo las nociones de ecuaciones diferenciales ordinarias pueden generalizarse de forma sencilla a variedades diferenciables. Esta idea, aparte de ser muy natural, también proporciona poderosas herramientas para el estudio de la geometría de variedades diferenciables.

Definición 2.19. Sea M una variedad diferenciable. Un *campo vectorial* sobre M es una colección de vectores tangentes $X = \{X_p\}_{p \in M}$ con $X_p \in T_p M$ para todo $p \in M$ y tal que para cualquier carta $(U, \varphi : U \rightarrow V)$ se tiene que

$$X_p = \sum_{i=1}^n \lambda_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \quad p \in U,$$

donde $\lambda_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones diferenciables.

Ejemplo 2.20. Consideremos la variedad $M = \mathbb{R}^2$. Con la carta identidad, tenemos una base natural

$$T_{(x,y)} \mathbb{R}^2 = \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(x,y)}, \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{(x,y)} \right\rangle$$

De este modo, un campo vectorial es, por ejemplo

$$X_{(x,y)} = y^2 \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(x,y)} + xy \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{(x,y)}.$$

Si identificamos $T_{x,y} \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2$, entonces podemos identificar $X_{(x,y)} = (y^2, xy)$.

Definición 2.21. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un abierto y $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ una aplicación diferenciable i.e. una curva en M . Para cada $t \in I$, definimos la derivación $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)} M$ dada por

$$\begin{aligned} \alpha'(t) : C^\infty(\alpha(t)) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto (f \circ \alpha)'(t) \end{aligned}$$

donde $f \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de una variable real y $(f \circ \alpha)'(t) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)$ es su derivada evaluada en t .

Definición 2.22. Sea X un campo vectorial sobre una variedad diferenciable M consideremos $p \in M$. Se dice que una curva $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ es un *flujo* para X comenzando en p (también llamado *curva integral integral*) si $\alpha(0) = p$ y para todo $t \in I$ se tiene

$$\alpha'(t) = X_{\alpha(t)}.$$

Ejemplo 2.23. Consideremos $M = \mathbb{R}^2$ y X el campo vectorial dado por

$$X_{(x,y)} = y^2 \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(x,y)} + xy \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{(x,y)}.$$

Busquemos un flujo para X comenzando en $p = (0, 0)$ de la forma

$$\begin{aligned} \alpha : I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \end{aligned}$$

con $x(t), y(t)$ dos funciones C^∞ .

Para calcular $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}\mathbb{R}^2$, usando (3) tenemos que podemos escribirlo en la base $\frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\alpha(t)}, \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\alpha(t)}$ como

$$\alpha'(t) = \alpha'(t)(\tilde{x}) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\alpha(t)} + \alpha'(t)(\tilde{y}) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\alpha(t)}$$

donde $\tilde{x} = x \circ \text{id} = x$ e $\tilde{y} = y \circ \text{id} = y$ son las funciones proyección sobre la primera y segunda coordenada.

Además, usando la definición de $\alpha'(t)$, tenemos

$$\alpha'(t)(x) = (x \circ \alpha)'(t) = \alpha'_1(t), \quad \alpha'(t)(y) = (y \circ \alpha)'(t) = \alpha'_2(t),$$

luego

$$\alpha'(t) = \alpha'_1(t)(\tilde{x}) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\alpha(t)} + \alpha'_2(t)(\tilde{y}) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\alpha(t)}.$$

De este modo, para que α sea un flujo para X , debe cumplirse

$$\alpha'_1(t)(\tilde{x}) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\alpha(t)} + \alpha'_2(t)(\tilde{y}) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\alpha(t)} = \alpha'(t) = X_{(\alpha_1(t), \alpha_2(t))} = \alpha_2^2(t) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\alpha(t)} + \alpha_1(t)\alpha_2(t) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\alpha(t)}.$$

En consecuencia, como $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ es base, se ha de cumplir la igualdad componente a componente, por lo que debe satisfacerse

$$\begin{cases} \alpha'_1(t) = \alpha_2^2(t), \\ \alpha'_2(t) = \alpha_1(t)\alpha_2(t). \end{cases}$$

junto con la condición inicial $(0, 0) = \alpha(0) = (\alpha_1(0), \alpha_2(0))$. Esto es, en efecto, un problema de valor inicial para un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

El ejemplo anterior da la clave para calcular un flujo en una variedad general: reducirlo a una ecuación diferencial ordinaria en cartas.

Consideremos una variedad diferenciable M , un campo vectorial X en M y un punto $p \in M$. Para encontrar el flujo, elegimos una carta (U, φ) alrededor de p , lo que determina una base

$$T_p M = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\rangle.$$

De este modo, en esta base, para todo $q \in U$ podemos escribir

$$X_q = \sum_{i=1}^n x_i(q) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_q.$$

Además, si consideramos una curva $\alpha : I \rightarrow M$ cerca de p , también podemos escribir

$$\alpha'(t) = \sum_{i=1}^n \alpha'_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)}.$$

Los coeficientes los podemos calcular más explícitamente como

$$\alpha'_i(t) = (\tilde{x}_i \circ \alpha)'(t) = (x_i \circ \varphi \circ \alpha)'(t) = \tilde{\alpha}'_i(t),$$

donde $\tilde{\alpha} = \varphi \circ \alpha$ es la expresión de α en coordenadas (ver Figura 6) y $\tilde{\alpha}_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ es su i -ésima coordenada.

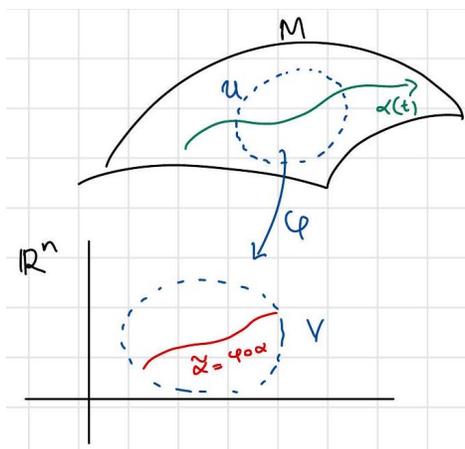


FIGURA 6. Expresión de la curva α en cartas

De este modo, la condición de que α es un flujo para X es que

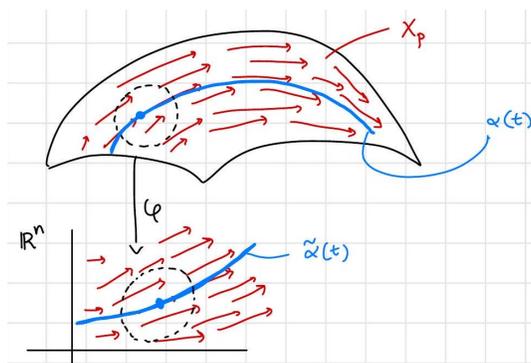
$$\sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}'_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)} = \alpha'(t) = X_{\alpha(t)} = \sum_{i=1}^n x_i(\alpha(t)) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)}.$$

Esto inmediatamente implica que tiene que cumplirse $\tilde{\alpha}'_i(t) = x_i(\alpha(t)) = (x_i \circ \varphi^{-1})(\tilde{\alpha}(t))$ para $i = 1, \dots, n$, que es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden 1. Si añadimos

la condición inicial $\tilde{\alpha}_i(0) = \varphi(p)_i$ para todo i , tenemos que el problema de calcular el flujo es equivalente a resolver el problema de valor inicial

$$(4) \quad \begin{cases} \tilde{\alpha}'_i(t) = (x_i \circ \varphi^{-1})(\tilde{\alpha}(t)), \\ \tilde{\alpha}_i(0) = \varphi(p)_i, \end{cases}$$

para $1 \leq i \leq n$.



Gracias a estas observaciones, es prácticamente inmediato demostrar el siguiente resultado.

Proposición 2.24. *Sea M una variedad diferenciable con un campo vectorial X sobre ella y un punto $p \in M$ fijado. Entonces, el flujo $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ de X comenzando en p existe y es único.*

Demostración. Por la discusión anterior, encontrar el flujo es equivalente a resolver el problema de valor inicial (4). Ahora bien, el lado derecho de la ecuación es C^∞ , luego en particular es localmente Lipschitz y, por tanto, el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias garantiza que la solución existe y es única. \square

Observación 2.25. ■ La unicidad debe entenderse en el mismo sentido que el teorema para ecuaciones diferenciales ordinarias: Si $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ y $\beta : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ son dos flujos, entonces $\alpha(t) = \beta(t)$ en $I \cap J$.

- La Proposición 2.24 solo garantiza que existe una solución α definida en un cierto intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, pero no garantiza que $I = \mathbb{R}$. Esto suele conocerse como “existencia a tiempos cortos”.
- En general, la existencia para todo tiempo ($I = \mathbb{R}$) no es cierta. Hay varios motivos por los que el flujo podría dejar de existir. En primer lugar, porque la ecuación (4) explota, de manera que diverge. Pero también puede ocurrir otro fenómeno, y es que la solución “se salga” de la variedad, por ejemplo, porque a la variedad le falta un punto por el que debería pasar la solución (ver Figura 7).

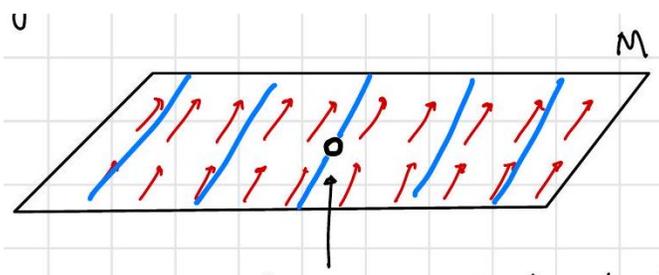


FIGURA 7. Flujo que no está definido para todo tiempo porque la variedad no es completa.

- No obstante, si M es compacta, entonces se tiene existencia para todo tiempo. Esto es, siempre existe un flujo $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M$.

2.4. Derivada de Lie y corchete de Lie. La Proposición 2.24 puede mejorarse ligeramente al siguiente resultado.

Proposición 2.26. *Sea M una variedad diferenciable compacta y X un campo vectorial en M . Entonces, existe una aplicación diferenciable*

$$\Theta : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$$

tal que, para todo $p \in M$, la curva $t \in \mathbb{R} \mapsto \Theta(p, t) \in M$ es el flujo de X comenzando en p .

Demostración. Como la variedad es compacta, el flujo existe para todo tiempo, por lo que la única parte que hace falta demostrar es que la aplicación Θ es diferenciable. Pero esto es consecuencia inmediata del teorema de dependencia continua de los datos iniciales para ecuaciones diferenciables. \square

Observación 2.27. La Proposición 2.26 también es cierta si M no es compacta. Sin embargo, en ese caso, la aplicación Θ no está definida en todo $M \times \mathbb{R}$, sino en un cierto abierto $U \subseteq M \times \mathbb{R}$ que contiene a $M \times \{0\}$.

Notación 2.28. Fijado $t \in \mathbb{R}$, es común denotar $\Theta_t : M \rightarrow M$ a la aplicación $\Theta_t(p) = \Theta(p, t)$. Informalmente, la aplicación Θ_t nos indica “a dónde se mueven los puntos de M mediante el flujo de X tras pasar t unidades de tiempo”. Cuando queramos referirnos a la curva $t \mapsto \Theta_t(p)$ para un $p \in M$ fijo, lo denotaremos con $\Theta_\bullet(p)$.

Observación 2.29. El flujo Θ_t cumple las siguientes propiedades:

- $\Theta_0 = \text{id}_M$.
- $\Theta_t \circ \Theta_s = \Theta_{t+s}$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$. Esto es consecuencia directa del teorema de unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias: Tanto $t \mapsto \Theta_t \circ \Theta_s(p)$ como $t \mapsto \Theta_{t+s}(p)$ son flujos de X comenzando en $\Theta_s(p)$ y, por tanto, deben ser iguales.

- $\Theta_{-t} = \Theta_t^{-1}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. En particular, cada aplicación $\Theta_t : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo (ver Figura 8). Esto es consecuencia de que $\Theta_{-t} \circ \Theta_t = \Theta_t \circ \Theta_{-t} = \Theta_0 = \text{id}_M$.

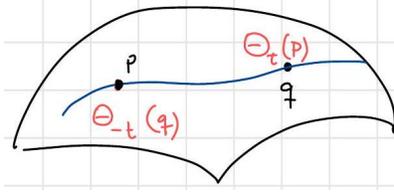


FIGURA 8. Aplicación $\Theta_t : M \rightarrow M$ inducida por un flujo.

