Aplicaciones del Teorema Fundamental del Álgebra

UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

Carl Friedrich Gauss
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

Trabajo de Fin de Grado presentado para optar al
Curso de introducción a LaTeX
Marzo de 2026

Índice general

1. El anillo de polinomios y sus primeras propiedades **1**
1.1. Construcción algebraica 1
1.2. Estructura analítica y ejemplos 2

2. El Teorema Fundamental del Álgebra y una prueba topológica **3**
2.1. Enunciado y consecuencias inmediatas 3
2.2. La idea del número de vueltas 3

A. Apéndice técnico **6**
A.1. Una matriz compañera y una identidad útil 6

Bibliografía **7**

Capítulo 1

El anillo de polinomios y sus primeras propiedades

1.1. Construcción algebraica

El Teorema Fundamental del Álgebra afirma que todo polinomio no constante con coeficientes complejos posee al menos una raíz compleja. Antes de enunciarlo, fijamos el marco algebraico en el que trabajaremos. Sea

$$\mathbb{C}[z] = \{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \mid n \in \mathbb{N},\ a_j \in \mathbb{C}\},$$

el anillo de polinomios en una indeterminada sobre el cuerpo de los números complejos. Para referencias clásicas sobre estas propiedades elementales, véanse [2] y [4].

Definición 1.1.1. El *grado* de un polinomio no nulo

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \qquad a_n \neq 0,$$

es el entero $\deg(p) = n$. Además, el coeficiente a_n se denomina *coeficiente principal* de p.

Ejemplo 1.1.2. El polinomio

$$p(z) = z^4 + (2 - i)z^2 + 3$$

pertenece a $\mathbb{C}[z]$, tiene grado 4 y coeficiente principal 1. Por otra parte,

$$q(z) = z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$$

proporciona ya un ejemplo de factorización completa en raíces complejas.

Proposición 1.1.3. *El conjunto $\mathbb{C}[z]$ es un dominio euclídeo respecto de la función grado. En particular, dados $p, q \in \mathbb{C}[z]$ con $q \neq 0$, existen polinomios $s, r \in \mathbb{C}[z]$ tales que*

$$p = sq + r, \qquad \text{con } r = 0 \text{ o bien } \deg(r) < \deg(q).$$

Demostración. La demostración es idéntica a la división euclídea usual. Si $\deg(p) < \deg(q)$ basta tomar $s = 0$ y $r = p$. En caso contrario, si $b_m z^m$ es el término principal de q y $a_n z^n$ el de p con $n \geq m$, se resta el múltiplo

$$\frac{a_n}{b_m} z^{n-m} q(z)$$

para cancelar el término dominante. Iterando el proceso se obtiene el cociente y el resto. □

Lema 1.1.4. *Para $a \in \mathbb{C}$ y $p \in \mathbb{C}[z]$, el número a es raíz de p si y solo si $z - a$ divide a p en $\mathbb{C}[z]$.*

Demostración. Aplicando la división euclídea por $z - a$, existen $s \in \mathbb{C}[z]$ y $r \in \mathbb{C}$ tales que

$$p(z) = (z - a)s(z) + r.$$

Al evaluar en $z = a$ se obtiene $p(a) = r$. Luego $p(a) = 0$ si y solo si $r = 0$, lo que equivale a la divisibilidad por $z - a$. □

Corolario 1.1.5. *Si $p \in \mathbb{C}[z]$ tiene grado n y posee $n+1$ raíces complejas distintas, entonces $p = 0$.*

Demostración. Por el lema anterior, cada raíz distinta aporta un factor lineal distinto. El producto de $n + 1$ factores lineales tiene grado $n + 1$, imposible para un polinomio no nulo de grado n. □

1.2. Estructura analítica y ejemplos

El paso de álgebra a análisis se produce al considerar la función polinómica $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ asociada a un polinomio $p \in \mathbb{C}[x]$. Si

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0, \qquad a_n \neq 0,$$

entonces para $|z|$ grande domina el término principal. Más precisamente,

$$\frac{p(z)}{a_n z^n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \cdots + \frac{a_0}{a_n z^n} \longrightarrow 1 \qquad \text{cuando } |z| \to \infty. \tag{1.1}$$

Esta observación será la base del argumento topológico del Capítulo 2.

