UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

**Variedades diferenciables**
Examen Final

Fecha: 13/01/2023

Apellidos y Nombre: ______________________

DNI/NIE: ______________________

Grado: ______________________

> Todas las respuestas deben estar debidamente **justificadas y detalladas**.
> No podrá utilizarse ningún material de apoyo. Únicamente se permitirá el uso auxiliar de una calculadora no programable.
> No se podrá abandonar el examen hasta trascurridos 30 minutos desde su inicio.
> La puntuación máxima del examen es **10 puntos**.
> El examen tiene una duración máxima de **3 horas**.

1. **(7.5 puntos)** Consideremos el conjunto

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z\right\}.$$

(a) **(0.5 puntos)** Demostrar que $M$ es una subvariedad regular de $\mathbb{R}^3$.

**Solución:** Si definimos $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mediante $f(x, y, z) = x^2+y^2-z$, tenemos que $M = f^{-1}(0)$. Como además

$$df = (2x\ 2y\ \ -1) \neq (0, 0, 0)$$

tenemos que 0 es un valor regular para $f$ y, por tanto, $M$ es una subvariedad regular.

(b) **(1 punto)** Demostrar que el campo vectorial de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$X_{(x,y,z)} = x\, \frac{\partial}{\partial x}\bigg|_{(x,y,z)} + y\, \frac{\partial}{\partial y} + 2(x^2 + y^2)\frac{\partial}{\partial z}\bigg|_{(x,y,z)}$$

es tangente a $M$.

**Solución:** Tenemos que el espacio tangente a $M$ en un punto $p = (x, y, z) \in M$ es

$$T_pM = \operatorname{Ker} d_pf = \left\{ a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z} \;\middle|\; (2x\ 2y\ \ -1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

Como

$$(2x\ 2y\ \ -1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2(x^2+y^2) \end{pmatrix} = 2x^2 + 2y^2 - 2(x^2 + y^2) = 0,$$

tenemos que en efecto $X$ es tangente a $M$.

(c) **(1 punto)** Calcular explícitamente la curva integral $\alpha$ de $X$ en $M$ tal que $\alpha(0) = (1, 1, 2)$. ¿Cuál es el dominio de esta curva?

**Solución:** Como $M$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^3$, podemos calcular el flujo directamente en $\mathbb{R}^3$. De este modo, el flujo será una curva $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tal que

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y, \\ z' = 2(x^2 + y^2). \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones se tiene directamente que $x(t) = Ae^t$ e $y(t) = Be^t$. Por tanto

$$z'(t) = 2(A^2 + B^2)e^{2t} \Rightarrow z(t) = \int 2(A^2 + B^2)e^{2t} = (A^2 + B^2)e^{2t} + C.$$

Por tanto, la curva buscada es $\alpha(t) = (Ae^t, Be^t, (A^2 + B^2)e^{2t} + C)$. Como $(1, 1, 2) = \alpha(0) = (A, B, A^2 + B^2 + C)$ se tiene $A = B = 1$ y $C = 0$, por lo que la curva buscada es

$$\alpha(t) = (e^t, e^t, 2e^{2t}),$$

cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$.

(d) **(1 punto)** Consideremos $N = M \cap \{z \leq 2\}$. Mostrar que el mapa

$$\psi(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), r^2), \qquad 0 < r \leq \sqrt{2}, \quad 0 < \theta < 2\pi$$

define una parametrización de $N - \{y = 0, x \geq 0\}$. Demostrar que $N$ es una variedad diferenciable con borde y que es orientable.

**Solución:** Tenemos que

$$r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta) = r^2,$$

luego la imagen de $\psi$ está contenida en $M$. Además, como $r \leq \sqrt{2}$, también está contenida en $N$.

Respecto a la diferencial de $\psi$, tenemos que

$$d\psi = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) \\ 2r & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta matrix tiene rango 2 para todo $r > 0$, por ejemplo porque el menor de sus dos primeras filas nunca se anula. De este modo, por el teorema de la función implícita, $\psi$ tiene una función inversa sobre su imagen y, por tanto, es una carta.