- $\Theta_{\bullet}(p)'(t) = X_{\Theta_t(p)}$. Esto es literalmente una reescritura del hecho de que $\Theta_{\bullet}(p)$ es el flujo de X comenzando en p . En particular, para toda $f \in C^\infty(p)$, se tiene

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_t (f \circ \Theta_{\bullet}(p)) = \Theta_{\bullet}(p)'(t)(f) = X_{\Theta_t(p)}(f)$$

Observación 2.30. En ocasiones, sobre todo en la literatura física, dado un flujo Θ_t que genera una familia de difeomorfismos, al campo vectorial X del que surge se le llama el *generador infinitesimal* de Θ .

Con esta noción en la mano, dados dos campos vectoriales X e Y en M , vamos a definir la derivada de Lie de Y con respecto a X , denotada $L_X Y$. Intuitivamente, $L_X Y$ es el resultado de derivar Y en la dirección de X . Es decir, miramos cómo varía Y cuando nos movemos en la dirección de X (es decir, siguiendo el flujo de X) y tomamos la derivada de esa variación.

La formalización de esta idea geométrica es un poco engorrosa, pero como veremos, posteriormente tendremos un resultado que nos permitirá calcularla rápidamente.

Definición 2.31. Sea M una variedad diferenciable, con dos campos X e Y definidos sobre ella. Sea Θ el flujo de X . Definimos la *derivada de Lie* de Y con respecto a X como el campo vectorial $L_X Y$ en M dado por

$$(5) \quad (L_X Y)_p(f) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d_{\Theta_h(p)} \Theta_{-h} (Y_{\Theta_h(p)})(f) - Y_p(f)}{h},$$

para todo $p \in M$ y $f \in C^\infty(p)$.

Observación 2.32. Obsérvese que la expresión anterior tiene sentido porque $\Theta_{-h} : M \rightarrow M$ y, por tanto, su diferencial es

$$d_{\Theta_h(p)} \Theta_{-h} : T_{\Theta_h(p)} M \rightarrow T_{\Theta_{-h}(\Theta_h(p))} M = T_p M.$$

De este modo, como $Y_{\Theta_h(p)} \in T_{\Theta_h(p)} M$, se tiene que $d_{\Theta_h(p)} \Theta_{-h}(Y_{\Theta_h(p)}) \in T_p M$, luego tiene sentido evaluarlo en $f \in C^\infty(p)$. Además, el cociente $(d_{\Theta_h(p)} \Theta_{-h}(Y_{\Theta_h(p)})(f) - Y_p(f)) / h$ es una función de h con valores en \mathbb{R} , pues todos los campos vectoriales están evaluados. Por este motivo, tiene sentido tomar el límite cuando $h \rightarrow 0$.

Observación 2.33. Es ilustrativo comparar el paralelismo entre la definición de $L_X Y$ con la definición de derivada direccional de una función $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en la dirección de un cierto vector $v \in \mathbb{R}^n$, dada por

$$\left. \frac{\partial F}{\partial v} \right|_p = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(p + hv) - F(p)}{h}.$$

En este sentido, la expresión (5) es una generalización de esta derivada direccional donde el “flujo en línea recta” $p + hv$ es sustituido por un flujo más complejo dado por un campo vectorial X .

A pesar de que la definición de la derivada de Lie es clara, su formulación es tan compleja que parece casi imposible ser capaz de evaluarlo en ejemplos concretos. Sin embargo, gracias a la noción de corchete de Lie, es posible calcular estas derivadas de forma casi inmediata.

Definición 2.34. Sean X e Y campos vectoriales en una variedad diferenciable M . El *corchete de Lie* de X e Y es el campo vectorial $[X, Y]$ dado por

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)),$$

para $f \in C^\infty(p)$.

Observación 2.35. Obsérvese que $Y(f)$ puede entenderse como la función definida en un entorno de p dada por $q \mapsto Y_q(f)$. Es precisamente esta función la que es derivada mediante X_p en la definición del corchete de Lie.

Notación 2.36. Es muy común escribir el corchete de Lie de forma descuidada como

$$[X, Y] = XY - YX.$$

En este sentido, $[X, Y]$ puede entenderse como una suerte de conmutador de X e Y .

Obsérvese que el corchete de Lie es calculable de forma sencilla utilizando la expresión de los campos X e Y en cartas. En concreto, consideremos una carta (U, φ) alrededor de p , de modo que podamos escribir

$$X_q = \sum_{i=1}^n X_i(q) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_q, \quad Y_q = \sum_{i=1}^n Y_i(q) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_q,$$

donde $\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_q, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_q$ es la base de $T_q M$ inducida por la carta.

Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}
X_p(Y(f)) &= X_p\left(\sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}(f)\right) = \sum_{i=1}^n X_p\left(Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}(f)\right) = \sum_{i=1}^n X_p(Y_i) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p(f) + Y_i(p) X_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(f)\right) \\
&= \sum_{i=1}^n X_p(Y_i) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p(f) + Y_i(p) \left(\sum_{j=1}^n X_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(f)\right) \\
&= \sum_{i=1}^n X_p(Y_i) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p(f) + \sum_{i=1}^n Y_i(p) \sum_{j=1}^n X_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(f)\right) \\
&= \sum_{i=1}^n X_p(Y_i) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p(f) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_j(p) Y_i(p) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}\Big|_p(f).
\end{aligned}$$

Y, análogamente, se tiene

$$Y_p(X(f)) = \sum_{i=1}^n Y_p(X_i) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p(f) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_j(p) Y_i(p) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}\Big|_p(f).$$

En consecuencia, se tiene que

$$\begin{aligned}
[X, Y]_p(f) &= X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)) = \sum_{i=1}^n X_p(Y_i) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p(f) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_j(p) Y_i(p) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}\Big|_p(f) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n Y_p(X_i) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p(f) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_j(p) Y_i(p) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}\Big|_p(f) \\
&= \sum_{i=1}^n X_p(Y_i) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p(f) - \sum_{i=1}^n Y_p(X_i) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p(f) \\
&= \sum_{i=1}^n (X_p(Y_i) - Y_p(X_i)) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p(f).
\end{aligned}$$

De este modo, concluimos que la expresión de $[X, Y]_p$ en cartas es

$$[X, Y]_p = \sum_{i=1}^n (X_p(Y_i) - Y_p(X_i)) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(X_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p(Y_i) - Y_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p(X_i) \right) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p.$$

Es decir, para calcular el corchete de Lie de X e Y , simplemente hay que derivar los coeficientes de Y con respecto de X y viceversa, y restar el resultado.

La importancia del corchete de Lie viene dada por el siguiente resultado.

Teorema 2.37. *Para cualesquiera campos vectoriales X e Y en una variedad diferenciable M se tiene*

$$L_X Y = [X, Y].$$

Demostración. La demostración es simplemente un cálculo directo. Veamos para ello qué es $X_p(Y(f))$. Usando el hecho de que $\Theta_\bullet(p)$ es el flujo de X comenzando en p , tenemos

$$\begin{aligned} X_p(Y(f)) &= \Theta'_\bullet(p)(0)(Y(f)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (Y(f) \circ \Theta_\bullet(p)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Y(f) \circ \Theta_h(p) - Y(f) \circ \Theta_0(p)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Y_{\Theta_h(p)}(f) - Y_p(f)}{h}. \end{aligned}$$

Sumamos y restamos ahora $d_{\Theta_h(p)}\Theta_{-h}(Y_{\Theta_h(p)})(f)$ para obtener que

$$\begin{aligned} X_p(Y(f)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Y_{\Theta_h(p)}(f) - Y_p(f) + d_{\Theta_h(p)}\Theta_{-h}(Y_{\Theta_h(p)})(f) - d_{\Theta_h(p)}\Theta_{-h}(Y_{\Theta_h(p)})(f)}{h} \\ &= (L_X Y)_p(f) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Y_{\Theta_h(p)}(f) - d_{\Theta_h(p)}\Theta_{-h}(Y_{\Theta_h(p)})(f)}{h} \\ &= (L_X Y)_p(f) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Y_{\Theta_h(p)}(f) - Y_{\Theta_h(p)}(f \circ \Theta_{-h})}{h} \\ &= (L_X Y)_p(f) + \lim_{h \rightarrow 0} Y_{\Theta_h(p)} \left(\frac{f - (f \circ \Theta_{-h})}{h} \right) = (L_X Y)_p(f) + Y_{\Theta_0(p)} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f - (f \circ \Theta_{-h})}{h} \right). \end{aligned}$$

Ahora, si realizamos el cambio de variable $s = -h$, tenemos que

$$\begin{aligned} X_p(Y(f)) &= (L_X Y)_p(f) + Y_p \left(\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f - (f \circ \Theta_s)}{-s} \right) = (L_X Y)_p(f) + Y_p \left(\lim_{s \rightarrow 0} \frac{(f \circ \Theta_s) - f}{s} \right) \\ &= (L_X Y)_p(f) + Y_p \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \Theta_\bullet) \right) = (L_X Y)_p(f) + Y_p(X(f)), \end{aligned}$$

donde, en la última igualdad, nuevamente hemos usado que Θ es el flujo de X . De este modo, despejando tenemos que $(L_X Y)_p(f) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f))$, como queríamos demostrar. \square

3. ESPACIO COTANGENTE. FORMAS DIFERENCIABLES.

3.1. Álgebra lineal de formas alternadas. Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión finita n (más adelante, será en concreto $V = T_p M$).

Sea $\{b_1, \dots, b_n\}$ una base de V y sea $\{b_1^*, \dots, b_n^*\}$ su base dual, esto es, la base satisfaciendo

$$b_i^*(b_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Definición 3.1. Una *forma multilineal alternada de grado r* , o simplemente una *r -forma* es una aplicación

$$\omega : \overbrace{V \times V \times \dots \times V}^{r \text{ veces}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

satisfaciendo:

1. ω es *multilineal*, es decir, es lineal en cada argumento en el sentido de que

$$\omega(v_1, \dots, v_i + \lambda v'_i, \dots, v_n) = \omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \lambda \omega(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n),$$

para cualesquiera $v_1, \dots, v_n, v'_i \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. ω es *alternada*, es decir

$$\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_r) = -\omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_r),$$

para cualesquiera $v_1, \dots, v_r \in V$.

Notación 3.2. El espacio de r -formas multilineales alternadas en V se denota por $\Lambda^r V^*$. Con la suma y el producto por escalares natural, $\Lambda^r V^*$ es un \mathbb{R} -espacio vectorial.

Observación 3.3. 1. $\Lambda^1 V^* = V^*$, el espacio dual a V formado por aplicaciones lineales $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$.

2. Si hay un argumento repetido, se tiene

$$\omega(v_1, \dots, v, \dots, v, \dots, v_k) = -\omega(v_1, \dots, v, \dots, v, \dots, v_r)$$

y, por tanto, $\omega(v_1, \dots, v, \dots, v, \dots, v_r) = 0$.

3. Si $\sigma \in S_r$ es una permutación de $\{1, \dots, r\}$, entonces:

$$\omega(v_1, \dots, v_r) = \text{sign}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)})$$

donde $\text{sign}(\sigma)$ es el signo de σ , dado por

$$\text{sign}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma \text{ es un producto de un número par de trasposiciones,} \\ -1 & \text{si } \sigma \text{ es un producto de un número impar de trasposiciones.} \end{cases}$$

4. Si $r = n = \dim(V)$ y fijo una base $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ de V , entonces hay una n -forma alternada destacada, el determinante $\det_{\mathcal{B}} : V^{\times n} \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) = \det(a_{ij}) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)},$$

donde a_{ij} son las coordenadas de v_i en la base \mathcal{B} , es decir, $v_i = \sum_j a_{ij} b_j$.

Definición 3.4. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in V^*$. El *producto exterior o wedge* de $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, denotado $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \dots \wedge \alpha_r$, es la r -forma definida por

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_r(v_1, \dots, v_r) = \det(\alpha_i(v_j))_{ij} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n \alpha_i(v_{\sigma(i)}),$$

para cualesquiera $v_1, \dots, v_r \in V$.

