El Determinante en Álgebra Lineal

UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

Ángel González Prieto
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

Trabajo de Fin de Grado presentado para optar al Grado de
Grado en Matemáticas

21 de marzo de 2024

Índice general

Capítulo 1

El determinante y sus aplicaciones

1.1. Determinante

En este documento vamos a explicar la utilidad del *determinante* para caracterizar aplicaciones lineales que sean isomorfismos.

1.1.1. Determinante de una matriz

Definición 1.1.1. Consideremos una matriz $n \times n$ de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

El determinante de A, denotado por $\det(A)$, está dado por

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Para una interpretación geométrica del determinante, véase la Figura 1.1.

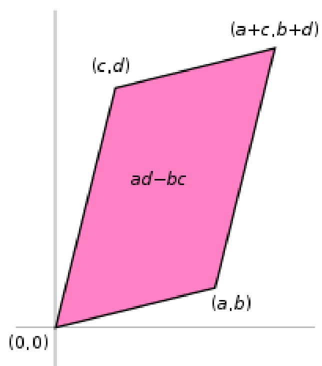

Figura 1.1: Intepretación geométrica del determinante

Teorema 1.1.2. *El determinante* det *respeta el producto, esto es*

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

para cualesquiera matrices A y B.

Demostración. Véase [1, Theorem 10.31] o [2]. □

Corolario 1.1.3. *Sea A una matriz $n \times n$. Se tiene que*

$$\det(PAP^{-1}) = \det(A)$$

para toda matrix invertible P.

Demostración. Por la proposición anterior, tenemos que

$$\det(PAP^{-1}) = \det(P)\det(A)\det(P^{-1}) = \det(P)\det(A)\det(P)^{-1} = \det(A),$$

como queríamos demostrar. □

1.1.2. Determinante de una aplicación lineal

Definición 1.1.4. Sea $f : V \to V$ una aplicación lineal. Consideremos una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ de V y sea $A = (a_{ij})$ la matriz de f en la base $\mathcal{B}$. El determinante de f se define como

$$\det(f) = \det(A).$$

Proposición 1.1.5. *El determinante de una aplicación lineal $f : V \to V$ no depende de la base escogida.*

Demostración. Si A es la matriz de f en una cierta base, entonces la matriz de f en otra base es PAP^{-1} para cierta matriz invertible P. Entonces, el resultado se sigue del Corolario 1.1.3. □

Teorema 1.1.6. *Una aplicación lineal f es invertible si y solo si* $\det(f) \neq 0$.

Demostración. Véase [2, Theorem 2.7]. □

Corolario 1.1.7. *Consideremos un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas y n ecuaciones de la forma*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & 0, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & 0, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & = & 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Entonces (1.1) admite una solución no trivial si y solo si $\det(A) = 0$*, donde* $A = (a_{ij})$.

Bibliografía

[1] S. J. Axler. *Linear algebra done right*, volume 2. Springer, 1997.

[2] T. S. Shores. *Applied linear algebra and matrix analysis*, volume 2541. Springer, 2007.