AUTOVALORES DE OPERADORES DIFERENCIALES

Los problemas de autovalores tienen su origen en el álgebra de matrices.

En el caso del álgebra se parte de una matriz *A* y esencialmente se trata de buscar autovalores λ y los correspondientes autovectores *v* que verifican la ecuación

$$Av = \lambda v$$

Las soluciones que se buscan de los problemas de autovalores son las que no son idénticamente nulas.

Para resolver un problema de autovalores algebraico se empieza resolviendo el llamado polinomio característico, que viene de plantear

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Un problema de autovalores para un operador diferencial tiene el siguiente aspecto

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2}x + \lambda x = 0 \\
&t(0) = 0 \\
&t(\pi) = 0
\end{aligned}$$

Se trata de buscar soluciones no idénticamente nulas de problemas de este tipo. Nótese que este problema se parece mucho a un problema de autovalores algebraico pero sustituyendo la matriz por la segunda derivada y el vector por una función.

Hay que hacer dos comentarios interesantes.

En primer lugar se pueden plantear problemas de autovalores para cualquier operador diferencial, es decir que en principio nos podríamos plantear problemas de autovalores que involucren una derivadas primeras, terceras,…

A posteriori puede verse que los problemas de autovalores más interesantes tanto desde el punto de vista físico como matemático con los que involucran derivadas segundas, aunque eventualmente pueden aparecer simultáneamente derivadas primeras.

Por otro lado la notación de las soluciones en la forma $x(t)$ es usual en PVI pero no en PC ni en EDP. Vamos a cambiar en este momento de notación y vamos a denominar *u* a la variable dependiente y *x* a la variable independiente, es decir, vamos a buscar soluciones de la forma $u(x)$ y típicamente los problemas de autovalores van a tener el siguiente aspecto:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{d^2}{dx^2}u = \lambda u \\
&u(0) = 0 \\
&u(\pi) = 0
\end{aligned}
$$

Vamos a ver unos ejercicios para entrenarnos en el cálculo de autovalores.

Los ejercicios siguientes consisten en resolver los siguientes problemas de autovalores, es decir encontrar los valores de λ y de *u*, no idénticamente nulos, que verifican los siguientes problemas de autovalores.

Denominaremos λ a los autovalores y *u* a las autofunciones asociadas.

De hecho es muy interesante construir una tabla de la forma:

Operador diferencial	Autovalores	Autofunciones
…..	…….	……
…..	…….	……

Nota: Al conjunto de autovalores de un operador diferencial se le llama espectro de dicho operador diferencial. Un problema de autovalores debe concluir siempre con el espectro del operador y dentro de este espectro es muy importante destacar el llamado gap entre autovalores.
El gap es la diferencia entre un autovalor y el siguiente. El gap debe tender a permanecer constante o a aumentar. Un operador con un gap entre los autovalores de su espectro que tienda a cero a medida que los autovalores crecen es un operador que va a dar muchos problemas tanto matemáticos y que se corresponde a una situación física muy anormal.

Nota: Típicamente a las matrices se les llama operadores acotados mientras que a los operadores diferenciales se les llama operadores no acotados. Esto se debe a que las matrices tienen un espectro formado por un número finito de autovalores. Por tanto en el caso de matrices estaremos de manera evidente ante un espectro acotado.
En cambio los operadores diferenciales tienen un espectro formado por infinitos autovalores que no es posible acotar.

Calcular por tanto los autovalores y las autofunciones de los siguientes operadores diferenciales:
Nota: *L* es en todos los casos un número real estrictamente positivo.

a. $$\begin{cases} -\dfrac{d^2}{dx^2} = \lambda x \\ u(0) = 0 \\ u(L) = 0 \end{cases}$$

b. $$\begin{cases} -\dfrac{d^2}{dx^2}u = \lambda u \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = 0 \end{cases}$$

c. $$\begin{cases} -\dfrac{d^2}{dx^2}u = \lambda x \\ u'(0) = 0 \\ u(L) = 0 \end{cases}$$

d. $$\begin{cases} -\dfrac{d^2}{dx^2}u = \lambda u \\ u(0) = 0 \\ u(1) + u'(1) = 0 \end{cases}$$

e. $$\begin{cases} -\dfrac{d^2}{dx^2}u = \lambda u \\ u(0) = u(2\pi) \\ u'(0) = u'(2\pi) \end{cases}$$ (Anillo circular)

Nota: Tras resolver algunos problemas de autovalores en seguida se concluye que el espectro de un operador diferencial es muy sensible al cambio de condiciones de contorno. Veremos también en los siguientes ejemplos en dimensión 2 que el espectro del operador laplaciano varía mucho dependiendo de que el dominio sea cuadrado o circular.