Proposición 3.5. Sea b_1^*, \dots, b_n^* una base de V^* . Una base del espacio vectorial $\Lambda^r V^*$ es

$$\{b_{i_1}^* \wedge b_{i_2}^* \wedge \dots \wedge b_{i_r}^* \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n\}.$$

Demostración. Vamos a probar que estos vectores son linealmente independientes y que son un sistema generador. Para ello, una observación crucial será que si b_{j_1}, \dots, b_{j_r} es una colección de r vectores de la base b_1, \dots, b_n de V con $j_1 < j_2 < \dots < j_r$, entonces

$$b_{i_1}^* \wedge \dots \wedge b_{i_r}^*(b_{j_1}, \dots, b_{j_r}) = \det(b_{i_a}^*(b_{j_b})) = \begin{cases} 1 & \text{si } i_1 = j_1, \dots, i_r = j_r, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

- Linealmente independientes. Supongamos que existen $\lambda_{i_1 \dots i_r}$ tales que

$$\sum \lambda_{i_1 \dots i_r} b_{i_1}^* \wedge \dots \wedge b_{i_r}^* = 0$$

Entonces, se tiene que

$$\sum \lambda_{i_1 \dots i_r} b_{i_1}^* \wedge \dots \wedge b_{i_r}^*(b_{j_1}, \dots, b_{j_r}) = \lambda_{j_1 \dots j_r} = 0.$$

- Sistema generador. Sea $\omega \in \Lambda^r V^*$. Supongamos que ω sí fuese combinación lineal de las formas $b_{i_1}^* \wedge \dots \wedge b_{i_r}^*$, digamos

$$\omega = \sum \lambda_{i_1 \dots i_r} b_{i_1}^* \wedge \dots \wedge b_{i_r}^*$$

Entonces, un argumento similar al anterior muestra que los coeficientes son $\lambda_{i_1 \dots i_r} = \omega(b_{i_1}, \dots, b_{i_r})$. Por tanto, de poder expresarse como combinación lineal de $b_{i_1}^* \wedge \dots \wedge b_{i_r}^*$, debe ser

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \omega(b_{i_1}, \dots, b_{i_r}) b_{i_1}^* \wedge \dots \wedge b_{i_r}^*$$

Ahora bien, se tiene que, en efecto, esta igualdad es cierta porque

$$\begin{aligned} & \sum \omega(b_{i_1} \dots b_{i_r}) b_{i_1}^* \wedge \dots \wedge b_{i_r}^*(b_{\alpha_1}, \dots, b_{\alpha_r}) = \\ & = \begin{cases} 0 & \text{si algún } \alpha_j \text{ está repetido} \\ \text{sign}(\sigma) \omega(b_{\alpha_{i_1}}, \dots, b_{\alpha_{i_r}}) & \text{si } \alpha_{i_1} < \dots < \alpha_{i_r} \text{ y } \sigma(j) = i_j. \end{cases} \end{aligned}$$

Por otro lado, también se tiene

$$\omega(b_{\alpha_1}, \dots, b_{\alpha_r}) = \begin{cases} 0 & \text{si algún } \alpha_j \text{ está repetido} \\ \text{sign}(\sigma) \omega(b_{\alpha_{i_1}}, \dots, b_{\alpha_{i_r}}) & \text{si } \alpha_{i_1} < \dots < \alpha_{i_r} \text{ y } \sigma(j) = i_j. \end{cases}$$

De este modo, ambas formas coinciden en cualquier combinación de elementos de una base y, por tanto, son iguales. □

Corolario 3.6. *La dimensión de $\Lambda^r V^*$ es*

$$\dim \Lambda^r V^* = \binom{n}{r} = \frac{n!}{k!(n-r)!}.$$

Ejemplo 3.7. Tomemos $V = \mathbb{R}^3$, con la base canónica $V = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$. Tenemos así

$$V^* = \langle e_1^*, e_2^*, e_3^* \rangle, \quad e_i^*(e_j) = \delta_{ij}.$$

Una base de $\Lambda^2 V^*$ es por tanto,

$$\{e_1^* \wedge e_2^*, \quad e_1^* \wedge e_3^*, \quad e_2^* \wedge e_3^*\}$$

Estas formas actúan, por ejemplo

$$\begin{aligned} e_1^* \wedge e_3^*(e_2, e_1) &= \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \\ e_1^* \wedge e_3^*(e_1, e_3) &= \det(I_2) = 1, \\ e_1^* \wedge e_3^*(e_3, e_1) &= \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1. \end{aligned}$$

Con ω una 2-forma cualquiera, se tiene

$$\omega = \omega(e_1, e_3) e_1^* \wedge e_3^* + \omega(e_1, e_2) e_1^* \wedge e_2^* + \omega(e_2, e_3) e_2^* \wedge e_3^*$$

Observación 3.8. Como $\dim \Lambda^n V^* = \binom{n}{n} = 1$, se tiene que la única n -forma multilinear alternada es, salvo reescalado, el determinante. De hecho, se tiene que

$$b_1^* \wedge \dots \wedge b_n^* = \det_{\mathcal{B}}$$

con $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$.

Notación 3.9. Si tomamos $r = 0$, el Corolario 3.6 nos diría que $\dim \Lambda^0 V^* = 1$. Por este motivo, definiremos $\Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$.

Observación 3.10. Esta observación es para aquellos lectores que estén familiarizados con el producto tensorial de espacios vectoriales. El espacio vectorial $\Lambda^r V^*$ puede entenderse como un subespacio vectorial del producto tensorial de r copias de V^* , $\bigotimes^r V^*$. El espacio $\bigotimes^r V^*$ es precisamente el espacio de las formas r -multilineales, no necesariamente alternadas, y $\Lambda^r V^*$ son las que, además, cumplen la condición de alternancia. Obsérvese que esta observación concuerda con el Corolario 3.6, pues $\dim(\bigotimes^r V^*) = n^r \geq \dim \Lambda^r V^*$, con desigualdad estricta para $r > 1$.

En particular, para $r = 2$, de hecho tenemos que

$$V^* \otimes V^* = \Lambda^2 V^* \oplus \text{Sym}(V^*),$$

donde $\text{Sym}(V^*)$ denota las formas bilineales simétricas (i.e. $\omega(v_1, v_2) = \omega(v_2, v_1)$). Esto no es más que el hecho bien conocido de que toda forma bilineal se puede escribir como suma de su parte simétrica y su parte antisimétrica. Para $r > 2$, por contra, aparecen nuevos términos de semi-alternancia en esta descomposición.

Observación 3.11. Obsérvese que el espacio vectorial $\bigotimes^r V^*$ es naturalmente isomorfo a $\bigotimes^r V^* \otimes \mathbb{R}$. Por ese motivo, tiene sentido que para $r = 0$ tengamos simplemente $\Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$.

3.2. Formas diferenciales. Diferencial exterior.

Definición 3.12. Sea M una variedad diferenciable y $p \in M$. El espacio cotangente a M en p es:

$$T_p^* M = (T_p M)^* = \{ \alpha : T_p M \rightarrow \mathbb{R} \mid \omega \text{ lineal} \}$$

Si fijo una carta (U, φ) de M entorno a p , tengo que

$$T_p M = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\rangle$$

es una base de $T_p M$. Denotemos la base dual de $T_p^* M$ por

$$T_p^* M = \langle (dx_1)_p, \dots, (dx_n)_p \rangle$$

Se tiene que

$$(dx_i)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

En particular, una base de $\Lambda_p^r M := \Lambda^r T_p^* M$ es

$$\Lambda_p^r M = \langle dx_{i_1 p} \wedge \dots \wedge dx_{i_r p} \rangle \text{ con } 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n = \dim M.$$

Definición 3.13. Una r -forma diferencial ω en M es una colección $\{\omega_p\}_{p \in M}$ tal que, para toda carta (U, φ) de M , se tiene que

$$\omega_p = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} a_{i_1 \dots i_r}(p) dx_{i_1 p} \wedge \dots \wedge dx_{i_r p},$$

donde $a_{i_1 \dots i_r} : U \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones diferenciables.

Notación 3.14. 1. El conjunto de r -formas diferenciables en M se denota $\Omega^r(M)$. En particular, $\Omega^1(M)$ son los “campos covectoriales”.

2. Para ahorrar espacio, en ocasiones se denota $I = (i_1, \dots, i_r)$ y $dx_{I_p} = dx_{i_1 p} \wedge \dots \wedge dx_{i_r p}$. En ese caso, una forma se denota

$$\omega_p = \sum_{|I|=r} a_I(p) dx_{I_p}.$$

3. En concordancia con la Notación 3.9, definimos $\Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$, las funciones diferenciables $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Sea $F : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable con diferencial $d_p F : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$. Ésta induce una aplicación lineal

$$F^* : \Omega^r(N) \rightarrow \Omega^r(M)$$

llamado el *pullback* y dada por

$$(F^*\omega)_p(X_1, \dots, X_r) = \omega_{F(p)}(d_p F(X_1), \dots, d_p F(X_r)),$$

para $\omega \in \Omega^r(N)$ y $X_1, \dots, X_r \in T_p M$.

Observación 3.15. Esta construcción es general de álgebra lineal. Si $L : V \rightarrow W$ es una aplicación lineal, entonces tenemos un pullback $L^* : \Lambda^r W^* \rightarrow \Lambda^r V^*$ dado por $(L^*\omega)(v_1, \dots, v_r) = \omega(Lv_1, \dots, Lv_r)$.

Notación 3.16. Para una 0-forma en N , es decir, para $f \in \Omega^0(N) = C^\infty(N, \mathbb{R})$ una función $f : N \rightarrow \mathbb{R}$, definimos $F^*(f) = f \circ F \in \Omega^0(M)$.

Ejemplo 3.17. Sea $N \subseteq M$ una subvariedad con inclusión $\iota : N \hookrightarrow M$. Entonces $\iota^* : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^r(N)$ es la restricción $\iota^*(\omega) = \omega|_M$, ya que

$$(\iota^*\omega)_p(X_1, \dots, X_r) = \omega_{\iota(p)}(d_p \iota(X_1), \dots, d_p \iota(X_r)) = \omega_p(X_1 \dots X_r).$$

Vamos a ver cómo actúa el pullback en coordenadas. Supongamos que $\omega \in \Omega^r(M)$ está dada por $\omega = \sum_{i_1 \dots i_r} a_{i_1 \dots i_r} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$, entonces

$$\begin{aligned} (f^*\omega)_p(X_1 \dots X_r) &= \\ &= \sum_{i_1 \dots i_r} a_{i_1 \dots i_r}(f(p)) \left(dx_{i_1 f(p)} \wedge \dots \wedge dx_{i_r f(p)} \right) (d_p f(X_1) \dots, d_p f(X_r)) \\ &= \sum_{i_1 \dots i_r} a_{i_1 \dots i_r}(f(p)) \det(dx_{i_a}(d_p f(X_b))). \end{aligned}$$

Ejemplo 3.18. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x^2, y^2)$. Tomamos $r = 2$ y $\omega = (x^2 y) dx \wedge dy$ (ya que la base de $\Lambda^2 T_p^* \mathbb{R}^2 = \langle dx_p \wedge dy_p \rangle$).

Entonces $f^*\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$ y está dada por

$$\begin{aligned} (f^*\omega)_{(x,y)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(x,y)}, \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{(x,y)} \right) &= \omega_{(x^2, y^2)} \left(df_{(x,y)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(x,y)} \right), df_{(x,y)} \left(\frac{\partial}{\partial y} \Big|_{(x,y)} \right) \right) = \\ &= \omega_{(x^2, y^2)} \left(2x \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(x^2, y^2)}, 2y \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{(x^2, y^2)} \right) \\ &= x^4 y^2 dx \wedge dy \left(2x \frac{\partial}{\partial x}, 2y \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= x^4 y^2 \det \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} = x^4 y^2 4xy = 4x^5 y^3. \end{aligned}$$

Vamos ahora a construir una aplicación lineal

$$d : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M)$$

de gran importancia, conocida como la *diferencial exterior*.

Consideremos primero el caso $r = 0$ para el que $d : \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^1(M)$. Dada $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$, definimos $df \in \Omega^1(M)$ por

$$(df)_p(X) = X(f),$$

para $X \in T_pM$. Dicho de otro modo, df es la 1-forma “evaluar en f ”.

Observación 3.19. La notación dx_i de hecho puede interpretarse como la diferencial exterior de la función coordenada i -ésima $x_i = \hat{x}_i : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}$. En efecto, tenemos

$$(dx_i)_p(X) = X(x_i) \quad (= X(\hat{x}_i)),$$

que no es sino la i -ésima coordenada de X en la base $\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p$, como corresponde a que $(dx_1)_p, \dots, (dx_n)_p$ sea la base dual.

Vamos a escribir esta forma df en coordenadas. Fijamos una carta (U, φ) y $T_p^*M = \langle dx_1, \dots, dx_{n_p} \rangle$. Tenemos

$$df_p = a_1(p)dx_{1p} + \dots + a_n(p)dx_{np}, \quad \text{donde } a_i(p) = df_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \right) = \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p (f) = \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_{\varphi(p)} \tilde{f}.$$

Por tanto, se tiene

$$df_p = \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p (f) dx_1 + \dots + \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p (f) dx_n = \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_p dx_1 + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_p dx_n \in T_p^*M.$$

Veamos ahora la aplicación $d : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M)$ en general. Dado $\omega \in \Omega^r(M)$, localmente ésta se escribe

$$\omega = \sum_{i_1 \dots i_r} \underbrace{a_{i_1 \dots i_r}}_{C^\infty(U)} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r},$$

por lo que podemos crear $da_{i_1 \dots i_r} \in \Omega^1(M)$ y definimos

$$d\omega = \sum_{i_1 \dots i_r} da_{i_1 \dots i_r} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \in \Omega^{r+1}(M).$$

Ejemplo 3.20. Tomemos $M = \mathbb{R}^3$. Aquí, tenemos que

- $\Omega^0(\mathbb{R}^3) = C^\infty(\mathbb{R}^3)$.
- $\Omega^1(\mathbb{R}^3) = C^\infty(\mathbb{R}^3) \langle dx, dy, dz \rangle$.
- $\Omega^2(\mathbb{R}^3) = C^\infty(\mathbb{R}^3) \langle dx \wedge dy, dy \wedge dz, dz \wedge dx \rangle$.
- $\Omega^3(\mathbb{R}^3) = C^\infty(\mathbb{R}^3) \langle dx \wedge dy \wedge dz \rangle$.

