Introducción a la conjetura de Hartshorne

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Curso 2020-21

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA, GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

Grado en Matemáticas

Alberto Acosta Reche

Tutor: Enrique Arrondo Esteban

Abstract

This work focuses on one of the most interesting open problems in Algebraic Geometry, the *Hartshorne's conjecture*, which states that every smooth projective variety $X \subset \mathbb{P}^N$ with dimension $n > 2N/3$ is a complete intersection. In the first part, we prove some of the main properties of complete intersections. In the second part, we study different angles from which the conjecture has been attacked, which relate areas as disparate as the topology of algebraic varieties, the theory of vector bundles, and local algebra. Finally, we explain the resolution of a particular case of the conjecture, the case of quadratic varieties, solved in [IR13].

Resumen

Este proyecto gira en torno a uno de los problemas abiertos más interesantes de la geometría algebraica, la *conjetura de Hartshorne*, que afirma que toda variedad proyectiva lisa $X \subset \mathbb{P}^N$ de dimensión $n > 2N/3$ es intersección completa. En la primera parte, demostramos algunas de las propiedades más importantes de una intersección completa. En la segunda parte, estudiamos distintos ángulos desde los que se ha atacado la conjetura, que relacionan áreas tan dispares como la topología de variedades algebraicas, la teoría de fibrados vectoriales, y el álgebra local. Por último, explicamos la resolución de un caso particular de la conjetura, el caso de variedades cuadráticas, resuelto en [IR13].

Índice

Introducción

En [Ha74] Hartshorne propone la siguiente:

Conjetura de Hartshorne. *Si $Y \subset \mathbb{P}^n$ es una subvariedad proyectiva lisa de codimensión c con $c < n/3$, entonces Y es una intersección completa.*

En lenguaje algebraico, si Y es una variedad lisa de codimensión c, la conjetura asegura que si c es pequeño en relación con su dimensión, entonces el ideal primo I_Y (que le corresponde por el teorema de los ceros de Hilbert) está generado por el número adecuado de polinomios homogéneos $F_1, \ldots, F_c$.

Ha pasado casi medio siglo y, aunque ha habido algunas respuestas afirmativas en casos muy concretos, este problema de enunciado tan simple sigue igual de abierto que en 1974. Uno de los principales atractivos de la conjetura es la diversidad de puntos de vista desde los cuales se puede abordar, permitiendo la interacción de áreas tan dispares como la teoría de fibrados vectoriales, la topología de variedades algebraicas y el álgebra local.

En el primer capítulo introducimos el concepto de intersección completa y estudiamos algunas de las propiedades fundamentales que una intersección completa posee. Entre otros asuntos, demostramos que la tupla (el *tipo*) de los grados de los polinomios que definen la intersección completa es única (salvo reordenamiento), calculamos el fibrado normal, el haz canónico y la cohomología de la restricción del grupo de Picard de $\mathbb{P}^n$. Además, demostramos que las intersecciones completas de cualquier tipo existen en abundancia, que las intersecciones completas no se pueden proyectar de manera no trivial desde dimensión superior y que, sin embargo, siempre se pueden extender. De hecho, gracias al teorema de la torre babilónica, observamos que este último hecho caracteriza a las intersecciones completas entre las variedades proyectivas lisas.

En el segundo capítulo, equipados con este bagaje de ejemplos y cálculos básicos, exponemos el círculo de ideas clásico que envuelve a la conjetura de Hartshorne. En primer lugar, es muy llamativa la similitud entre la topología de una variedad de codimensión pequeña y la de una intersección completa, encapsulada en los teoremas de Barth y Lefschetz. De hecho, este parecido fue una de las líneas principales de evidencia que llevó a Hartshorne a plantear el problema. Posteriormente, demostramos la correspondencia de Hartshorne-Serre, que, en particular, asegura que toda variedad de codimensión 2 y de dimensión al menos 5 se puede expresar como el lugar de ceros de una sección global de un haz de rango 2. Esta correspondencia permite trasladar el caso de codimensión 2 de la conjetura a un problema de fibrados vectoriales, quedando reformulada como:

Conjetura de Hartshorne para fibrados vectoriales. *Todo fibrado vectorial de rango 2 en $\mathbb{P}^n$ escinde en fibrados lineales para $n \geq 7$.*

En la siguiente sección, ponemos el foco sobre el anillo local del vértice del cono afín de la variedad proyectiva. Tras observar que la variedad es una intersección completa si y sólo si el correspondiente anillo local es intersección completa, la conjetura se puede trasladar a un problema de álgebra conmutativa (algo más fuerte que la conjetura original):

Conjetura de Hartshorne para anillos locales. *Sea A un anillo local regular de dimensión n y $\mathfrak{p} \subset A$ un ideal primo tal que $A/\mathfrak{p}$ tiene una singularidad aislada. Sea $r = \dim A/\mathfrak{p}$. Si $r > \frac{2n+1}{3}$ entonces $A/\mathfrak{p}$ es una intersección completa.*

Imponiendo algunas restricciones en $A/\mathfrak{p}$, las teorías de cohomología y dualidad locales permiten dar respuesta afirmativa a los casos de codimensión 2 y 3 de la conjetura, aunque nosotros sólo demostramos el caso más sencillo. Para concluir la exposición, explicamos las ideas detrás de la demostración de un caso particular de la conjetura, el de variedades cuadráticas, que fue resuelto en [IR13]. Como corolario, establecemos que las únicas variedades cuadráticas para las que $c = N/3$ son dos viejas conocidas: la grassmaniana de rectas de $\mathbb{P}^4$ y la variedad de espinores de dimensión 10, con sus embebimientos usuales en $\mathbb{P}^9$ y $\mathbb{P}^{15}$, respectivamente.

En un plano más personal, cuando me embarqué en este trabajo de fin de grado tenía dos objetivos en mente. Por una parte, estaba deseando dar el siguiente paso, un poco más allá de lo que estaba acostumbrado en las asignaturas, y empezar a investigar en cierta profundidad un problema significativo. Por otra parte, quería que el proyecto me sirviera para aprender los fundamentos de geometría algebraica moderna, al nivel de los capítulos II y III de [Ha77]. Gracias al problema tan rico que es la conjetura de Hartshorne, he podido cumplir los dos propósitos, dedicando mis horas de estudio (incluidas las estipuladas en mi beca de colaboración con el departamento de Álgebra, Geometría y Topología) al aprendizaje de la geometría algebraica con la conjetura siempre en mente, con lo que me han surgido multitud de preguntas de manera natural.

Capítulo 1

Intersecciones completas

En este capítulo vamos a estudiar algunas propiedades básicas sobre intersecciones completas en el espacio proyectivo.

1.1 Definición(es) de intersección completa

El concepto central del capítulo es la siguiente:

Definición 1.1. Un subesquema $X \subseteq \mathbb{P}^n$ se dice que es una intersección completa (algebraica) si tiene codimensión r y su ideal proyectivo $I(X)$ se puede generar por r elementos homogéneos.

En otras palabras, $I(X)$ es un ideal con $\mathrm{ht}(I(X)) = r$ y tal que existen elementos homogéneos $F_i \in S = k[X_0, \dots X_n]$ con $I_X = (F_1, \dots F_r)$. De acuerdo con el teorema de altura de Krull ([AM69] 11.16), si $\mathfrak{a}$ es un ideal generado por k elementos en un anillo noetheriano A, entonces $\mathrm{ht}(\mathfrak{a}) \leq k$. Por tanto, nuestro ideal I_X no puede ser generado por menos de r elementos. Además, como $k[X_0, \dots, X_n]$ es un anillo Cohen-Macaulay, el hecho de que I_X esté generado por, justamente, $\mathrm{ht}\, I_X$ elementos, implica que ([Ma86] Th. 17.3.ii y Th. 17.4) $F_1, \dots F_r$ es una sucesión regular y, por tanto, que $S(X) = S/I_X$ es Cohen-Macaulay. Además, por ser $S(X)$ de Cohen-Macaulay, cada primo minimal sobre I_X es de altura r, así que X es equidimensional de codimensión pura r.

Otra definición de intersección completa, de carácter más local, sería la siguiente ([Ha77] II Ejer. 8.4):

Definición 1.2. Un subesquema cerrado $X \subseteq \mathbb{P}^n$ de codimensión r es intersección completa (geométrica) si existen r subesquemas $H_1, \dots H_r$ localmente principales de codimensión 1 tales que $X = H_1 \cap \dots \cap H_r$ como intersección esquemática.

Aquí, un subesquema es localmente principal si su haz de ideales es localmente principal. A priori, para un esquema X, decir que un $\mathcal{O}_X$-módulo coherente $\mathcal{F}$ es localmente principal tendría dos interpretaciones razonables. Por una parte, podríamos interpretarlo como que para todo $x \in X$, $\mathcal{F}_x$ está generado por un elemento como $\mathcal{O}_{X,x}$ módulo. Por otra parte, podría interpretarse como que existe un recubrimiento por abiertos $X = \cup U_i$ de manera que $\mathcal{F}|_{U_i}$ está generado por un elemento como $\mathcal{O}_{U_i}$-módulo.

Está claro que la segunda interpretación implica la primera. Además, cuando tratamos con $\mathcal{O}_X$-módulos cuasicoherentes, finitamente generados en cada abierto afín (en particular los coherentes lo son), ambas interpretaciones son equivalentes. En efecto, si $x \in X$ y U es un abierto afín tal que $x \in U$, entonces $\mathcal{F}$ está generado en U por elementos $s_1, \dots, s_n$. Por hipótesis, $\mathcal{F}_x$ está generado por un elemento $t_x \in \mathcal{F}_x$, por lo que existen $a_i \in \mathcal{O}_{X,x}$ tales que $(s_i)_x = a_i t_x$. Por las propiedades del límite directo, existe un entorno afín V, con $x \in V \subseteq U$, y tal que $a_1, \dots a_n, t_x$ tienen representantes $b_1, \dots, b_n, t$ respectivamente, y tal que se cumplen $s_i = b_i t$ como elementos de V. Por tanto, vemos que $\mathcal{F}$ está generado por el elemento t en el abierto V, como queríamos.

En general, dada una familia de subesquemas cerrados X_α de un esquema X, con haces de ideales $\mathcal{I}_\alpha$ correspondientes, se define su intersección $\bigcap X_\alpha$ como el subesquema cerrado de haz de ideales $\Sigma\mathcal{I}_\alpha$. Este último haz de ideales es la imagen del morfismo:

$$\bigoplus_\alpha \mathcal{I}_\alpha \to \mathcal{O}_Y \tag{1.1}$$

inducido por las inclusiones.

En el caso en el que $X = \mathbb{P}^n$, decir que un subesquema Y de haz de ideales $\mathcal{I}$ es intersección de subesquemas Y_α, es decir, $Y = \cap Y_\alpha$, o lo que es lo mismo $\mathcal{I} = \Sigma\mathcal{I}_\alpha$, no es equivalente a que $I = \Sigma I_\alpha$, donde los I_α e I son los ideales homogéneos correspondientes a los Y_α e Y, respectivamente. Esto es porque los ideales homogéneos correspondientes a subesquemas cerrados son saturados, mientras que la suma de ideales saturados no es, en general, saturada.

En una dirección sí que está claro que $I = \Sigma I_\alpha$ implica $\mathcal{I} = \Sigma\mathcal{I}_\alpha$, pues el funtor que manda un S-módulo graduado M al $\mathcal{O}_X$-módulo $\tilde{M}$ es exacto, donde $X = \mathrm{Proj}(S)$.

En el otro sentido, lo que tenemos en general es que si $\mathcal{I} = \Sigma\mathcal{I}_\alpha$, entonces $I = \mathrm{Sat}(\Sigma I_\alpha)$. En efecto, si $F \in I$ es un polinomio homogéneo de grado f, entonces para cada $0 \leq i \leq n$, tenemos que $F/X_i^f \in \Sigma\mathcal{I}_\alpha|_{D(X_i)}$, por lo que existen polinomios homogéneos $G_{\alpha_{i,j}} \in I_{\alpha_{i,j}}$, $A_{i,j} \in S$, $1 \leq j \leq r_i$, de grados $g_{i,j}, a_{i,j}$ respectivamente, de manera que:

$$\frac{F}{X_i^f} = \sum_{j=1}^{r_i} \frac{A_{i,j}}{X_i^{a_{i,j}}} \frac{G_{\alpha_{i,j}}}{X_i^{g_{i,j}}} \tag{1.2}$$

en $S_{(X_i)}$. Por tanto, para cada i, existe N_i con $X_i^{N_i} F \in \Sigma I_\alpha$, por lo que $I \subseteq \mathrm{Sat}(\Sigma I_\alpha)$. Para la otra inclusión, hacemos los pasos en sentido inverso.

Como una ilustración trivial, en $\mathbb{P}^1$ podemos tomar $Y_0 = \{P_0\}$, el punto cerrado con la estructura de esquema asociada al ideal (X_0), y $Y_i = \{P_1\}$, el punto asociado al ideal (X_1). Entonces la intersección es vacía, con ideal correspondiente $S = k[X_0.X_1]$, pero $(X_0) + (X_1) = (X_0, X_1)$, el ideal irrelevante.

A continuación vamos a ver que las dos definiciones de intersección completa en el proyectivo son equivalentes. En primer lugar, veamos que, bajo la correspondencia entre subesquemas cerrados de $\mathbb{P}^n$, haces de ideales de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ e ideales homogéneos saturados, los esquemas tales que su haz de ideales es localmente principal se corresponden con los ideales homogéneos principales de $k[X_0, \ldots, X_n]$.

Por una parte, está claro que un ideal principal $I = (F)$ da lugar a un haz de ideales localmente principal, que en al abierto estándar $D(X_i)$ está generado por $F/(X_i^f)$, donde f es el grado de F.

En el otro sentido, supongamos que $\mathcal{I}_X$ es localmente principal y consideremos una descomposición primaria de I_X. Los primos asociados a I_X son todos de altura 1. En efecto, sea P un primo asociado a I_X, que denotamos por x como punto de $\mathrm{Proj}\, S$. Entonces, en el anillo local $S_{(P)} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n,x}$, el primo $PS_{(P)}$ es asociado a $(I_X)_{(P)}$. Por hipótesis, $(I_X)_{(P)}$ es principal, así que deducimos que $\mathrm{depth}(S_{(P)}) = 1$, lo que al ser este anillo regular sólo es posible si $\dim(S_{(P)}) = 1$, o lo que es lo mismo, si $\mathrm{ht}(P) = 1$.

Entonces, si $I_X = \cap Q_i$ es una descomposición primaria de I_X, necesariamente única por ser todos los primos minimales, entonces cada Q_i es un ideal primario con radical un ideal primo de altura 1. Como $k[X_0, \ldots, X_n]$ es un DFU, los primos de altura 1 son principales. Como un ideal primario con radical principal es una potencia del radical, deducimos que $Q_i = (F_i^{a_i})$ para ciertos irreducibles F_i y $a_i \geq 1$. En tal caso se comprueba inmediatamente que $I_X = (F)$, donde $F = \prod F_i^{a_i}$, por lo que I_X es principal, como queríamos.

Nótese que, en particular, si $\mathcal{I}_X$ es localmente principal entonces X es de codimensión pura 1. En general, el recíproco no es cierto, pues podemos tener un ideal homogéneo saturado I_X cuyos primos asociados minimales sean de altura 1, pero con algún primo asociado no minimal, que por lo anterior es imposible si $\mathcal{I}_X$ es localmente principal. Por ejemplo, podemos tomar $I = (X_0)^2 \cap (X_0, X_1)^3 = (X_0^3, X_0^2 X_1) \subseteq k[X_0, X_1, X_2]$.

A partir de ahora, diremos que $X \subseteq \mathbb{P}^n$ es una hipersuperficie si es localmente principal, o lo que es lo mismo, si I_X es principal.

Pasemos a la equivalencia entre las definiciones de intersección completa. Está claro que la intersección completa en sentido algebraico implica el sentido geométrico. En efecto, sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una intersección completa algebraica, con $I_X = (F_1, \ldots, F_r)$ su ideal saturado de altura r generado por los polinomios homogéneos F_i. Cada uno de estos polinomios define un haz de ideales localmente principal $\mathcal{I}_i$ y una hipersuperficie Y_i. Entonces, es evidente que $\mathcal{I}_X = \sum \mathcal{I}_i$, o lo que es lo mismo, X es la intersección de las r hipersuperficies Y_i.

En el otro sentido, supongamos que $X \subseteq \mathbb{P}^n$, de codimensión r, es intersección de las hipersuperficies $Y_1, \ldots, Y_r$ definidas por los polinomios $F_1, \ldots, F_r$, respectivamente. Entonces $I_X = \operatorname{Sat}((F_1, \ldots, F_r))$, con $\operatorname{ht} I_X = r$. Recordemos el comportamiento de la saturación respecto a la descomposición primaria. Sea J un ideal homogéneo. Si el ideal irrelevante $\mathfrak{m} = (X_0, \ldots, X_n)$ es asociado a J, entonces una descomposición primaria de J es de la forma $J = (\cap Q_i) \cap Q_0$, donde Q_0 es el único primario asociado a $\mathfrak{m}$. En tal caso, tenemos que $\operatorname{Sat}(J) = \cap Q_i$. Por otra parte, si $\mathfrak{m}$ no es asociado a J, entonces J es saturado y $\operatorname{Sat}(J) = J$. En particular, si J no es $\mathfrak{m}$-primario, $\operatorname{Sat}(J)$ es un ideal propio de la misma altura que J.

Por tanto, como $I_X = \operatorname{Sat}((F_1, \ldots, F_r))$ es de altura r, y no es $\mathfrak{m}$-primario (pues X es no vacío), deducimos que el ideal $(F_1, \ldots, F_r)$ tiene altura r. Pero el anillo $k[X_0, \ldots, X_n]$ es Cohen-Macaulay, así que el ideal $(F_1, \ldots, F_r)$, de altura r, generado por r elementos, tiene la propiedad de que todos sus primos asociados son de altura r ([Ma86] 17.6). En particular, ninguno de ellos es $\mathfrak{m}$, así que $I_X = (F_1, \ldots, F_r)$, como queríamos.

1.2 Unicidad del tipo en la intersección completa

Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una intersección completa de codimensión r. Una primera pregunta inocente que nos podemos plantear es: ¿son únicas las hipersuperficies que definen X como intersección completa? La respuesta es negativa, salvo que $r = 1$. En efecto, si $I_X = (F_1, \ldots, F_r)$ con $d_i = \deg F_i$ y asumimos $d_1 \geq \ldots \geq d_r$, entonces cambiando F_1 por $F_{1,a} = F_1 + aX_0^{d_1 - d_2} F_2$ tenemos que $I_X = (F_{1,a}, F_2, \ldots, F_r)$. Variando $a \in k$, vemos que si k es infinito (que es cierto porque estamos asumiendo que es algebraicamente cerrado) obtenemos infinitas hipersuperficies distintas $F_{1,a}$. Por tanto, las hipersuperficies $F_1, \ldots, F_r$ que definen X como intersección completa no son únicas.

Sin embargo, observamos que $\deg F_1^a = \deg F_1$ y, por tanto, no hemos cambiado la sucesión de grados $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_r$. Esta unicidad es cierta en general. Es decir, si expresamos $I_X = (G_1, \ldots, G_r)$ con $\deg G_1 \geq \ldots \geq \deg G_r$, entonces se tiene $\deg G_i = d_i$. Decimos que la r-tupla $(d_1, \ldots, d_r)$ es *el tipo* de X, y la abreviamos por $\boldsymbol{d}$.

La unicidad del tipo se sigue de la siguiente proposición:

Proposición 1.3. *Sea $S = \bigoplus_{n \geq 0} S_n$ un anillo graduado, con $S_0 = k$ un cuerpo, y sea $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ un S-módulo graduado finitamente generado. Entonces M/S_+M es un k espacio vectorial de dimensión finita, y para cualquier sistema minimal de generadores homogéneos de M, digamos $m_1, \ldots, m_r$, se cumple que $\dim_k(M/S_+M)_n$ es igual al número de generadores con $\deg m_i = n$.*

Recordemos que se define $S_+ = \bigoplus_{n > 0} S_n$. Es inmediato que S_+ es un ideal homogéneo, y que $S_0 \subseteq S \to S/S_+$ da un isomorfismo de S_0 con S/S_+. En el caso del anillo coordenado del espacio proyectivo, $S = k[X_0, \ldots, X_N]$ y S_+ es el ideal irrelevante. Obviamente, si M está generado por $m_1, \ldots, m_r$, el módulo M/S_+M está generado por $\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_r} \in M/S_+M$ como S_0-módulo. En particular si $S_0 = k$ como en la proposición, M/S_+M es un k-espacio vectorial de dimensión finita.

Para demostrar la proposición necesitamos una variante del lema de Nakayama para anillos graduados:

Proposición 1.4. *Sea $S = \bigoplus_{n\geq 0} S_n$ un anillo graduado, con $S_0 = k$ un cuerpo, y sea $M = \bigoplus_{n\geq 0} M_n$ un S-módulo graduado finitamente generado. Entonces, los elementos homogéneos $m_1, \ldots, m_r \in M$ generan M como S-módulo si y solamente si $\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_r}$ generan M/S_+M como k-espacio vectorial.*

Demostración. La primera dirección es obvia. Para la otra, supongamos que $x_1, \ldots, x_s$ es un sistema de generadores homogéneos de M sobre S. Por hipótesis, para cada i existen elementos $a_{i,j} \in k$ tales que $x_i - \sum a_{i,j} m_j \in S_+M$, o lo que es lo mismo, si N es el S-submódulo de M generado por $m_1, \ldots, m_r$, tenemos que $M = N + S_+M$. Pero haciendo el cociente por N, vemos que el módulo graduado finitamente generado $K = M/N$, cumple $K = S_+K$. De aquí $K = 0$. En efecto, si $K = S_+K$, por inducción tenemos $K = (S_+)^n K$ para todo $n \geq 0$, y de esa igualdad $K_0 = \ldots = K_{n-1} = 0$, por lo que $K = 0$. Por tanto, $N = M$, o lo que es lo mismo, los elementos $m_1, \ldots, m_r$ generan M.[1] □

Demostración de 1.3. Sea $m_1, \ldots, m_r$ un sistema generador minimal homogéneo de M. Por el lema anterior, $\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_r}$ son linealmente independientes en M/S_+M. En efecto, de no ser el caso tendríamos que, sin pérdida de generalidad, $\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_{r-1}}$ generan M/S_+M como k-espacio vectorial. Aplicando el lema tendríamos que $m_1, \ldots, m_{r-1}$ generan M, lo cual contradice la minimalidad de $m_1, \ldots, m_r$. Por tanto, $\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_r}$ forman una base de M/S_+M como k-espacio vectorial. Además, como S_+M está generado por elementos homogéneos $s_i m_j$, donde s_i, m_j son homogéneos que generan S_+ y M respectivamente, entonces M/S_+M es un S-módulo graduado y se cumple $M/S_+M = \bigoplus_{n\geq 0}(M/S_+M)_n$. De aquí, como $\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_r}$ es base de M/S_+M, deducimos que $\dim_k(M/S_+M)_n$ es el número de elementos m_i tales que $\deg m_i = n$. Además, se sigue que $\dim_k(M/S_+M) = r$. □

Nótese que en la situación de la demostración, si $x_1, \ldots, x_s$ generan M, aunque no sean homogéneos, entonces $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_s}$ generan el k-espacio vectorial M/S_+M, así que $s \geq r$. Por tanto, el mínimo número de generadores de M es el mínimo número de generadores homogéneos.