PROBLEMA DE AUTOVALORES PARA EL OPERADOR DIFERENCIAL LAPLACIANO EN DIMENSIÓN DOS. UN RECTÁNGULO.

Vamos a resolver el siguiente problema de autovalores en dimensión dos

$$-\Delta u = \lambda u \quad en \quad (x, y) \in \Omega$$
$$u\big|_{\partial\Omega} = 0$$

donde $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ es un rectángulo de lados *a* y *b*.

El operador laplaciano $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ es una forma abreviada de representar la segunda derivada de una función de dos variables respecto de ambas variables. Por otro lado la expresión $u\big|_{\partial\Omega} = 0$ quiere decir que la solución se anula en la frontera del dominio considerado.

En definitiva, el problema planteado equivale a

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \lambda u \quad en \quad (x, y) \in [0, a] \times [0, b]$$
$$u(x,0) = u(x, b) = 0$$
$$u(0, y) = u(a, y) = 0$$

Para resolver vamos a descomponer la solución de la forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$, sustituir en la ecuación original y separar variables.

Explicitamos brevemente los pasos:

En primer lugar sencillamente procedemos a derivar y a reinterpretar las condiciones de contorno.

$$-(X''Y + XY'') = \lambda XY$$
$$X(0) = 0$$
$$X(a) = 0$$
$$Y(0) = 0$$
$$Y(b) = 0$$

Luego dividimos ambos miembros por XY

$$
\begin{aligned}
&-\left(\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}\right)=\lambda \\
&X(0)=0 \\
&X(a)=0 \\
&Y(0)=0 \\
&Y(b)=0
\end{aligned}
$$

Esta condición obliga a que tanto $-\frac{X''}{X}$ como $\frac{Y''}{Y}$ sean expresiones constantes, y por tanto el problema original puede desacoplarse en dos problemas secundarios:

$$
\begin{array}{lcll}
-\dfrac{X''}{X}=\alpha & & -\dfrac{Y''}{Y}=\beta & \\
X(0)=0 & \text{y} & Y(0)=0 & \text{donde además } \lambda=\alpha+\beta. \\
X(a)=0 & & Y(b)=0 &
\end{array}
$$

Resolviendo por separado ambos problemas llegamos a que

$$
\alpha_n=\frac{\pi^2}{a^2}n^2, \quad X_n=\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad n=1,2,\ldots.
$$

$$
\beta_m=\frac{\pi^2}{b^2}m^2, \quad Y_m=\sin\left(\frac{m\pi}{b}\right), \quad m=1,2,\ldots.
$$

Y por tanto las posibles soluciones finales al problema de autovalores original son

$$
\lambda_{n,m}=\alpha_n+\beta_m, \quad u_{n,m}=\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \quad n,m=1,2,3,\ldots.
$$

Ejercicio: Resolver el mismo problema pero con condiciones de contorno nulas sobre la derivada (a estas condiciones se les llama condiciones tipo Neumann) y también con condiciones mixtas.

Como ayuda puede consultarse a posteriori la referencia

www.tel.uva.es/descargar.htm;jsessionid...?id=5799

PROBLEMA DE AUTOVALORES PARA EL OPERADOR LAPLACIANO EN UN DOMINIO CIRCULAR

No planteamos ahora resolver problema de autovalores para el operador laplaciano en un dominio circular, es decir, resolver

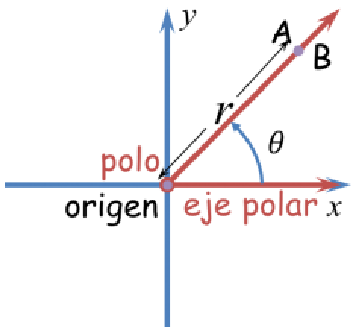
$$-\Delta u = \lambda u \quad en \quad (x, y) \in \Omega$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

donde Ω es un disco de radio *R*.

Varias cosas cambian respecto del problema de autovalores del laplaciano en un rectángulo.