Gracias a esta descripción, obsérvese que podemos identificar formas de $\Omega^1(\mathbb{R}^3)$ y $\Omega^2(\mathbb{R}^3)$ con campos vectoriales de \mathbb{R}^3 , mediante las identificaciones

$$dx \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}, \quad dy \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}, \quad dz \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z},$$

$$dx \wedge dy \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z}, \quad dy \wedge dz \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}, \quad dz \wedge dx \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}.$$

De este modo, explícitamente, el operador diferencial exterior está dado de la siguiente forma.

- $d : \Omega^0(\mathbb{R}^3) \rightarrow \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ satisface que dado $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^3) = C^\infty(\mathbb{R}^3)$, se tiene

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \sim \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z}.$$

De este modo, bajo esta identificación, df puede identificarse con el campo vectorial gradiente ∇f de f .

- $d : \Omega^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow \Omega^2(\mathbb{R}^3)$. Si $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ se escribe como $\omega = a_1(x, y, z)dx + a_2(x, y, z)dy + a_3(x, y, z)dz$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} d\omega &= da_1 \wedge dx + da_2 \wedge dy + da_3 \wedge dz = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} dx + \frac{\partial a_1}{\partial y} dy + \frac{\partial a_1}{\partial z} dz \right) \wedge dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} dx + \frac{\partial a_2}{\partial y} dy + \frac{\partial a_2}{\partial z} dz \right) \wedge dy + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x} dx + \frac{\partial a_3}{\partial y} dy + \frac{\partial a_3}{\partial z} dz \right) \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \right) dy \wedge dz. \end{aligned}$$

De este modo, bajo la identificación anterior tenemos que si identificamos $\omega \in \Omega^1(M)$ con un campo vectorial X_ω de \mathbb{R}^3 , entonces $d\omega$ se identifica con el campo vectorial rotacional de X_ω , esto es, $\nabla \times X_\omega$.

- $d : \Omega^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow \Omega^3(\mathbb{R}^3)$. Si $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ se escribe $\omega = a_1 dy \wedge dz + a_2 dz \wedge dx + a_3 dx \wedge dy$, entonces

$$\begin{aligned} d\omega &= da_1 \wedge dy \wedge dz + da_2 \wedge dz \wedge dx + da_3 \wedge dx \wedge dy \\ &= \frac{\partial a_1}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial a_2}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial a_3}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

De este modo, si identificamos $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ con un campo vectorial X_ω de \mathbb{R}^3 , entonces $d\omega \in \Omega^3(\mathbb{R}^3) \cong C^\infty(\mathbb{R}^3)$ se identifica con la divergencia de X_ω , es decir, $\nabla \cdot X_\omega$.

Obsérvese que este ejemplo funciona porque tenemos la dimensiones

$$\dim \Lambda^0 T_x^* \mathbb{R}^3 = 1, \quad \dim \Lambda^1 T_x^* \mathbb{R}^3 = 3, \quad \dim \Lambda^2 T_x^* \mathbb{R}^3 = 3, \quad \dim \Lambda^3 T_x^* \mathbb{R}^3 = 1.$$

Esto es lo que permite identificar 0-formas y 3-formas con funciones y 1-formas y 2-formas con campos vectoriales. Este es un hecho específico de \mathbb{R}^3 que no tiene análogo en dimensión superior.

Proposición 3.21. *Sea $\omega \in \Omega^r(M)$. Se tiene*

$$d(d\omega) = 0.$$

Observación 3.22. Este resultado, de gran importancia, se suele escribir sucintamente como $d^2 = 0$.

Demostración. Sea $w \in \Omega^r(M)$. Escogiendo una carta, podemos escribir localmente ω como

$$w = \sum_{i_1 \dots i_r} a_{i_1 \dots i_r} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}.$$

Entonces tenemos que

$$d\omega = \sum_{i_1 \dots i_r} \sum_j \frac{\partial a_{i_1 \dots i_r}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r},$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= \sum_{i_1, \dots, i_r} \sum_j d \left(\frac{\partial a_{i_1 \dots i_r}}{\partial x_j} \right) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_r} \sum_j \sum_k \frac{\partial^2 a_{i_1 \dots i_r}}{\partial x_j \partial x_k} dx_k \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \\ &= \sum_{i_1 \dots i_r} \underbrace{\left(\sum_{j=k} \frac{\partial^2 a_{i_1 \dots i_r}}{\partial x_j^2} dx_j \wedge dx_j \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \right)}_0 \\ &\quad + \sum_{j < k} \frac{\partial^2 a_{i_1 \dots i_r}}{\partial x_k \partial x_j} dx_k \wedge dx_j \wedge \dots \wedge dx_{i_r} + \sum_{j > k} \frac{\partial^2 a_{i_1 \dots i_r}}{\partial x_k \partial x_j} dx_k \wedge dx_j \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_r} \sum_{k < j} \left(\frac{\partial^2 a_{i_1 \dots i_r}}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial^2 a_{i_1 \dots i_r}}{\partial x_j \partial x_k} \right) dx_k \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}. \end{aligned}$$

Ahora, por el lema de Schwarz, tenemos que $\frac{\partial^2 a_{i_1 \dots i_r}}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 a_{i_1 \dots i_r}}{\partial x_j \partial x_k}$ para todo $1 \leq j, k \leq n$, lo que implica que el último término se anula y, por tanto, $d(d\omega) = 0$. \square

Observación 3.23. Tomemos nuevamente $M = \mathbb{R}^3$ y usamos las identificaciones del Ejemplo 3.20. Entonces tenemos que:

- El hecho de que $d^2 : \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^2(M)$ sea cero quiere decir que todo campo gradiente es irrotacional, i.e. $\nabla \times (\nabla f) = 0$.
- El hecho de que $d^2 : \Omega^1(M) \rightarrow \Omega^3(M)$ sea cero quiere decir que la divergencia del rotacional se anula (dicho de otro modo, todo campo rotacional es incompresible), i.e. $\nabla \cdot (\nabla \times X) = 0$.

Estudemos ahora cómo se comporta la diferencial exterior con respecto a la multiplicación de formas.

Definición 3.24. Sean $\omega_1 \in \Omega^{r_1}(M)$ y $\omega_2 \in \Omega^{r_2}(M)$. Definimos $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Omega^{r_1+r_2}(M)$ como

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)_p(x_1, \dots, x_{r_1+r_2}) = \sum_{\sigma \in S_{r_1+r_2}} \text{sign}(\sigma) \omega_1(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(r_1)}) \omega_2(x_{\sigma(r_1+1)}, \dots, x_{\sigma(r_1+r_2)}).$$

Observación 3.25. Este producto generaliza el producto de 1-formas.

Proposición 3.26. Sea $\omega_1 \in \Omega^{r_1}(M)$ y $\omega_2 \in \Omega^{r_2}(M)$. Entonces se tiene

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{r_1} \omega_1 \wedge d\omega_2.$$

Demostración. Sea $\omega_1 = \sum_{|I|=r_1} a_I dx_I$ y $\omega_2 = \sum_{|J|=r_2} b_J dx_J$. Entonces, se tiene

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \sum_{I,J} a_I b_J dx_I \wedge dx_J$$

y, por tanto,

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = \sum_{I,J} d(a_I b_J) \wedge dx_I \wedge dx_J.$$

Tenemos que $d(a_I b_J) = b_J da_I + a_I db_J$, luego

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = \sum_{I,J} \underbrace{b_J da_I \wedge dx_I \wedge dx_J}_{d\omega_1 \wedge \omega_2} + \sum_{I,J} a_I db_J \wedge dx_I \wedge dx_J.$$

Sin embargo, para el segundo término, tenemos

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge d\omega_2 &= \left(\sum_I a_I dx_I \right) \wedge \left(\sum_J db_J \wedge dx_J \right) = \sum_{I,J} a_I dx_I \wedge db_J \wedge dx_J \\ &= \sum a_I dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{r_1}} \wedge db_J \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{r_2}} = \\ &= (-1)^{r_1} \sum_{I,J} a_I db_J \wedge dx_I \wedge dx_J. \end{aligned}$$

De este modo, tenemos $\sum_{I,J} a_I db_J \wedge dx_I \wedge dx_J = (-1)^{r_1} (\omega_1 \wedge d\omega_2)$, como queríamos demostrar. \square

Observación 3.27. Si $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$ y $w \in \Omega^r(M)$, entonces

$$d(fw) = df \wedge w + f \wedge dw.$$

Corolario 3.28. La diferencial exterior

$$d : \Omega^r(M) \longrightarrow \Omega^{r+1}(M)$$

satisface:

1. Es \mathbb{R} -lineal.
2. $d^2 \equiv 0$
3. $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{r_1} \omega_1 \wedge d\omega_2$
4. $df(X) = X(f)$, para todo $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$ y X campo vectorial.

Observación 3.29. Las propiedades (1)-(4) anteriores determinan la diferencial exterior d ya que

$$\begin{aligned} d \left(\sum a_{i_1, \dots, i_r} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \right) &\stackrel{(1)}{=} \sum d(a_{i_1, \dots, i_r} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}) \\ &\stackrel{(3)}{=} \sum da_{i_1, \dots, i_r} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \pm \sum a_{i_1, \dots, i_r} d^2 x_{i_1} \wedge \dots \wedge d^2 x_{i_r} \\ &\stackrel{(2)}{=} \sum da_{i_1, \dots, i_r} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}, \end{aligned}$$

que está unívocamente determinado porque $da_{i_1, \dots, i_r} \in \Omega^1(M)$ está caracterizado por la propiedad (4).

Proposición 3.30. *Sea $F : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable con pullback $F^* : \Omega^r(N) \rightarrow \Omega^r(M)$. El diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^r(N) & \xrightarrow{F^*} & \Omega^r(M) \\ d \downarrow & & \downarrow d \\ \Omega^{r+1}(N) & \xrightarrow{F^*} & \Omega^{r+1}(M) \end{array}$$

es conmutativo. Dicho de otro modo, para todo $\omega \in \Omega^r(N)$ se tiene

$$d(F^*\omega) = F^*(d\omega).$$

Demostración. Lo demostraremos por inducción sobre el grado r .

1. Para $r = 0$. Sea $f \in \Omega^0(N)$. Quiero probar que $F^*(df) = d(F^*f)$. En efecto, para $X \in T_pM$ se tiene

$$\begin{aligned} d(F^*f)(X) &= d(f \circ F)(X) = X(f \circ F), \\ F^*(df)(X) &= (df)(d_p F X) = d_p F(X)(f) = X(f \circ F). \end{aligned}$$

2. Para $r = 1$. Consideremos una 1-forma $\omega \in \Omega^1(M)$. Localmente en cartas, tenemos que podemos escribir ω como

$$\omega = \sum_i a_i dx_i.$$

De este modo, tenemos

$$\begin{aligned} d(F^*\omega) &= dF^* \left(\sum_i a_i dx_i \right) = \sum_i d(F^*(a_i) F^*(dx_i)) = d(F^*(a_i) dF^*(x_i)) \\ &= \sum_i d(F^*(a_i)) \wedge dF^*(x_i) + F^*(a_i) d^2(F^*(x_i)) = \sum_i d(F^*(a_i)) \wedge dF^*(x_i) \\ &= \sum_i F^* da_i \wedge F^* d(x_i) = F^* \left(\sum_i da_i \wedge dx_i \right) = F^* \left(\sum_i d(a_i dx_i) \right) \\ &= F^* d \left(\sum_i a_i dx_i \right) = F^*(d\omega). \end{aligned}$$

En el cálculo anterior, en la tercera igualdad hemos usado que $F^*dx_i = d(F^*(x_i))$ por el caso $r = 0$, en la cuarta igualdad hemos usado la propiedad 3. del Corolario 3.28 y en la quinta igualdad hemos usado que $d^2 = 0$ (propiedad 2. del Corolario 3.28).