Más en general, asumiendo en 1.3 que S es noetheriano (lo cual equivale a que S sea finitamente generada como k-álgebra, véase [AM69] 10.7) para un S-módulo finitamente generado M podemos construir su resolución minimal (que es única salvo isomorfismo de sucesiones exactas):

Tomamos un sistema generador minimal homogéneo $m_{0,1}, \ldots, m_{0,r_0}$, y definimos $\beta_{0,j} = \dim_k(M/S_+M)_j$. Como sabemos, $\beta_{0,j}$ es el número de elementos de grado j entre los $m_{0,t}$. Esto da lugar a una sucesión exacta de módulos graduados:

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \tag{1.3}$$

donde M_1 es de nuevo finitamente generado. De nuevo, consideramos un sistema generador minimal homogéneo $m_{1,1}, \ldots, m_{1,r_1}$ de M_1 y ponemos $\beta_{1,j} = \dim_k(M_1/S_+M_1)_j$, obtenemos otra sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow M_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow M_1 \longrightarrow 0 \tag{1.4}$$

Prosiguiendo de esta manera, formamos una resolución por módulos libres graduados finitamente generados:

$$\cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \tag{1.5}$$

donde $F_i = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} S(-j)^{\beta_{i,j}}$ (para un módulo graduado N, por $N(-r)$ entendemos el desplazamiento r unidades a la izquierda, es decir, $N(-r)_n = N(-r+n)$). De esta manera, tenemos una resolución en la forma:

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} S(-j)^{\beta_{1,j}} \longrightarrow \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} S(-j)^{\beta_{0,j}} \longrightarrow M \longrightarrow 0 \tag{1.6}$$

Tensorizando por S/S_+, usando la proposición 1.3 y que la resolución minimal es única salvo isomorfismo, deducimos que los $\beta_{i,j}$ son invariantes de M. Si $S = k[X_0, \ldots, X_n]$, y $X \subset \mathbb{P}^n$ es un subesquema cerrado,

[1] Nótese que para deducir $K = 0$ hemos usado que M es $\mathbb{N}$-graduado, lo cual siempre podemos asumir si es $\mathbb{Z}$-graduado y finitamente generado.

podemos aplicar lo anterior al ideal $I_X = (F_1, \ldots, F_m)$, obteniendo invariantes $\beta_{i,j} \geq 0$. En particular, cuando X es una intersección completa de codimensión r, el invariante $\beta_{0,n}$ es el número de hipersuperficies de grado n en cualquier expresión de X como intersección completa. Además, por el teorema de la sicigia de Hilbert, el anillo $S = k[X_0, \ldots, X_n]$ tiene dimensión global finita $n+1$ y cada resolución libre minimal acaba en F_{n+1}, es decir, $F_k = 0$ para $k \geq n+2$. Por tanto, $\beta_{i,j} = 0$ para $i \geq n+2$.

Para más detalles en estos aspectos, se puede consultar el capítulo 1 del estupendo [BH98]. Nótese que mucha parte de la teoría se puede desarrollar asumiendo que S es un anillo graduado noetheriano y S_0 un anillo local (no necesariamente un cuerpo). De esta manera se demuestran simultáneamente teoremas para anillos locales noetherianos (si $S_+ = 0$) y para los anillos coordenados proyectivos sobre un cuerpo (cuando S_0 es un cuerpo).

1.3 Variedades que nunca son intersección completa

Es fácil encontrar subvariedades proyectivas lisas $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ que no sean intersección completa. El ejemplo más sencillo es el de la cúbica alabeada en $\mathbb{P}^3$, que es la imagen de la inmersión de Veronese $\varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ dada por:

$$[s : t] \mapsto [s^3 : s^2t : st^2 : t^3] \tag{1.7}$$

Es un ejercicio usual comprobar que el ideal homogéneo de esta curva racional $X \subset \mathbb{P}^3$ es:

$$I(X) = (X_0X_3 - X_1X_2, X_1^2 - X_0X_2, X_2^2 - X_1X_3) \tag{1.8}$$

Es evidente que estas tres cuádricas son linealmente independientes, así que forman un conjunto generador minimal de I y, como X tiene codimensión 2, deducimos de la sección anterior que X no es intersección completa.

Sin embargo, en este caso Y es una curva racional, isomorfa a $\mathbb{P}^1$, que es una intersección completa (trivial) en un proyectivo. Por tanto cabe considerar la siguiente

Cuestión 1.5. ¿Hay variedades proyectivas lisas que no sean isomorfas a ninguna intersección completa?

La respuesta es afirmativa, para $\dim X \geq 1$ arbitraria. Como es natural en este tipo de cuestiones, la solución consiste en hallar ciertos invariantes de una variedad proyectiva X que tomen valores restringidos cuando $X \subset \mathbb{P}^n$ sea una intersección completa.

1.3.1 Polinomio de Hilbert de una variedad proyectiva. Grado de una intersección completa

Como sabemos, a todo esquema proyectivo $Y \subseteq \mathbb{P}^n_k$ le corresponden un ideal homogéneo saturado $I_Y \subseteq S = k[X_0, \ldots, X_n]$, y un anillo graduado $S(Y) = S/I_Y$. Como $S(Y)$ es una k-álgebra graduada, es natural considerar la función $\varphi_Y(l) = \dim_k S(Y)_n$. No es difícil demostrar que en tal caso existe un único polinomio $P_Y \in \mathbb{Q}[z]$ que cumple $P_Y(l) = \varphi_Y(l)$ para $l >> 0$ ([Ha77] I 7.5). A este polinomio se le denomina polinomio de Hilbert de $Y \subseteq \mathbb{P}^n_k$ (nótese que P_Y depende del embebimiento cerrado $Y \subseteq P_Y$, no es un objeto intrínseco a Y como esquema).

Del polinomio de Hilbert se puede leer mucha información sobre el subesquema $Y \subseteq \mathbb{P}^n_k$. Por ejemplo, la dimensión de Y se puede obtener como $\dim Y = \deg P_Y$. Además, si $\deg P_Y = r$, el grado de Y, que denotamos por $\deg Y$ (y que si Y es reducido es el número de puntos de intersección de Y con una $n-r-1$-variedad lineal genérica de $\mathbb{P}^n_k$), es $r!$ veces el coeficiente principal de P_Y. Por último, el género aritmético de Y se puede obtener como $p_a(Y) = (-1)^r(P_Y(0) - 1)$. Nótese que, aunque por esta definición no lo parezca, el género aritmético es un invariante de Y, pues también se puede definir como $p_a(Y) = (-1)^r(\chi(\mathcal{O}_Y) - 1)$, que sólo depende de la dimensión de Y y de la característica de Euler del haz estructural $\mathcal{O}_Y$ ([Ha77] Ejer. III.5.2.).

Si I es un ideal homogéneo de S y F es un polinomio homogéneo tal que $\overline{F} \in S(Y)$ es regular, entonces podemos formar la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow S(Y)(-d) \xrightarrow{\cdot F} S(Y) \longrightarrow S/(I+(F)) \longrightarrow 0 \tag{1.9}$$

Por tanto, deducimos que $\dim_k(S/(I+(F)))_n = P_Y(n) - P_Y(n-d)$ para $n >> 0$. En particular, consideremos una intersección completa $Y = X_1 \cap \ldots \cap X_r$, con $I_Y = (F_1, \ldots, F_r)$, donde $X_i = V(F_i)$ y los F_i son polinomios homogéneos de grados d_i que forman una sucesión regular. Entonces, con la notación $Y_i = X_1 \cap \ldots \cap X_i$, podemos aplicar el razonamiento anterior para deducir:

$$P_{Y_{i+1}}(n) = P_{Y_i}(n) - P_{Y_i}(n - d_{i+1}) \tag{1.10}$$

De aquí es inmediato comprobar que $\deg Y_{i+1} = d_{i+1} \deg Y_i$. Inductivamente, llegamos a que el grado de una intersección completa es:

$$\deg Y = \prod_{i=1}^{c} d_i \tag{1.11}$$

1.3.2 Género de una curva que es intersección completa

Para encontrar curvas que no son intersección completa en ningún proyectivo el invariante que vamos a considerar es el género. Nótese que estamos tratando con curvas proyectivas lisas, y en tal caso el género geométrico y el género aritmético coinciden (como caso particular de la dualidad de Serre, [Ha77] III.7.12.2). Por tanto podemos hablar sin ambigüedad del género de la curva X, que denotamos por $\mathrm{g}(X)$. En general $\mathrm{g}(X) \geq 0$, pues el género geométrico de una variedad lisa X se puede definir como $p_g(X) = \dim_k H^0(X, \omega_X)$, donde ω_X es el haz canónico de X. Además, el género de una curva X puede tomar cualquier valor no negativo ([Ha77] V.1.5.2).

Como consecuencia de Riemann-Roch, el género se puede expresar como ([Ha77] IV 1.3.3):

$$\mathrm{g}(X) = 1 + \frac{1}{2} \deg K \tag{1.12}$$

donde K es el divisor asociado al haz canónico ω_X y deg denota el grado de un divisor sobre la curva proyectiva lisa X. En el caso particular en el que la curva $X \subseteq \mathbb{P}^n$ sea intersección completa de tipo $\boldsymbol{d} = (d_1, \ldots, d_{n-1})$, comprobaremos en la sección 1.6 que $\omega_X = \mathcal{O}_X((d_1 - 1) + \ldots + (d_{n-1} - 1) - 2)$ y, por tanto, $\deg K$ es $((d_1 - 1) + \ldots + (d_{n-1} - 1) - 2)$ veces el grado del divisor asociado a la sección hiperplana $\mathcal{O}_X(1)$. Pero este grado coincide con el grado de X como subvariedad de $\mathbb{P}^n$ (tomando un hiperplano general, ambos son el número de puntos de intersección del hiperplano con la curva). Por tanto, deducimos:

$$\mathrm{g}(X) = 1 + \frac{d}{2}((d_1 - 1) + \ldots (d_{n-1} - 1) - 2) \tag{1.13}$$

donde $d = \prod d_i$ es el grado de X en $\mathbb{P}^n$. Ignorando los casos en los que algún $d_i = 1$ (que equivalen a considerar una curva en $\mathbb{P}^{n-1}$), se comprueba inmediatamente que $\mathrm{g}(X)$ omite valores positivos cuando X es intersección completa. La sucesión de posibles valores empieza por $0, 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, \ldots$ [2]. En particular, las curvas proyectivas lisas de género 2 nunca son intersección completa en un proyectivo.

Otra forma de encontrar curvas proyectivas lisas que nunca son intersección completa es estudiando el haz canónico. Como veremos, si $X \subseteq \mathbb{P}^n$ es una intersección completa de tipo $d_1 \geq \ldots \geq d_r$, el haz canónico es $\omega_X = \mathcal{O}_X(d_1 + \ldots d_r - n - 1)$. Si X es una curva, entonces $r = n - 1$ y asumiendo $d_i \geq 2$, tenemos que $d_1 + \ldots d_{n-1} - n - 1 > 0$ salvo en los casos $n = 1$ (curva racional), $n = 2$, $d_1 = 2$ (cónica en $\mathbb{P}^2$, también racional), $n = 2$, $d_1 = 3$ (curva elíptica plana) y $n = 3$, $d_1 = d_2 = 2$, que como acabamos de calcular tiene género 1, por lo que es una curva elíptica. Por tanto, deducimos que si X es una curva con $\mathrm{g}(X) \geq 2$ que es

[2] Para el lector interesado, esta es la sucesión A266322 en OEIS. https://oeis.org/A266322

intersección completa en algún proyectivo, entonces el haz canónico ω_X es muy amplio.

Las curvas hiperelípticas son curvas de género $g \geq 2$ para las que existe un morfismo $f : X \to \mathbb{P}^1$ de grado 2. Se puede demostrar ([Ha77] IV. 5. 2) que para una curva de género $g \geq 2$ el haz canónico ω_X es muy amplio si y sólo si la curva no es hiperelíptica. Por tanto, las curvas hiperelípticas proporcionan una familia de curvas que no son intersección completa en ningún proyectivo.

1.3.3 Dimensión superior. Cohomología de haces

Para encontrar variedades proyectivas lisas X con $\dim X > 1$ que no sean intersección completa en ningún proyectivo, vamos a ver que la cohomología de los haces $\mathcal{O}_X(n)$ está muy restringida si X es intersección completa. En primer lugar, recordemos cómo es la cohomología de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$ ([Ha77] III 5.1).

Proposición 1.6. *Sea A un anillo noetheriano, $S = A[X_0, \dots, X_r]$ y $X = \mathbb{P}^r_A = \mathrm{Proj}(S)$, con $r \geq 1$. Entonces:*

1. *La aplicación natural $S \to \Gamma_*(\mathcal{O}_X) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(n))$ es un isomorfismo de S-módulos graduados.*
2. *$H^i(X, \mathcal{O}_X(n)) = 0$ para $0 < i < r$ y $n \in \mathbb{Z}$ arbitrario.*
3. *$H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1)) \cong A$.*
4. *La aplicación natural $H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) \times H^r(X, \mathcal{O}_X(-n-r-1)) \to H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1)) \cong A$ es un pairing perfecto entre A-módulos libres finitamente generados, para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Partiendo de este resultado vamos a demostrar la siguiente:

Proposición 1.7. *Sea $Y \subseteq X = \mathbb{P}^N$ una intersección completa de dimensión $q \geq 1$. Entonces:*

1. *La aplicación natural $H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) \to H^0(Y, \mathcal{O}_Y(n))$ es sobreyectiva para $n \in \mathbb{Z}$ arbitrario.*
2. *$H^i(Y, \mathcal{O}_Y(n)) = 0$ para $0 < i < q$ y $n \in \mathbb{Z}$ arbitrario.*

Antes de la demostración, es necesaria una breve discusión. Sea $f : X' \to X$ un morfismo de esquemas e $Y \subseteq X$ un subesquema cerrado, correspondiente a un haz de ideales $\mathcal{I}_Y \subseteq \mathcal{O}_X$. Al hacer el cambio de base de $Y \subseteq X$ respecto a f, obtenemos un subesquema cerrado $Y' \subseteq X$:

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f} & X \\ \uparrow & & \uparrow \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array} \tag{1.14}$$

Llevados por el buen comportamiento que suelen tener los cambios de base, podríamos pensar que $f^*(\mathcal{I}_Y)$ es el ideal asociado a $Y' \subseteq Y$. Sin embargo, de inmediato vemos que esto no es cierto. En efecto, el cambio de base de la inyección $\mathcal{I}_Y \subseteq \mathcal{O}_X$ es una aplicación $f^*(\mathcal{I}_Y) \to f^*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_{X'}$ que, en general, no es una inyección. Sin embargo, la imagen de esta aplicación sí que es $\mathcal{I}_{Y'}$. A continuación, queremos ver cuando $f^*(\mathcal{O}_X) \to \mathcal{O}_{X'}$ es una inyección. Como la exactitud se puede comprobar localmente, es necesario y suficente que:

$$\mathcal{I}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{X',x'} \to \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{X',x'} = \mathcal{O}_{X',x'} \tag{1.15}$$

sea una aplicación inyectiva para $x' \in X'$ arbitrario, donde $x = f(x)$.

Como es lo único que vamos a necesitar, nos restringimos al caso de dos subesquemas cerrados de X, digamos $X' = X_1, Y = X_2$. En esta situación, el producto fibrado de las inclusiones es el subesquema cerrado $X_1 \cap X_2$ con haz de ideales $\mathcal{I}_{X_1\cap X_2} = \mathcal{I}_{X_1} + \mathcal{I}_{X_2}$ en $\mathcal{O}_X$, y queremos ver en qué condiciones el cambio de base de $\mathcal{I}_{X_2} \subseteq \mathcal{O}_X$ al subesquema cerrado $X_1 \subseteq X$ es el haz de ideales de $X_1 \cap X_2$ visto como subesquema cerrado de X_1.

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, hook] & X \\ X_1 \cap X_2 \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & X_2 \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \tag{1.16}$$

Fijemos $x \in X_1 \subseteq X$, y denotemos por A al anillo local $\mathcal{O}_{X,x}$, y por I_i a $\mathcal{I}_{X_i,x}$, que son ideales del anillo local A. Entonces se tiene $\mathcal{O}_{X_i,x} = A/I_i$ y 1.15 se transforma en:

$$I_2 \otimes_A \frac{A}{I_1} \to \frac{A}{I_1} \tag{1.17}$$

Pero $I_2 \otimes_A A/I_1 = I_2/I_1I_2$, y la aplicación factoriza como:

$$\frac{I_2}{I_1I_2} \to \frac{I_2}{I_1 \cap I_2} \hookrightarrow \frac{A}{I_1} \tag{1.18}$$

por lo que será una inyección si y sólo si $I_1I_2 = I_1 \cap I_2$.

Ahora bien, supongamos que $Y \subseteq X = \mathbb{P}^n$ es una intersección completa de codimensión r, digamos $Y = Z_1 \cap \ldots \cap Z_r$, donde Z_i es la hipersuperficie correspondiente a un polinomio homogéneo F_i de grado d_i. Por ser intersección completa, la sucesión $F_1, \ldots, F_r$ es regular en $S = k[X_0, \ldots, X_n]$ (nótese que no importa el orden, porque estamos tratando con elementos homogéneos de un anillo noetheriano graduado, [Ma86] 16.4). Fijando $2 \leq s \leq r$, también $F_1, \ldots, F_s$ es una sucesión regular. Por tanto, para cada primo $P \in \mathrm{Proj}(S)$ (que denotamos por x cuando lo vemos como punto del esquema), sin pérdida de generalidad $X_0 \notin P$, tenemos que, o bien $G_1, \ldots, G_s$ es una sucesión regular de $S_{(P)} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n,x}$ (de nuevo no importa el orden, porque estamos en un anillo noetheriano local) o bien $(G_1, \ldots, G_s) = S_{(P)}$, donde $G_i = F_i/X_0^{d_i}$. En cualquier caso, si $I_1 = (G_1, \ldots, G_{s-1})$ e $I_2 = (G_s)$, tenemos que $I_1 \cap I_2 = I_1I_2$. En efecto, si $f \in I_1 \cap I_2$, digamos $f = aG_s \in I_1$, entonces por definición de sucesión regular, $a \in I_1$, así que $f = aG_s \in I_1I_2$.

Como conclusión de la discusión anterior hemos demostrado la siguiente:

Proposición 1.8. *Si $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ es una intersección completa de codimensión r, con $Y = Z_1 \cap \ldots \cap Z_r$, donde Z_i es la hipersuperficie asociada a un polinomio homogéneo F_i de grado d_i, entonces para $2 \leq s \leq r$, el haz de ideales de $Z_1 \cap \ldots \cap Z_s$ como subesquema de $Z_1 \cap \ldots \cap Z_{s-1}$ es la restricción del haz de ideales de $Z_s \subseteq \mathbb{P}^n$ a $Z_1 \cap \ldots \cap Z_{s-1}$.*

En particular, como $\mathcal{I}_{Z_s} \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ se puede ver como una inyección $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d_s) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ (multiplicación por F_s), entonces restringiendo a $Y_{s-1} = Z_1 \cap \ldots \cap Z_{s-1}$ tenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{Y_{s-1}}(-d_s) \longrightarrow \mathcal{O}_{Y_{s-1}} \longrightarrow i_*\mathcal{O}_{Y_s} \longrightarrow 0 \tag{1.19}$$

Demostración de 1.7. Supongamos que $Y = Z_1 \cap \ldots \cap Z_r$ para hipersuperficies de grados $d_1 \geq \ldots \geq d_r$, donde $r = \operatorname{codim} Y \leq n-1$. Fijemos la notación $Y_i = Z_1 \cap \ldots \cap Z_i$, y $X = \mathbb{P}^N$, y procedamos por inducción. Para $i = 1$, tenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-d_1) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow i_*\mathcal{O}_{Y_1} \longrightarrow 0 \tag{1.20}$$

Tensorizando por $\mathcal{O}_X(n)$ tenemos $i_*(\mathcal{O}_{Y_1}) \otimes \mathcal{O}_X(n) = i_*(\mathcal{O}_{Y_1} \otimes i^*(\mathcal{O}_X(n))) = i_*(\mathcal{O}_{Y_1} \otimes \mathcal{O}_{Y_1}(n)) = i_*(\mathcal{O}_{Y_1}(n))$, donde la primera igualdad es la fórmula de proyección ([Ha77] Ejerc. II 5.1.d). Por tanto, tras tensorizar obtenemos:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(n-d_1) \longrightarrow \mathcal{O}_X(n) \longrightarrow i_*\mathcal{O}_{Y_1}(n) \longrightarrow 0 \tag{1.21}$$

Además, recordemos que (en general, en el contexto de espacios topológicos y haces de grupos abelianos), si $i : Y \to X$ es la inclusión del subespacio cerrado Y en el espacio topológico X, y $\mathcal{F}$ es un haz de grupos abelianos sobre Y, entonces $H^j(Y, \mathcal{F}) = H^j(X, i_*(\mathcal{F}))$ ([Ha77] III 2.10). Por lo tanto, en nuestro caso tendremos

$H^j(Y_1, \mathcal{O}_{Y_1}(n)) = H^j(X, i_*\mathcal{O}_{Y_1}(n))$. Entonces, considerando la sucesión exacta larga de cohomología asociada a 1.21 (y teniendo en cuenta la proposición 1.6) obtenemos que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, la aplicación natural

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) \to H^0(Y_1, \mathcal{O}_{Y_1}(n)) \tag{1.22}$$

es sobreyectiva, y que $H^i(Y_1, \mathcal{O}_{Y_1}(n)) = 0$ para $0 < i < n-1$. Es decir, el teorema sería cierto para $r = 1$. Supongamos ahora cierta la conclusión para $s-1$ y veamos que también se cumple para s. De la discusión anterior al teorema, tenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{Y_{s-1}}(-d_s) \longrightarrow \mathcal{O}_{Y_{s-1}} \longrightarrow i_*\mathcal{O}_{Y_s} \longrightarrow 0 \tag{1.23}$$

Tensorizando por $\mathcal{O}_{Y_{s-1}}(n)$ y usando la fórmula de proyección llegamos a:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{Y_{s-1}}(n-d_s) \longrightarrow \mathcal{O}_{Y_{s-1}}(n) \longrightarrow i_*\mathcal{O}_{Y_s}(n) \longrightarrow 0 \tag{1.24}$$

Considerando la sucesión exacta larga de cohomología asociada a esta sucesión y usando el paso inductivo (en particular, $H^1(Y_{s-1}, \mathcal{O}_{Y_{s-1}}(n-d_s)) = 0$ por ser $s \leq r \leq n-1$), deducimos que:

$$H^0(Y_{s-1}, \mathcal{O}_{Y_{s-1}}(n)) \to H^0(Y_s, \mathcal{O}_{Y_s}(n)) \tag{1.25}$$

es sobreyectiva y que $H^i(Y_s, \mathcal{O}_{Y_s}(n)) = 0$ para $0 < i < N-s$. Por inducción , llegamos al caso $s = r$ y obtenemos el resultado, pues $H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) \to H^0(Y, \mathcal{O}_Y(n))$ es composición de las aplicaciones $H^0(Y_i, \mathcal{O}_{Y_i}(n)) \to H^0(Y_{i+1}, \mathcal{O}_{Y_{i+1}}(n))$ que son sobreyectivas. □

Una consecuencia importante del teorema anterior es que las intersecciones completas de dimensión positiva son conexas. En efecto, si una variedad proyectiva Y no es conexa se tiene que $\dim_k(H^0(Y, \mathcal{O}_Y)) > 1$, por lo que sería imposible que $k = H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}^n) \to H^0(Y, \mathcal{O}_Y)$ fuera sobreyectiva.

Volviendo a nuestro problema de encontrar variedades proyectivas lisas que nunca sean intersección completa, para una variedad lisa $Y \subseteq X = \mathbb{P}^n$ los haces invertibles $\mathcal{O}_Y(n)$ dependen del embebimiento de Y en un proyectivo, pero el haz estructural $\mathcal{O}_Y$ es intrínseco a Y. De esta manera, si una variedad Y de dimensión q fuera intersección completa en algún proyectivo, se tendría $H^i(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ para $0 < i < q$.

Consideremos una curva lisa proyectiva C con $H^1(C, \mathcal{O}_C) \neq 0$. Por dualidad de Serre, $H^1(C, \mathcal{O}_C) = H^0(C, \omega_C)$, donde ω_C es el haz canónico de C, por lo que nos vale cualquier curva no racional, como, por ejemplo, una curva elíptica. En tal caso, $C \times \mathbb{P}^n$ es una variedad lisa proyectiva de dimensión $n+1$ que no puede ser intersección completa. En efecto, podemos calcular la cohomología del haz estructural usando la fórmula de Künneth ([SP], etiqueta [0BED]):

Teorema 1.9. *Sea k un cuerpo. Sean X e Y esquemas sobre k, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo quasicoherente y $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}_Y$-módulo quasicoherente. Entonces tenemos un isomorfismo canónico*

$$H^n(X \times_{\operatorname{Spec}(k)} Y, \pi_1^*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times_{\operatorname{Spec}(k)} Y}} \pi_2^*\mathcal{G}) = \bigoplus_{p+q=n} (H^p(X, \mathcal{F}) \otimes_k H^q(Y, \mathcal{G})) \tag{1.26}$$

siempre y cuando X e Y sean cuasicompactos y tengan diagonal afín.

