
PROYECTO 4



UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

Mónica Nogales Rodríguez
Universidad Complutense de Madrid

Trabajo de Fin de Grado presentado para optar al
Grado de Matemáticas y Estadística.

Índice general

1. El determinate y sus aplicaciones	1
1.1. Determinante	1
1.1.1. Determinante de una matriz	1
1.1.2. Determinante de una aplicación lineal	2
Bibliografía	3

Capítulo 1

El determinante y sus aplicaciones

1.1. Determinante

En este documento vamos a explicar la utilidad del *determinante* para caracterizar aplicaciones que sean isomorfismos

1.1.1. Determinante de una matriz

Consideremos una matriz $n \times n$ de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

El determinante de A , denotado por $\det(A)$, está dado por

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

Para una interpretación geométrica del determinante, véase la Figura 1.1

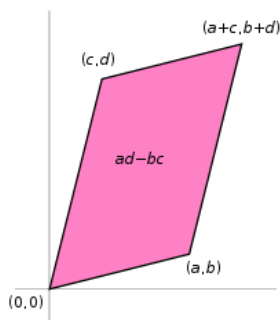


Figura 1.1: Interpretación geométrica del determinante

El determinante $\det$ respeta el producto, esto es

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

para cualesquiera matrices A y B

Demostración. Véase [1, Theorem 10.31] o [2] □

Sea A una matriz $n \times n$. Se tiene que

$$\det(PAP^{-1}) = \det(A)$$

para toda matriz invertible P .

Demostración. Por la proposición anterior, tenemos que

$$\det(PAP^{-1}) = \det(P)\det(A)\det(P)^{-1} = \det(A)$$

como queríamos demostrar. □

1.1.2. Determinante de una aplicación lineal

Sea $f : V \rightarrow V$ una aplicación lineal. Consideramos una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ de V y sea $A = (a_{ij})$ la matriz f de la base $\mathcal{B}$. El determinante de f se define como

$$\det(f) = \det(A).$$

El determinante de una aplicación lineal $f : V \rightarrow V$ no depende de la base escogida.

Demostración. Si A es la matriz de f en una cierta base, entonces la matriz de f en otra base es PAP^{-1} para cierta matriz invertible P . Entonces, el resultado se sigue del corollary 1.3. □

Una aplicación lineal f es invertible si y solo si $\det(f) \neq 0$.

Demostración. Véase. [2, Theorem 2.7] □

Consideremos un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas y n ecuaciones de la forma [1]
[2]

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Entonces eq. (1) admite una solución no trivial si y solo si $\det(A) = 0$, donde $A = (a_{ij})$.

Bibliografía

- [1] S. J. Axler. *Linear algebra done right*, volume 2. Springer, 1997.
- [2] T. S. Shores. *Applied linear algebra and matrix analysis*, volume 2541. Springer, 2007.