3. Caso inductivo. Supongámoslo cierto para r , y queremos demostrar para $r + 1$. Sea $\omega \in \Omega^{r+1}(N)$. Obsérvese que si $\omega = \eta \wedge \tau$ con $\eta \in \Omega^1(N)$ y $\tau \in \Omega^r(N)$, entonces el resultado en

inmediato porque

$$\begin{aligned} dF^*\omega &= d(F^*(\eta \wedge \tau)) = d(F^*\eta \wedge F^*\tau) = dF^*\eta \wedge F^*\tau - F^*\eta \wedge dF^*\tau \\ &= F^*(d\eta) \wedge F^*\tau - F^*\eta \wedge F^*(d\tau) = F^*(d\eta \wedge \tau - \eta d\tau) = F^*d(\eta \wedge \tau) = F^*d\omega. \end{aligned}$$

El caso general puede abordarse localmente usando cartas, pues cualquier $\omega \in \Omega^{r+1}(N)$ se escribe

$$\omega = \sum_{i_1 \dots i_{r+1}} \underbrace{a_{i_1 \dots i_{r+1}} dx_{i_1}}_{\eta_I} \wedge \underbrace{dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_{r+1}}}_{\tau_I} = \sum_I \eta_I \wedge \tau_I.$$

Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned} d(F^*\omega) &= d\left(\sum_I F^*(\eta_I \wedge \tau_I)\right) = \sum_I d(F^*(\eta_I \wedge \tau_I)) = \sum_I F^*(d(\eta_I \wedge \tau_I)) \\ &= F^*\left(d\sum_I (\eta_I \wedge \tau_I)\right) = F^*(d\omega). \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.31. Tomemos $M = \mathbb{R}^2$ y $F : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(\theta, r) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

Consideremos $\omega = x dx \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ y calculemos $F^*\omega$.

Usando la propiedad de la Proposición 3.30, tenemos

$$\begin{aligned} F^*(x dx) &= F^*(x) F^*(dx) = (x \circ F) d(F^*(x)) = (r \cos(\theta)) d(r \cos(\theta)) \\ &= r \cos(\theta)(-r \sin(\theta)d\theta + \cos(\theta)dr) = -r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta + r \cos^2(\theta) dr. \end{aligned}$$

4. INTEGRACIÓN EN VARIEDADES Y EL TEOREMA DE STOKES.

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $\omega \in \Omega^n(M)$. Veremos que tiene sentido hablar de $\int_M \omega \in \mathbb{R}$ ya que localmente en cartas podemos escribir $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ y definir $\int_M \omega := \int_M f dx_1 \dots dx_n$, bajo ciertas hipótesis a imponer sobre M (compacidad y orientabilidad).

4.1. Integración en \mathbb{R}^n . Orientabilidad. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Sea $\omega \in \Omega^n(U)$ y dx_1, \dots, dx_n una base de T_p^*U y, por tanto, $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ es un generador del espacio de n -formas alternadas $\Lambda^n T_p^*U$. Por tanto, podemos escribir

$$\omega = f(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

donde $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función C^∞ en U .

Definición 4.1. En las condiciones anteriores, definimos la integral de $\omega \in \Omega^n(U)$ en $U \subseteq \mathbb{R}^n$ como

$$\int_U \omega := \int_U f(x) dx_1 \cdots dx_n,$$

donde $dx_1 \cdots dx_n$ es la medida usual de Lebesgue en \mathbb{R}^n .

Proposición 4.2. Sean $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos conexos y $\Phi : V \rightarrow U$ un difeomorfismo. Entonces,

$$\int_U \omega = \pm \int_V \Phi^* \omega.$$

Demostración. Por definición, tenemos

$$\int_U \omega = \int_U f(x) dx_1 \cdots dx_n$$

Por el teorema del cambio de variables de cálculo integral en varias variables, tenemos

$$\int_U f(x) dx_1 \cdots dx_n = \int_V f \circ \Phi(y) \cdot |\det D_y(\Phi)| dy_1 \cdots dy_n,$$

donde $|\det D_y(\Phi)|$ es el valor absoluto del determinante de la matriz de derivadas parciales de Φ .

Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned} \Phi^*(\omega) &= \Phi^*(f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = \Phi^*(f) \cdot \Phi^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) \\ &= (f \circ \Phi) \cdot \det(D\Phi) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \end{aligned}$$

y por tanto, tenemos que $\int_V \Phi^*(\omega) = \pm \int_U \omega$, como queríamos demostrar. \square

Observación 4.3. El signo a escoger en la proposición anterior depende únicamente del signo de determinante de la matriz de derivadas parciales. Si $\det(D\Phi) > 0$, entonces $\int_U \omega = \int_V \Phi^* \omega$ y si $\det(D\Phi) < 0$, entonces $\int_U \omega = -\int_V \Phi^* \omega$. Obsérvese que el signo de $\det(D\Phi)$ no puede cambiar, al ser Φ un difeomorfismo (luego no puede anularse) y ser V conexo. En particular, la integral sea invariante bajo difeomorfismos si y solo si $\det(D\Phi) > 0$.

Definición 4.4. Una variedad diferenciable $M = (X, \mathcal{A})$ se dice *orientable* si existe un atlas \mathcal{A}' compatible con \mathcal{A} tal que para cualesquiera $(U_\alpha, \varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta : U_\beta \rightarrow V_\beta) \in \mathcal{A}'$ se tiene que el difeomorfismo $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n$ satisface $\det(D_x(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})) > 0$ para todo $x \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$. En ese caso, el atlas \mathcal{A}' se llama una *orientación* para M y, con esa elección, se dice que M está *orientada*.

Observación 4.5. No todas las variedades diferenciables son orientables.

Ejemplo 4.6. La esfera $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ es orientable. En efecto, usando la construcción del Ejemplo 1.6, se tiene un atlas \mathcal{A} de cuatro cartas definido sobre los abiertos

$$U_x^\pm = \{(x, y) \mid \pm x > 0\}, \quad U_y^\pm = \{(x, y) \mid \pm y > 0\}.$$

y dado por

$$\begin{array}{ll} \varphi_x^\pm : U_x^\pm & \longrightarrow V = (-1, 1) & \varphi_y^\pm : U_y^\pm & \longrightarrow V = (-1, 1) \\ (x, y) & \longmapsto y & (x, y) & \longmapsto x \\ (\pm\sqrt{1-t^2}, t) & \longleftarrow t & (t, \pm\sqrt{1-t^2}) & \longleftrightarrow t \end{array}$$

(iii) $\varphi_3 : \varphi_y^+$

(iv) $\varphi_4 : \varphi_y^-$

Si calculamos los cambios de cartas, tenemos

$$\begin{aligned}\varphi_y^+ \circ (\varphi_x^+)^{-1}(t) &= \varphi_y^+ \left(\sqrt{1-t^2}, t \right) = \sqrt{1-t^2}, \\ \varphi_y^- \circ (\varphi_x^+)^{-1}(t) &= \varphi_y^- \left(\sqrt{1-t^2}, t \right) = \sqrt{1-t^2}, \\ \varphi_y^+ \circ (\varphi_x^-)^{-1}(t) &= \varphi_y^+ \left(-\sqrt{1-t^2}, t \right) = -\sqrt{1-t^2}, \\ \varphi_y^- \circ (\varphi_x^-)^{-1}(t) &= \varphi_y^- \left(-\sqrt{1-t^2}, t \right) = -\sqrt{1-t^2}.\end{aligned}$$

De este modo, los determinantes de los cambios de cartas son

$$\begin{aligned}D_t(\varphi_y^+ \circ (\varphi_x^+)^{-1}) &= \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}, & D_t(\varphi_y^+ \circ (\varphi_x^-)^{-1}) &= \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, \\ D_t(\varphi_y^- \circ (\varphi_x^+)^{-1}) &= \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}, & D_t(\varphi_y^- \circ (\varphi_x^-)^{-1}) &= \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}.\end{aligned}$$

Para calcular su signo, obsérvese que:

- $\varphi_x^+(U_x^+ \cap U_y^+) = (0, 1)$, luego $t > 0$ y, por tanto, $D_t(\varphi_y^+ \circ (\varphi_x^+)^{-1}) < 0$.
- $\varphi_x^+(U_x^+ \cap U_y^-) = (-1, 0)$, luego $t < 0$ y, por tanto, $D_t(\varphi_y^- \circ (\varphi_x^+)^{-1}) > 0$.
- $\varphi_x^-(U_x^- \cap U_y^+) = (0, 1)$, luego $t > 0$ y, por tanto, $D_t(\varphi_y^+ \circ (\varphi_x^-)^{-1}) > 0$.
- $\varphi_x^-(U_x^- \cap U_y^-) = (-1, 0)$, luego $t < 0$ y, por tanto $D_t(\varphi_y^- \circ (\varphi_x^-)^{-1}) < 0$.

De este modo, observamos que \mathcal{A} no es un atlas orientado. Sin embargo, podemos convertirlo en un atlas orientado cambiando el signo de φ_x^- y φ_y^+ .

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\varphi}_x^- : U_x^- & \longrightarrow & V = (-1, 1) \\ (x, y) & \longmapsto & -y \\ (-\sqrt{1-t^2}, -t) & \longleftarrow & t \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \tilde{\varphi}_y^+ : U_y^+ & \longrightarrow & V = (-1, 1) \\ (x, y) & \longmapsto & -x \\ (-t, \sqrt{1-t^2}) & \longleftarrow & t \end{array}$$

Con estos cambios, el atlas

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{(U_x^+, \varphi_x^+), (U_x^-, \tilde{\varphi}_x^-), (U_y^+, \tilde{\varphi}_y^+), (U_y^-, \varphi_y^-)\}$$

define una orientación en \mathbb{S}^1 .

Ejemplo 4.7. \mathbb{S}^2 es orientable. Consideremos el atlas de \mathbb{S}^2 descrito en el Ejemplo 1.3 por

$$\mathcal{A} = \{(U_x^\pm, \varphi_x^\pm), (U_y^\pm, \varphi_y^\pm), (U_z^\pm, \varphi_z^\pm)\},$$

donde $U_x^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \mid x > 0\}$ y $\varphi_x^+ : U_x^+ \rightarrow V$ es tal que $\varphi_x^+(x, y, z) = (y, z)$, con $V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$. Tenemos que $(\varphi_x^+)^{-1}(u, v) = (\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v)$, y análogamente con el resto de cartas.

El cambio de cartas entre (U_x^+, φ_x^+) y (U_y^-, φ_y^-) es

$$\varphi_y^- \circ (\varphi_x^+)^{-1}(u, v) = \varphi_y^- \left(\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v \right) = \left(\sqrt{1-u^2-v^2}, v \right).$$

De este modo, su diferencial está dada por

$$D_{(u,v)} \left(\varphi_y^- \circ (\varphi_x^+)^{-1} \right) = \begin{pmatrix} \frac{-2u}{2\sqrt{1-u^2-v^2}} & \frac{-2v}{2\sqrt{1-u^2-v^2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y por tanto, $\det \left(D_{(u,v)} \left(\varphi_y^- \circ (\varphi_x^+)^{-1} \right) \right) = -\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}$. Como el dominio de $\varphi_y^- \circ (\varphi_x^+)^{-1}$ es el abierto $\varphi_x^+ (U_x^+ \cap U_y^-) = \varphi_x^+ (\{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \mid x > 0\}) = \{(u, v) \mid u^2 - v^2 < 1, u < 0\}$, se tiene $u < 0$ y por tanto $\det \left(D_{(u,v)} \left(\varphi_y^- \circ (\varphi_x^+)^{-1} \right) \right) > 0$.

Sin embargo, un cálculo análogo demuestra que $\det \left(D_{(u,v)} (\varphi_y^+ \cdot (\varphi_x^+)^{-1}) \right) < 0$. De hecho, al igual que en el Ejemplo 4.6, la mitad de los cambios de cartas está bien orientados y la otra mitad están mal orientados. No obstante, cambiando la orientación de la mitad de las cartas, como en el Ejemplo 4.6, podemos construir una orientación para \mathbb{S}^2 .

Ejemplo 4.8. Argumentando de forma similar en dimensión arbitraria, se tiene que \mathbb{S}^n es orientable para todo $n \geq 1$.

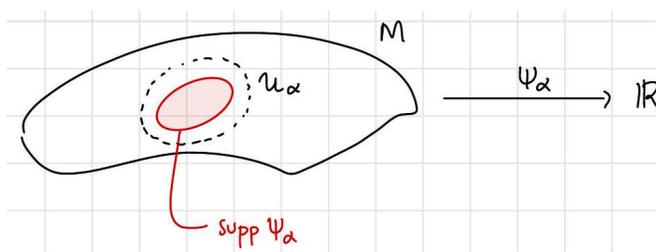
4.2. Integrando formas en variedades. Durante toda esta sección, supongamos que M es una variedad diferenciable **compacta** de dimensión n y **orientable** con orientación \mathcal{A} .

Una herramienta fundamental para la integración en M son las llamadas particiones de la unidad.