En general, decimos que un morfismo $f : X \to Y$ tiene diagonal afín si la aplicación diagonal $\Delta : X \to X \times_Y X$ es un morfismo afín. Además, decimos que $f : X \to Y$ es separada si el morfismo Δ es una inmersión cerrada. Como las inmersiones cerradas son siempre afines, vemos que los morfismos separados tienen diagonal afín. En general, las variedades proyectivas son propias, así que en particular son quasicompactas y separadas, por lo que las hipótesis de la fórmula de Künneth se satisfacen.

En nuestro caso, considerando $X = C$, $Y = \mathbb{P}^n$, $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, $\mathcal{G} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$, tenemos $pr_1^*(\mathcal{O}_C) = \mathcal{O}_{C \times \mathbb{P}^n}$, $pr_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = \mathcal{O}_{C \times \mathbb{P}^n}$ por lo que de la fórmula de Künneth deducimos:

$$h^1(C \times \mathbb{P}^n) = h^0(C)h^1(\mathbb{P}^n) + h^1(C)h^0(\mathbb{P}^n) = h^1(C) \neq 0 \tag{1.27}$$

donde $h^i(X) = \dim_k H^i(X, \mathcal{O}_X)$ para una variedad proyectiva. Por tanto, $C \times \mathbb{P}^n$ no puede ser una intersección completa en ningún proyectivo. En el segundo capítulo, como consecuencia del teorema de Lefschetz, veremos otra forma más útil de deducir que una variedad lisa no es intersección completa en ningún proyectivo..

1.4 Existencia de intersecciones completas lisas de cualquier tipo

En esta sección vamos a ver que las intersecciones completas lisas existen en abundancia.

La herramienta principal que necesitamos es el clásico teorema de Bertini. Enunciamos aquí una versión básica, y adaptamos la demostración en [Ha77] II 8.18, al caso cuasiproyectivo.

Teorema 1.10. *Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una subvariedad cuasiproyectiva integral lisa de dimensión $r \geq 1$, sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k. Sea $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|$ el espacio proyectivo asociado al espacio vectorial de formas lineales $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$. Entonces, el conjunto de hiperplanos $H \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|$ tales que $X \not\subseteq H$ y $X \cap H$ es lisa contiene un abierto denso $U \subseteq |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|$. Si $X \subseteq \mathbb{P}^n$ es proyectiva, entonces el conjunto de hiperplanos con la propiedad anterior es un abierto denso.*

Demostración. Para cada punto cerrado $x \in X$, definimos el conjunto de secciones "malas" de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ como $M_x = \{$hiperplanos H tales que, o bien $X \subseteq H$, o bien $X \not\subseteq H$, $x \in X \cap H$, pero x no es regular en $X \cap H\}$, y denotamos por B_x a su complementario, los hiperplanos buenos respecto a x (aquí la notación es al contrario que en Hartshorne [Ha77]). Veamos que M_x es un subespacio vectorial de $V = H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ y calculemos su dimensión.

Fijemos un $s_0 \in S_1 = H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ tal que $x \notin H_0$, donde H_0 es el hiperplano correspondiente a s_0 (que se corresponde a fijar un afín $\mathbb{P}^n - H_0$ donde x esté contenido). Entonces podemos definir la aplicación de k-espacios vectoriales

$$\varphi : S_1 \to \mathcal{O}_{X,x} \quad , \quad P \mapsto \overline{\frac{P}{P_0}} \in \mathcal{O}_{X,x} \tag{1.28}$$

donde $\mathcal{O}_{X,x}$ es el cociente de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n,x}$ por un ideal $\mathfrak{p}_x$. Denotemos por $\mathfrak{m}_x$ al ideal maximal del anillo local $\mathcal{O}_{X,x}$. Por hipótesis, el anillo local noetheriano $\mathcal{O}_{X,x}$ es regular, de dimensión $r = \dim X$ (porque x es cerrado), por lo que $\operatorname{emb.dim} \mathcal{O}_{X,x} = \dim_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x} \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = r$. Como k es algebraicamente cerrado, el cuerpo $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$, que siempre es una extensión finita de k por el lema de Zariski ([Ma86] 5.2), se identifica con k por la inclusión natural $k \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,x} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$.

En general si $(A, \mathfrak{m}, k)$ es un anillo regular y $0 \neq a \in \mathfrak{m}$, el anillo local $A/(a)$ es regular si y sólo si $a \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$, o lo que es lo mismo $\overline{a} \neq 0$ en $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. En efecto, por una parte, como A es un dominio local noetheriano, tenemos que $\dim A/(a) = \dim A - 1$ ([AM69] 11.18). Por otra parte, si $\mathfrak{n} = \overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}/(a) \subseteq A/(a)$, está claro que $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \simeq \mathfrak{m}/((a) + \mathfrak{m}^2)$ por lo que $\operatorname{emb.dim} A/(a) = \operatorname{emb.dim} A$ si $a \in \mathfrak{m}^2$ y $\operatorname{emb.dim} A/(a) = \operatorname{emb.dim} A - 1$ en caso contrario.

Está claro que si H es un hiperplano de ecuación P, entonces $x \in H$ si y sólo si $\varphi(P) \in \mathfrak{m}_x$. Por otra parte, tenemos que $X \subseteq H$ si y sólo $P/P_0 \in \mathfrak{p}_x \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n,x}$, es decir, si $\varphi(P) = 0$. Por último, si $0 \neq \varphi(P) \in \mathfrak{m}_x$, poniendo $Y = X \cap H$, entonces $\mathcal{O}_{Y,x} = \mathcal{O}_{X,x}/(\varphi(P))$ por lo que x es un punto liso de Y si y sólo si $\varphi(P) \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$. Por tanto, de la discusión anterior vemos que $H \in M_x$ si y sólo si $\varphi(P) \in \mathfrak{m}_x^2$. De aquí está claro que $M_x \subseteq V$ es un subespacio vectorial. Para ver su dimensión, sea $\psi = \pi \circ \varphi$, donde $\pi : \mathcal{O}_{X,x} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^2$. Entonces ψ es un aplicación k-lineal, y $M_x = \psi^{-1}(0) = \ker \psi$. Si $\mathfrak{n}_x$ es el ideal maximal de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n,x}$, tenemos que ψ factoriza como:

$$S_1 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}/\mathfrak{n}_x^2 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}/\mathfrak{m}_x^2 \tag{1.29}$$

Es trivial comprobar que ambas aplicaciones son sobreyectivas, con lo que deducimos que $\dim_k M_x = \dim_k(S_1) - \dim_k(\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^2) = (n+1) - (r+1) = n - r$. Visto como espacio proyectivo, es una subvariedad lineal de dimensión $n - r - 1$ en $(\mathbb{P}^n)^* = \mathbb{G}(n-1, n)$. Consideremos ahora la siguiente relación de incidencia:

$$\Sigma = \{(x, H) : x \in X, H \in M_x\} \subseteq X \times \mathbb{G}(n-1, n) \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{G}(n-1, n) \tag{1.30}$$

Veamos que Σ es cerrado de Zariski en $X \times \mathbb{G}(n-1, n)$. Basta comprobarlo localmente. Sea $U \subseteq \mathbb{P}^n$ un abierto en el que X está dado por $I_X = (F_1, \dots, F_k)$. Sean las coordenadas $x = [x_0 : \dots : x_n]$ y $H = [a_0 : \dots : a_n]$. Por ser X regular, tenemos que la matrix:

$$\begin{pmatrix} \partial_0 F_1 & \dots & \partial_n F_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_0 F_k & \dots & \partial_n F_k \end{pmatrix} \tag{1.31}$$

tiene rango $n - r$ en cada punto $x \in X$. Entonces es inmediato que en $U \times \mathbb{G}(n-1, n)$ la relación Σ está dada por las ecuaciones:

$$F_0(x) = \dots = F_k(x) = a_0 x_0 + \dots a_n x_n = 0 \tag{1.32}$$

(para que $x \in X \cap H$), y por la anulación de los menores de tamaño $n - r + 1$ en:

$$\begin{pmatrix} \partial_0 F_1 & \dots & \partial_n F_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_0 F_k & \dots & \partial_n F_k \\ a_0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \tag{1.33}$$

Por tanto, se sigue que Σ es un subesquema cerrado reducido de $X \times \mathbb{G}(n-1, n)$. Si X fuera proyectiva, deduciríamos que Σ también es proyectiva. Sabemos que la primera proyección de $X \times \mathbb{G}(n-1, n)$ restringida a Σ es sobreyectiva, y que la fibra de un punto cerrado $x \in X$ es M_x, un espacio proyectivo de dimensión $n - r - 1$. Aplicando A.7 deducimos que $\dim \Sigma \leq r + n - r - 1 = n - 1$. Si X fuera proyectiva, al ser Σ un esquema propio podríamos aplicar A.6 para deducir que Σ es irreducible de dimensión $n - 1$.

Si ahora consideramos la segunda proyección de $X \times \mathbb{G}(n-1, n)$ restringida a Σ, podemos aplicar $A.2$ para deducir que su imagen $\pi_2(\Sigma) \subset \mathbb{G}(n-1, n)$, que es exactamente el conjunto de hiperplanos malos en algún punto, es de dimensión $\leq n - 1$. Como $\mathbb{G}(n-1, n)$ es un proyectivo de dimensión n deducimos que hay un abierto denso $U \subseteq \mathbb{G}(n-1, n)$ disjunto de $\pi_2(\Sigma)$, que es justamente lo que queríamos. Si X fuera proyectiva, $\pi_2(\Sigma)$ sería cerrado, así que el conjunto de hiperplanos H tales que $H \cap X$ es una variedad lisa de dimensión $r - 1$ sería un abierto denso de $\mathbb{G}(n-1, n)$, como queríamos. □

En particular, existe un hiperplano $H \in \mathbb{P}^n$ tal que $X \cap H$ es una subvariedad lisa de dimensión $r - 1$. Usando técnicas de cohomología se puede ver (al menos en el caso en que X es proyectivo, [Ha77] III 7.9.1) que si $\dim X \geq 2$, entonces $X \cap H$ es conexo. En la demostración hemos asumido que X es conexo (o lo que es lo mismo en este caso, integral), pero está claro que si X es un subesquema liso se puede aplicar el resultado a cada una de sus componentes conexas, con las mismas conclusiones.

Quizá en esta formulación, restringida a hiperplanos, el teorema de Bertini pueda parecer algo limitado. Sin embargo, es bastante flexible si tenemos en cuenta que X admite muchos embebimientos cerrados en espacios proyectivos, y el teorema se puede aplicar a cada uno de ellos obteniendo así subesquemas de X de codimensión 1 de muy distinta geometría. En general, si X es un esquema y $\mathcal{L}$ un haz invertible sobre X, decimos que $\mathcal{L}$ es muy amplio si existe un embebimiento localmente cerrado $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ tal que $\mathcal{L} = i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$. Si identificamos el embebimiento cerrado i con una inclusión, esto es lo mismo que decir que $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(1)$.

Normalmente vamos a tratar con esquemas proyectivos (es decir, subesquemas cerrados de algún proyectivo). En tal caso X es propio, y el embebimiento i de la definición anterior siempre es cerrado, por lo que podemos ver X como subesquema cerrado de $\mathbb{P}^n$. Nótese que si el haz invertible $\mathcal{L}$ es muy amplio sobre un esquema X, entonces para cualquier subesquema $j : Y \hookrightarrow X$, la restricción $j^*(\mathcal{L})$ de $\mathcal{L}$ a Y, es un haz invertible muy amplio sobre Y. En efecto, basta comprobar que si $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ da un embebimiento con $\mathcal{L} = i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$, entonces $i \circ j$ da un embebimiento con $(i \circ j)^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = j^*(\mathcal{L})$.

Para nuestros propósitos nos interesa recordar que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$ es muy amplio para todo $k \geq 1$. En efecto, para $k = 1$ es tautológico, y para $k > 1$ tenemos la inmersión de Veronese de grado k y dimensión n, $\varphi_{k,n} : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^N$, donde $N = \binom{n+k}{k} - 1$. Si $S_0, S_1, \ldots, S_{N-1}$ son los monomios de grado k en las $n+1$ variables $X_0, \ldots, X_n$, entonces el embebimiento está dado por:

$$[t_0 : \ldots : t_n] \mapsto [S_0(t_0, \ldots, t_n) : \ldots : S_N(t_0, \ldots, t_n)] \tag{1.34}$$

Es un ejercicio típico (y muy sencillo) comprobar que esta aplicación es un embebimiento cerrado, y que $\varphi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$. Por tanto, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$ es muy amplio para $k \geq 1$. De ello, para cualquier subesquema $X \subseteq \mathbb{P}^n$, el haz invertible $\mathcal{O}_X(k)$ es muy amplio para $k \geq 1$.

Tras estas observaciones, es muy sencillo deducir la existencia de intersecciones completas lisas de cualquier tipo $\boldsymbol{d} = (d_1, \ldots, d_r)$. En efecto, aplicando Bertini al haz invertible $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_1)$, deducimos que hay un abierto denso $U_1 \subseteq |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_1)|$ tal que para todo $F_1 \in U_1$ la hipersuperficie definida por el polinomio F_1 es una hipersuperficie lisa. Habiendo encontrado $F_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_i)$ tal que $Y = F_1 \cap \ldots \cap F_{r-1}$ es una intersección completa lisa, consideramos $\mathcal{O}_Y(d_r)$, que es un haz muy amplio sobre Y. Aplicando Bertini, hay un abierto denso $V \subseteq |\mathcal{O}_Y(d_r)|$ tal que, para todo $G_r \in V$, el divisor efectivo de Y definido por G_r es una subvariedad lisa de codimensión 1 en Y. Pero sabemos que la aplicación natural, $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_r)) \to H^0(Y, \mathcal{O}_Y(d_r))$ es sobreyectiva, por lo que G_r es la restricción de un polinomio $F_r \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_r))$ a Y. Por tanto, definiendo $X = F_1 \cap F_{r-1} \cap F_r = Y \cap F_r = V(G_r)$, hemos obtenido una intersección completa lisa de tipo $d_1, \ldots, d_r$.

1.5 Intersecciones completas intermedias

En esta sección vamos a demostrar que las hipersuperficies que definen una intersección completa se pueden elegir de manera que las intersecciones intermedias, empezando desde mayor grado, sean lisas.

Si el subesquema cerrado $X \subseteq \mathbb{P}^n$ es intersección completa de la forma $X = Y_1 \cap \ldots \cap Y_r$, entonces para cualquier subconjunto no vacío $J \subseteq \{1, \ldots, r\}$, digamos $J = \{i_1, \ldots, i_s\}$, se tiene que $X_J = \cap Y_{i_s}$ es una intersección completa. En efecto, si Y_j es la hipersuperficie dada por un polinomio F_j, es decir, $(F_j) = I_{Y_j}$, entonces $I_{X_J} = (F_{i_1}, \ldots, F_{i_s})$. Pero como $(F_1, \ldots, F_r)$ tiene altura r, la sucesión es regular. Como estamos en anillos noetherianos graduados, la noción de sucesión regular coincide con la de cuasiregular y entonces el orden es irrelevante ([Ma86] 16.3 y su corolario). Por tanto, deducimos que $F_{i_1}, \ldots, F_{i_s}$ es una sucesión S regular así que el ideal $(F_{i_1}, \ldots, F_{i_s})$ tiene altura s. Por tanto, X_J es una intersección completa.

Jugando un poco, es fácil ver que una variedad lisa $X \subseteq \mathbb{P}^n$ puede surgir como intersección completa de hipersuperficies singulares. Por ejemplo, en $\mathbb{P}^3$, la intersección de la cuádrica (singular en $[0 : 0 : 0 : 1]$) de ecuación $X_0^2 - X_1X_2$ y del hiperplano $V(X_3)$ es la cónica plana de ecuación $X_0^2 - X_1X_2$, que es lisa.

No obstante, sí que es cierto que si X es lisa, entonces las intersecciones intermedias $Y_{i_1} \cap \ldots Y_{i_s}$ son lisas al menos en los puntos de X. Esto es inmediato, ya que X es lisa si y sólo si la matriz:

$$\begin{pmatrix} \partial_0 F_1 & \ldots & \partial_n F_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_0 F_r & \ldots & \partial_n F_r \end{pmatrix} \tag{1.35}$$

tiene rango r en cada punto $x \in X$. Pero para ello es necesario que la matriz formada por las filas $i_1, \ldots, i_s$ tenga rango s en cada punto $x \in X$.

Tras esta observación, es natural preguntarse si una intersección completa la podemos expresar siempre como intersección completa de hipersuperficies lisas. Esto no es cierto. En efecto, consideremos una intersección completa $X = H_1 \cap \ldots \cap H_r$ de tipo $d_1 \geq \ldots \geq d_r$ con $d_r < d_{r-1}$. En esta situación, en el ideal I_X hay un único polinomio homogéneo de grado d_r (salvo escalar), por lo que la hipersuperficie H_r aparece en todas las expresiones de X como intersección completa. Por ejemplo, todavía en $\mathbb{P}^3$, podemos considerar la intersección de la cuádrica Y_2, de ecuación $X_0^2 - X_1X_2$, y de la superficie cúbica Y_1, de ecuación $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3$, que, como se comprueba inmediatamente, es una curva lisa C de grado 6 (y género 4, como vimos en la sección 1.3). Para esta intersección completa, las dos superficies son singulares y, como hemos comentado, Y_2 no se puede sustituir por otra cuádrica. Sin embargo, como demostramos a continuación, podremos obtener C como intersección completa de dicha cuádrica con una superficie cúbica lisa.

Proposición 1.11. *Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una intersección completa lisa de tipo $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_r)$ con $d_1 \geq \ldots \geq d_r$. Entonces se pueden encontrar hipersuperficies H_i de grado d_i tales que $X = H_1 \cap \ldots \cap H_r$ como intersección completa y, además, cada intersección intermedia $Y_i = H_1 \cap \ldots \cap H_i$ es una intersección completa lisa.*

Para probar la proposición, necesitamos un teorema de tipo Bertini un poco más fino. No damos una prueba de este resultado, pues nos obligaría a hablar en detalle de morfismos lisos, lisitud genérica, variedades homogéneas, etc, y se escaparía de nuestros objetivos.

Teorema 1.12. *Sea X una esquema de tipo finito y liso sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0. Sea $\mathcal{L}$ un haz invertible, $V \subseteq H^0(X, \mathcal{L})$ un subespacio de dimensión finita, y Z el conjunto base de V (que es un cerrado de X). Entonces la sección general de $|V|$ es suave en $X - Z$.*

El teorema aparece como la observación III 10.9.2 en [Ha77]. También se puede deducir del teorema 6.3 (2) en [Jo83], en el que sólo se necesita que el cuerpo sea de característica 0 (también se demuestra para cuerpos infinitos de característica $p > 0$, en el caso en el que el morfismo $X - Z \to \mathbb{P}^n$ inducido por el sistema lineal V sea no ramificado).

Demostración (de 1.11). Supongamos que $I_X = (F_1, \ldots, F_r)$ con $d_1 \geq \ldots \geq d_r$. Si $r = 1$, es una tautología. Supongamos $r \geq 2$. Como es usual, $S = k[X_0, \ldots, X_n]$ y S_d es el subespacio de polinomios homogéneos de grado d en S. Consideramos el subespacio lineal V de S_{d_1} engendrado por F_1 y por los subespacios $F_2 S_{d_1-d_2}, \ldots, F_r S_{d_1-d_r}$. Es inmediato comprobar que el conjunto base de $V \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_1)$ es exactamente X, así que aplicando 1.12 deducimos que un miembro general de $|V|$, representado por $G_1 \in V$, da lugar a una hipersuperficie Z_1 lisa en $Z_1 - X$. Por ser un miembro general, podemos tomar $G_1 = F_1 + \sum_{i>1} P_i F_i$, así que $I_X = (G_1, F_2, \ldots, F_r)$. Por lo tanto, X es intersección completa de $Z_1, Y_2, \ldots, Y_r$, y como X es lisa, Z_1 es lisa en X. En definitiva, Z_1 es una hipersuperficie lisa.

Para proceder por inducción, sea $s < r$ (si $s = r$ hemos acabado) y supongamos que hemos encontrado hipersuperficies $Z_1, \ldots, Z_{s-1}$, dadas por polinomios $G_1, \ldots, G_{s-1}$, de manera que $I_X = (G_1, \ldots, G_{s-1}, F_s, \ldots, F_r)$ y que $X_{s-1} = Z_1 \cap \ldots \cap Z_{s-1}$ es lisa. Consideramos la imagen V en $H^0(X_{s-1}, \mathcal{O}_{X_{s-1}}(d_s)$ del subespacio lineal de S_{d_s} engendrado por F_s y por los subespacios $F_{s+1} S_{d_s - d_{s+1}} \ldots, F_r S_{d_s - d_r}$. De nuevo se comprueba que el lugar base de V es exactamente X, por lo que podemos aplicar 1.12 para deducir que la sección general de V sólo puede ser singular en X. Volviendo a S_{d_s}, deducimos que existe $G_s \in S_{d_s}$ de la forma $G_s = F_s + \sum_{i>s} P_i F_i$ y que define una hipersuperficie Z_s de manera que $Z_1 \cap \ldots \cap Z_s$ es liso salvo, quizá, en puntos de X. Pero por la forma de G_s tenemos $I_X = (G_1, \ldots, G_s, F_{s+1}, \ldots, F_r)$ y, como vimos anteriormente, $Z_1 \cap \ldots \cap Z_s$ también es liso en puntos de X. Esto completa la demostración por inducción. □

Volviendo a la curva C anterior, basta considerar la superficie cúbica Z_1 de ecuación $X_1(X_0^2 - X_1 X_2) + (X_1^3 + X_2^3 + X_3^3)$. Inmediatamente se comprueba que $C = Z_1 \cap Y_2$ como intersección completa y que Z_1 es una superficie cúbica lisa.

1.6 Haz canónico de una intersección completa

Gracias a los diferenciales de Kähler, la noción familiar de formas diferenciales en geometría diferencial se puede generalizar al contexto de esquemas. Una buena referencia para los resultados algebraicos es la sección 25 de [Ma86]. Para la visión geométrica seguimos la sección II 8 de [Ha77].

Si X es una variedad lisa irreducible de dimensión n sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k, entonces el haz de diferenciales relativos $\Omega_{X/k}$ es localmente libre de rango n ([Ha77] II 8.15). A su dual lo denotamos por $\mathcal{T}_X = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X)$ y lo denominamos haz tangente de X. Como $\Omega_{X/k}$ es localmente libre, la máxima potencia exterior $\wedge^n \Omega_{X/k}$ es un haz invertible sobre X, que denotamos por ω_X y denominamos *haz canónico* de X.

Cuando X es proyectivo, este objeto juega un papel fundamental en la teoría de dualidad de Serre ([Ha77] III 7) que es un análogo de la dualidad de Poincaré en el contexto algebraico). Si X es proyectivo sobre k, $H^0(X,\omega_X)$ es un k-espacio vectorial de dimensión finita ([Ha77] III 5.2). En tal caso, se define el género geométrico de X como el entero no negativo $p_g(X) = \dim_k H^0(X,\omega_X)$.

Por otra parte, si $Y \subseteq X$ es una subvariedad lisa irreducible de codimensión r de la variedad lisa irreducible X, con haz de ideales $\mathcal{I}_Y$, entonces el haz $\mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Y^2$ visto como haz sobre Y es localmente libre de rango r. Este haz se denomina *haz conormal* de Y en X. El haz normal de Y en X es su dual $\mathcal{N}_{Y,X} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Y^2, \mathcal{O}_Y)$, que también es localmente libre de rango r.

En lo que sigue, hacemos algunos cálculos para el caso particular en que $X \subseteq \mathbb{P}^n$ es una intersección completa lisa.