Teorema 1.2.1. *Todo polinomio $p \in \mathbb{C}[z]$ de grado $n \geq 1$ puede escribirse, una vez conocidas sus raíces $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ con multiplicidades $m_1, \ldots, m_k$, en la forma*

$$p(z) = a_n \prod_{j=1}^{k} (z - \alpha_j)^{m_j}, \qquad m_1 + \cdots + m_k = n.$$

Demostración. El lema anterior permite extraer un factor lineal cada vez que se conoce una raíz. Repitiendo el proceso tantas veces como indique la multiplicidad se obtiene la factorización. El número total de exponentes debe coincidir con el grado. □

Observación 1.2.2. Este teorema no demuestra todavía que las raíces existan; solo indica cómo se organiza la factorización una vez halladas. La existencia de una primera raíz es justamente el contenido sustancial del Teorema Fundamental del Álgebra.

Ejemplo 1.2.3. Para el polinomio cúbico

$$p(z) = z^3 - 1$$

se obtiene la factorización

$$p(z) = (z - 1)\left(z - e^{2\pi i/3}\right)\left(z - e^{4\pi i/3}\right).$$

Sus raíces son los vértices de un triángulo equilátero en la circunferencia unitaria.

Capítulo 2

El Teorema Fundamental del Álgebra y una prueba topológica

2.1. Enunciado y consecuencias inmediatas

Enunciamos ahora el resultado central que será demostrado en este capítulo.

Teorema 2.1.1 (Teorema Fundamental del Álgebra)**.** *Todo polinomio no constante $p \in \mathbb{C}[z]$ posee al menos una raíz compleja.*

A partir de este enunciado y del Lema 1.3 del Capítulo 1, se deduce por inducción que todo polinomio complejo de grado n se descompone como producto de n factores lineales, contando multiplicidades.

Ejemplo 2.1.2. El polinomio cuadrático

$$p(z) = z^2 + z + 1$$

tiene discriminante $\Delta = -3$, de modo que sus raíces son

$$\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Esto muestra que la falta de raíces reales no impide la factorización en $\mathbb{C}[z]$.

Polinomio	Grado	Raíces en $\mathbb{C}$
$z^2 + 1$	2	$\pm i$
$z^3 - 1$	3	$1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}$
$z^4 + 16$	4	$2e^{i(\pi/4 + k\pi/2)}$

Cuadro 2.1: Ejemplos de factorización completa en $\mathbb{C}[z]$

2.2. La idea del número de vueltas

Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un lazo continuo. Definimos el *número de vueltas* de γ alrededor de $0 \in \mathbb{C}$, o *winding number*, como la integral compleja

$$\operatorname{wind}(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w}. \tag{2.1}$$

Desde el punto de vista del análisis complejo, este número de vueltas puede interpretarse como el incremento total del argumento dividido entre 2π y, por tanto, caracteriza en efecto el número de giros que γ produce alrededor del origen.

Este número de vueltas es siempre un entero y es invariante por homotopía en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$; véase [1]. Recuérdese que esto quiere decir que si $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ son dos lazos continuos para los que existe una función continua

$$H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

tal que $H(0,t) = \gamma_1(t)$ y $H(1,t) = \gamma_2(t)$ para todo t, entonces se tiene que $\text{wind}(\gamma_1, 0) = \text{wind}(\gamma_2, 0)$.

La Figura 2.1 ilustra esquemáticamente una curva cerrada en la imagen que rodea al origen varias veces, fenómeno que, como veremos, codifica la existencia de ceros del polinomio en el interior.

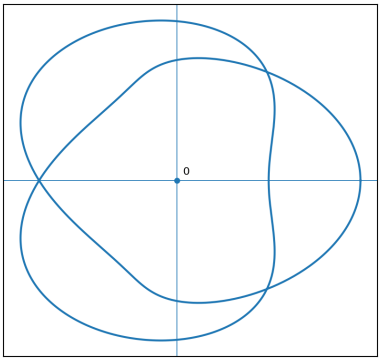

Figura 2.1: Ejemplo de lazo con número de vueltas no nulo alrededor del origen

Proposición 2.2.1. *Sea $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ con $a_n \neq 0$ un polinomio de grado n. Entonces existe $R_0 > 0$ tal que, para todo $R \geq R_0$ y todo z con $|z| = R$, se cumple*

$$p(z) \neq 0 \qquad y \qquad \left| \frac{p(z)}{a_n z^n} - 1 \right| < 1.$$

Demostración. Por (1.1), el cociente $p(z)/(a_n z^n)$ converge uniformemente a 1 sobre las circunferencias $|z| = R$ cuando $R \to \infty$. Basta elegir R_0 de manera que el módulo de la diferencia sea menor que 1. □

La Figura 2.2 representa una circunferencia grande en el plano complejo como en la Proposición 2.2.1, que encierra todas las posibles raíces.