De hecho, explícitamente tenemos

$$\psi^{-1}(x, y, z) = \left(\sqrt{z}, \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{z}}\right)\right),$$

que está bien definida porque $N - \{y = 0, x \geq 0\} \subseteq \{z \neq 0\}$.

Además, $N$ es una variedad con borde $\partial N = \{(x, y, z) \in M \mid z = 2\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 2\}$. En efecto, tenemos:

- Si $p \in N - \{z = 2\}$, domando una bola $U$ de $\mathbb{R}^3$ suficientemente pequeña para que $U \cap \{z \geq 2\} = \emptyset$, se tiene que

$$\psi^{-1} : U \cap N \to \psi^{-1}(U \cap N) \subseteq \mathbb{R}^2$$

es una carta para $p$.

- Si $p \in N \cap \{z = 2\}$, entonces tomando una bola $U \subseteq \mathbb{R}^3$ suficientemente pequeña tenemos que la función

$$\phi : U \cap N \to \hat{\psi}^{-1}(U \cap N) \subseteq H^2$$

dada por $\phi(p) = (0, \sqrt{2}) - \psi^{-1}(p)$ es una carta de variedad con borde para $p$. De hecho, el punto $p = (x, y, 2) \in N \cap \{z = 2\}$ es de borde porque $\phi(p) \in \{(0, y) \in H^2\}$.

Por último, obsérvese que el campo vectorial de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$N_{\psi(r,\theta)} = \frac{1}{r}\left(\cos(\theta), \sin(\theta), 2r\right) \times \left(-r\sin(\theta), r\cos(\theta), 0\right) = \left(-2r\cos(\theta), -2r\sin(\theta), 1\right),$$

con la extensión obvia $N_{\psi(r,0)} = (-2r, 0, 1)$ y $N_{(0,0,0)} = (0, 0, 1)$, es un campo nunca nulo complementario a $T_{(x,y,z)}N$. De este modo, $N$ es orientable.

(e) **(1 punto)** Sea $\omega \in \Omega^2(N)$ la restricción a $N$ de la forma diferencial de $\mathbb{R}^3$

$$(x^2 + y^2)\, dx \wedge dy + dy \wedge dz - z\, dx \wedge dz.$$

Dar la expresión de $\omega$ en la carta dada por $\psi$.

**Solución:** Tenemos que

$$\psi^* dx = d(r\cos(\theta)) = \cos(\theta)dr - r\sin(\theta)d\theta, \quad \psi^* dy = \sin(\theta)dr + r\cos(\theta)d\theta, \quad \psi^* dz = d(r^2) = 2rdr.$$

De este modo

$$\begin{aligned}
\psi^*\omega &= \left((r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2\right)\psi^* dx \wedge \psi^* dy + \psi^* dy \wedge \psi^* dz - r^2\left(\cos(\theta)dr - r\sin(\theta)d\theta\right) \wedge \psi^* dz \\
&= r^2(\cos(\theta)dr - r\sin(\theta)d\theta) \wedge (\sin(\theta)dr + r\cos(\theta)d\theta) + (\sin(\theta)dr + r\cos(\theta)d\theta) \wedge (2rdr) \\
&\quad - r^2\left(\cos(\theta)dr - r\sin(\theta)d\theta\right) \wedge (2rdr) \\
&= r^3\cos^2(\theta)dr \wedge d\theta + r^3\sin^2(\theta)dr \wedge d\theta - 2r^2\cos(\theta)dr \wedge d\theta - 2r^4\sin(\theta)dr \wedge d\theta \\
&= \left(r^3 - 2r^2\cos(\theta) - 2r^4\sin(\theta)\right) dr \wedge d\theta.
\end{aligned}$$

(f) **(1 punto)** Calcular explícitamente una 1-forma $\alpha \in \Omega^1(N)$ tal que $d\alpha = \omega$.
**Pista:** Usar la expresión en coordenadas de $\omega$ calculada en el apartado anterior.