Veamos que si $Y \subseteq \mathbb{P}^n$, con haz de ideales $\mathcal{I}$, es una intersección completa lisa de tipo $(d_1,\dots,d_r)$ entonces:

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \simeq \oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_Y(-d_i) \tag{1.36}$$

En efecto, como $I_Y = (F_1,\dots,F_r)$ e $\mathcal{I} = \tilde{I_Y}$ está generado por secciones globales, tenemos el epimorfismo $\oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_X(-d_i) \twoheadrightarrow \mathcal{I}$, que en un anillo local $\mathcal{O}_{X,x}$ actúa por $(P_1,\dots,P_r) \mapsto F_1P_1 + \ldots + F_rP_r$, donde $P_i = Q_i/R_i$, y Q_i, R_i son polinomios homogéneos con $\deg Q_i - \deg R_i = -d_i$ y con $R_i \notin P_x$, donde P_x es el primo homogéneo correspondiente al punto $x \in \mathrm{Proj}(S)$. Tensorizando por $\mathcal{O}_Y$, o restringiendo a Y, que es lo mismo, obtenemos el epimorfismo:

$$\oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_Y(-d_i) \twoheadrightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \tag{1.37}$$

Veamos que es inyectivo, para lo cual basta restringirse a un punto $y \in Y$. Sin pérdida de generalidad, $X_0 \notin P_y$. En tal caso, $(F_1/X_0^{d_1},\dots,F_r/X_0^{d_r})$ es una sucesión regular en el anillo local $\mathcal{O}_{X,y}$ y como $\mathcal{O}_{Y,y} = \mathcal{O}_{X,y}/\mathcal{I}_{X,y}$ y tenemos que $\mathcal{I}_{X,y} = (F_1/X_0^{d_1},\dots,F_r/X_0^{d_r})$, por lo que podemos aplicar [Ma86] 16.2, para deducir que $\mathcal{I}_{X,y}/\mathcal{I}_{X,y}^2$ está generado libremente por las clases de los $F_i/X_0^{d_i}$, que es justo lo que queríamos (básicamente, consiste en ver que una sucesión regular es cuasiregular).

Tomando duales, deducimos también que:

$$\mathcal{N}_{Y,X} \simeq \oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_Y(d_i) \tag{1.38}$$

En general, si $\mathcal{F}, \mathcal{F}', \mathcal{F}''$ son haces localmente libres de rangos r, r', r'' para los que existe una sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0 \tag{1.39}$$

entonces se cumple $\det \mathcal{F} \simeq \det \mathcal{F}' \otimes \det \mathcal{F}''$ ([Ha77] Ejercicio II 5.16). Además, para una suma directa de haces libres $\mathcal{F}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{F}_r$ tenemos una filtración $0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \ldots \oplus \mathcal{F}_r$ con cocientes $\mathcal{F}_i$ y podemos descomponer en sucesiones exactas cortas y tomar determinantes para obtener $\det(\oplus \mathcal{F}_i) = \otimes \det \mathcal{F}_i$.

Un cálculo de mucha importancia es la existencia de una sucesión exacta ([Ha77] II 8.13):

$$0 \longrightarrow \Omega_{X/k} \longrightarrow \mathcal{O}_X(-1)^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0 \tag{1.40}$$

Tomando determinantes deducimos que $\omega_X = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)$. Además, por la proposición 8.20 de [Ha77] (fórmula de adyunción), para una subvariedad lisa irreducible $Y \subseteq X$ de codimensión r en X tenemos que $\omega_Y \simeq \omega_X|_Y \otimes \det \mathcal{N}_{Y,X}$. En particular, si en esta situación $X = \mathbb{P}^n$, obtenemos $\omega_Y = (\det \mathcal{N}_{Y,X})(-n-1)$. Como hemos visto antes, cuando $Y \subset X$ es una intersección completa tenemos $\mathcal{N}_{Y,X} \simeq \oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_Y(d_i)$, y como el determinante de una suma directa es el producto (tensorial) de los determinantes, deducimos $\det \mathcal{N}_{Y,X} \simeq \mathcal{O}_Y(\sum_{i=1}^r d_i)$. Por tanto, para el haz canónico de una intersección completa Y se cumple

$$\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y(d_1 + \ldots + d_r - n - 1) \tag{1.41}$$

En general, cuando una subvariedad lisa $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ cumple $\omega_Y = \mathcal{O}_Y(k)$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ se dice que Y es subcanónica (respecto al embebimiento particular, por supuesto). En particular, hemos demostrado que las intersecciones completas son subcanónicas.

1.7 Otra manera de ver la unicidad del tipo

En [At56], Atiyah demuestra que fijado un esquema proyectivo X, el teorema de Krull-Schmidt es cierto en la categoría abeliana de los haces coherentes sobre X, que denotamos por Coh_X. Decimos que un haz coherente $\mathcal{F}$ es indecomponible, si siempre que expresamos $\mathcal{F} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{H}$, entonces, o bien $\mathcal{G} = 0$, o bien $\mathcal{H} = 0$, donde $\mathcal{G}, \mathcal{H} \in \mathrm{Coh}_X$. El teorema de Krull-Schmidt en Coh_X asegura que para todo haz coherente $\mathcal{F}$ sobre X existe una expresión única (salvo orden):

$$\mathcal{F} = \bigoplus \mathcal{F}_i \tag{1.42}$$

donde $\mathcal{F}_i$ son indecomponibles. Si X es una intersección completa lisa, de tipo $(d_1, \ldots, d_r)$, acabamos de ver que $\mathcal{N}_{Y,X} = \oplus \mathcal{O}_Y(d_i)$, donde $X = \mathbb{P}^n$. Además, demostramos anteriormente que las intersecciones completas de dimensión positiva son conexas. En general, los haces invertibles sobre un esquema proyectivo conexo X son indecomponibles. En efecto, supongamos $\mathcal{L} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{H}$ donde $\mathcal{L}$ es invertible y $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ son coherentes. Entonces, para todo $x \in X$, $\mathcal{L}_x = \mathcal{G}_x \oplus \mathcal{H}_x$. Como $\mathcal{L}_x$ es un módulo libre sobre $\mathcal{O}_{X,x}$, tenemos que $\mathcal{G}_x, \mathcal{H}_x$ son módulos proyectivos. Pero los módulos proyectivos sobre anillos noetherianos locales son libres, por lo que $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ son haces localmente libres, y comparando rangos deducimos que o bien $\mathcal{G}_x$ es libre de rango 1 y $\mathcal{H}_x = 0$, o al revés. Como el rango de un haz localmente libre es localmente constante y estamos asumiento X conexo, deducimos que o bien G o bien H es nulo, así que $\mathcal{L}$ es indecomponible.

Por tanto, para una intersección completa lisa de dimensión positiva Y, la expresión $\mathcal{N}_{Y,X} = \oplus \mathcal{O}_Y(d_i)$ es una descomposición en indecomponibles de $\mathcal{N}_{Y,X}$. Para deducir que los $(d_1, \ldots, d_r)$ están determinados por Y sólo falta ver que $\mathcal{O}_Y(d) \simeq \mathcal{O}_Y(e)$ si y sólo si $d = e$ o, como $\mathrm{Pic}(Y)$ es un grupo, es suficiente ver que $\mathcal{O}_Y(d) \not\simeq \mathcal{O}_Y$ para $d > 0$. Recordemos que, si $S(Y) = k[X_0, \ldots, X_n]/I_Y$ es el anillo coordenado homogéneo, entonces el homomorfismo natural $S(Y)_r \to H^0(Y, \mathcal{O}_Y(r))$ es una inyección. Por tanto, para $r >> 0$ tenemos $\dim_k H^0(Y, \mathcal{O}_Y(r)) \geq P_Y(r)$, donde P_Y es el polinomio de Hilbert de Y. Como el grado de P_Y es la dimensión de Y, tenemos que $\dim_k H^0(Y, \mathcal{O}_Y(r)) >> 0$ cuando $k >> 0$. Si fuera $\mathcal{O}_Y(d) \simeq \mathcal{O}_Y$ tendríamos $\mathcal{O}_Y(ld) \simeq \mathcal{O}_Y$ para todo $l > 0$ y, en particular, $\dim_k H^0(Y, \mathcal{O}_Y(ld))$ sería constante, lo cual es una contradicción.

1.8 Normalidad proyectiva, normalidad lineal

Una variedad proyectiva $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ se dice que es k-normal (respecto al embebimiento en $\mathbb{P}^n$) si la aplicación natural $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}^n_{\mathbb{P}}(k)) \to H^0(Y, \mathcal{O}_Y(k))$ es sobreyectiva. Cuando $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ es k-normal para todo $k \geq 0$, se dice que Y es proyectivamente normal, y cuando es 1-normal se dice que es linealmente normal. Por otra parte, decimos que un esquema X (o en general un espacio localmente anillado) es normal si, para todo $x \in X$, el anillo local $\mathcal{O}_{X,x}$ es un dominio normal. Por ejemplo, las variedades lisas son normales, pues los anillos locales regulares son normales (son dominios de factorización única, [Ma86] 20.3).

De la proposición 1.7, se sigue que las intersecciones completas son proyectivamente normales. Además, es evidente que la normalidad proyectiva implica la normalidad lineal. Estas implicaciones no se pueden revertir, como mostramos a continuación.

Consideremos la cúbica alabeada X, imagen de la inmersión de veronese $\varphi : \mathbb{P}^1 \to X \subseteq \mathbb{P}^3$, con $[s : t] \mapsto [s^3 : s^2t : st^2 : t^3]$. Ya hemos comentado anteriormente por qué X no es intersección completa. Sin embargo, sí que es proyectivamente normal. En efecto, dado $k \geq 0$ la aplicación

$$H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(k)) \simeq H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3k)) \tag{1.43}$$

lleva el polinomio homogéneo $F(X_0, X_1, X_2, X_3)$ de grado k, al polinomio homogéneo $F(T_0^3, T_0^2T_1, T_0T_1^2, T_1^3)$ de grado $3k$. La sobreyectividad de esta aplicación es evidente. Más en general, las curvas racionales normales de grado d, $X \subseteq \mathbb{P}^d$ son proyectivamente normales, pero sólo son intersección completa para $d = 2$, pues no están contenidas en ningún hiperplano y, de ser intersección completa, tendríamos $d = \deg X \geq 2^{d-1}$, que no es posible para $d \geq 3$.

Dando un ejemplo menos trivial, se conoce como teorema de Max Noether al hecho de que, para $g \geq 4$, las curvas canónicas $X \subseteq \mathbb{P}^{g-1}$ (no hiperelípticas) son proyectivamente normales ([GH78] pág 253). Como para definir el embebimiento se usa el sistema lineal completo $|K|$, donde K es el divisor asociado al haz canónico ω_X, entonces X no está contenida en ningún hiperplano. Por tanto, de ser intersección completa tendríamos $\deg X \geq 2^{g-2}$. Pero, como consecuencia de Riemann-Roch, sabemos que $\deg X = \deg K = 2g - 2$, por lo que vemos inmediatamente que X no puede ser intersección completa.

Por otra parte, encontrar variedad lisas linealmente normales pero no proyectivamente normales es algo más enrevesado. Simplifiquemos lo máximo posible. Sea X una curva lisa proyectiva de género g, y D un divisor de X muy amplio de grado d. Entonces, por definición tenemos $X \subseteq \mathbb{P}^{l(D)-1}$ como subesquema cerrado, donde $l(D) = |D| = H^0(X, \mathcal{L}(D))$. Por construcción, X sería linealmente normal, y para que no fuera 2- normal nos bastaría con que se cumpliera $(l(D)+1)l(D)/2 = \dim_k H^0(\mathbb{P}^{l(D)-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{l(D)-1}}(2)) < H^0(X, \mathcal{O}_X(2)) = l(2D)$. Si $\deg D \geq 2g - 1$ entonces por Riemann-Roch obtenemos $l(2D) = l(D) + \deg D$ y $l(D) = \deg D + 1 - g$. y querríamos tener $l(D)(l(D) - 1) < 2 \deg D$. Es fácil ver que para que esto sea posible debemos elegir, como mínimo, $g = 4$. En tal caso, tomamos un divisor D con $\deg D = 7$. Entonces, $\deg D = 7 = 2g - 1$, $l(D) = 4$, y $4 \cdot 3 = 12 < 14 = 2 \deg D$, por lo que el razonamiento anterior siempre y cuando D fuera muy amplio. Falta comprobar que se puede escoger un divisor D de grado 7 muy amplio.

Por el criterio usual ([Ha77] IV 3.1), tenemos que comprobar que $\dim |D - P - Q| = \dim |D| - 2$ para todo par de puntos P, Q (no necesariamente distintos). Por Riemann-Roch, como $\dim |K - D| = -1$ (por ser $\deg D > \deg K$), basta ver que $\dim |K - D + P + Q| = -1$ para todo par de puntos. Si no fuera así, el divisor de Weil de grado 1, $K - D + P + Q$ tendría un divisor efectivo equivalente, que necesariamente sería de la forma R para cierto punto, y tendríamos $D = K + P + Q - R$ para ciertos puntos P, Q, R. Por tanto, queremos ver que existe D de grado 7 que no sea de la forma $K+P+Q-R$ para ninguna terna de puntos P, Q, R.

Fijando un punto A_0, vemos que esto último es equivalente a que exista un divisor de grado 0 que no sea de la forma $P + Q - R - A_0$ para ninguna terna P, Q, R. Pero, cuando trabajamos sobre $\mathbb{C}$, esto siempre ocurre, pues el conjunto de divisores de grado 0 (módulo equivalencia lineal), es decir, la variedad jacobiana, tiene estructura de toro g-dimensional (véase [GH78] pág. 234). Por tanto, un divisor general D de grado 7 en una curva de género 4 es muy amplio, y da lugar a un embebimiento cerrado de X en $\mathbb{P}^3$ que es linealmente normal pero no proyectivamente normal.

Por tanto, tenemos la siguiente cadena, con inclusiones estrictas:

$$\text{Intersección completa} \subset \text{Proyectivamente normal} \subset \text{Linealmente normal}$$

1.9 Proyecciones desde un punto

Una de las operaciones más naturales que podemos aplicar a una variedad es la de proyectarla desde un punto a un hiperplano complementario. Geométricamente, dado un punto fijo $P_0 \in \mathbb{P}^n$ y un hiperplano $H \subseteq \mathbb{P}^n$ consideramos la aplicación $\pi : \mathbb{P}^n - P_0 \to H$ que a un punto $P \neq P_0$ le asocia la intersección de la recta $\overline{P_0P}$ con H, es decir, $\pi(P) = \overline{P_0P} \cap H$. Algebraicamente, si tomamos unas coordenadas en las que $P_0 = [0 : \ldots : 0 : 1]$ y $H = \{X_n = 0\}$ entonces $\pi([a_0 : a_1 : \ldots : a_n]) = [a_0 : \ldots : a_{n-1}]$.

A nivel de esquemas, recordemos que dar una aplicación de un esquema X a $\mathbb{P}^k$ equivale a tomar un haz invertible $\mathcal{L}$ sobre X y $k+1$ secciones globales $s_0, \ldots, s_k \in H^0(X, \mathcal{L})$ que generan $\mathcal{L}$. El morfismo determinado por esta información es el único $\varphi : X \to \mathbb{P}^k$ tal que $\varphi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(1)) \simeq \mathcal{L}$ con $s_i = \varphi^*(X_i)$, $0 \leq i \leq k$. (ver [Ha77] II 7.1).

Para el caso de la proyección desde un punto, consideramos $k = n - 1$, $X = \mathbb{P}^n - P_0 = U$, que es un abierto de $\mathbb{P}^n$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|_U = \mathcal{O}_U(1)$ y $s_i = X_i|_U$, $0 \leq i \leq n-1$. Nótese que $X_0, \dots, X_{n-1}$ no generan $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, pues $V(X_0) \cap \dots V(X_{n-1}) = V(X_0, \dots, X_{n-1}) = \{P_0\}$. Sin embargo, dichas secciones globales generan el haz en $\mathbb{P}^n - V(X_0) \cap \dots \cap V(X_{n-1}) = U$. De lo comentado arriba, tenemos un morfismo $\varphi = \pi : U \to \mathbb{P}^{n-1}$ con $\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1)) = \mathcal{O}_U(1)$.

Por supuesto, este morfismo lo podemos restringir a un subesquema $X \subseteq \mathbb{P}^n - \{P_0\}$. De esta manera, obtenemos una aplicación $f : X \to \mathbb{P}^{n-1}$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{P}^n - P_0 \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[ur, hook] \arrow[r, "f"] & \mathbb{P}^{n-1} \end{tikzcd} \tag{1.44}$$

Es natural preguntarse bajo qué condiciones en X y $P_0 \notin X$ podemos asegurar que f sea un embebimiento cerrado. Nótese que la elección de hiperplano H sobre el que realizar la proyección es irrelevante, pues para dos elecciones distintas las proyecciones correspondientes sólo difieren en un automorfismo de $\mathbb{P}^{n-1}$. Nuestra intuición de variedades diferenciables nos dice que las únicas obstrucciones a que f sea un embebimiento cerrado deben ser que, o bien f no sea inyectiva, es decir, que dos puntos distintos $P, Q \in X$ estén alineados con P_0; o que la diferencial df_P sea no inyectiva para algún $P \in X$, que va a ocurrir si y sólo si $\overline{PP_0} \subseteq T_P X$. Precisamente, en [Ha77] se demuestra el siguiente criterio:

Proposición 1.13. *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado, X un esquema proyectivo sobre k y $\varphi : X \to \mathbb{P}^n_k$ un morfismo sobre k correspondiente al haz invertible $\mathcal{L}$ y a las secciones globales $s_0, \dots, s_n \in H^0(X, \mathcal{L})$. Sea $V \subseteq H^0(X, \mathcal{L})$ el subespacio generado por las s_i. Entonces, φ es un embebimiento cerrado si y sólo si se satisfacen las dos condiciones siguientes:*

1. *Para todo par de puntos* cerrados *distintos $P, Q \in X$ existe $s \in V$ con $s \in \mathfrak{m}_P \mathcal{L}_P$ pero $s \notin \mathfrak{m}_Q \mathcal{L}_Q$.*
2. *Para todo punto* cerrado *P, el conjunto $\{s \in V | s_P \in \mathfrak{m}_P \mathcal{L}_P\}$ genera el k-espacio vectorial $\mathfrak{m}_P \mathcal{L}_P / \mathfrak{m}_P^2 \mathcal{L}_P$ (nótese que como k es algebraicamente cerrado el cuerpo residual de los puntos cerrados de X es k)*

Es inmediato ver que, en el caso de la proyección desde un punto, el criterio anterior equivale a:

Proposición 1.14. *Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ un subesquema cerrado y P_0 un punto cerrado en $\mathbb{P}^n - X$. Entonces la restricción a X de la proyección desde P_0 sobre un hiperplano complementario es un embebimiento cerrado si y sólo se cumplen las siguientes dos condiciones:*

1. *No hay dos puntos cerrados distintos $P, Q \in X$ alineados con P_0*
2. *Para todo punto $P \in X$, la recta $\overline{PP_0}$* no *es tangente a X.*

1.10 Variedad secante y variedad tangente

Nuestra intención es aplicar el criterio anterior para demostrar el siguiente resultado clásico:

Teorema 1.15. *Sea X una variedad proyectiva, lisa y de dimensión r. Entonces existe un embebimiento cerrado X en $\mathbb{P}^{2r+1}$*

La idea de la demostración es embeber X en cierto $\mathbb{P}^N$, y comprobar que si $N > 2r + 1$ entonces alguna proyección desde un punto nos da un embebimiento en $\mathbb{P}^{N-1}$. Para encontrar tal punto, definimos variedades que contienen a los puntos P_0 que no satisfacen las condiciones del criterio anterior, a saber, la variedad secante y la variedad tangente.

1.10.1 Variedad secante

En las dos secciones siguientes seguimos de cerca el excelente ([Ha92]), sobre todo los epígrafes 11.22 y 15.4. Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva lisa.

Definición 1.16. La variedad secante de X es el cierre (en la topología de Zariski de $\mathbb{P}^n$) de la unión de las rectas $\overline{pq}$ para p, q puntos distintos de X. A esta variedad la denotamos por $\mathrm{Sec}(X)$

Obviamente, $\mathrm{Sec}(X)$ es la menor variedad que contiene la obstrucción de inyectividad para encontrar un punto desde el que proyectar a un hiperplano de $\mathbb{P}^n$. Queremos ver que $\dim \mathrm{Sec}(X) \leq 2r+1$, donde $r = \dim X$. Sea la aplicación

$$s : X \times X - \Delta \longrightarrow \mathbb{G}(1,n) \tag{1.45}$$

dada por

$$(p,q) \longmapsto \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \dots & p_n \\ q_0 & q_1 & \dots & q_n \end{pmatrix} \tag{1.46}$$

donde $\Delta = \{(p,p) : p \in X\}$ es la diagonal. Por la expresión anterior, es evidente que s es un morfismo de variedades. Consideremos la imagen (esquemática) de s, que denotamos por $\mathcal{S}(X) = \overline{s(X \times X - \Delta)} \subseteq \mathbb{G}(1,n)$. Definimos la relación de incidencia:

$$\Sigma = \{(l,p) : p \in l, l \in \mathcal{S}(X)\} \subseteq \mathcal{S}(X) \times \mathbb{P}^n \subseteq \mathbb{G}(1,n) \times \mathbb{P}^n \tag{1.47}$$

Veamos que Σ es cerrado en $\mathcal{S}(X) \times \mathbb{P}^n$. Como Σ es la intersección de $\mathcal{S}(X) \times \mathbb{P}^n$ con la familia universal de rectas $\Phi = \{(l,p) : p \in l\}$, basta ver que $\Phi \subseteq \mathbb{G}(1,n) \times \mathbb{P}^n$ es cerrado. Para ello, sean $l =< x, y > \in \mathbb{G}(1,n)$ y $p \in \mathbb{P}^n$ dados como:

$$l = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ y_0 & y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} \quad , \quad p = (z_0 : \ldots : z_n) \tag{1.48}$$

Entonces la condición $p \in l$ es equivalente al anulamiento de los menores 3×3 de la matriz:

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ y_0 & y_1 & \dots & y_n \\ z_0 & z_1 & \dots & z_n \end{pmatrix} \tag{1.49}$$

Pero si desarrollamos cada menor por la última fila, obtenemos ecuaciones del tipo $z_0 r_{1,2} - z_1 r_{0,2} + z_2 r_{0,1} = 0$, donde $r_{i,j}$ es el menor 2×2 formado por las dos primeras filas y las columnas i, j, es decir, $r_{i,j}$ son las coordenadas del embebimiento cerrado de Plücker $\mathbb{G}(1,n) \to \mathbb{P}^N$, donde $N = \binom{n+1}{2} - 1$. De ello deducimos que $\Phi \subseteq \mathbb{G}(1,n) \times \mathbb{P}^n$ es cerrado y, por tanto, Σ también. Si ahora consideramos la restricción a $\Sigma \subseteq \mathcal{S}(X) \times \mathbb{P}^n$ de la segunda proyección π_2, entonces $\mathrm{Sec}(X) = \pi_2(\Sigma)$ (pues los morfismos entre esquemas proyectivos son aplicaciones cerradas).

Como X es irreducible, $X \times X$ también, y, por tanto, su abierto $X \times X - \Delta$ también. Como las aplicaciones continuas preservan irreducibilidad, la imagen de s es irreducible, y también lo es su cierre $\mathcal{S}(X)$. Además, s es dominante considerada como aplicación en $\mathcal{S}(X)$, así que recurriendo a $A.2$, deducimos que $\dim \mathcal{S}(X) \leq \dim X \times X - \Delta = 2 \dim X$.

Por otra parte, la primera proyección de $\mathcal{S}(X) \times \mathbb{P}^1$ restringida a $\mathcal{S}(X)$ es sobreyectiva, y la fibra de cada punto cerrado es $\mathbb{P}^1$, en particular irreducible de dimensión 1. Por tanto, estamos en condiciones de aplicar $A.3$, y deducimos que Σ es irreducible de dimensión menor o igual que $2 \dim X + 1$. Por último, aplicando $A.2$ llegamos a que $\dim \mathrm{Sec}(X) \leq 2 \dim X + 1$. Por tanto, hemos demostrado la siguiente:

Proposición 1.17. *Si $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una variedad lisa de dimensión r, entonces la variedad secante es irreducible, de dimensión menor o igual que $2r+1$.*

La diferencia entre la dimensión esperada $2r+1$ y la dimensión de $\mathrm{Sec}(X)$ se denomina defecto secante de X, y se denota por $\delta(X) = 2r + 1 - \dim \mathrm{Sec}(X)$.

1.10.2 Variedad tangente

De nuevo, sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una variedad lisa de dimensión r.