Definición 4.9. Sea M una variedad diferenciable y sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ un recubrimiento abierto de M (i.e. $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha = M$). Una *partición de la unidad* es una colección de funciones diferenciables $\psi_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ para $\alpha \in \Lambda$ tal que:

1. $\text{supp}(\psi_\alpha) \subseteq U_\alpha$, donde $\text{supp} \psi_\alpha = \overline{\{x \in M : \psi_\alpha(x) \neq 0\}}$ es el soporte de ψ .
2. Para cada $p \in M$ existe solo una cantidad finita $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, tales que $\psi_{\alpha_1}(x), \dots, \psi_{\alpha_s}(x) \neq 0$ y además

$$\sum_{i=1}^s \psi_{\alpha_i}(x) = 1.$$

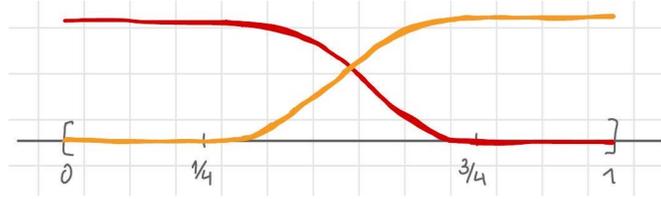


Observación 4.10. La segunda condición de la Definición 4.9 suele escribirse sucintamente como

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} \psi_\alpha(x) = 1,$$

entendiendo que, en esta suma, para cada punto hay un número finito de sumandos no nulos.

Ejemplo 4.11. Una partición de la unidad del intervalo $[0, 1]$ subordinada al recubrimiento $[0, 3/4] \cup (1/4, 1]$ es la mostrada en la Figura 9.

FIGURA 9. Partición de la unidad del intervalo $[0, 1]$

Observación 4.12. Uno de los usos más directos de las particiones de la unidad es para extender objetos definidos solo en un entorno a toda la variedad. Supongamos que $U \subseteq M$ es un abierto, que completamos a un recubrimiento $\{U_i\}_{i=0}^{\infty}$ de M con $U_0 = U$ y sea $\{\psi_i\}$ una partición de la unidad asociada al recubrimiento $\{U_i\}$.

Supongamos que X es un campo vectorial definido únicamente en U . Definimos

$$\tilde{X}_p = \begin{cases} \psi_0(p)X_p & \text{si } p \in U \\ 0 & \text{si } p \notin U. \end{cases}$$

Debido a que $\{\psi_i\}$ es una partición de la unidad, tenemos que \tilde{X} es un campo vectorial suave, que suele denotarse por $\psi_0 X$. De la misma forma, dada una r -forma $\omega \in \Omega^r(U)$, la forma $\tilde{\omega} = \psi_0 \omega$ es una extensión a todo M .

Observación 4.13. Recíprocamente, una partición de la unidad se puede usar para restringir un objeto localmente. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ un recubrimiento de M . Sea $\{\psi_\alpha\}$ una partición de la unidad y $\omega \in \Omega^r(M)$. Entonces, podemos escribir

$$\omega = 1 \cdot \omega = \left(\sum_{\alpha} \psi_{\alpha} \right) \omega = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha} \omega$$

Pero ahora el soporte de cada uno de los sumando satisface

$$\text{supp}(\psi_{\alpha} \omega) = \overline{\{p \in M : \psi_{\alpha}(p) \omega_p \neq 0\}} \subseteq \overline{\{p \in M : \psi_{\alpha}(p) \neq 0\}} = \text{supp} \psi_{\alpha} \subseteq U_{\alpha},$$

luego cada $\psi_{\alpha} \omega$ puede verse como una forma definida en U_{α} .

Teorema 4.14. *Si M es una variedad diferenciable compacta, entonces para todo recubrimiento existe una partición de la unidad subordinada.*

Observación 4.15. Si M no es compacta, el teorema sigue siendo cierto con un pequeño ajuste, y es que puede haber más funciones ψ_{β} que abiertos del recubrimiento.

Definición 4.16. Sea M una variedad diferenciable compacta de dimensión n y orientable con $\mathcal{A} = \{(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha} : U_{\alpha} \rightarrow V_{\alpha})\}$ un atlas orientado finito para M . Sea $\{\psi_{\alpha}\}$ una partición de la unidad subordinada a \mathcal{A} . Dada $\omega \in \Omega^n(M)$ definimos su integral como

$$\int_M \omega := \sum_{\alpha} \int_{V_{\alpha}} (\varphi_{\alpha}^{-1})^* \psi_{\alpha} \omega$$

Observación 4.17. ■ Como M es orientado, el atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ se puede tomar finito. De este modo, la suma anterior está bien definida.

- Como $\text{supp}(\psi_\alpha \omega) = \overline{\{p \in M : \psi_\alpha(p) \omega_p \neq 0\}} \subseteq U_\alpha$, la n -forma $(\varphi_\alpha^{-1})^* \psi_\alpha$ está definida en $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ y, por tanto, las integrales $\int_{V_\alpha} (\varphi_\alpha^{-1})^* \psi_\alpha \omega$ están bien definidas en el sentido de la Definición 4.1.

Observación 4.18. La integral $\int_M \omega$ no depende de la elección de atlas compatible orientado escogido. Supongamos que $\mathcal{A}' = \{(U'_\alpha, \varphi'_\alpha)\}$ es otro atlas compatible con \mathcal{A} y orientado igual que \mathcal{A} , es decir, satisfaciendo

$$\det D(\varphi'_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) > 0,$$

para todo $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ y $(U'_\alpha, \varphi'_\alpha) \in \mathcal{A}'$. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \int_{V_\alpha} (\varphi_\alpha^{-1})^* (\psi_\alpha \omega) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \sum_{\alpha' \in \mathcal{A}'} \int_{V_\alpha} (\varphi_\alpha^{-1})^* (\psi_{\alpha'} \psi_\alpha \omega) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \sum_{\alpha' \in \mathcal{A}'} \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U'_{\alpha'})} (\varphi_\alpha^{-1})^* (\psi_\alpha \psi_{\alpha'} \omega) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \sum_{\alpha' \in \mathcal{A}'} \int_{\varphi'_{\alpha'}(U_\alpha \cap U'_{\alpha'})} (\varphi_\alpha \circ \varphi'_{\alpha'}{}^{-1})^* (\varphi_\alpha^{-1})^* (\psi_\alpha \psi_{\alpha'} \omega) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \sum_{\alpha' \in \mathcal{A}'} \int_{\varphi'_{\alpha'}(U_\alpha \cap U'_{\alpha'})} (\varphi'_{\alpha'}{}^{-1})^* (\psi_\alpha \psi_{\alpha'} \omega) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \sum_{\alpha' \in \mathcal{A}'} \int_{V'_{\alpha'}} (\varphi'_{\alpha'}{}^{-1})^* (\psi_\alpha \psi_{\alpha'} \omega) = \sum_{\alpha' \in \mathcal{A}'} \int_{V'_{\alpha'}} (\varphi'_{\alpha'}{}^{-1})^* (\psi_{\alpha'} \omega). \end{aligned}$$

Sean M y N variedades diferenciables y sea $F : M \rightarrow N$ un difeomorfismo. Obsérvese que si $\mathcal{A}' = \{(U', \varphi')\}$ es un atlas para N , entonces el conjunto

$$F^*(\mathcal{A}') := \{(F^{-1}(U'), \varphi' \circ F)\}$$

también forma un atlas para M .

Definición 4.19. Sean M y N variedades orientadas con atlas orientados \mathcal{A} y \mathcal{A}' , respectivamente. Un difeomorfismo $F : M \rightarrow N$ se dice que *preserva la orientación* si $F^*(\mathcal{A}')$ es un atlas de M con la misma orientación que \mathcal{A} . En caso contrario, se dice que F *invierte* la orientación.

Proposición 4.20. *La integral de formas es invariante bajo difeomorfismos que preservan la orientación, es decir, si $F : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo que preserva la orientación, entonces*

$$\int_N \omega = \int_M F^* \omega$$

para toda $\omega \in \Omega^n(N)$.

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \{U_\alpha\}$ un atlas orientado para N , con partición de la unidad subordinada $\{\psi_\alpha\}$. Obsérvese que, como $F : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo que preserva la orientación, entonces $\varphi_\alpha \circ F : F^{-1}(U_\alpha) \rightarrow V_\alpha$ también es un difeomorfismo que preserva la orientación. Se tiene así,

$$\begin{aligned} \int_N \omega &= \int_N 1 \cdot \omega = \int_N \sum_\alpha \psi_\alpha \omega = \sum_\alpha \int_N \psi_\alpha \omega = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \int_{V_\alpha} (\varphi_\alpha^{-1})^* (\psi_\alpha \omega) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \int_{F^{-1}(U_\alpha)} (\varphi_\alpha \circ F)^* (\varphi_\alpha^{-1})^* (\psi_\alpha \omega) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \int_{F^{-1}(U_\alpha)} (\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha \circ F)^* (\psi_\alpha \omega) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \int_{F^{-1}(U_\alpha)} F^* (\psi_\alpha \omega) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \int_M (\psi_\alpha \circ F) F^* \omega = \int_M \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} (\psi_\alpha \circ F) F^* \omega = \int_M F^* \omega, \end{aligned}$$

donde, en la última igualdad, hemos usado que $\{(\psi_\alpha \circ F)\}$ es una partición de la unidad para M . \square

Observación 4.21. Si $F : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo que invierte la orientación entre variedades conexas, entonces la misma demostración prueba que

$$\int_N \omega = - \int_M F^* \omega.$$

Ejemplo 4.22. Consideremos la 1-forma $\omega = -ydx + xdy$ en $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$. Tomamos la parametrización

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : (0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{S}^1 - \{(1, 0)\} \\ \theta &\longmapsto (\cos \theta, \sin \theta) \end{aligned}$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^1} \omega &= \int_{(0, 2\pi)} (\varphi^{-1})^* \omega = \int_{(0, 2\pi)} (\varphi^{-1})^* yd(\varphi^{-1})^* x + (\varphi^{-1})^* xd(\varphi^{-1})^* y \\ &= \int_{(0, 2\pi)} -\sin \theta d(\cos \theta) + \cos \theta d(\sin \theta) = \int_{(0, 2\pi)} \sin^2 \theta d\theta + \cos^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

4.3. Otro vistazo a la orientabilidad.

Definición 4.23. Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial. Sea \mathcal{B} el conjunto de bases de V . Definimos la relación de equivalencia \sim dada por

$$\{b_1, \dots, b_n\} \sim \{b'_1, \dots, b'_n\} \text{ si y solo si } \det(a_{ij}) > 0,$$

donde (a_{ij}) es la matriz cambio de base entre $\{b_i\}$ y $\{b'_i\}$. Si $\{b_i\} \sim \{b'_i\}$ se dice que tienen la misma orientación.

Observación 4.24. El conjunto cociente \mathcal{B}/\sim tiene exactamente dos elementos. En efecto, dado $(b_1, \dots, b_n) \in \mathcal{B}/\sim$ se tiene que $(-b_1, b_2, \dots, b_n) \notin (b_1, b_2, \dots, b_n)$ ya que la matriz de cambio de

base es

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} = -1.$$

De este modo $|\mathcal{B}/\sim| \geq 2$. Sea ahora (b'_1, \dots, b'_n) otra base de V , $b'_i = \sum a_{ij}b_j$, entonces

$$\det(a_{ij}) = \begin{cases} > 0 \Rightarrow (b'_1, \dots, b'_n) \sim (b_1, \dots, b_n), \\ < 0 \Rightarrow (b'_1, \dots, b'_n) \sim (-b_1, b_2, \dots, b_n). \end{cases}$$

Lo que prueba que, en efecto $|\mathcal{B}/\sim| = 2$.

Definición 4.25. Sea M una variedad diferenciable. Una *orientación* para M es una colección suave $\{\theta_p\}_{p \in M}$ tal que θ_p es una orientación de T_pM , es decir, $\theta_p \in B_{T_pM}/\sim$ para todo $p \in M$.

En la definición anterior, suave significa que para todo $p \in M$ existe un entorno $U \subseteq M$ de p y campos vectoriales X_1, \dots, X_n en U tales que:

- (X_{1q}, \dots, X_{nq}) es una base de T_qM para todo $q \in U$.
- $(\overline{X_{1q}, \dots, X_{nq}}) = \theta_q$ para todo $q \in U$.

Teorema 4.26. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n . Los siguientes son equivalentes:

1. Dar una orientación $\{\theta_p\}_{p \in M}$ para M .
2. Dar un atlas \mathcal{A}' compatible y orientado (i.e. con $\det D(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) > 0$).
3. Dar una $\omega \in \Omega^n(M)$ nunca nula, es decir, tal que $\omega_p \neq 0$ para todo $p \in M$.

