UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Variedades diferenciables

Examen Final

Fecha: 13/01/2023

Apellidos y Nombre: ______________________________

DNI/NIE: ______________________________

Grado: ______________________________

> Todas las respuestas deben estar debidamente **justificadas y detalladas**.
> No podrá utilizarse ningún material de apoyo. Únicamente se permitirá el uso auxiliar de una calculadora no programable.
> No se podrá abandonar el examen hasta trascurridos 30 minutos desde su inicio.
> La puntuación máxima del examen es **10 puntos**.
> El examen tiene una duración máxima de **3 horas**.

1. **(7.5 puntos)** Consideremos el conjunto

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = z\right\}.$$

   (a) **(0.5 puntos)** Demostrar que M es una subvariedad regular de $\mathbb{R}^3$.

   (b) **(1 punto)** Demostrar que el campo vectorial de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$X_{(x,y,z)} = x\, \frac{\partial}{\partial x}\bigg|_{(x,y,z)} + y\, \frac{\partial}{\partial y} + 2(x^2 + y^2)\frac{\partial}{\partial z}\bigg|_{(x,y,z)}$$

   es tangente a M.

   (c) **(1 punto)** Calcular explícitamente la curva integral α de X en M tal que $\alpha(0) = (1, 1, 2)$. ¿Cuál es el dominio de esta curva?

   (d) **(1 punto)** Consideremos $N = M \cap \{z \leq 2\}$. Mostrar que el mapa

$$\psi(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), r^2), \qquad 0 < r \leq \sqrt{2}, \quad 0 < \theta < 2\pi$$

   define una parametrización de $N - \{y = 0, x \geq 0\}$. Demostrar que N es una variedad diferenciable con borde y que es orientable.

   (e) **(1 punto)** Sea $\omega \in \Omega^2(N)$ la restricción a N de la forma diferencial de $\mathbb{R}^3$

$$(x^2 + y^2)\, dx \wedge dy + dy \wedge dz - z\, dx \wedge dz.$$

   Dar la expresión de ω en la carta dada por ψ.

   (f) **(1 punto)** Calcular explícitamente una 1-forma $\alpha \in \Omega^1(N)$ tal que $d\alpha = \omega$.
   Pista: Usar la expresión en coordenadas de ω calculada en el apartado anterior.

   (g) **(2 puntos)** Demostrar que

$$\int_N \omega = 2\pi.$$

2. **(2.5 puntos)** Sea M una variedad diferenciable compacta y sin borde de dimensión $2n$. Supongamos que $\omega \in \Omega^2(M)$ es una 2-forma cerrada (i.e. $d\omega = 0$) tal que $\omega^n := \omega \wedge \omega \wedge \ldots \wedge \omega$ (n veces) es nunca nula.

   (a) **(1 punto)** Demostrar que M es orientable y que

$$\int_M \omega^n \neq 0.$$

   (b) **(1.5 puntos)** Demostrar que no existe $\alpha \in \Omega^1(M)$ tal que $d\alpha = \omega$.