Definición 1.18. La variedad tangente a X es la unión de las rectas tangentes en un punto de X, o lo que es lo mismo, la unión de los k-planos tangentes T_xX para $x \in X$. La denotamos por $\mathrm{Tan}(X)$.

Si a cada punto $x \in X$ el r-plano tangente $T_xX \in \mathbb{G}(r,n)$ definimos una aplicación $\mathfrak{G} : X \to \mathbb{G}(r,n)$. Es fácil ver que $\mathfrak{G}$ es un morfismo. En efecto, basta comprobarlo localmente. Si el ideal de X está generado por finitos polinomios homogéneos $F_1, \dots, F_k$, con $k \geq n-r$, entonces un punto $p \in \mathbb{P}^n$ está en T_xX si y sólo si:

$$\begin{pmatrix} \partial_0 F_1 & \dots & \partial_n F_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_0 F_k & \dots & \partial_n F_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = 0 \tag{1.50}$$

donde las parciales se evalúan para unas coordenadas $x = [x_0 : \dots : x_n]$, da igual cuáles, pero las mismas para cada parcial. Por ser X lisa, la matrix tiene rango constante $n-r$ a lo largo de X. Por tanto, fijado $x \in X$, si un menor de tamaño $n-r$ es no nulo en x, digamos el formado por las primeras $n-r$ filas y columnas, que denotamos por M, entonces las otras $k-n+r$ filas no imponen condiciones adicionales, y en el abierto de Zariski $\{\det M \neq 0\}$ podemos invertir M, obteniendo el sistema equivalente:

$$M^{-1} \begin{pmatrix} \partial_0 F_1 & \dots & \partial_n F_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_0 F_{n-r} & \dots & \partial_n F_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-r} & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = 0 \tag{1.51}$$

donde A es una matriz $n-r \times r$ cuyas entradas son funciones regulares. Entonces está claro que en cada $x \in \{\det M \neq 0\}$ el plano tangente T_xX está generado por las filas de las matriz:

$$\begin{pmatrix} -A^t & I_{n-r} \end{pmatrix} \tag{1.52}$$

De aquí se sigue que la aplicación $\mathfrak{G} : X \to \mathbb{G}(r,n)$ es un morfismo, como queríamos. A la imagen de $\mathfrak{G}$, que es cerrada porque $\mathfrak{G}$ es propio (estamos tratando con esquemas proyectivos), la denotamos por $\mathcal{T}(X)$. Claramente $\mathcal{T}(X)$ es irreducible, y de la proposición $A.2$ deducimos que $\dim \mathcal{T}(X) \leq r$. De nuevo, consideramos una relación de incidencia. En este caso, definimos:

$$\Sigma = \{(\Lambda, p) : p \in \Lambda, \Lambda \in \mathcal{T}(X)\} \subseteq \mathcal{T}(X) \times \mathbb{P}^n \subseteq \mathbb{G}(r,n) \times \mathbb{P}^n \tag{1.53}$$

La demostración de que Σ es un cerrado de Zariski de $\mathcal{T}(X) \times \mathbb{P}^n$ es completamente análoga al caso de la variedad secante, simplemente se cambia $\mathbb{G}(1,n)$ por $\mathbb{G}(r,n)$ y se consideran menores de orden $r+1$ en vez de menores de orden 3. La restricción de la primera proyección de $\mathcal{T}(X) \times \mathbb{P}^n$ a Σ da un morfismo sobreyectivo de Σ sobre $\mathcal{T}(X)$ tal que la fibra de cada punto cerrado de $\mathcal{T}(X)$ es un r-plano proyectivo, $\mathbb{P}^r$, en particular irreducible y de dimensión r. Como $\mathcal{T}(X)$ es irreducible, aplicando la proposición A.3 deducimos que Σ es irreducible de dimensión $\dim \mathcal{T}(X) + r \leq 2r$. Por último, considerando la segunda proyección, la imagen de Σ es precisamente la variedad tangente de X, por lo que usando A.2 deducimos que la variedad tangente, $\mathrm{Tan}(X)$, es irreducible y de dimensión $\leq 2r$.

Con lo anterior, ya podemos demostrar que toda variedad proyectiva lisa $X \subseteq \mathbb{P}^n$ de dimensión r se puede embeber en $\mathbb{P}^{2r+1}$. Si $n \leq 2r+1$ es trivial. Por tanto, supongamos que $n > 2r+1$ y consideremos las variedades secante y tangente de X, $\mathrm{Sec}(X)$ y $\mathrm{Tan}(X)$, respectivamente. Sabemos que $\max(\dim \mathrm{Sec}(X), \dim \mathrm{Tan}(X)) \leq 2r+1 < n$. Por tanto, existe algún punto P_0 en el complementario de dichas variedades, y usando el criterio 1.14 vemos que la proyección desde el punto P_0 respecto a un hiperplano complementario da un embebimiento cerrado de X en $\mathbb{P}^{n-1}$. Está claro que si seguimos proyectando de esta manera acabamos por embeber X en $\mathbb{P}^{2r+1}$.

1.10.3 Relación entre variedad secante y variedad tangente

La intuición de variedades diferenciables sugiere que la variedad tangente a una variedad lisa está contenida en la variedad secante. Esto es cierto, y es consecuencia de la siguiente proposición, cuya demostración puede verse en [Ha92] (proposición 15.10):

Proposición 1.19. *Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad lisa cuasiproyectiva, y denotemos por $\mathcal{T}_1(X) \subset \mathbb{G}(1,n)$ al conjunto de rectas tangentes a X algún punto. Entonces:*

$$\mathcal{S}(X) = s(X \times X - \Delta) \cup \mathcal{T}_1(X) \tag{1.54}$$

Es decir, toda recta tangente está en $\mathcal{S}(X)$ y, además, toda recta de $\mathcal{S}(X)$ es, o bien una bisecante propiamente dicha, o bien una tangente. Por tanto, considerando la relación de incidencia Σ de la sección 1.10.1 y aplicando la segunda proyección llegamos a:

$$\mathrm{Tan}(X) \subseteq \mathrm{Sec}(X) \tag{1.55}$$

Un hecho bastante sorprendente es que si X es proyectiva y $\mathrm{Tan}(X)$ y $\mathrm{Sec}(X)$ no tienen la dimensión esperada, entonces se da la igualdad, es decir:

Proposición 1.20. *Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva lisa irreducible de dimensión r. Entonces se cumple una de las dos alternativas siguientes:*

1. $\dim(\mathrm{Tan}(X)) = 2r$ *y* $\dim(\mathrm{Sec}(X)) = 2r + 1$
2. $\mathrm{Tan}(X) = \mathrm{Sec}(X)$

La proposición es un corolario al teorema de conexión de Fulton-Hansen. La demostración de ambos resultados se puede ver en [FH79].

1.11 Proyecciones desde dimensión superior. Linealidad normal

En los epígrafes anteriores hemos estudiado el problema de proyectar una subvariedad de $\mathbb{P}^n$ a un hiperplano $\mathbb{P}^{n-1}$. A continuación vamos a estudiar el problema inverso. Es decir, partimos de un subesquema cerrado $X \subseteq \mathbb{P}^n$ y queremos encontrar un embebimiento cerrado de X en $\mathbb{P}^{n+1}$ tal que al proyectar desde cierto punto $P_0 \in \mathbb{P}^{n+1}$ obtengamos $X \subseteq \mathbb{P}^n$. Obviamente, le exigimos al embebimiento $X \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ que no sea trivial, es decir, que X no esté contenida en ningún hiperplano de $\mathbb{P}^{n+1}$. En general, decimos que $X \subseteq \mathbb{P}^n$ es *degenerada* si está contenido en algún hiperplano de $\mathbb{P}^n$, y *no degenerada* en caso contrario. Claramente, que X sea degenerada equivale a que algun polinomio homogéneo de grado 1 esté en el ideal I_X o, equivalentemente, a que la aplicación natural $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$ no sea inyectiva.

Supongamos que $X \subseteq \mathbb{P}^n$ es no degenerada. Veamos que en tal caso X se puede proyectar desde un embebimiento cerrado no degenerado en $\mathbb{P}^{n+1}$ si y sólo si $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$ no es sobreyectiva, es decir, si y sólo si $X \subseteq \mathbb{P}^n$ no es linealmente normal (esta condición también podemos expresarla diciendo que el sistema lineal de hiperplanos en $\mathcal{O}_X(1)$ no es completo).

En efecto, buscando un tal embebimiento $X \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ que proyectar desde un punto, podemos asumir sin pérdida de generalidad que el punto es $P_0 = [0 : \ldots : 0 : 1]$ y el hiperplano sobre el que proyectamos es el de ecuación $X_{n+1} = 0$. En tal caso queremos encontrar un embebimiento j que haga conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{P}^{n+1} - P_0 \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[ur, hook, dashed, "j"] \arrow[r, hook, "i"] & \mathbb{P}^n \end{tikzcd} \tag{1.56}$$

Recordemos que dar un morfismo f de X a un proyectivo $\mathbb{P}^k$ equivale a dar un haz invertible $\mathcal{L}$ sobre X globalmente generado, y $k+1$ secciones globales $s_0, \ldots, s_k \in H^0(X, \mathcal{L})$ que generan $\mathcal{L}$. Además, las secciones hiperplanas X_i, $0 \leq i \leq k$, forman una base de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(1)$, y la aplicación natural $H^0(\mathbb{P}^k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(1)) \to H^0(X, \mathcal{L})$ inducida por f lleva el hiperplano $a_0X_0 + \ldots + a_kX_k$ a la sección global $a_0s_0 + \ldots + a_ks_k$ de $\mathcal{L}$. En el caso en el que f es un embebimiento, deducimos que X es no degenerada si y sólo si las secciones $s_0, \ldots, s_k$ son linealmente independientes.

Pongamos $U = \mathbb{P}^{n+1} - \{P_0\}$ y supongamos que cierta j hace que el diagrama conmute. Si escribimos $\mathcal{L} = i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$, debe tenerse $\mathcal{L} = j^*(\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))) = j^*(\mathcal{O}_U(1))$. De la misma manera las secciones globales de $\mathcal{L}$ que definen j tienen que ser $s_i = j^*(\pi^*(X_i)) = j^*(X_i)$ para $i = 0, \ldots, n$, junto a una sección $t \in H^0(X, \mathcal{L})$, que cumpla $t = j^*(X_{n+1})$. Como las secciones $s_0, \ldots, s_n$ generan $\mathcal{L}$, el subespacio generado por ellos, $V \subseteq H^0(X, \mathcal{L})$ no tiene puntos base, así que si definimos j con $\mathcal{L}$ y las secciones $s_0, \ldots, s_n, t$, es inmediato que el punto $P_0 = [0 : \ldots : 0 : 1]$ no está en la imagen, por lo que j se puede ver como aplicación a U, y entonces $i = \pi \circ j$ por las igualdades anteriores.

Además, como $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ es un embebimiento cerrado, aplicando 1.13 se tiene que el sistema lineal V separa los puntos de X y los vectores tangentes en cada punto, y usando ese mismo criterio aplicado a j vemos que también es un embebimiento cerrado. Por último, j dará un embebimiento cerrado no degenerado si y sólo si las secciones $s_0, \ldots, s_n, t$ son linealmente independientes. Pero como $s_0, \ldots, s_n$ son linealmente independientes por hipótesis, se podrá escoger una t con esta propiedad si y sólo si la aplicación natural inducida por i $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) = H^0(X, \mathcal{L})$ no es sobreyectiva, justo lo que queríamos.

En particular, las intersecciones completas no degeneradas en $\mathbb{P}^n$, que como hemos visto son linealmente normales, no pueden obtenerse proyectando un subesquema cerrado no degenerado desde $\mathbb{P}^{n+1}$. Por ejemplo, si una curva plana es proyección desde un punto de una curva de $\mathbb{P}^3$, esta curva está contenida en un plano. Si $X \subseteq \mathbb{P}^n$ es una intersección completa de tipo $d = (d_1, \ldots, d_r)$ con $d_1 \geq \ldots \geq d_r$, su ideal está generado por polinomios homogéneos $F_1, \ldots, F_r$ de grados respectivos $d_1, \ldots, d_r$. Por tanto, es inmediato que una intersección completa es no degenerada si y sólo si $d_r \geq 2$, es decir, si en una expresión de X como intersección de r hipersuperficies ninguna de ellas es un hiperplano.

1.12 Sección por un hiperplano. Extensión de intersecciones completas

Otra operación geométrica que podemos aplicar a una variedad es intersecar con un plano. En la dirección opuesta, dada una variedad proyectiva lisa $X \subset \mathbb{P}^n$ de codimensión c nos podemos hacer la siguiente pregunta:

Cuestión 1.21. ¿Para qué enteros positivos k es cierto que X se puede obtener como $X = Y \cap H$, donde $Y \subset \mathbb{P}^{n+k}$ es una variedad proyectiva lisa de codimensión c y $H = \mathbb{P}^n$ un n-plano?

En las condiciones anteriores, decimos que Y es una extensión de X a $\mathbb{P}^{n+k}$. A continuación respondemos a esta pregunta para el caso de intersecciones completas lisas. De hecho, se puede exigir que Y sea una intersección completa del mismo tipo que X.

Proposición 1.22. *Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una intersección completa lisa de tipo $(d_1, \ldots, d_c)$, con $d_1 \geq \ldots \geq d_c$. Entonces para todo $k > 0$ existe una intersección completa lisa $Y \subset \mathbb{P}^{n+k}$ de tipo $(d_1, \ldots, d_c)$ de manera que $X = Y \cap H$ para el hiperplano $x_{n+1} = \ldots = x_{n+k} = 0$.*

Demostración. Por inducción basta probar el caso $k = 1$. Por la proposición 1.11 podemos asumir que $X = Y_1 \cap \ldots \cap Y_c$ de manera que $Y_1 \cap \ldots \cap Y_s$ es una intersección completa lisa para todo $s \leq c$. Pongamos $Y_i = V(F_i)$ para polinomios homogéneos F_i con $I_X = (F_1, \ldots, F_c) \subset k[X_0, \ldots, X_n]$. Ahora consideramos la inyección usual $k[X_0, \ldots, X_n] \hookrightarrow k[X_0, \ldots, X_n, X_{n+1}]$ y extendemos el ideal I_X, obteniendo $I_{X'} = (F_1, \ldots, F_c)$, el ideal de un subesquema proyectivo $X' \subset \mathbb{P}^{n+1}$ de manera que $X' \cap H = X$, donde H es el hiperplano $V(X_{n+1})$. Por supuesto, X' tiene singularidades (por ejemplo, en $[0 : 0 : \ldots : 0 : 1]$), y tenemos que arreglarlo. Para ello, vamos a aplicar el teorema de Bertini en su versión fuerte 1.12.

Vamos a proceder por inducción. Primero consideramos el sistema lineal $V \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(d_1)$ generado por F_1 y por los múltiplos de X_{n+1}. Es inmediato que el lugar base de V es $Y_1 = Y_1' \cap H \subset \mathbb{P}^n$, donde estamos identificando

H con $\mathbb{P}^n$. Aplicando 1.12 deducimos que existe una sección global de la forma $G_1 = F_1 + X_{n+1}P_1$, de manera que $Z_1 = V(G_1)$ es una hipersuperficie lisa salvo, quizá, en $Y_1 = Y_1' \cap H$. Pero por la forma de G_1 tenemos $Z_1 \cap H = Y_1$, así que Z_1 también es lisa en puntos de Y_1 (las primeras n parciales de G_1 evaluadas en un punto $x \in H$ coinciden con las de F_1 evaluadas en x como punto de $\mathbb{P}^n$).

Por inducción, supongamos que hemos encontrado hipersuperficies lisas $Z_1, \ldots, Z_s$ de manera que $Z_1 \cap \ldots \cap Z_t$ es intersección completa lisa y $Z_1 \cap \ldots \cap Z_t \cap H = Y_1 \cap \ldots \cap Y_t$ para $1 \leq t \leq s$. Pongamos $W_s = Z_1 \cap \ldots \cap Z_s$. Consideramos el sistema lineal $V \subset H^0(W_s, \mathcal{O}_{W_s}(d_{s+1}))$ generado por las restricciones de F_{s+1} y de los múltiplos de X_{n+1}. Es inmediato que el lugar base de V es $W_s \cap Y_{s+1} = Y_1 \cap \ldots \cap Y_{s+1}$. Aplicando 1.12 deducimos que existe un polinomio $G_{s+1} = F_{s+1} + X_{n+1}P_{s+1}$ tal que $Z_{s+1} = V(G_{s+1})$ cumple que $W_s \cap Z_{s+1}$ es lisa salvo, quizá, en los puntos de $Y_1 \cap \ldots \cap Y_{s+1} \subset H$. Pero por la forma de G_{s+1}, tenemos que $W_s \cap Z_{s+1} \cap H = Y_1 \cap \ldots \cap Y_{s+1}$ como esquemas, así que $W_s \cap Z_{s+1}$ es lisa (la matriz de las primeras n parciales de los polinomios $G_1 \ldots, G_{s+1}$ evaluadas en un punto de H coincide con la matriz de las n parciales de los $F_1, \ldots, F_{s+1}$, y esta tiene rango $s+1$, así que la matriz de las $n+1$ parciales de $G_1, \ldots, G_{s+1}$ tiene rango $s+1$ a fortiori). Por inducción, hemos acabado. □

De hecho, no se pierde ninguna generalidad al suponer que la extensión de una intersección completa sea intersección completa, pues se tiene la siguiente proposición:

Proposición 1.23. *Sea $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ una variedad proyectiva lisa irreducible con $\dim X \geq 1$, H un hiperplano que no contiene a X y pongamos $X' = X \cap H \subset \mathbb{P}^n$. Entonces X es intersección completa en $\mathbb{P}^{n+1}$ si y sólo si X' es intersección completa en $H = \mathbb{P}^n$*

En la sección 3 del capítulo 2 veremos que si I es el ideal (homogéneo y saturado) de un subesquema proyectivo $Y \subset \mathbb{P}^n$, entonces Y es intersección completa si y sólo si el anillo local $S_{\mathfrak{m}}/I_{\mathfrak{m}}$ es un anillo local de intersección completa, donde $S = k[X_0, \ldots, X_n]$ y $\mathfrak{m} = S_+$ es el ideal maximal irrelevante. En la proposición, pongamos que H se corresponde a la forma lineal X_{n+1}, que $I \subset k[X_0, \ldots X_{n+1}] = S$ es el ideal de X, y que $I' \subset k[X_0, \ldots, X_n] = S'$ es el ideal de X'. Entonces, por ser $X' = X \cap H$ esquemáticamente, se tiene $S'/I' \simeq S/(I + X_0)$. Por ser X irreducible lisa, I es primo y S/I un dominio, y como H no contiene a X, X_{n+1} no es nulo en S/I. Si localizamos en $\mathfrak{m}'$ se comprueba que:

$$S'_{\mathfrak{m}'}/I'_{\mathfrak{m}'} \simeq S_{\mathfrak{m}}/(I_{\mathfrak{m}} + (X_{n+1})) \tag{1.57}$$

Pero si ponemos $A = S_{\mathfrak{m}}/I_{\mathfrak{m}}$, $x = X_{n+1}$ y denotamos por $\mathfrak{n}$ al ideal maximal de A, entonces el anillo local en el vértice del cono de Y' es $A/(x)$ y queremos ver que A es un anillo local de intersección completa si y sólo si $A/(x)$ lo es. Como S/I es un dominio está claro que x es un elemento regular de A, así que el problema se reduce a:

Proposición 1.24. *Sea A un anillo local noetheriano y x un elemento regular (un no divisor de cero). Entonces A es intersección completa si y sólo si $A/(x)$ es intersección completa*

La demostración es sencilla usando la caracterización de intersección completa como $\varepsilon(A) = \operatorname{emb.dim} A - \dim A$, y se puede consultar en [BH98] (teorema 2.3.4).

Es interesante remarcar que la propiedad de extensión infinita caracteriza a las intersecciones completas entre las variedades lisas. Esto es lo que se conoce como teorema de la torre babilónica. Para una demostración relativamente simple, véase [Co12].

Teorema 1.25 (Teorema de la torre babilónica)**.** *Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad lisa de codimensión pura c y supongamos que para todo $m > 0$, X se extiende a una variedad lisa $Y \subset \mathbb{P}^{n+m}$ de codimensión pura c con $X = Y \cap H$ para un n-plano $H \simeq \mathbb{P}^n$. Entonces X es intersección completa.*

1.13 Variedad dual de una intersección completa

Sea $X \subset P = \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva lisa irreducible de dimensión r. Un hiperplano H es tangente a X en un punto $x \in X$ si $T_xX \subset H$. La variedad dual de X es el cierre de Zariski del conjunto de hiperplanos tangentes a algún punto de X, visto como subconjunto en $\mathbb{G}(n-1,n) = (\mathbb{P}^n)^*$. Consideremos la siguiente relación de incidencia:

$$\Sigma = \{(x,H) : x \in X, T_xX \subset H\} \subset X \times \mathbb{G}(n-1,n) = X \times (\mathbb{P}^n)^* \tag{1.58}$$

Es inmediato comprobar que Σ es un cerrado de Zariski. Como T_xX es un r-plano para cada $x \in X$, el conjunto de hiperplanos que lo contienen es un $n-1-r$-plano en $\mathbb{G}(n-1,n) = (\mathbb{P}^n)^*$. Por tanto, cada fibra cerrada de la primera proyección es un $\mathbb{P}^{n-1-r}$, irreducible y de dimensión $n-1-r$. Como X es irreducible y Σ es propia, aplicando A.6 deducimos que Σ es irreducible de dimensión $n-1$. Además, la variedad dual de X es justo la imagen de Σ por la segunda proyección. Por tanto, de acuerdo a A.2 y A.3, tenemos $\dim(X^*) \leq n-1$, y se tiene $\dim(X^*) = n-1$ si la fibra cerrada genérica es de dimensión 0 (es decir, si es un conjunto finito).

Se puede comprobar que, en la notación de [Ha77] (II 7), $\Sigma \simeq \mathbf{P}(\mathcal{N}_{X,P}(-1))$, y que, con esta identificación, se tiene $\mathcal{O}_\Sigma(1) = \pi_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$, donde $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(E)}(1)$ es el haz tautológico de la proyectivización de un fibrado E, π_2 es la segunda proyección en 1.58 y $(\mathbb{P}^n)^*$ se identifica con $\mathbb{P}^n$ fijando una referencia. Por otra parte, un fibrado E es amplio si y sólo si el haz invertible tautológico de su proyectivización ([Ha66] 3.2) es amplio. Por tanto, si $\mathcal{N}_{X,P}(-1)$ es un fibrado amplio, la segunda proyección $\pi_2 : \Sigma \to X^* \subset \mathbb{P}^n$ es un morfismo con $\pi_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ amplio. Pero en general se tiene:

Proposición 1.26. *Sea X un esquema proyectivo sobre k, $\mathcal{L}$ un haz invertible amplio en X y $\varphi : X \to \mathbb{P}^n$ un morfismo con $\varphi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) = \mathcal{L}$. Entonces la fibra sobre cada punto cerrado es finita.*

Demostración. En primer lugar, la restricción de un haz invertible amplio a un subesquema es amplio. En efecto, si $Y \subset X$ es un subesquema y $\mathcal{L}$ es amplio sobre X, existe n tal que $\mathcal{L}^n$ es muy amplio ([Ha77] II 7.6), y $\mathcal{L}^n$ da un embebimiento de X en un proyectivo. Restringiendo a Y, $(\mathcal{L}|_Y)^n$ da un embebimiento de Y es en un proyectivo, por lo que $\mathcal{L}|_Y$ es amplio (de nuevo por [Ha77] II 7.6). Ahora, si $y \in \mathbb{P}^n$ es un punto cerrado, tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] & Y \\ X_y \arrow[u, hook] \arrow[r, "\varphi_y"] & \operatorname{Spec} k(y) \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \tag{1.59}$$

donde X_y es la fibra de y, que es un subesquema de X. Entonces $\mathcal{L}|_{X_y}$ es amplio, y por la conmutatividad del diagrama, $\mathcal{L}|_{X_y} = \varphi_x^*(\mathcal{O}_y(1))$. Pero $\operatorname{Spec} k(y)$ es un punto, así que $\mathcal{O}_y(1) = \mathcal{O}_y$. Por tanto, $\mathcal{L}|_{X_y} = \mathcal{O}_{X_y}$. Pero $\mathcal{L}|_{X_y}$ es amplio, por lo que existe n tal que $(\mathcal{L}|_{X_y})^n = \mathcal{O}_{X_y}$ es muy amplio. Aplicando 1.13, tenemos que $H^0(X_y, \mathcal{O}_{X_y})$ separa puntos, pero los elementos de $H^0(X_y, \mathcal{O}_{X_y})$ son constantes en cada componente conexa, así que las componentes conexas de X_y son unipuntuales y, por tanto, X_y es un conjunto finito. $\square$

Por tanto, juntando la proposición con el razonamiento anterior, vemos que si $\mathcal{N}_{X,P}(-1)$ es un fibrado amplio, entonces $\dim X^* = n-1$. Si X es intersección completa de tipo $(d_1, \dots, d_c)$, entonces hemos calculado anteriormente que $\mathcal{N}_{X,P}(-1) = \bigoplus_{i=1}^c \mathcal{O}_X(d_i - 1)$. Como la suma directa de fibrados es amplia si y sólo si cada sumando es amplio, ([Ha66] 2.2), deducimos que $\mathcal{N}_{X,P}(-1)$ es amplio si y sólo si la intersección completa X es no degenerada ($d_i \geq 2$). Por tanto, hemos demostrado la siguiente proposición:

Proposición 1.27. *Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una intersección completa lisa. Si X es no degenerada, entonces* $\dim X^* = n-1$

En este contexto resulta interesante el siguiente teorema, que Ein demuestra en [Ei87]:

Teorema 1.28. *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad proyectiva lisa. Si* $\dim X = \dim X^* \leq 2N/3$, *entonces $X \subset \mathbb{P}^n$ es una de las siguientes variedades:*

1. *X es una hipersuperficie.*
2. *X es la inmersión de Segre $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1}$ en $\mathbb{P}^{2n-1}$.*
3. *X es la inmersión de Plücker de $\mathbb{G}(1,4)$ en $\mathbb{P}^9$.*

4. *X es el embebimiento usual de la variedad de espinores S^{10} en $\mathbb{P}^{15}$.*

Por tanto, si asumimos que la conjetura de Hartshorne es válida, toda variedad proyectiva lisa X con $\dim X > 2N/3$ es una intersección completa, por lo que $\dim X^* = N - 1$. De esta manera, las variedades proyectivas lisas con $\dim X = \dim X^*$ son exactamente las de la lista anterior.