Lema 2.2.2. *Si $R \geq R_0$ es como en la proposición anterior, entonces las curvas*

$$\gamma_R(t) = p(Re^{2\pi i t}) \qquad y \qquad \eta_R(t) = a_n R^n e^{2\pi i n t}$$

son homotópicas en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Demostración. Definimos la homotopía lineal

$$H(s,t) = (1-s)\eta_R(t) + s\gamma_R(t).$$

Por la Proposición 2.2.1, se tiene que $\gamma_R(t) < 2\eta_R(t)$, lo que implica que $|\gamma_R(t) - \eta_R(t)| < |\eta_R(t)|$. De este modo, como $\gamma_R(t)$ permanece a distancia estrictamente menor que $|\eta_R(t)|$ de $\eta_R(t)$, el segmento que une ambos puntos nunca pasa por el origen. Por tanto, H toma valores en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y, por tanto, es una homotopía en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. □

Corolario 2.2.3. *Para $R \geq R_0$ con en el resultado anterior, se tiene que* $\text{wind}(\gamma_R, 0) = n$.

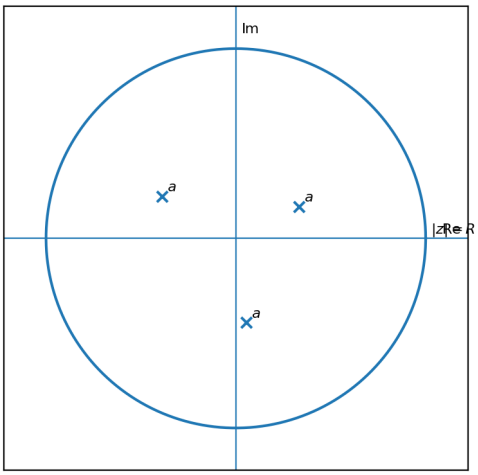

Figura 2.2: Circunferencia $|z| = R$ en el plano complejo, con R grande

Teorema 2.2.4. *Sea $p \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio de grado $n \geq 1$. Entonces p posee al menos una raíz compleja.*

Demostración. Supongamos por contradicción que p no tiene ningún cero. Sea R suficientemente grande como en la Proposición 2.2.1, y consideremos la circunferencia $C_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$. La restricción de p a C_R define un lazo $\gamma_R(t) = p(Re^{2\pi it})$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Además, sin consideramos la homotopía

$$H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, \qquad H(s,t) = p(sRe^{2\pi it}),$$

se tiene que $H(1,t) = \gamma_R(t)$ y $H(0,t) = p(0) \neq 0$. Obsérvese que H es una homotopía en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ precisamente porque p no tiene ningún cero. Ahora, como la curva constante $p(0)$ tiene número de vueltas igual a 0, se tiene $\text{wind}(\gamma_R, 0) = 0$.

Sin embargo, para R suficientemente grande, el Corolario 2.2.3 implica $\text{wind}(\gamma_R, 0) = n \geq 1$, lo cual es imposible. La contradicción prueba que p debe anularse en algún punto de $\mathbb{C}$. □

Corolario 2.2.5. *Todo polinomio $p \in \mathbb{C}[z]$ de grado $n \geq 1$ admite una factorización*

$$p(z) = a_n \prod_{j=1}^{n} (z - \alpha_j)$$

para ciertos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, contados con multiplicidad.

Una discusión moderna y accesible de estas ideas aparece también en [3].

Apéndice A

Apéndice técnico

A.1. Una matriz compañera y una identidad útil

Consideremos un polinomio complejo de grado 3 y mónico

$$p(z) = z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0,$$

y consideramos su matriz compañera

$$C_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{pmatrix}.$$

Proposición A.1.1. *El polinomio característico de C_p es precisamente*

$$p_{C_p}(\lambda) = -(\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0).$$

En particular, los autovalores de C_p coinciden con las raíces de p.

Demostración. Se calcula directamente

$$\lambda I - C_p = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & a_0 \\ -1 & \lambda & a_1 \\ 0 & -1 & \lambda + a_2 \end{pmatrix}.$$

Desarrollando el determinante por la primera fila se obtiene

$$\det(\lambda I - C_p) = \lambda\big(\lambda(\lambda + a_2) + a_1\big) + a_0,$$

que coincide con la expresión deseada. □

Bibliografía

[1] L. V. Ahlfors. *Complex Analysis*. McGraw-Hill, 3 edition, 1979.

[2] S. Lang. *Algebra*. Springer, 3 edition, 2002.

[3] T. Needham. *Visual Complex Analysis*. Oxford University Press, 1998.

[4] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 3 edition, 1987.