Demostración. (1) \implies (2): Sea $\mathcal{A} = \{(U, \varphi)\}$ el atlas de M . Para todo $p \in U$ tenemos una base inducida por la carta

$$T_pM = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\rangle.$$

Vamos a definir un atlas \mathcal{A}' compatible y orientado de la siguiente forma. Tenemos dos posibilidades:

- Si $(\overline{\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p}) = \theta_p$, entonces $(U, \varphi) \in \mathcal{A}'$
- Si $(\overline{\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p}) \neq \theta_p$, consideremos la aplicación $i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $i(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, \dots, x_n)$, entonces $(U, \varphi') = (U, i \circ \varphi) \in \mathcal{A}'$. Es fácil comprobar que, para esta nueva carta, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x'_1} \Big|_p = - \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x'_2} \Big|_p = \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x'_n} \Big|_p = \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p.$$

Con esta definición, es inmediato comprobar que \mathcal{A}' es compatible y orientado.

(2) \implies (3): Sea $\{\psi_\alpha\}$ una partición de la unidad subordinada a \mathcal{A}' . Dada $(U_\alpha, \varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha) \in \mathcal{A}'$, consideremos la n -forma en V_α

$$\omega_\alpha = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Tenemos que $\varphi_\alpha^*(\omega_\alpha) \in \Omega^n(U_\alpha)$ es nunca nula y, por tanto

$$\omega = \sum_\alpha \psi_\alpha \varphi_\alpha^*(\omega_\alpha) \in \Omega^n(M)$$

es también nunca nula.

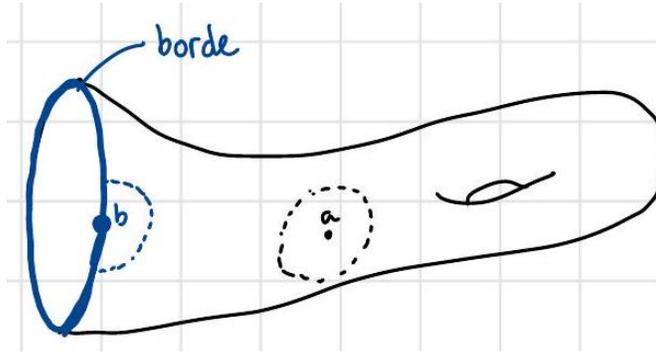
(3) \implies (1): Si $\omega_p \in \Omega^n(M)$ es nunca nula, decretamos que una base X_1, \dots, X_n de $T_p M$ está orientada (i.e. $\overline{(X_1 \dots X_n)} = \theta_p$) si y solo si $\omega_p(X_1 \dots X_n) > 0$. \square

4.4. Teorema de Stokes.

Definición 4.27. Un espacio topológico M se dice *variedad topológica con borde* si M es Hausdorff y segundo axioma de separabilidad y además para todo $p \in M$ existe un entorno homeomorfo a una de las siguientes dos opciones:

- (a) Un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^n$.
- (b) Un abierto $V \subseteq \mathbb{H}^n = \{(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$ con $V \cap \{x_1 = 0\} \neq \emptyset$.

Además, si fijamos un atlas cuyos cambios de carta son C^∞ , se dice que M es una *variedad diferenciable con borde*.



A los puntos que verifiquen (a), los llamaremos *puntos interiores*; a los que cumplan (b), los llamaremos *puntos de borde*.

Observación 4.28. Observación, para un mismo punto no se puede cumplir (a) y (b) simultáneamente ya que \mathbb{H}^n y \mathbb{R}^n no son homeomorfos, pues \mathbb{H}^n tiene frontera topológica y \mathbb{R}^n no.

Notación 4.29. El conjunto de puntos de borde de una variedad con borde M se denota ∂M .

Observación 4.30. La noción de diferenciable en el contexto con borde requiere una pequeña aclaración, pues no está claro qué significa la diferenciable cuando el dominio no es un abierto de \mathbb{R}^n .

Consideremos una función $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ donde $U \subseteq \mathbb{H}^n$ es un abierto de \mathbb{H}^n . En cualquier punto $x \notin \mathbb{H}^n \cap \{x_1 = 0\}$, podemos tomar un entorno abierto de \mathbb{R}^n contenido en U y, por tanto, la noción de diferenciabilidad es la usual. Sin embargo, si $x \in \mathbb{H}^n \cap \{x_1 = 0\}$, entonces no existe ningún entorno abierto de \mathbb{R}^n contenido en \mathbb{H}^n . En ese caso, diremos que F es C^∞ en x si puede extenderse a una función C^∞ en un abierto de \mathbb{R}^n alrededor de x . Explícitamente, esto quiere decir que exista un abierto $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ alrededor de p y una función C^∞ (en el sentido usual) $\tilde{F} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\tilde{F}(y) = F(y)$ para todo $y \in \tilde{U} \cap U$.

Puede comprobarse que esta propiedad resulta equivalente a pedir que las derivadas parciales de cualquier orden de F en p a lo largo de las direcciones “interiores” (es decir, las derivadas parciales respecto a x_2, \dots, x_n , así como respecto a x_1 por la derecha) existan y sean continuas. Esto se debe al hecho de que las derivadas direccionales en las direcciones “exteriores” están unívocamente determinadas por las direcciones interiores. En efecto, dado un vector $v \in \mathbb{R}^n$, o bien v o $-v$ pertenece a \mathbb{H}^n , y se debe cumplir $\frac{\partial}{\partial v} \Big|_p = - \frac{\partial}{\partial(-v)} \Big|_p$.

Esta definición de diferenciabilidad en un punto del borde de \mathbb{H}^n se traduce automáticamente a la variedad con borde. En particular, dada una variedad M con borde de dimensión n , se tiene:

- Los cambios de carta $\varphi' \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U') \subseteq \mathbb{H}^n \rightarrow \varphi'(U \cap U') \subseteq \mathbb{H}^n$ entre dos cartas (U, φ) y (U', φ') son C^∞ si se extienden a una función C^∞ en un abierto de \mathbb{R}^n .
- Una función $F : M \rightarrow N$ entre variedades diferenciables con borde es diferenciable si en cartas $\varphi' \circ F \circ \varphi$ se extiende a una función C^∞ en un abierto. Identicas definiciones de inmersión y encaje aplican en este contexto.
- El anillo $C^\infty(p)$ de funciones diferenciables en un entorno de $p \in M$ es el conjunto de funciones $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definidas en un abierto $V \subseteq M$ tal que $f \circ \varphi : \varphi(U \cap V) \rightarrow \mathbb{R}$ se extiende a una función C^∞ en un abierto de \mathbb{R}^n , para toda carta (U, φ) .
- Con las definiciones anteriores, el espacio tangente $T_p M$ es igualmente el espacio de derivaciones en $C^\infty(p)$, tanto para puntos interiores como para puntos de borde. Obsérvese que, nuevamente, fijada una carta (U, φ) alrededor de $p \in M$, se tiene una base inducida de $T_p M$ dada por las derivadas parciales

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p.$$

En particular, $\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p$ es una derivación que tiene sentido en $p \in \partial M$, puesto que estamos derivando funciones extensibles diferenciablemente a un abierto entorno a p . Este vector “apunta” hacia dentro de la variedad, mientras que $-\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p$ apunta hacia “el exterior”.

- De igual forma, la diferencial $d_p F : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ de una aplicación diferenciable $F : M \rightarrow N$ se define exactamente igual que en el caso sin borde, puesto que $T_p M$ es el mismo, mediante $d_p F(X)(f) = X(F \circ f)$ para $X \in T_p M$ y $f \in C^\infty(p)$.
- Análogamente, las formas multilineales alternadas y las formas diferenciables en M se definen de forma idéntica al caso sin borde.

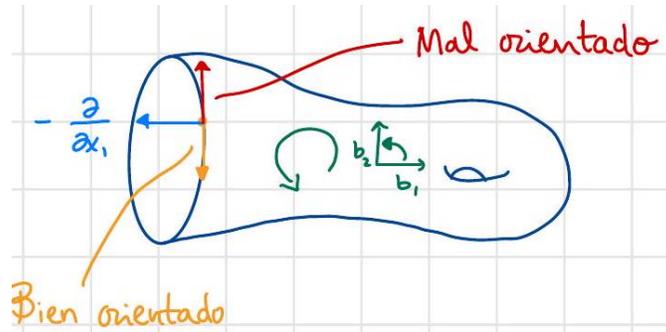
Una observación importante es que el borde ∂M de una variedad con borde M es una subvariedad regular de M . En efecto, vamos a construir un atlas para ∂M . Sea \mathcal{A} un atlas para M y consideramos

$$\mathcal{A}|_{\partial M} = \{(U \cap \partial M, \varphi|_{\partial M}) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{A}, U \cap \partial M \neq \emptyset\}$$

Explícitamente, la carta es $\varphi|_{\partial M} : U \cap \partial M \rightarrow V \cap \{x_1 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$. En particular, se deduce que $\dim(\partial M) = \dim(M) - 1$. Este atlas se conoce como el *atlas restricción*.

Observación 4.31. ∂M es una subvariedad sin borde.

Más aún, si M está orientada, entonces ∂M hereda una orientación natural. En efecto, sea $p \in \partial M$ y consideramos una carta orientada $\varphi : U \subseteq M \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ de M alrededor de p que induce una base orientada $\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p$ de $T_p M$. Entonces, decretamos que una base (X_1, \dots, X_{n-1}) de $T_p \partial M$ está orientada positivamente si y solo si la base de $T_p M$ dada por $\left(-\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, X_1, \dots, X_{n-1} \right)$ está orientada positivamente. Esta orientación se conoce como *orientación por normal exterior* y es la que consideraremos para ∂M en este capítulo.



Obsérvese que, en tanto que las nociones de orientabilidad y formas diferenciales se trasladan verbatim a este contexto con borde, es posible desarrollar una teoría de integración de n -formas para variedades orientables compactas con borde de forma totalmente análoga al caso sin borde.

Sin embargo, en el contexto con borde aparece un teorema de integración fundamental que relaciona las integrales en el interior de la variedad con las integrales en el borde. Como veremos, este teorema tiene consecuencias enormemente relevantes y generaliza de forma espectacular a los teoremas de Green, Stokes y Gauss de cálculo integral al contexto de variedades diferenciables. No obstante, como buen resultado fundamental, una vez que hemos desarrollado las herramientas apropiadas, su demostración es muy simple pues, como veremos, no es más que una aplicación iterada del teorema fundamental del cálculo.

Teorema 4.32 (Stokes). *Sea M una variedad diferenciable con borde compacta y orientada de dimensión n . Para toda $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ se tiene.*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \iota^* \omega,$$

donde $\iota : \partial M \hookrightarrow M$ es la inclusión.

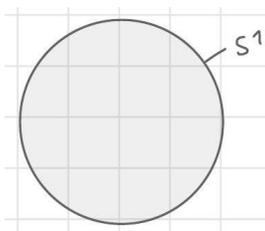
Observación 4.33. Recuérdese que, como ι es la inclusión, $\iota^*\omega \in \partial M$ es simplemente la restricción de la forma ω . En particular, el teorema de Stokes en ocasiones se enuncia como

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega|_{\partial M},$$

o incluso simplemente

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Ejemplo 4.34. Consideremos la variedad con borde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Se tiene que su borde es $\partial M = \mathbb{S}^1$



Tomemos $\omega = -ydx + xdy \in \Omega^1(M)$. Se tiene que $d\omega = 2dx \wedge dy$ y, por tanto

$$\int_M d\omega = 2 \int_M dx \wedge dy = 2 \int_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} dx dy = 2\pi,$$

donde en la última igualdad hemos usado que el área del disco unidad es π .

Ahora, si tomamos la parametrización $\varphi^{-1} : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{S}^1 - \{(1, 0)\}$, $\varphi^{-1}(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$, tenemos que $(\varphi^{-1})^* \omega = d\theta$ y, por tanto

$$\int_{\mathbb{S}^1} \omega = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi,$$

como predice el teorema de Stokes.

Observación 4.35. Como prometimos, el teorema de Stokes generaliza a los teoremas clásicos de cálculo integral. En efecto, gracias al Ejemplo 3.20, tenemos:

- Si $U \subseteq \mathbb{R}^2$ es un dominio de \mathbb{R}^2 con frontera suave, entonces en particular U es una variedad diferenciable con borde de dimensión 2. Para una 1-forma $\omega = P dx + Q dy$, tenemos que

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy,$$

y, por tanto, el teorema de Stokes dice

$$\int_U \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_U d\omega = \int_{\partial U} \omega = \int_{\partial U} P dx + Q dy,$$

que es el teorema de Green.

- Si $U \subseteq \mathbb{R}^3$ es un dominio de \mathbb{R}^3 con frontera suave, entonces en particular U es una variedad diferenciable con borde de dimensión 3. Si $\omega \in \Omega^2(U)$ es una 2-forma en U , por el Ejemplo 3.20, tenemos que ω puede identificarse con un campo vectorial X_ω en U , mientras que $d\omega$ se identifica con la divergencia $\nabla \cdot X_\omega$ de X_ω . Así, el teorema de Stokes implica

$$\int_U \nabla \cdot X_\omega = \int_U d\omega = \int_{\partial U} \omega = \int_{\partial U} X_\omega,$$

que es el teorema de la divergencia de Gauss.