1.14 Criterios de intersección completa

Aquí nos limitamos a recoger algunos criterios que se usan en la demostración del caso cuadrático de la conjetura de Hartshorne.

Teorema 1.29. *[Bertram-Ein-Lazarsfeld] Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad de dimensión $n \geq 1$ que es intersección esquemática de hipersuperficies de grados $d_1 \geq \ldots \geq d_m$. Sea $c = N - n = \operatorname{codim} X$. Entonces $X \subset \mathbb{P}^n$ es intersección completa de tipo $(d_1, \ldots, d_c)$ si y sólo si:*

$$\omega_X = \mathcal{O}_X(\sum_{i=1}^{c} d_i - N - 1) \tag{1.60}$$

Teorema 1.30. *[Condición de Faltings] Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad de dimensión n que es intersección esquemática de hipersuperficies de grados $d_1 \ldots, d_m$. Si $m \leq N/2$ entonces X es intersección completa de $c = N - n$ hipersuperficies entre las m que la definen esquemáticamente.*

Teorema 1.31. *[Condición de Netsvetaev] Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad de dimensión n definida como intersección esquemática de hipersuperficies de grado $d_1 \geq \ldots \geq d_m$. Supongamos que una de las siguientes condiciones se cumple:*

1. $m < N - \frac{2n}{3}$
2. $n \geq \frac{3N}{4} - \frac{1}{2}$

Si además $m \leq n + 1$, entonces $X \subset \mathbb{P}^N$ es la intersección completa de $c = N - n$ de las hipersuperficies que definen X esquemáticamente.

Capítulo 2

Conjetura de Hartshorne

2.1 Topología de intersecciones completas y variedades de codimensión pequeña

Hartshorne escribe en [Ha74] que:

> The general philosophy which operates here is that a nonsingular variety of small codimension of a fixed variety X must be subject to stringent restrictions

En esta sección vamos a recoger varias restricciones en la topología de las variedades de codimensión pequeña y de las intersecciones completas. La similitud de estas restricciones es una de las evidencias principales para creer en la veracidad de la conjetura de Hartshorne.

Ya vimos en el capítulo anterior que para una variedad lisa de dimensión r, la cohomología del haz estructural da una condición necesaria para ser intersección completa en algún proyectivo. En efecto, vimos que $H^i(X, \mathcal{O}_X)$ es 0 salvo en los casos $i = 0$ e $i = r$, en los cuales $H^0(X, \mathcal{O}_X) = \mathbb{C}$ (como para cualquier variedad propia conexa) y $H^r(X, \mathcal{O}_X) = H^0(X, \omega_X) = p_g(X)$, el género geométrico de X (donde hemos usado dualidad de serre en la forma $H^i(X, \mathcal{F}) \simeq H^{r-i}(X, \mathcal{F}^\vee \otimes \omega_X)$, siendo $\mathcal{F}$ un haz localmente libre de rango finito, [Ha77] III 7.7). Además, si un embebimiento $X \subseteq \mathbb{P}^N$ fuese una intersección completa se tendría $H^i(X, \mathcal{O}_X(n)) = 0$ para $0 < i < r$ y $n \in \mathbb{Z}$. Por último, los homomorfismos canónicos $H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(n)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(n))$ serían sobreyectivos para $n \in \mathbb{Z}$.

Para las intersecciones completas, los teoremas de Lefschetz dan condiciones necesarias mucho más restrictivas:

Teorema 2.1 (Teoremas de Lefschetz)**.** *Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una intersección completa lisa de dimensión r. Entonces se cumple que:*

(1) La aplicación inducida por la restricción $H^i(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \to H^i(X, \mathbb{Z})$ es un isomorfismo para $i < r$, y es inyectiva para $i = r$.

(2) $\pi_1(X) = 1$ si $r \geq 2$.

(3) $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}\langle \mathcal{O}_X(1) \rangle$ si $r \geq 3$

Como conocemos la cohomología singular del proyectivo complejo (es $\mathbb{Z}$ en grado par menor o igual que $2n$ y 0 en el resto), este resultado nos da la cohomología singular de X para $i < r$. Nótese que r, la dimensión de X en el enunciado, es su dimensión compleja (es decir, la dimensión usual como variedad real sería $2r$), por lo que estamos obteniendo información topológica hasta la mitad de su dimensión real. Además, los apartados (2) y (3) dan que que X es simplemente conexo si es de dimensión al menos 2, y que su grupo de Picard es libre de rango 1 con generador la sección hiperplana si es de dimensión al menos 3.

Nótese que el teorema nos proporciona invariantes de X intrínsecos, los dos primeros como variedad topológica, y el tercero como variedad algebraica. De esta forma, el teorema se puede usar para probar que ciertas variedades lisas no son intersecciones completas en ningún espacio proyectivo.

Como ejemplo, consideremos una variedad de Segre $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. El embebimiento cerrado usual como subvariedad proyectiva viene dado por $\varphi_{n,m} : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$, donde $\varphi_{n,m}$ es la inmersión de Segre:

$$([s_0 : \dots s_n]], [t_0 : \dots : t_m]) \mapsto [s_0t_0 : \dots s_0t_m : s_1t_0 : \dots : s_nt_m] \tag{2.1}$$

Como los grupos de cohomología singulares de $\mathbb{P}^n$ son libres finitamente generados, podemos aplicar la fórmula de Künneth ([Ha02] Cap 3. 3.15) para cohomología singular:

$$H^k(X \times Y, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{i+j=k} (H^i(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H^j(Y, \mathbb{Z})) \tag{2.2}$$

En nuestro caso, para $k = 2$ tendríamos:

$$H^2(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m, \mathbb{Z}) = (H^0(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \otimes H^2(\mathbb{P}^m, \mathbb{Z})) \bigoplus (H^1(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \otimes H^1(\mathbb{P}^m, \mathbb{Z})) \bigoplus (H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \otimes H^0(\mathbb{P}^m, \mathbb{Z})) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \tag{2.3}$$

Si $n + m \geq 3$ y $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ fuera intersección completa en cierto proyectivo, deduciríamos del teorema anterior que $H^2(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, obteniendo una contradicción. Por tanto, $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ no es intersección completa en ningún proyectivo, salvo en el caso $n = m = 1$, en el que la inmersión de Segre revela que $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ es isomorfo a la cuádrica lisa en $\mathbb{P}^3$. Como explicamos en un apéndice, la misma técnica se puede usar para demostrar que la grassmanniana $\mathbb{G}(k, n)$ de k-planos en $\mathbb{P}^n$ no es intersección completa en ningún proyectivo, salvo en los casos $k = 0$ y $k = n-1$, en los que es isomorfa a $\mathbb{P}^n$, y en el caso $k = 1$, $n = 3$, en el que $\mathbb{G}(1, 3)$ es una cuádrica en $\mathbb{P}^5$.

En el caso de subvariedades lisas de codimensión pequeña, las restricciones en la topología vienen dadas por teoremas de tipo Barth:

Teorema 2.2 (Teoremas de Barth)**.** *Sea X una subvariedad no singular de dimensión r de $\mathbb{P}^n$. Entonces:*

(1) La aplicación inducida por la restricción $H^i(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \to H^i(X, \mathbb{Z})$ es un isomorfismo para $i \leq 2r - n$.

(2) $\pi_1(X) = 1$ si $r \geq \frac{1}{2}(n + 1)$.

(3) $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}\langle \mathcal{O}_X(1) \rangle$ si $r \geq \frac{1}{2}(n + 2)$.

Nótese que si $r < n/2$ el teorema no da ninguna información, y que según r crece respecto a n el teorema da más y más información. Por ejemplo, si $r = 6$ y $n = 8$ obtendríamos que $H^0(X, \mathbb{Z}) = H^2(X, \mathbb{Z}) = H^4(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, que $H^1(X, \mathbb{Z}) = H^3(X, \mathbb{Z}) = 0$, que X es simplemente conexa y que el grupo de Picard de X es libre de rango 1 generado por la sección hiperplana.

En el primer capítulo hemos visto que, mediante sucesivas proyecciones desde un punto, toda variedad proyectiva X de dimensión r se puede embeber en $\mathbb{P}^{2r+1}$. El teorema anterior nos proporciona restricciones para la existencia de embebimientos en dimensión menor que $2r + 1$. Si $H^i(X, \mathbb{Z}) \neq H^i(\mathbb{P}^m, \mathbb{Z})$ con $m \geq 1$, entonces cualquier embebimiento $X \subseteq \mathbb{P}^n$ debe satisfacer $i > 2r - n$, es decir, $n > 2r - i$. Volviendo al ejemplo anterior, como $H^2(\mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^l, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \neq \mathbb{Z} = H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$, deducimos que cualquier embebimiento $\mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^l \subseteq \mathbb{P}^n$ debe satisfacer $n \geq 2(k + l) - 1$.

De hecho, cualquier variedad de Segre $X = \mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^l$ se puede embeber en $\mathbb{P}^{2(k+l)-1}$. Para ello, basta comprobar que la inmersión usual $\varphi = \varphi_{k,l} : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ tiene defecto secante $\delta(X) \geq 2$ (que ha de ser 2 por la discusión anterior, aunque también es fácil verlo elementalmente). Primero, es muy sencillo comprobar que para cualquier par de variedades lineales $\mathbb{P}^r \subset \mathbb{P}^k$, $\mathbb{P}^s \subset \mathbb{P}^l$, se puede encontrar una variedad lineal $\mathbb{P}^{N'} \subset \mathbb{P}^N$, de manera que la inmersión de Segre $\varphi_{k,l}$ restringida a $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s$ y con codominio $\mathbb{P}^{N'}$ sea la inmersión de Segre $\varphi_{r,s}$.

Consideremos un punto general $q \in \mathrm{Sec}(X) \subset \mathbb{P}^N$. Podemos asumir que $q \in < p_1, p_2 >$[1], para puntos

[1] $< p_1, \dots, p_r >$ es la variedad lineal engendrada por los puntos $p_1, \dots, p_r$.

$p_1 = \varphi(x_1, y_1)$ y $p_2 = \varphi(x_2, y_2)$ tales que $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$. Entonces, por lo comentado anteriormente, hay un $\mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^N$ de manera que φ restringida a $< x_1, x_2 > \times < y_1, y_2 >= \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ es una inmersión de Segre con imagen en $\mathbb{P}^3$. Pero $q \in < p_1, p_2 >$, y p_1, p_2 están en este $\mathbb{P}^3$, así que q también. En este $\mathbb{P}^3$, la imagen de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ es una cuádrica lisa, así que la recta general contenida en $\mathbb{P}^3$ que pasa por q es bisecante a $\varphi(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ y, por tanto, a $\varphi(X)$. Con la notación de la sección 1.10.1, deducimos que la segunda proyección de Σ a $\operatorname{Sec}(X)$ tiene fibra de dimensión ≥ 2 sobre el punto general $q \in \operatorname{Sec}(X)$. Por tanto, aplicando A.3, deducimos que $\dim \operatorname{Sec}(X) \leq \dim \Sigma - 2 \leq 2r - 1$, por lo que $\delta(X) \geq 2$.

Por tanto, concluimos que el teorema de Barth proporciona la cota óptima $2(k + l) - 1$ para la dimensión ambiente en la que podemos embeber una variedad de Segre $\mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^l$. Las otras dos cotas de 2.2 también son ajustadas. Si $C \subset \mathbb{P}^n$ es una curva plana lisa de grado $d \geq 3$, su género topológico es $g = (d-1)(d-2)/2 \geq 1$. En tal caso, C es una superficie orientable compacta con $g \geq 1$ asas, cuyo grupo fundamental tiene la presentación:

$$\pi_1(C) = \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g : [a_1 b_1] \cdots [a_g b_g] = e \rangle \tag{2.4}$$

y, en particular, $\pi_1(C) \neq 1$ ([Ha02] 1.27). En este caso $r - (n + 1)/2 = -1/2$ y el segundo apartado no es cierto. Por un argumento análogo al que hemos dado para la inmersión de Segre, se demuestra que la inmersión doble de Veronese $\nu_2 : \mathbb{P}^r \to \mathbb{P}^{2n+1}$ tiene defecto secante $\delta = 1$. Por tanto, tras componer con una proyección se puede embeber en $\mathbb{P}^{2r}$, pero, aunque $\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^r) = \mathbb{Z}$, para este embebimiento la sección hiperplana es $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(2)$, que no es un generador de $\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^r)$. En este caso, $r-(n+2)/2 = -1$ y no se cumple el tercer apartado.

Comparando los teoremas de Lefschetz y de Barth, vemos que si hacemos crecer r respecto a n, la topología de una subvariedad lisa X se parece cada vez más a la de una intersección completa de $\mathbb{P}^n$. Esta observación es una de las principales líneas de evidencia que llevó a Hartshorne a conjeturar en [Ha74] que debe haber alguna constante $0 < \alpha < 1$ tal que si $X \subseteq \mathbb{P}^n$ es una subvariedad lisa de dimensión r y se cumple que $r > \alpha n$, entonces X es intersección completa. Hartshorne plantea su conjetura con $\alpha = 2/3$, en parte porque los dos ejemplos conocidos de variedades lisas clásicas que maximizan r/n sin ser intersección completa cumplen $r/n = 2/3$. Estos son la grassmanniana $\mathbb{G}(1, 4)$ en $\mathbb{P}^9$ y la variedad de espinores S^{10} en $\mathbb{P}^{15}$. De hecho, al final de este capítulo demostraremos que son las únicas variedades cuadráticas con esta propiedad. Análogas a la grassmanniana $\mathbb{G}(1, 4)$ se pueden construir, como lugar de degeneración de morfismos entre fibrados, infinitas variedades lisas de dimensión 6 en $\mathbb{P}^9$ que no sean intersección completa (sin ser proyectivamente equivalentes entre sí), [Ot95].

Como hemos visto, si consideramos la variedad de Segre $\mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^l$, con $k + l \geq 3$, la podemos embeber en $\mathbb{P}^{2(k+l)-1}$ y de esta manera obtener para cada $r \geq 3$ una variedad lisa de dimensión r, $X \subseteq \mathbb{P}^{2r-1}$ que no es intersección completa. Sin embargo, no se conoce si para algún $\alpha > \frac{1}{2}$ existen subvariedades lisas $X \subseteq \mathbb{P}^n$, de dimensión r, que no sean intersección completa, con $n \to \infty$ y $r \geq \alpha n$.

Generalizando los resultados de tipo Barth anteriores para variedades no necesariamente lisas, Lyubeznik demostró en ([Ly93], 10.7) el siguiente:

Teorema 2.3. *Sea $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva cuyas componentes irreducibles son de codimensión $\leq c$. Entonces:*

1. *$H_i(\mathbb{P}^n, Y; \mathbb{Z}) = 0$ y $\pi_i(\mathbb{P}^n, Y) = 0$ para $i \leq [n/c] - 1$;*
2. *$H_i(\mathbb{P}^n, Y; \mathbb{Z}) = 0$ y $\pi_i(\mathbb{P}^n, Y) = 0$ para $i \leq [(n - 1)/c]$ si Y es irreducible;*
3. *$H_i(\mathbb{P}^n, Y; \mathbb{Z}) = 0$ y $\pi_i(\mathbb{P}^n, Y) = 0$ para $i \leq [(n + 1)/(c + 1)] + [n/(c + 1)] - 1$ si Y es irreducible y existe una subvariedad $Z \subseteq Y$ con $\dim Z \leq 1$ tal que $Y - Z$ es no vacío y analíticamente irreducible;*
4. *$H_i(\mathbb{P}^n, Y; \mathbb{Z}) = 0$ para $i \leq n-r-c+1$ si Y se puede definir (como conjunto de puntos) por r ecuaciones, excepto en un cerrado-Zariski de dimensión 0. Si, además, $c \leq n/3$, entonces $\pi_i(\mathbb{P}^n, Y) = 0$ para $n - r - c + 1$;*

5. *$H_i(\mathbb{P}^n, Y; \mathbb{Z}) = 0$ y $\pi_i(\mathbb{P}^n, Y) = 0$ para $i \leq n - r - c + 1$ si Y es irreducible y existe un cerrado Zariski $Z \subseteq Y$ de dimensión ≤ 1 tal que $Y - Z$ es no vacío y se puede definir localmente (como conjunto de puntos) por r ecuaciones.*

Aquí, un anillo local $(A, \mathfrak{m})$ es analíticamente irreducible si su complexión $\hat{A}$ tiene un único primo minimal, es decir, si $\mathrm{Spec}(\hat{A})$ es irreducible. Decimos que un esquema U es analíticamente irreducible en un punto $x \in U$ si el anillo local $\mathcal{O}_{U,x}$ es analíticamente irreducible. En el caso de una variedad, esto significa que la variedad sólo tiene una rama por el punto x. Por último, el esquema U es analíticamente irreducible si U es irreducible (como espacio topológico) y es analíticamente irreducible en cada uno de sus puntos.

Nótese, en la hipótesis del apartado 3, que un abierto no vacío de un irreducible es automáticamente irreducible, luego sólo habría que comprobar la irreducibilidad analítica de los anillos locales. En ([Za48]), Zariski demostró que si un anillo local de una variedad es normal, entonces es analíticamente irreducible. Por tanto, las variedades normales conexas (necesariamente irreducibles, pues sus anillos locales son dominios) son analíticamente irreducibles. En particular, las variedades lisas conexas son analíticamente irreducibles, aunque esto es automático pues la complexión de un anillo local regular es regular ([AM69] 11.24) y, en particular, dominio (de hecho, dominio de factorización única [Ma86] 20.3).

Los grupos $H_i(\mathbb{P}^n, Y; \mathbb{Z})$ son los grupos de homología relativos de $Y \subseteq \mathbb{P}^n$, que encajan en la sucesión de homología exacta ([Ha02] 2.1):

$$... \longrightarrow H_k(Y;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_k(\mathbb{P}^n;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_k(\mathbb{P}^n, Y;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(Y;\mathbb{Z}) \longrightarrow ... \tag{2.5}$$

Por tanto, el teorema anterior nos da que los morfismos naturales de grupos de homología singular $H_i(Y;\mathbb{Z}) \to H_i(\mathbb{P}^n;\mathbb{Z})$ son isomorfismos para índices $i+1$ en el rango indicado, y son sobreyectivos para i el mayor índice permitido en el teorema. Usando el teorema de coeficientes universales, esto nos da que las restricciones en cohomología $H^i(\mathbb{P}^n;\mathbb{Z}) \to H^i(Y;\mathbb{Z})$ son biyectivas o inyectivas para los índices correspondientes.

De manera análoga, los grupos $\pi_i(\mathbb{P}^n, Y)$ son los grupos de homotopía relativos de $Y \subseteq \mathbb{P}^n$, que encajan en la sucesión de homotopía exacta ([Ha02] 4.1) de grupos:

$$... \longrightarrow \pi_k(Y) \longrightarrow \pi_k(\mathbb{P}^n) \longrightarrow \pi_k(\mathbb{P}^n, Y) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(Y) \longrightarrow ... \tag{2.6}$$

y que, en vista del teorema anterior, dan lugar a los isomorfismos (y a la sobreyección) de grupos de homotopía en los índices correspondientes.

En [Ly93], Lyubeznik también generaliza el apartado 3 del teorema 3.3 al caso de subvariedades normales.

Teorema 2.4. *Sea $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ una variedad normal de dimensión $\geq n/2 + 1$. Entonces* $\mathrm{Pic}(Y) = \mathbb{Z}$ *generado por $\mathcal{O}_Y(1)$.*

2.2 Conjetura de Hartshorne para fibrados

En esta sección demostramos la correspondencia de Hartshorne-Serre, que permite, en codimensión 2, reformular la conjetura de Hartshorne como un problema de fibrados vectoriales.

2.2.1 Subesquema de ceros de una sección global.

Sean X un esquema y E un fibrado vectorial sobre X de rango r. Una sección global $s \in H^0(X, E)$ define de manera natural un subesquema cerrado $Y \subseteq X$ cuyos puntos son aquellos en los que s se anula (es decir, aquellos $x \in X$ para los que $s_x \in \mathfrak{m}_x\mathcal{O}_{X,x}$). Por la correspondencia entre subesquemas cerrados de X y haces de ideales, basta definir $\mathcal{I}_Y$. Si U es un abierto que trivializa a E, con un isomorfismo $\varphi_U : \mathcal{O}_U^r \to E|U$, entonces $s|U = \varphi(\alpha_1, \dots \alpha_r)$ para $\alpha_1, \dots \alpha_r \in H^0(U, \mathcal{O}_U)$ únicos. En tal caso, definimos $\mathcal{I}_Y|U$ como el subhaz de $\mathcal{O}_\mathcal{U}$ generado por $\alpha_1, \dots \alpha_r$. Para comprobar que esta definición es consistente, sea V otro abierto que trivializa a E, y $\varphi_V : \mathcal{O}_V^r \to E|V$ un isomorfismo, con $s|V = \varphi_V(\beta_1, \dots \beta_r)$. Entonces, en $U \cap V$, el cambio

$\varphi_V|_{U\cap V}^{-1} \circ \varphi_U|_{U\cap V} : \mathcal{O}_{U\cap V}^r \to \mathcal{O}_{U\cap V}^r$ está dado por una matriz invertible de secciones en $H^0(\mathcal{O}_{U\cap V})$ y, sobre $W \subset U \cap V$, está dado por la matriz de las restricciones de dichas secciones, que sigue siendo invertible (con inversa la restricción de la anterior matriz). Por ello, está claro que $\alpha_1|_{U\cap V}, \ldots, \alpha_r|_{U\cap V}$ y $\beta_1|_{U\cap V}, \ldots, \beta_r|_{U\cap V}$ definen el mismo haz de ideales de $\mathcal{O}_{U\cap V}$, por lo que la definición de $\mathcal{I}_Y$ es consistente. Al subesquema Y lo denominamos *esquema de ceros de* s y, también, *lugar de ceros de* s, y lo denotamos por $Y = V(s)$ o por $Y = \{s = 0\}$.

