MÉTODOS ITERATIVOS PARA LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

<table>
<tr><td rowspan="2">IDEAS GENERALES (PROS Y CONTRAS)</td><td>Métodos directos (Cramer, Gauss, …)
Válidos para sistemas pequeños. Demasiadas operaciones para sistemas grandes.
Ejemplo: Para sistemas de 10^3 ecuaciones Gauss necesita realizar 10^9 operaciones y Cramer 10^{2000}.
No respeta la estructura de las matrices.
No aprovecha el espectro de las matrices involucradas.</td></tr>
<tr><td>Métodos iterativos (Jacobi, Gauss-Seidel, SOR,....)
No calculan la solución exacta
Necesitan llevar a cabo muchas menos operaciones.
El espectro influye de manera determinante</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">FORMA DE APLICAR LOS MÉTODOS ITERATIVOS</td><td>Se transforma el sistema de partida de la forma $Ax = b$ en un sistema de la forma $x = Hx + c$ y se aplica el teorema de punto fijo para sistemas de ecuaciones lineales.</td></tr>
<tr><td>Teorema de punto fijo.
Sea H una matriz cuadrada y c tales que la ecuación $x = Hx + c$ tiene una solución única x. La sucesión $\{x_k\}$ generada por $x_{k+1} = Hx_k + c$ con un vector de partida x_0 arbitrario converge a x si y sólo si $\rho(H) < 1$.</td></tr>
</table>

MÉTODOS ITERATIVOS CLÁSICOS DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES

IDEA GENERAL:
$A = D - L - U$

donde D es una matriz diagonal, L es una matriz ‘Low’ y U es una matriz ‘Up’

MÉTODO DE JACOBI

$Ax = b$

$(D - L - U)x = b$

$Dx = (L + U)x + b$

$x = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$

MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

$Ax = b$

$(D - L - U)x = b$

$(D - L)x = Ux + b$

$x = (D - L)^{-1}Ux + (D - L)^{-1}b$

MÉTODO DE RELAJACIÓN (SOR)

$Ax = b$

$(D - L - U)x = b$

$\left(\frac{1}{\omega}D - L + D - \frac{1}{\omega}D - U\right)x = b$

$\left(\frac{1}{\omega}D - L +\right)x = \left(\left(\frac{1}{\omega} - 1\right)D + U\right)x + b$

$$x = \left(\frac{1}{\omega}D - L +\right)^{-1}\left(\left(\frac{1}{\omega} - 1\right)D + U\right)x + \left(\frac{1}{\omega}D - L +\right)^{-1}b$$

<table>
<tr><th colspan="2">TEOREMAS DE CONVERGENCIA MÁS USUALES</th></tr>
<tr><td>Teorema 1. Si A es una matriz estrictamente diagonal dominante por filas</td><td>Entonces los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel son convergentes</td></tr>
<tr><td>Teorema 2. Si A es una matriz simétrica definida positiva</td><td>Entonces el método de Gauss-Seidel es convergente</td></tr>
<tr><td>Teorema 3.</td><td>Si $w \notin (0, 2)$ el método SOR no es convertente.
Si A es una matriz simétrica definida positiva, el método SOR es convergente si y solo si $0 < w < 2$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Definiciones adicionales:
Una matriz D verifica la relación de orden $D \geq 0$ si todas sus componentes son mayores o iguales que cero.
$A = B - C$ es una descomposición regular si $B^{-1} \geq 0$ y $C \geq 0$.
A es una M-matriz si sus componentes son todas menores o iguales que cero (sin mirar la diagonal) y $A^{-1} \geq 0$</td><td>Teorema adicional:
Si $A^{-1} \geq 0$y $A = B - C$ es una descomposición regular de A, entonces $\rho\left(B^{-1}C\right) < 1$
Si A es una M-matriz entonces las descomposiciones de Jacobi y Gauss-Seidel son regulares. En este caso ambos métodos son convergentes.</td></tr>
</table>

Nota final: En general la convergencia o no de los métodos iterativos depende de poder aplicar el teorema de punto fijo y por tanto del radio espectral de las matrices consideradas.