- Si $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie regular de \mathbb{R}^3 con borde, i.e. una subvariedad regular de dimensión 2, dada $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ es una 1-forma en \mathbb{R}^3 , por el Ejemplo 3.20, tenemos que ω puede identificarse con un campo vectorial X_ω en \mathbb{R}^3 , mientras que $d\omega$ se identifica con el rotacional $\nabla \times X_\omega$ de X_ω . Así, si $\gamma = \partial S$ es la curva borde de S , el teorema de Stokes implica

$$\int_S \nabla \times X_\omega = \int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega = \int_\gamma X_\omega,$$

que es el teorema de Stokes clásico.

4.5. Demostración del teorema de Stokes. Como veremos, la prueba del teorema de Stokes es en realidad una aplicación inteligente del teorema fundamental del cálculo. Para ello, necesitamos entender las integrales en dos situaciones distintas: en cartas en el interior de M y en cartas en el borde ∂M .

Comportamiento en el interior. Para iniciar el estudio en el interior de la variedad, comenzamos con un lema sencillo consecuencia directa del teorema fundamental del cálculo y el teorema de Fubini.

Lema 4.36. *Sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable con soporte compacto contenido en V . Entonces, para todo $1 \leq i \leq n$ se tiene*

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_n = 0.$$

Demostración. Como f tiene soporte compacto en V , podemos extender la integral a todo \mathbb{R}^n sin alterar el resultado. Así, por el teorema de Fubini y el teorema fundamental del cálculo tenemos

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_n &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) d\bar{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (f(b_{\bar{x}}, \bar{x}) - f(a_{\bar{x}}, \bar{x})) d\bar{x} = 0. \end{aligned}$$

Aquí, $a_{\bar{x}} < b_{\bar{x}}$ son tales que los puntos $(x_1, \dots, x_{i-1}, a_{\bar{x}}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ y $(x_1, \dots, x_{i-1}, b_{\bar{x}}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ no pertenecen al soporte de f . \square

Corolario 4.37. *Para todo abierto $V \subseteq \mathbb{R}^n$ y toda $\omega \in \Omega^{n-1}(V)$ con soporte compacto se tiene*

$$\int_V d\omega = 0.$$

Demostración. Recuérdese que V se entiende como una variedad diferenciable con la carta identidad $\text{Id} : V \rightarrow V$, de modo que podemos usar como partición de la unidad $\psi(x) \equiv 1$. Escribamos

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n,$$

donde \widehat{dx}_i denota que la 1-forma dx_i no está presente en el producto alternado. Entonces tenemos

$$d\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

De este modo, obtenemos

$$\int_V d\omega = \int_V \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \int_V \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_n = 0,$$

donde la última igualdad se sigue del Lema 4.36. \square

Comportamiento en el borde. Recordemos que denotamos por $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$ al hemi-espacio superior de \mathbb{R}^n , con frontera $\partial\mathbb{H}^n = \{(0, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$. Argumentando de forma completamente análoga al Lema 4.36, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.38. *Sea $V \subseteq \mathbb{H}^n$ un abierto y $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable con soporte compacto contenido en V . Entonces, para todo $i \geq 2$ se tiene*

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_n = 0.$$

Obsérvese que, en el cálculo anterior, es esencial que $i \geq 2$. Por contraposición, en el caso $i = 1$ la integral no se anulará por completo, sino que obtenemos una contribución por el término de borde.

Lema 4.39. *Sea $V \subseteq \mathbb{H}^n$ un abierto y $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable con soporte compacto contenido en V . Sea $V' = \pi(V)$ donde $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ es la proyección $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_2, \dots, x_n)$. Entonces, para todo $i \geq 2$ se tiene*

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \dots dx_n = - \int_{V'} f(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n.$$

Demostración. La demostración es repetir la prueba teniendo en cuenta que, ahora, f no tiene por qué anularse en el borde.

Nuevamente, en tanto que el soporte de f es compacto y contenido en V , por el teorema de Fubini y el teorema fundamental del cálculo tenemos

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \dots dx_n &= \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \right) d\bar{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \lim_{b \rightarrow \infty} (f(b, \bar{x}) - f(0, \bar{x})) d\bar{x} = - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(0, \bar{x}) d\bar{x} = - \int_{V'} f(0, \bar{x}) d\bar{x}, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. \square

Consideremos un abierto $V \subseteq \mathbb{H}^n$. Podemos ver a V como una variedad diferenciable con borde cuyo atlas diferenciable contiene una única carta $\text{Id} : V \rightarrow V$. El borde de esta variedad es precisamente $\partial V = V \cap \partial \mathbb{H}^n = \{(0, x_2, \dots, x_n) \in V\}$. Usando el resultado anterior tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.40. *Para todo abierto $V \subseteq \mathbb{H}^n$ y toda $\omega \in \Omega^{n-1}(V)$ con soporte compacto se tiene*

$$\int_V d\omega = - \int_{\overline{\partial V}} \omega|_{\partial V},$$

donde $\overline{\partial V}$ denota la orientación contraria a la orientación natural que hereda ∂V por el criterio de la normal exterior.

Demostración. Al igual que en la demostración del Corolario 4.37, escribimos

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n, \quad d\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

De este modo, tenemos

$$\begin{aligned} \int_V d\omega &= \int_V \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \int_V \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_V \frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 \dots dx_n = - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} a_1(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n, \end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad hemos usado el Corolario 4.38 y en la última el Lema 4.39.

Ahora bien, resulta que el lado derecho de esta igualdad (con el signo menos) coincide exactamente con la integral en el borde $\int_{\partial V} \omega|_{\partial V}$, orientado con el criterio de la normal exterior. Para comprobarlo, en primer lugar obsérvese que si $\iota : \partial V \rightarrow V$ es la inclusión, tenemos

$$\iota^* \omega = \sum_{i=1}^n \iota^*(a_i) \iota^*(dx_1) \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge \iota^*(dx_n) = a_1(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Aquí, hemos usado que $\iota^* dx_1 = d\iota^* x_1 = d(x_1 \circ \iota) = d0 = 0$ y $\iota^* dx_i = d\iota^* x_i = dx_i$ para $i \geq 2$.

En segundo lugar, recuérdese que la carta inducida por la restricción $\text{Id}|_{\partial V} : \partial V \rightarrow V'$ está negativamente orientada pues, en base al criterio de la normal exterior, la base $\left. \frac{\partial}{\partial x_2} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p$ de $T_p \partial V$ está positivamente orientada si y solo si la base $-\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x_2} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p$ de $T_p V$ está positivamente orientada, que no lo está. Así, si $\overline{\partial V}$ denota a ∂V pero con la orientación contraria a la inducida por el criterio de la normal exterior, tenemos que

$$\int_{\overline{\partial V}} \iota^* \omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} a_1(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n.$$

Juntando (4.40) y (4.40), se sigue la demostración. \square

Demostración del Teorema de Stokes. Sea $\mathcal{A} = \{(U, \varphi : U \rightarrow V)\}$ el atlas orientado para M y sea $\{\psi_U\}$ la partición de la unidad de M asociada a este recubrimiento. Descomponemos el atlas \mathcal{A} en los subconjuntos

$$\mathcal{A}_{\text{Int}} = \{(U, \varphi) \in \mathcal{A} \mid U \cap \partial M = \emptyset\}, \quad \mathcal{A}_{\partial M} = \{(U, \varphi) \in \mathcal{A} \mid U \cap \partial M \neq \emptyset\}.$$

De este modo, tenemos

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \sum_{(U, \varphi) \in \mathcal{A}} \int_M d(\psi_U \omega) = \sum_{(U, \varphi) \in \mathcal{A}_{\text{Int}}} \int_M d(\psi_U \omega) + \sum_{(U, \varphi) \in \mathcal{A}_{\partial M}} \int_M d(\psi_U \omega) \\ &= \sum_{(U, \varphi) \in \mathcal{A}_{\text{Int}}} \int_V (\varphi^{-1})^* d(\psi_U \omega) + \sum_{(U, \varphi) \in \mathcal{A}_{\partial M}} \int_V (\varphi^{-1})^* d(\psi_U \omega). \end{aligned}$$

La primera suma se anula por el Corolario 4.37. Por contra, usando el Corolario 4.40 en la segunda suma, tenemos

$$\sum_{(U, \varphi) \in \mathcal{A}_{\partial M}} \int_V (\varphi^{-1})^* (d(\psi_U \omega)) = \sum_{(U, \varphi) \in \mathcal{A}_{\partial M}} \int_V d((\varphi^{-1})^*(\psi_U \omega)) = - \sum_{(U, \varphi) \in \mathcal{A}_{\partial M}} \int_{\partial V} \iota_{\partial V}^* ((\varphi^{-1})^*(\psi_U \omega)),$$

donde $\iota_{\partial V} : \partial V \hookrightarrow V$ es la inclusión. Ahora bien, al igual que en el Corolario 4.40, la colección $\mathcal{A}_{\partial M} = \{(U \cap \partial M, \varphi|_{\partial M} : U \cap \partial M \rightarrow \partial V)\}$ es un atlas para ∂M negativamente orientado o, dicho de otro modo, es un atlas positivamente orientado para $\overline{\partial M}$, la orientación contraria en ∂M a la inducida por el criterio de la normal exterior. Además, obsérvese que $\varphi \circ \iota = \iota_{\partial V} \circ \varphi|_{\partial M}$, con $\iota : \partial M \hookrightarrow M$ la inclusión. En consecuencia, tenemos

$$\begin{aligned} - \sum_{(U, \varphi) \in \mathcal{A}_{\partial M}} \int_{\partial V} (\varphi^{-1} \circ \iota_{\partial V})^* (\psi_U \omega) &= - \sum_{(U, \varphi) \in \mathcal{A}_{\partial M}} \int_{\partial V} (\iota \circ \varphi|_{\partial M}^{-1})^* (\psi_U \omega) \\ &= - \sum_{(U, \varphi) \in \mathcal{A}_{\partial M}} \int_{\partial V} (\varphi|_{\partial M}^{-1})^* (\iota^* \psi_U \omega) = - \int_{\overline{\partial M}} \iota^* \omega = \int_{\partial M} \iota^* \omega, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. \square

REFERENCIAS

Variedades diferenciables y geometría diferencial

- [1] Boothby, W. M. An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry. Academic press (1986).
- [2] Do Carmo, M. P. Riemannian geometry (Vol. 6). Boston: Birkhäuser (1992).
- [3] Gamboa, J.M., Ruiz, J.M. Introducción al estudio de las variedades diferenciables. Sanz y Torres, Madrid (2020).
- [4] Lang, S. Fundamentals of differential geometry Vol. 191 (2012). Springer Science & Business Media.
- [5] Lee, J. M. Introduction to Smooth Manifolds. Springer Science & Business Media (2003).
- [6] Nakahara, M. Geometry, topology and physics. CRC press (2018).
- [7] Spivak, M. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 1, 3rd Edition. Publish or Perish. Inc., Berkeley, 2 (1999).

Prerrequisitos: Topología

- [1] Armstrong, M. A. Basic Topology. Springer (1983).

- [2] Jänich, K. Topology. Springer (1984).
- [3] Munkres, J. R. Topology. Prentice Hall (2000).

Prerrequisitos: Cálculo diferencial e integral

- [1] Apostol, T. M. Calculus, Volume 2. John Wiley & Sons (1969).
- [2] Marsden, J. E., Hoffman, M. J. Elementary Classical Analysis, 2nd Edition. Editorial: W. H. Freeman (1993).
- [3] M. Spivak. Calculus On Manifolds: A Modern Approach To Classical Theorems Of Advanced Calculus. CRC Press (1965).

Prerrequisitos: Álgebra lineal

- [1] Axler, S. Linear algebra done right. Springer Nature (2023).
- [2] Castellet, M., & Llerena, I. Álgebra lineal y geometría. Reverté (2020).
- [3] Strang, G. Introduction to linear algebra. Wellesley-Cambridge Press (2022).

Para saber más

- [1] Bredon, G. E. Topology and Geometry. Springer GTM 139 (1993).
- [2] Bott, R., Tu, L. W. Differential Forms in Algebraic Topology (1995).
- [3] Hatcher, A. Algebraic Topology. Cambridge University Press (2002).
- [4] Milnor, J. Morse Theory. Annals of Math Studies 51. Princeton University Press (1963).
- [5] Milnor, J. Topology from the Differentiable Viewpoint (1965).
- [6] Kosinski, A. A. Differential Manifolds. Academic Press (1993).