Como ejemplo de esta construcción, vimos con anterioridad que, a cada subesquema $X \subseteq \mathbb{P}^n$ localmente principal de $\mathbb{P}^n$ le corresponde un (y sólo uno salvo unidad) polinomio homogéneo $F \in k[X_0, \ldots X_n]$ tal que $X = V(F)$. Como tenemos un isomorfismo de anillos graduados

$$k[X_0, \ldots X_n] \to \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}^n(k)) \tag{2.7}$$

observamos que las hipersuperficies de $\mathbb{P}^n$ se corresponden con las subesquemas de ceros de las secciones globales de los haces invertibles $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$, para $k \geq 0$ (recuérdese que $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)) = 0$ para $k < 0$). Teniendo en cuenta que $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}$ con generador $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ ([Ha77] II 6.4 y 6.16), vemos que, de hecho, las hipersuperficies de $\mathbb{P}^n$ se corresponden con los subesquemas de ceros de las secciones globales no nulas de los haces invertibles de $\mathbb{P}^n$. En codimensión 2 vamos a ver que, al menos para $n \geq 7$, hay una correspondencia similar.

Intuitivamente, sería de esperar que el lugar de ceros Y de sección global s de un fibrado E de rango r tuviera codimensión r (pues localmente Y está definido por r ecuaciones). Es fácil ver que, en general, esto no tiene por qué ser cierto (basta tomar $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ y $s = (X_0, X_0)$, que define el hiperplano de ecuación $X_0 = 0$). Sin embargo, para un s genérico en $H^0(X, E)$ se demuestra en [Ot95], 2.8 (simplificado) el siguiente:

Teorema 2.5. *Sean X una variedad proyectiva lisa y E un fibrado de rango r sobre X que está generado por secciones globales. Entonces, para la sección global genérica s, o bien s define el subesquema vacío, o bien el subesquema de ceros de s es liso de codimensión r.*

Como es natural, sería interesante poder asegurar en el teorema anterior que la sección global s no define el subesquema vacío. En esta dirección, Fulton y Lazarsfeld demuestran en [FL81] el siguiente teorema (simplificado aquí):

Teorema 2.6. *Sea X una variedad proyectiva lisa de dimensión n y E un fibrado amplio de rango r sobre X. Entonces para una sección global s cualquiera (no necesariamente genérica):*

1. *El subesquema de ceros de s es no vacío si $n \geq r$.*
2. *El subesquema de ceros de s es conexo si $n > r$.*

Juntando los dos resultados anteriores, obtenemos que para fibrados vectoriales de rango r sobre una variedad proyectiva lisa de dimensión $n > r$, la sección global genérica define un subesquema liso conexo de codimensión r. Nótese que las cotas en el teorema están ajustadas. En efecto, si $r = n + 1$ podemos tomar $X = \mathbb{P}^n$, $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus(n+1)}$ y $s = (X_0, \ldots, X_n)$, y observamos que el subesquema de ceros de s es vacío. Además, si $r = n$ podemos tomar $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus(n-1)}$ y $s = (X_0X_1, X_2, \ldots X_n)$, y entonces el subesquema de ceros de s consiste en dos puntos cerrados, $[1 : 0 : 0 : \ldots : 0]$ y $[0 : 1 : 0 : \ldots : 0]$, por lo que no es conexo.

En lo que respecta a la conjetura de Hartshorne, nos interesa revertir este proceso. Es decir, a partir de una subvariedad lisa $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ de codimensión r queremos producir un fibrado vectorial E tal que Y es el esquema de ceros de cierta sección $s \in H^0(\mathbb{P}^n, E)$. A continuación damos una respuesta afirmativa en codimensión 2.

2.2.2 Correspondencia de Hartshorne-Serre.

Sea X una variedad lisa e Y un subesquema de codimensión 2 que es localmente intersección completa. Si $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ es el haz de ideales de Y, entonces $N^* = \mathcal{I} \otimes i_*(\mathcal{O}_Y) \simeq \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$, como haz sobre Y, es localmente libre de rango 2 ([Ma86] 16.2), y podemos considerar su dual, que denotamos por N, el fibrado normal de Y en X

(que coincide con la noción geométrica usual cuando Y es lisa).

Suponemos que, para cierto fibrado E de rango 2, Y es el lugar de ceros de una sección global $s \in H^0(X, E)$, y escribimos $\mathcal{L} = \bigwedge^2 E$. En tal caso, tenemos una sucesión exacta (que es un caso particular del complejo de Koszul):

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{s} E \xrightarrow{f} \mathcal{I} \otimes \mathcal{L} \longrightarrow 0 \tag{2.8}$$

Para definir la aplicación f trabajamos localmente. Sean U un abierto de X y $\varphi : \mathcal{O}_U \oplus \mathcal{O}_U \to E|_U$ una trivialización, con $s = \varphi(\alpha_1, \alpha_2)$. Tomando potencia exterior máxima, tenemos la aplicación determinante asociada $\det(\varphi) : \mathcal{O}_U \to \mathcal{L}|_U$. En tal caso definimos f en las coordenadas φ como $(x_1, x_2) \mapsto (\alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2) \otimes \det(\varphi)(1)$. Supongamos que V es otro abierto de X y $\psi : \mathcal{O}_V \oplus \mathcal{O}_V \to E|V$ otra trivialización de E, con $s = \psi(\beta_1, \beta_2)$. El cambio de coordenadas $\psi^{-1} \circ \varphi$ está dado por una matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{smallmatrix}\right)$ de manera que $(x_1, x_2)^t \mapsto (x_1', x_2')^t = A(x_1, x_2)^t$. De aquí se sigue que:

$$(\beta_2, -\beta_1)A = \det(A)(\alpha_2, -\alpha_1) \tag{2.9}$$

Además, tenemos que $\det A = \det(\psi)^{-1}(\det(\varphi)(1))$, de manera que $\det(A)(\det(\psi)(1)) = \det(\varphi)(1)$. Juntando lo anterior, calculamos la composición de $\psi^{-1} \circ \varphi$ y de f en las coordenadas de ψ. Tenemos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto (\beta_2, -\beta_1)A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \det(\psi)(1) = \det(A)(\alpha_2, -\alpha_1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \det(\psi)(1) = (\alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2) \otimes \det(\varphi)(1) \tag{2.10}$$

Por tanto, hemos comprobado que la aplicación f está bien definida. A continuación restrigimos la sucesión exacta 2.8 a $i : Y \hookrightarrow X$ (es decir, aplicamos i^*). Calculamos $i^*(\mathcal{I} \otimes \mathcal{L}) = i^*(\mathcal{I}) \otimes i^*(\mathcal{L}) = N^* \otimes \mathcal{L}|_Y$, así que obtenemos:

$$\mathcal{O}_Y \xrightarrow{s|_Y} E|_Y \xrightarrow{f|_Y} N^* \otimes \mathcal{L}|_Y \longrightarrow 0 \tag{2.11}$$

Pero $E|_Y$ y $N^* \otimes \mathcal{L}|_Y$ son fibrados vectoriales de mismo rango sobre Y. En general tenemos:

Proposición 2.7. *Sea $\varphi : E \to F$ un morfismo entre fibrados de rango r sobre un esquema X. Si φ es epimorfismo, entonces es isomorfismo.*

Demostración. Supongamos que φ es epimorfismo. Tenemos una sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow E \xrightarrow{\varphi} F \longrightarrow 0 \tag{2.12}$$

Localizando en $x \in X$, si ponemos $A = \mathcal{O}_{X,x}$ tenemos $E_x \simeq F_x \simeq A^r$, y la sucesión localizada toma la forma:

$$0 \longrightarrow K_x \longrightarrow A^r \xrightarrow{\varphi_x} A^r \longrightarrow 0 \tag{2.13}$$

Pero A^r es libre, así que la sucesión escinde y tenemos $A^r \simeq A^r \oplus K_x$. Como A es local, los módulos proyectivos son libres, así que $K_x \simeq A^s$, y por invariancia de rango deducimos $K_x = 0$. Como esto es cierto para $x \in X$ arbitrario, tenemos $K = 0$, por lo que φ es isomorfismo.

$\square$

Volviendo a 2.11, deducimos que $f|_Y$ es isomorfismo, y por tanto:

$$E|_Y \simeq N^* \otimes \mathcal{L}|_Y = N^* \otimes (\bigwedge^2 E)|_Y \tag{2.14}$$

Por otra parte, tenemos la siguiente proposición:[2]

Proposición 2.8. *Sea X una variedad lisa, E un fibrado de rango r sobre X e $Y \subset X$ una subvariedad lisa de codimensión r que es el lugar de ceros de una sección $s \in H^0(X, E)$. Entonces:*

[2] Nótese que el caso de intersecciones completas lo vimos en la sección 1.6

$$\mathcal{N}_{Y,X} \simeq E|_Y \tag{2.15}$$

Demostración. Dualizando el morfismo $\mathcal{O}_X \to E$ asociado a s, tenemos:

$$E^* \xrightarrow{s^*} \mathcal{O}_X \tag{2.16}$$

Sea U un abierto tal que hay un isomorfismo $\varphi_U : \mathcal{O}_U^r \to E|_U$, y sea $s|_U = \varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$. Con esta identificación tenemos $E^*|_U \simeq \mathcal{O}_U^r$, y, en estas coordenadas (en un abierto $V \subset U$), la aplicación s^* viene dada por:

$$(t_1, \ldots, t_r) \mapsto \alpha_1|_V t_1 + \ldots + \alpha_r|_V t_r \tag{2.17}$$

Por tanto, vemos que la imagen de s^* es justo $\mathcal{I}$, es decir, tenemos un epimorfismo $s^* : E^* \to \mathcal{I}$. Tensorizando por $\mathcal{O}_Y$ llegamos a:

$$E^*|_Y \xrightarrow{s^*|_Y} \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow 0 \tag{2.18}$$

Pero un epimorfismo entre fibrados del mismo rango es isomorfismo, así que deducimos $E^*|_Y \simeq \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$, y tomando duales tenemos $E|_Y \simeq \mathcal{N}_{Y,X}$ □

Teniendo en cuenta 2.14, deducimos que $\mathcal{N}_{Y,X} \simeq \mathcal{N}^*_{Y,X} \otimes \bigwedge^2 \mathcal{N}_{Y,X}$. Además, vemos que una condición necesaria para que un subesquema liso $Y \subset X$ de codimensión 2 sea el lugar de ceros de una sección de un esquema de rango 2 es que $\bigwedge^2 \mathcal{N}_{Y,X}$ se extienda a un haz invertible $\mathcal{L} = \bigwedge^2 E$. Cuando $X = \mathbb{P}^n$, $n \geq 3$ el recíproco también es cierto, y es lo que se conoce como correspondencia de Hartshorne-Serre.[3]

Teorema 2.9. *Sea $Y \subset X$ una subvariedad lisa de codimensión 2 de una variedad lisa X. Supongamos que* $\det \mathcal{N}_{Y,X}$ *se extiende a un haz invertible $\mathcal{L}$ sobre X. Entonces:*

1. *Si $H^2(X, \mathcal{L}^*) = 0$, entonces $\mathcal{N}_{Y,X}$ se extiende a un fibrado E de rango 2 sobre X, de manera que Y es el lugar de ceros de una sección global de E.*
2. *Si $H^1(X, \mathcal{L}^*) = 0$, entonces el fibrado E del apartado anterior es único.*

Nótese que para $X = \mathbb{P}^n$ los haces invertibles sobre X son de la forma $\mathcal{O}_X(k)$ ($\operatorname{Pic} X = \mathbb{Z}$ con $\mathcal{O}_X(1)$ como generador). En tal caso, si $n \geq 3$, de la proposición 1.6 las condiciones $H^1(X, \mathcal{L}^*) = H^2(X, \mathcal{L}^*) = 0$ siempre se satisfacen. Por tanto, trabajando en $\mathbb{P}^n$ tenemos:

Teorema 2.10. *Sea $n \geq 3$, e $Y \subset \mathbb{P}^n$ una subvariedad lisa de codimensión 2. Entonces Y es el lugar de ceros de una sección de un fibrado E de rango 2 si y sólo si* $\det \mathcal{N}_{Y,P}$ *extiende a un haz invertible en $\mathbb{P}^n$. Además, en caso de existir, E es único.*

Además, si $n \geq 6$ y trabajamos sobre $\mathbb{C}$ sabemos que $\operatorname{Pic} Y = \mathbb{Z}$, con $\mathcal{O}_Y(1)$ como generador (2.2 apartado 3). Por tanto, todo haz invertible de Y es extendible a X, y deducimos entonces:

Teorema 2.11. *Sea $n \geq 6$, e $Y \subset \mathbb{P}^n$ una subvariedad lisa de codimensión 2 sobre $\mathbb{C}$. Entonces Y es el lugar de ceros de una sección de un único fibrado E de rango 2.*

A continuación damos la prueba tradicional del teorema 2.9. Para una demostración muy elemental de la correspondencia véase [Ar04], y para una demostración elemental de un resultado un poco más general véase [Ar07].

En la demostración de 2.9 se hace uso de la sucesión espectral de Grothendieck, que relaciona los funtores derivados de una composición de dos funtores con los funtores derivados de cada funtor. La demostración se puede ver en ([We94] 5.8.3).

[3] Aunque no lo vamos a necesitar, no es necesario exigir que Y sea lisa, basta con que sea intersección completa localmente.

Teorema 2.12. *Sean $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ categorías abelianas y $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $F : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ funtores aditivos (covariantes) exactos por la izquierda. Supongamos que $\mathcal{A},\mathcal{B}$ tienen suficientes inyectivos y que G manda objetos inyectivos de $\mathcal{A}$ a objetos F-acíclicos en $\mathcal{B}$ (es decir, para $A \in \mathcal{A}$ inyectivo se tiene $(R^iF)(GA) = 0$ para $i > 0$). Entonces, para todo $A \in \mathcal{A}$, hay una sucesión espectral de primer cuadrante convergente:*

$$^{I}E_2^{pq} = (R^pF)(R^qG)(A) \Rightarrow R^{p+q}(FG)(A) \tag{2.19}$$

En los términos de grado pequeño, tenemos una sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow (R^1F)(GA) \longrightarrow R^1(FG)(A) \longrightarrow F(R^1G(A)) \longrightarrow (R^2F)(GA) \longrightarrow R^2(FG)(A) \tag{2.20}$$

donde las aplicaciones $(R^1F)(GA) \to R^1(FG)(A)$ y $(R^2F)(GA) \to R^2(FG)(A)$ son las naturales.

La información que nos interesa es la sucesión exacta 2.20. Denotamos por $\mathrm{Mod}(X)$ a la categoría de $\mathcal{O}_X$-módulos, y por Ab a la de grupos abelianos. Los funtores a los que aplicamos el teorema son, $G : \mathrm{Mod}(X) \to \mathrm{Mod}(X)$, dado por $G(A) = \mathcal{H}om(\mathcal{F}, A)$, donde $\mathcal{F}$ es fijo, y $F : \mathrm{Mod}(X) \to \mathrm{Ab}$ dado por $F(A) = \Gamma(X, A)$, el funtor de secciones globales. La composición es $(FG)(A) = \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, A)$, los morfismos globales entre $\mathcal{F}$ y A. Los funtores derivados de F son $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, -)$, los de G son $H^i(X, -)$, y los de FG son $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, -)$

Necesitamos ver que $G(\mathcal{I})$ es F-acíclico para un inyectivo $\mathcal{I}$. Para ello basta comprobar que es flasque/flabby, es decir, que para cada inclusión $U \subset X$ la restricción $\Gamma(X, G(\mathcal{I})) \to \Gamma(U, G(\mathcal{I}))$ es sobreyectiva ([Ha77] III 2.5). Veamos que $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{I})$ es flasque para $\mathcal{I}$ inyectivo. Dado $\varphi : \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_U, \mathcal{I}_U)$ tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} j_!(\mathcal{F}_U) \arrow[r, hook] \arrow[d, "j_!(\varphi)"] & \mathcal{F} \arrow[d, dotted] \\ j_!(\mathcal{I}_U) \arrow[r, hook] & \mathcal{I} \end{tikzcd} \tag{2.21}$$

donde $j_!$ es la extensión por cero de $U \subset X$ (ver [Ha77] II, ejercicio 1.19). Como $\mathcal{I}$ es inyectivo, existe $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{I})$ que hace que el diagrama conmute. Entonces la restricción de ψ a U es φ, como queríamos.

Por tanto, con los funtores que tenemos en mente, obtenemos la sucesión exacta 2.20, que para $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ se escribe como:

$$0 \longrightarrow H^1(X, \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{E}xt^1(\mathcal{F}, \mathcal{G})) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})) \tag{2.22}$$

donde hemos ignorado el último término de 2.20 porque no lo necesitamos. Pasamos ya a la demostración de 2.9.

Demostración de 2.9. Vamos a intentar encontrar E para que complete 2.8, es decir, buscamos una extensión de $\mathcal{I} \otimes \mathcal{L}$ por $\mathcal{O}_X$ que sea un fibrado vectorial. Para ello, usamos que las extensiones están clasificadas por el funtor $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I} \otimes \mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$ ([We94] 3.4.5).

Sustituimos $\mathcal{F} = \mathcal{I} \otimes \mathcal{L}$ y $\mathcal{G} = \mathcal{O}_X$ en 2.22 para obtener:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^1(X, \mathcal{H}om(\mathcal{I} \otimes \mathcal{L}, \mathcal{O}_X)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I} \otimes \mathcal{L}, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{E}xt^1(\mathcal{I} \otimes \mathcal{L}, \mathcal{O}_X)) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^2(X, \mathcal{H}om(\mathcal{I} \otimes \mathcal{L}, \mathcal{O}_X)) \end{aligned} \tag{2.23}$$

Ahora reescribimos estos términos. En general, tenemos las siguientes igualdades ([Ha77] III 6.7):

$$\mathcal{E}xt^i(\mathcal{I}\otimes\mathcal{L},\mathcal{O}_X)\simeq\mathcal{E}xt^i(\mathcal{I},\mathcal{L}^*)\simeq\mathcal{E}xt^i(\mathcal{I},\mathcal{O}_X)\otimes\mathcal{L}^* \tag{2.24}$$

$$\operatorname{Ext}^i(\mathcal{I}\otimes\mathcal{L},\mathcal{O}_X)\simeq\operatorname{Ext}^i(\mathcal{I},\mathcal{L}^*) \tag{2.25}$$

Veamos que $\mathcal{H}om(\mathcal{I},\mathcal{O}_X)=\mathcal{O}_X$. Por una parte tenemos un homomorfismo canónico $\mathcal{O}_X\to\mathcal{H}om(\mathcal{I},\mathcal{O}_X)$ inducido por la inclusión $\mathcal{I}\subset\mathcal{O}_X$ y por la estructura de $\mathcal{I}$ como $\mathcal{O}_X$-módulo. Para comprobar que es un isomorfismo basta trabajar a nivel local. Recordemos que, como tratamos con haces coherentes, tenemos ([Ha77] III 6.8):

$$\mathcal{H}om(\mathcal{I},\mathcal{O}_X)_x\simeq\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{I}_x,\mathcal{O}_{X,x}) \tag{2.26}$$

En tal caso, como X es lisa, el anillo $\mathcal{O}_{X,x}$ es local regular (en particular, dominio de factorización única). Si $x\notin Y$, $\mathcal{I}_x=\mathcal{O}_{X,x}$ y es evidente que el homomorfismo canónico $\mathcal{O}_{X,x}\to\mathcal{H}om(\mathcal{I},\mathcal{O}_X)$ es isomorfismo. Si $x\in Y$, $\mathcal{I}_x$ es un ideal de altura 2 generado por dos elementos (porque $\mathcal{O}_{Y,x}=\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{I}_x$ es regular y, en particular, intersección completa). Por tanto, basta demostrar:

Proposición 2.13. *Sea A un dominio de factorización única e $I=(f,g)$ un ideal de altura 2. Entonces dado $\varphi\in\operatorname{Hom}_A(I,A)$ existe un único $a\in A$ tal que $\varphi(h)=ah$ para todo $h\in I$.*

Demostración. Por ser $I=(f,g)$ de altura 2, los elementos f y g no pueden tener un factor común. Tenemos $f\varphi(g)=\varphi(fg)=\varphi(gf)=g\varphi(f)$ y, como f y g son coprimos, deducimos que hay un $a\in A$ tal que $\varphi(f)=af$ y $\varphi(g)=ag$. Entonces, para $h\in I$, tenemos $h=xf+yg$, así que $\varphi(h)=x\varphi(f)+y\varphi(g)=a(xf+yg)=ah$. La unicidad de a es evidente porque A un dominio. □

Por tanto, hemos demostrado que $\mathcal{H}om(\mathcal{I},\mathcal{O}_X)\simeq\mathcal{O}_X$. Por otra parte, tensorizando la sucesión exacta que define Y como subesquema $i:Y\hookrightarrow X$, obtenemos:

$$0\longrightarrow\mathcal{I}\otimes\mathcal{L}\longrightarrow\mathcal{L}\longrightarrow i_*(\mathcal{O}_Y)\otimes\mathcal{L}\longrightarrow 0 \tag{2.27}$$

Aplicamos $\mathcal{H}om(-,\mathcal{O}_X)$ y consideramos el siguiente segmento de la sucesión exacta larga:

$$\mathcal{E}xt^1(\mathcal{L},\mathcal{O}_X)\longrightarrow\mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_X\otimes\mathcal{L},\mathcal{O}_X)\longrightarrow\mathcal{E}xt^2(i_*(\mathcal{O}_Y)\otimes\mathcal{L},\mathcal{O}_X)\longrightarrow\mathcal{E}xt^2(\mathcal{L},\mathcal{O}_X) \tag{2.28}$$

Tenemos $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{L},\mathcal{O}_X)=\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X)\otimes\mathcal{L}^*=0$ ([Ha77] III 6.3), y de la misma manera $\mathcal{E}xt^2(\mathcal{L},\mathcal{O}_X)=0$. Además, se tiene que (basta leer [Ha77] III 7.11 y tener en cuenta que no se usa ninguna propiedad de ω_P):

$$\mathcal{E}xt^2(i_*(\mathcal{O}_Y),\mathcal{O}_X)\simeq i_*(\mathcal{O}_Y)\otimes i_*(\bigwedge^2(\mathcal{N}_{Y,X})) \tag{2.29}$$

Como $\mathcal{L}$ extiende a $\det\mathcal{N}_{Y,X}$ deducimos que $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}\otimes\mathcal{L},\mathcal{O}_X)\simeq\mathcal{E}xt^2(i_*(\mathcal{O}_Y)\otimes\mathcal{L},\mathcal{O}_X)=i_*(\mathcal{O}_Y)$. Como tenemos $H^0(X,i_*(\mathcal{O}_Y))=H^0(Y,\mathcal{O}_Y)$, juntando lo anterior podemos reescribir 2.23 como:

$$0\longrightarrow H^1(X,L^*)\longrightarrow\operatorname{Ext}^1(\mathcal{I}\otimes\mathcal{L},\mathcal{O}_X)\xrightarrow{\varphi}H^0(Y,\mathcal{O}_Y)\longrightarrow H^2(X,\mathcal{L}^*) \tag{2.30}$$

Por hipótesis, $H^2(X,\mathcal{L}^*)=0$, por lo que φ es sobreyectivo y, en particular, podemos tomar un $\mathcal{O}_X$-módulo E con una sucesión exacta como 2.8 asociado a un elemento $\eta\in\operatorname{Ext}^1(\mathcal{I}\otimes\mathcal{L},\mathcal{O}_X)$ tal que $\varphi(\eta)=1\in H^0(Y,\mathcal{O}_Y)$. Además, si $H^1(X,\mathcal{L}^*)=0$, entonces φ es un isomorfismo entre $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{I}\otimes\mathcal{L},\mathcal{O}_X)$ y $H^0(Y,\mathcal{O}_Y)$ así que η es único y la extensión E con estas condiciones también.

Falta ver que E es un fibrado vectorial de rango 2. En primer lugar, de la sucesión exacta 2.8 vemos que E es coherente ([Ha77] III 5.7). Sabiendo esto, para ver que E es localmente libre, basta comprobar que E_x es libre para todo $x\in X$. Teniendo en cuenta que, por ser X liso, los anillos $\mathcal{O}_{X,x}$ son regulares, podemos aplicar la siguiente proposición.