Lo primero que debemos hacer es trabajar en coordenadas polares,



Ojo porque no solamente debemos expresar la solución en coordenadas polares sino también hemos de tener en cuenta que el propio operador laplaciano tiene una expresión muy diferente en coordenadas cartesianas y en coordenadas polares.

En efecto, en coordenadas cartesianas $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ mientras que en coordenadas polares $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}$.

En definitiva el problema de autovalores sobre el disco de radio R queda como

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2}\right)=\lambda u \qquad (r,\vartheta)\in[0,R]\times[0,2\pi[$$

$$u(R,\vartheta)=0$$

$$u(0,\vartheta) \quad \textit{finito}$$

Descomponemos la solución en producto de dos funciones

$$u(r,\vartheta)=\mathrm{X}(r)\Theta(\vartheta)$$

Sustituyendo en la ecuación y renombrando por comodidad $\lambda=\omega^2$, tenemos la siguiente cadena de igualdades:
Nota: escribir $\lambda=\omega^2$ no supone ninguna restricción ya que se puede probar que el laplaciano tiene siempre autovalores positivos. Sencillamente se pretende que al final obtengamos una ecuación reconocible en la teoría de ecuaciones diferenciales.

$$-\left(\left(\mathrm{X}''+\frac{1}{r}\mathrm{X}'\right)\Theta+\frac{1}{r^2}\mathrm{X}\Theta''\right)=\omega^2\mathrm{X}\Theta$$

$$\left(r^2\mathrm{X}''+r\mathrm{X}'+r^2\omega^2\mathrm{X}\right)\Theta+\mathrm{X}\Theta''=0$$

$$\frac{r^2\mathrm{X}''+r\mathrm{X}'+r^2\omega^2\mathrm{X}}{\mathrm{X}}+\frac{\Theta''}{\Theta}=0$$

Que de nuevo puede separarse como sigue:

$$\frac{r^2\mathrm{X}''+r\mathrm{X}'+r^2\omega^2\mathrm{X}}{\mathrm{X}}=-l^2, \qquad \frac{\Theta''}{\Theta}=l^2$$

donde l^2 puede ser un valor positivo cualquiera.

Finalmente planteamos dos ecuaciones diferenciales bien diferenciadas para la parte radial y para la parte angular. A ambas ecuaciones diferenciales tenemos que incorporarle condiciones de contorno razonables teniendo en cuenta el problema que queremos resolver.

Queda:

$$r^2\mathrm{X}''+r\mathrm{X}'+\left(r^2\omega^2-l^2\right)\mathrm{X}=0$$

$$X(R)=0$$

$$X(0) \quad \textit{finito}$$

$$\Theta'' = l^2\Theta$$
$$\Theta(0) = \Theta(2\pi)$$
$$\Theta'(0) = \Theta'(2\pi)$$

La ecuación en la variable radial es una ecuación de Bessel cuyas soluciones son bien conocidas pero difíciles de expresar. En general vamos a llamar a estas soluciones $J_l(\omega r)$

Las soluciones de la segunda ecuación son

$$\Theta = 1 \quad si \quad l = 0$$

$$\Theta_l = \cos(l\vartheta) \quad o \quad bien \quad \Theta_l = \sin(l\vartheta)$$

En definitiva, y tras algunos trucos matemáticos adicionales se llega a que hay algunos autovalores positivos que son simples, los que corresponden a *l=0* y el resto de los autovalores son degenerados y a cada autovalor le corresponden dos autofunciones que tienen que ver con las funciones de Bessel en la parte radial y con senos y cosenos en la parte angular.

En definitiva un lío monumental pero que nos indica la enorme complejidad de los problemas de autovalores en los dominios bidimensionales más sencillos.

Lógicamente un estudio de este calibre es muy poco aplicable a situaciones físicas o de ingeniería y para evitar esto se introduce el análisis numérico, que es una disciplina radicalmente diferente.

El resumen de todo esto es que los problemas de autovalores son muy interesantes porque revelan mucha información sobre la estructura matemática y a la postre física de los problemas estudiados pero a la vez la complejidad de este tipo de problemas es en casi todos los casos muy considerable. Hay que hacer por tanto un estudio de autovalores en aquellos problemas en los que esto sea posible en un tiempo finito y no insistir demasiado en el resto de los problemas.