

Proyecto IV

Ángel González Prieto

18 de febrero de 2024

1. Determinante

En este documento vamos a explicar la utilidad del *determinante* para caracterizar aplicaciones lineales que sean isomorfismos.

1.1. Determinante de una matriz

Definición 1.1. Consideremos una matriz $n \times n$ de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

El determinante de A , denotado por $\det(A)$, está dado por

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Para una interpretación geométrica del determinante, véase la Figura 1.

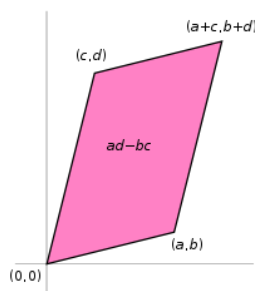


Figura 1: Interpretación geométrica del determinante

Teorema 1.2. *El determinante \det respeta el producto, esto es*

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

para cualesquiera matrices A y B .

Demostración. Véase [1, Theorem 10.31] o [2]. □

Corolario 1.3. *Sea A una matriz $n \times n$. Se tiene que*

$$\det(PAP^{-1}) = \det(A)$$

para toda matriz invertible P .

Demostración. Por la proposición anterior, tenemos que

$$\det(PAP^{-1}) = \det(P) \det(A) \det(P^{-1}) = \det(P) \det(A) \det(P)^{-1} = \det(A),$$

como queríamos demostrar. □

1.2. Determinante de una aplicación lineal

Definición 1.4. Sea $f : V \rightarrow V$ una aplicación lineal. Consideremos una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ de V y sea $A = (a_{ij})$ la matriz de f en la base \mathcal{B} . El determinante de f se define como

$$\det(f) = \det(A).$$

Proposición 1.5. *El determinante de una aplicación lineal $f : V \rightarrow V$ no depende de la base escogida.*

Demostración. Si A es la matriz de f en una cierta base, entonces la matriz de f en otra base es PAP^{-1} para cierta matriz invertible P . Entonces, el resultado se sigue del Corolario 1.3. □

Teorema 1.6. *Una aplicación lineal f es invertible si y solo si $\det(f) \neq 0$.*

Demostración. Véase [2, Theorem 2.7]. □

Corolario 1.7. *Consideremos un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas y n ecuaciones de la forma*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Entonces (1) admite una solución no trivial si y solo si $\det(A) = 0$, donde $A = (a_{ij})$.

Referencias

- [1] Sheldon Jay Axler. *Linear algebra done right*, volume 2. Springer, 1997.
- [2] Thomas S Shores. *Applied linear algebra and matrix analysis*, volume 2541. Springer, 2007.