**Solución:** Buscamos $\alpha$ de la forma $\alpha = Adr + Bd\theta$. Tenemos entonces

$$d\alpha = \left(\frac{\partial B}{\partial r} - \frac{\partial A}{\partial \theta}\right) dr \wedge d\theta.$$

De este modo, si tomamos por ejemplo $A \equiv 0$ tiene que ocurrir que

$$\frac{\partial B}{\partial r} = r^3 - 2r^2\cos(\theta) - 2r^4\sin(\theta) \Rightarrow B = \frac{r^4}{4} - \frac{2}{3}r^3\cos(\theta) - \frac{2}{5}r^5\sin(\theta) + C.$$

Luego podemos tomar

$$\alpha = \left(\frac{r^4}{4} - \frac{2}{3}r^3\cos(\theta) - \frac{2}{5}r^5\sin(\theta)\right) d\theta.$$

(g) **(2 puntos)** Demostrar que

$$\int_N \omega = 2\pi.$$

**Solución:** Usando que $\partial N$ es la circunferencia de radio $r = \sqrt{2}$ en coordenadas, tenemos que

$$\alpha|_{\partial N} = \left(1 - \frac{2^{5/2}}{3}\cos(\theta) - \frac{2^{7/2}}{5}\sin(\theta)\right) d\theta.$$

En consecuencia, por el teorema de Stokes obtenemos

$$\int_N d\alpha = \int_{\partial N} \alpha = \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{2^{5/2}}{3}\cos(\theta) - \frac{2^{7/2}}{5}\sin(\theta)\right) d\theta$$
$$= 2\pi - \frac{2^{5/2}}{3}\sin(\theta)\Big]_0^{2\pi} + \frac{2^{7/2}}{5}\cos(\theta)\Big]_0^{2\pi} = 2\pi.$$

2. **(2.5 puntos)** Sea $M$ una variedad diferenciable compacta y sin borde de dimensión $2n$. Supongamos que $\omega \in \Omega^2(M)$ es una 2-forma cerrada (i.e. $d\omega = 0$) tal que $\omega^n := \omega \wedge \omega \wedge \ldots \wedge \omega$ ($n$ veces) es nunca nula.

(a) **(1 punto)** Demostrar que $M$ es orientable y que

$$\int_M \omega^n \neq 0.$$

**Solución:** La forma $\omega^n$ es nunca nula, así que literalmente define una orientación. Además, como es nunca nula, en una carta orientada $(U_\alpha, \varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha)$ se tiene que

$$\omega^n|_{U_\alpha} = f_\alpha\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{2n}.$$

con $f_\alpha > 0$. Por tanto, si $\{\psi_\alpha\}$ es una partición de la unidad para este atlas orientado, se tiene

$$\int_M \omega^n = \sum_\alpha \psi_\alpha \int_{V_\alpha} f_\alpha\, dx_1 \ldots dx_{2n} > 0.$$

(b) **(1.5 puntos)** Demostrar que no existe $\alpha \in \Omega^1(M)$ tal que $d\alpha = \omega$.

**Solución:** Si existiese tal $\alpha$, usando que $\omega$ es cerrada, tendríamos que

$$d(\alpha \wedge \omega^{n-1}) = d\alpha \wedge \omega^{n-1} \pm \alpha \wedge d(\omega^{n-1}) = d\alpha \wedge \omega^{n-1} = \omega \wedge \omega^{n-1} = \omega^n.$$

Por tanto, por el teorema de Stokes se tendría

$$\int_M \omega^n = \int_M d(\alpha \wedge \omega^{n-1}) = \int_{\partial M} \alpha \wedge \omega^{n-1} = \int_\emptyset \alpha \wedge \omega^{n-1} = 0,$$

contradiciendo el apartado anterior.