Proposición 2.14. *Sea A un anillo regular local y M un A-módulo finito. Entonces M es libre si y sólo si $\operatorname{Ext}^i_A(M,A)=0$ para $i>0$.*

Demostración. Una dirección es evidente porque Ext se puede calcular tomando una resolución proyectiva de M. Para la otra, supongamos que M no es libre. Consideramos su resolución libre minimal (que tiene finitos términos no nulos porque A tiene dimensión global finita [Ma86] 19.2):

$$0 \longrightarrow F_r \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \tag{2.31}$$

donde $r > 0$ por hipótesis. Pero $\mathrm{Ext}^i_A(M, A)$ se puede calcular aplicando $\mathrm{Hom}_A(-, A)$ a esta resolución y tomando el i-ésimo módulo de cohomología. En particular, llegamos a $0 = \mathrm{Ext}^r_A(M, A) = \mathrm{Hom}_A(F_r, A) \simeq F_r$, que es una contradicción. Por tanto, M es libre. □

Además, como E es coherente tenemos ([Ha77] III 6.8) $\mathcal{E}xt^i(E, \mathcal{O}_X)_x \simeq \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{X,x}}(E_x, \mathcal{O}_{X,x})$. Si consideramos la sucesión exacta larga de $\mathcal{H}om(-, \mathcal{O}_X)$ asociada a 2.8 obtenemos:

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{I} \otimes \mathcal{L}, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_X) \longrightarrow 0 \tag{2.32}$$

$$\mathcal{E}xt^i(E, \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{E}xt^i(\mathcal{I} \otimes \mathcal{L}, \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{E}xt^i(\mathcal{I}, \mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{L}^* \tag{2.33}$$

para $i \geq 2$. Como hemos calculado antes, $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{I} \otimes \mathcal{L}, \mathcal{O}_X) = i^*(\mathcal{O}_Y)$, y se puede comprobar que, gracias a la elección de $\eta \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I} \otimes \mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$, y con las identificaciones que hemos realizado, la aplicación correspondiente $\mathcal{O}_X \to i^*(\mathcal{O}_Y)$ es la usual, que en particular es un epimorfismo. Se deduce entonces que $\mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_X) = 0$ y, localizando, $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X,x}}(E_x, \mathcal{O}_{X,x}) = 0$ para todo $x \in X$. Por otra parte, dado un punto $x \in X$, o bien $\mathcal{I}_x = \mathcal{O}_{X,x}$ o bien $\mathcal{I}_x$ es de altura 2 generado por una sucesión regular de dos elementos. En cualquiera de los casos, la longitud de la resolución libre minimal es menor o igual que 1, así que $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{I}_x, \mathcal{O}_{X,x}) = 0$ para $i \geq 2$. Por tanto, aplicando 2.14, hemos demostrado que E es un fibrado vectorial.

Para comprobar que el rango es 2 basta localizar 2.8 en un punto $x \in X - Y$ de cada componente conexa de X, de manera que $(\mathcal{I} \otimes \mathcal{L})_x \simeq \mathcal{O}_{X,x}$, y la sucesión escinde, por lo que el rango es 2 en cada componente. Por último, que Y es el lugar de ceros de la sección s en la extensión 2.8 se puede comprobar localizando y recordando la construcción del lugar de ceros. □

En general, los fibrados no necesariamente poseen secciones globales no nulas. Sin embargo, si E es un fibrado podemos tensorizar por un haz invertible amplio $\mathcal{L}$ y, para N suficientemente grande, tenemos que $E \otimes \mathcal{L}^N$ es amplio. En efecto, por ser $\mathcal{L}$ amplio existe N_0 tal que $E \otimes \mathcal{L}^{N_0}$ está generado por secciones globales. Entonces, para $N > N_0$ se tiene que $E \otimes \mathcal{L}^N = (E \otimes \mathcal{L}^{N_0}) \otimes \mathcal{L}^{N-N_0}$ es amplio porque es producto tensorial de un haz generado por secciones globales y un haz amplio ([Ha66] 2.3). Además, E escinde en fibrados lineales si y sólo si $E \otimes \mathcal{L}^N$ escinde en fibrados lineales, pues podemos volver a E tensorizando por $(\mathcal{L}^*)^N$. En particular, si para cierto rango existe un haz que no escinde en fibrados lineales, siempre podemos suponer que es amplio.

Ahora bien, si E es un fibrado amplio de rango 2 en $\mathbb{P}^n$ con $n \geq 3$ podemos aplicar 2.6 junto a 2.5 para deducir que el lugar de ceros Y de una sección general s de E es una variedad lisa de codimensión 2. Además, Y es intersección completa si y sólo si E escinde en fibrados lineales, porque, por la correspondencia de Hartshorne-Serre, el fibrado E está determinado por Y, y cuando Y es intersección completa, por definición siempre hay un fibrado E que escinde en fibrados lineales y tal que Y es el lugar de ceros de una sección global.

Con todo el trabajo anterior, hemos llegado a que, sobre $\mathbb{C}$, la conjetura de Hartshorne se puede reformular como:

Conjetura 2.15. Todo fibrado de rango 2 sobre $\mathbb{P}^n$ escinde para $n \geq 7$.

Por la ausencia de contraejemplos, la conjetura suele extenderse a $n \geq 5$ en característica 0 y a $n \geq 6$ en general.

2.2.3 Criterios de descomposición

Para abreviar, diremos que un fibrado E escinde si es suma directa de fibrados lineales. Después de reformular la conjetura de Hartshorne en codimensión 2, es evidente que tener criterios para decidir cuándo un fibrado escinde puede ser de mucha utilidad. En esta sección recogemos algunos resultados en esta dirección. Seguramente, el resultado más conocido de este tipo es el criterio de Horrocks:

Teorema 2.16 (Criterio de Horrocks)**.** *Un fibrado E sobre $\mathbb{P}^n$ escinde si y sólo si $H^i(\mathbb{P}^n, E(k)) = 0$ para todo $1 \leq i \leq n-1$ y para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

Como mencionamos en el capítulo anterior, se tiene $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)) = 0$ si $1 \leq i \leq n-1$ y $k \in \mathbb{Z}$ arbitrario. De aquí vemos que, si E escinde, entonces se satisface el criterio. En el otro sentido, el caso base $n = 1$ es el teorema de Grothendieck según el cual todo fibrado sobre $\mathbb{P}^1$ escinde. Partiendo de él, se demuestra el criterio por inducción. Para una prueba puede verse [OSS88] (teoremas 2.1.1 y 2.3.1).

Un criterio más fino cuando el fibrado es de rango pequeño es el de Evans ([EG81] teorema 2.4):

Teorema 2.17 (Criterio de Evans)**.** *Sea E un fibrado de rango $k < n$ sobre $\mathbb{P}^n$. Entonces E escinde si y sólo si $H^i(\mathbb{P}^n, E(k)) = 0$ para $1 \leq i \leq k-1$ y para todo $k \in \mathbb{Z}$*

Otro criterio cohomológico en línea con los dos anteriores es el siguiente ([KPR03], teorema 1):

Teorema 2.18. *Sea E un fibrado sobre $\mathbb{P}^n$. Si, o bien n es par y $\operatorname{rank}(E) < n$, o bien n es impar y $\operatorname{rank}(E) < n-1$, entonces E escinde si y sólo si $H^i(\mathbb{P}^n, E(k)) = 0$ para $2 \leq i \leq n-2$ y $k \in \mathbb{Z}$ arbitrario.*

2.3 Conjetura de Hartshorne para anillos locales

En general, recordemos que se tienen las siguientes relaciones de inclusión entre las familias más importantes de anillos locales noetherianos:

$$\text{Regular} \subset \text{intersección completa} \subset \text{Gorenstein} \subset \text{Cohen-Macaulay}$$

En la definición más general de anillo local A de intersección completa, exigimos que se cumpla $\dim_k H_1(E_.) = \operatorname{emb.dim} A - \dim A$, de $E_.$ es el complejo de Koszul asociado a una base minimal del ideal maximal de A (véase [Ma86] sección 21). Esto es necesario porque, en general, los anillos locales no tienen por qué ser cociente de un anillo local regular[4]. Sin embargo, los anillos locales con los que vamos a tratar son todos cocientes de un anillo local regular, así que podemos considerar la siguiente:

Definición 2.19. Sea $B = A/a$, donde $(A, \mathfrak{m}, k)$ es un anillo local regular y $a \subseteq \mathfrak{m}$ es un ideal de altura s. Decimos que B es un anillo local *de intersección completa*, o también, que B es una *intersección completa*, si el ideal a se puede generar por s elementos

Un hecho importante es que la definición es independiente de la presentación de $B = A/a$. Es decir, si B es un anillo local de intersección completa, y A' es un anillo local regular tal que $B \simeq A'/a'$ para cierto ideal a' de altura s', entonces a' está generado por s' elementos. Nótese que, en general, por el teorema de altura de Krull se necesitan al menos s elementos para generar a. Cuando el ideal está generado justo por s elementos, digamos $a = (x_1, \dots, x_s)$, entonces la sucesión $x_1, \dots, x_s$ tiene que ser regular.

Si $(A, \mathfrak{m}, k)$ es un anillo local noetheriano y M es un módulo finito, todos los conjuntos minimales de generadores tienen el mismo número de elementos, y este número es $\mu_A(M) = \dim_k M/\mathfrak{m}M$. Esto es consecuencia directa del lema de Nakayama ([Ma86] 2.3). En particular, para un ideal $a \subseteq A$, el número minimo de generadores es $\mu_A(a) = \dim_k a/\mathfrak{m}a$.

Si consideramos la localización de $S = k[X_0, \dots, X_n]$ en el ideal irrelevante $\mathfrak{m} = (X_0, \dots, X_n)$, obtenemos el anillo local regular $S_\mathfrak{m}$ (que es el anillo local del origen en $\mathbb{A}^{n+1}$), y sus primos están en correspondencia con los primos de S (no necesariamente homogéneos) contenidos en $\mathfrak{m}$. Pongamos $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}S_m$. En la sección 1.2, vimos que si $I \subseteq S$ es homogéneo, todos los conjuntos minimales de generadores de I tienen el mismo número de elementos, y que este número es $\dim_k I/\mathfrak{m}I$. Además, vimos que no importaba si se exigía que los generadores fueran homogéneos o no, el número de elementos en un sistema generador minimal era el mismo.

[4]Sin embargo, sus complexiones sí, gracias al teorema de estructura de Cohen ([Ma86] 29.4)

Como la localización y los cocientes conmutan, denotando por I^e a la extensión de I en $S_{\mathfrak{m}}$, tenemos que $I/\mathfrak{m}I \simeq I^e/\mathfrak{n}I^e$. Por tanto, el número minimal de generadores de $I \subseteq S$ es el mismo que el de $I^e \subseteq S_{\mathfrak{m}}$.

En particular, sea $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva lisa, irreducible, de codimensión r. Tenemos que su ideal saturado $I_Y \subseteq S$ es un ideal primo homogéneo de altura s. Su extensión a $S_{\mathfrak{m}}$ también es primo de altura s y acabamos de ver que se puede genera por s elementos en $S_{\mathfrak{m}}$ si y sólo si I_Y se puede generar por s polinomios homogéneos. Deducimos que Y es una intersección completa si y sólo si $S_{\mathfrak{m}}/I_Y^e$ es una intersección completa.

Para un anillo local $(A, \mathfrak{n}, k)$, decimos que A tiene una singularidad aislada (en $\mathfrak{n}$), si A no es regular pero A_p es un anillo local regular para todo primo $p \neq \mathfrak{n}$. Si $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ es lisa irreducible e $I_Y \subseteq \mathfrak{m} \subseteq S$ es su ideal, es razonable pensar que $S_{\mathfrak{m}}/I_Y^e$ tiene una singularidad aislada. Esto es cierto. Como localizar conmuta con cociente, lo que tenemos que comprobar es que, para todo ideal primo $q \neq \mathfrak{m}$ (no necesariamente homogéneo) con $I_Y \subseteq q \subseteq \mathfrak{m}$, el anillo local $S_q/I_Y S_q$ es regular.

Como q está contenido propiamente en $\mathfrak{m}$, no es un primo maximal, así que para algún punto $0 \neq a = (a_0, \ldots, a_n) \in k^{n+1}$, tenemos $q \subset r = (X_0 - a_0, \ldots, X_n - a_n)$ (aquí usamos que k es algebraicamente cerrado). Como la localización de un anillo regular es regular ([Ma86] 19.3), es suficiente ver que $S_r/I_Y S_r$. Pero esto se sigue de que Y es lisa en $[a_0 : \ldots : a_n]$, pues tanto en $\mathbb{P}^n$ como en $\mathbb{A}^{n+1}$ el criterio para la lisitud (asumiendo irreducibilidad) es que si $I_Y = (F_1, \ldots, F_k)$, entonces la matriz:

$$\begin{pmatrix} \partial_0 F_1 & \ldots & \partial_n F_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_0 F_k & \ldots & \partial_n F_k \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

evaluada en $(a_0, \ldots, a_n)$ tenga rango $\mathrm{ht}(I_Y)$. Recíprocamente, si $S_{\mathfrak{m}}/I_Y^e$ tiene una singularidad aislada, Y es lisa. En efecto, trabajando en S/I_Y nos basta demostrar el siguiente resultado ([Ku76], teorema 2):

Proposición 2.20. *Sea $R = \oplus_{n \geq 0} R_n$ un anillo graduado con $R_1 \neq 0$. Sea P un ideal primo homogéneo tal que existe $r_1 \in R_1 - P$. Entonces la localización homogénea $R_{(P)}$ es regular si y sólo si la localización usual R_P es regular.*

Nótese que no exigimos que R sea noetheriano.

Demostración. Tomando un elemento $r_1 \in R_1 - P$ es inmediato (mirando grados) que $r_1 \in R_P$ es algebraicamente independiente sobre $R_{(P)}$. Se comprueba fácilmente que $R_P = R_{(P)}[r_1]_{\mathfrak{m}}$, donde $\mathfrak{m}$ es la extensión del ideal maximal de $R_{(P)}$ a $R_{(P)}[r_1]$.

Por tanto, partiendo de un anillo local $(A, \mathfrak{m}, k)$, construimos $(B, \mathfrak{n}, k')$ donde $B = A[X]_{\mathfrak{m}^e}$ y queremos ver que A es regular si y sólo el anillo local B es regular. Si A es regular, en particular es noetheriano, así que, por el teorema de la base de Hilbert, $A[X]$ es noetheriano, y $A[X]_{\mathfrak{m}^e}$ también. Es inmediato que al extender una cadena $\mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n$ de primos en A con inclusiones estrictas, obtenemos una cadena $\mathfrak{p}_1[X] = \mathfrak{p}_1^e \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n^e = \mathfrak{p}_n[X]$ de primos en $A[X]$ con inclusiones estrictas. De aquí, deducimos que $\dim B \geq \dim A$. Como A es regular, $\mathfrak{m}$ se puede generar por $\dim A$ elementos, y como B consiste en localizar en una extensión del ideal $\mathfrak{m}$, el ideal maximal $\mathfrak{n}$ de B se puede generar con $\dim A \leq \dim B$ elementos. Por tanto, $\mathrm{emb.dim}\, B \leq \dim B$, y como la otra desigualdad siempre se satisface, B es regular.

Para la otra dirección, supongamos que B es regular. Tenemos que $A[X]$ es plano sobre A (porque es libre) y que B es plano sobre $A[X]$ (por ser una localización), así que B es plano sobre A. Además, es evidente que para la inclusión $i : A \hookrightarrow B$ obtenemos $\mathfrak{m}^e = \mathfrak{n}$, así que i es un homomorfismo de anillos locales. Por tanto, deducimos que B es fielmente plano sobre A ([Ma86] 7.2). Para acabar la demostración, necesitamos algunas observaciones sobre descenso.

Si $I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \ldots$ es una cadena ascendente de ideales de A, entonces la cadena ascendente $I_n^e \subseteq I_{n+1}^e$ en B es estacionaria (pues B, al ser regular, es también noetheriano), por lo que $I_n^e = I_{n+1}^e$ para $n \geq n_0$. Pero por ser fielmente plano, $I^{ec} = I$ para todo ideal, así que $I_n = I_{n+1}$ para $n \geq n_0$. Deducimos así que A es noetheriano.

Si M es un A módulo finito y $M \otimes_A B$ es un B-módulo libre, veamos que M es un A-módulo libre. Sea r el mínimo número de generadores de M. Como sabemos, r viene dado por $r = \dim_k(M/\mathfrak{m}M) = \dim_k(M \otimes_A k)$. El homomorfismo local induce una extensión de cuerpos $k \hookrightarrow k'$. Se cumple $M \otimes_A B \otimes_B k' = M \otimes_A k' = M \otimes_A k \otimes_k k'$. El último espacio vectorial tiene la misma dimensión sobre k' que $M \otimes_A k$ tiene sobre k, y como el primer espacio vectorial es $(M \otimes_A B)/\mathfrak{n}(M \otimes_A B)$, deducimos que r también es el mínimo número de generadores de $M \otimes_A B$ como B módulo. Consideremos ahora una sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow A^r \longrightarrow M \longrightarrow 0 \tag{2.35}$$

donde K es un A-módulo finito. Tras tensorizar por B obtenemos:

$$0 \longrightarrow K \otimes_A B \longrightarrow B^r \longrightarrow M \otimes_A B \longrightarrow 0 \tag{2.36}$$

que es exacta porque B plano sobre A. Como $M \otimes_A B$ es libre, esta sucesión escinde, así que tras tensorizar por k' sigue siendo exacta:

$$0 \longrightarrow K \otimes_A k' \longrightarrow (k')^r \longrightarrow M \otimes_A k' \longrightarrow 0 \tag{2.37}$$

Pero $(k')^r$ y $M \otimes_A k'$ son espacios vectoriales sobre k' de rango r, por lo que $K \otimes_A k' = K \otimes_A B \otimes_B k' = 0$. Por el lema de Nakayama deducimos que $K \otimes_A B = 0$, y, por ser B fielmente plano sobre A, necesariamente se tiene $K = 0$. Por tanto, M es libre de rango r.

Volviendo a la demostración, para ver que A es regular usamos que un anillo noetheriano local es regular si y sólo si tiene dimensión global finita ([Ma86] 19.2). Seguimos a [SP] (etiqueta [00OF]). Sea $k = A/\mathfrak{m}$ y consideremos una resolución por módulos libres de rango finito (por ejemplo la resolución minimal):

$$\cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow k \longrightarrow 0 \tag{2.38}$$

donde los F_i son A-módulos libres de rango finito. Sea $d = \dim B$, y consideremos $K_d = \ker(F_{d-1} \to F_{d-2})$. Fijémonos en la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow K_d \longrightarrow F_{d-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow k \longrightarrow 0 \tag{2.39}$$

Tras tensorizar por B, obtenemos la sucesión:

$$0 \longrightarrow K_d \otimes_A B \longrightarrow F_{d-1} \otimes_A B \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \otimes_A B \longrightarrow k \otimes_A B \longrightarrow 0 \tag{2.40}$$

que es exacta porque B plano sobre A. En general, la dimensión proyectiva de cualquier B módulo finito es menor o igual que la de $B/\mathfrak{n}$. Además, la dimensión proyectiva de $B/\mathfrak{n}$ es finita si y sólo si B es regular y, en tal caso, coincide con la dimensión de Krull de B ([Ma86] 19.2). Como la sucesión exacta anterior es una resolución de $k \otimes B$ por módulos libres finitos hasta el miembro $d-1$, deducimos que $K_d \otimes_A B$ es libre. Como hemos visto antes, esto implica que K_d es libre. Por tanto, k tiene dimensión proyectiva finita, así que el anillo local A es regular.

□

Con el trabajo anterior, una versión de la conjetura de Hartshorne (algo más fuerte) sería:[5]

Conjetura 2.21. Sea A un anillo local regular de dimensión n y $\mathfrak{p} \subset A$ un ideal primo tal que $A/\mathfrak{p}$ tiene una singularidad aislada. Sea $r = \dim A/\mathfrak{p}$. Si $r > \frac{2n+1}{3}$ entonces $A/\mathfrak{p}$ es una intersección completa.

Hartshorne plantea esta conjetura en [Ha74], pero con la cota $r > \frac{2n-1}{3}$. Como menciona el profesor A.J. de Jong en el blog del Stacks Project, con esa desigualdad la conjetura es falsa, al menos para anillos locales que contienen al cuerpo de 2 elementos. La razón es que, sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 2, existe un fibrado de rango 2 en $\mathbb{P}^5$ que no escinde. En este caso, trabajando en $S_\mathfrak{m}$, tendríamos $r = 4$, $n = 6$ y, aunque $r = 4 > 11/3 = (2n-1)/3$, $A/\mathfrak{p}$ no es intersección completa.

[5] Hay que hacer una pequeña cuenta porque $\dim(S_\mathfrak{m}/I^e) = \dim Y + 1$

También en [Ha74], Hartshorne menciona algunos resultados positivos en esta dirección, asumiendo ciertas hipótesis en el anillo local $A/\mathfrak{p}$. A continuación damos la demostración del resultado más accesible, y del resto de resultados damos una idea general.

El caso no trivial más sencillo es $s = 2$, en el cual basta imponer que $A/\mathfrak{p}$ sea Cohen-Macaulay para deducir que es una intersección completa. De hecho, se puede relajar la hipótesis de regularidad por la de intersección completa local:

Teorema 2.22. *Sea A un anillo local regular de dimensión $n \geq 7$ y $\mathfrak{p} \subset A$ un ideal primo de altura 2 tal que $A/\mathfrak{p}$ es localmente intersección completa salvo en el punto cerrado. Si $A/\mathfrak{p}$ es Cohen-Macaulay, entonces es intersección completa.*

Aquí, decimos que $A/\mathfrak{p}$ es localmente intersección completa salvo en el ideal maximal $\mathfrak{m}$ si la localización en cada primo $q \neq \mathfrak{m}$ es una intersección completa. El resultado es debido a Szpiro en [Sz72].

Demostración. Denotamos por $\mathrm{pd}_A M$ a la dimensión proyectiva de un A-módulo M. Como A es regular, todo A-módulo finitamente generado tiene dimensión proyectiva finita. En particular, este es el caso para $A/\mathfrak{p}$ visto como A-módulo, y aplicando la fórmula de Auslander-Buchsbaum ([Ei95] teorema 19.9) tenemos:

$$\mathrm{pd}_A A/\mathfrak{p} = \mathrm{depth}_A A - \mathrm{depth}_A A/\mathfrak{p} \tag{2.41}$$

Por ser A regular, en particular es Cohen-Macaulay, así que $\mathrm{depth}_A A = \dim A$. Además, es inmediato comprobar que $\mathrm{depth}_A A/\mathfrak{p} = \mathrm{depth}_{A/\mathfrak{p}} A/\mathfrak{p}$. Como estamos asumiendo que $A/\mathfrak{p}$ es Cohen-Macaulay, tenemos $\mathrm{depth}_{A/\mathfrak{p}} A/\mathfrak{p} = \dim A/\mathfrak{p} = \dim A - \mathrm{ht}\,\mathfrak{p}$. Por tanto, con las hipótesis del enunciado, deducimos:

$$\mathrm{pd}_A A/\mathfrak{p} = \mathrm{ht}\,\mathfrak{p} = 2 \tag{2.42}$$

Tomando un sistema minimal de generadores $(x_1, \ldots, x_m)$ del ideal $\mathfrak{p}$ obtenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow A^m \longrightarrow A \longrightarrow A/\mathfrak{p} \tag{2.43}$$

Como $\mathrm{pd}_A A/\mathfrak{p} = 2$, deducimos que K es libre. Entonces, aplicando el teorema de Hilbert-Burch ([Ei95] 20.15), se tiene que $l = m - 1$, y que si:

$$0 \longrightarrow A^{m-1} \xrightarrow{\varphi} A^m \longrightarrow A \longrightarrow A/\mathfrak{p} \tag{2.44}$$

entonces $\mathfrak{p} = aI_{n-1}(\varphi)$, donde a es un elemento regular (un no divisor del cero) de A e $I_k(\varphi)$ es el ideal generado por los menores de tamaño k de la matriz asociada a φ. Como $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} = 2$, el elemento a tiene que ser invertible (por el Hauptidealsatz), así que $\mathfrak{p} = I_{n-1}(\varphi)$.

Supongamos ahora que $m > 2$ (es decir, supongamos que $A/\mathfrak{p}$ no es una intersección completa). Como 2.44 es una resolución minimal en un anillo local, las entradas de la matriz de φ están en $\mathfrak{m}$. En particular, $I_{n-2}(\varphi) \subset \mathfrak{m}$. Veamos que por ser $A/\mathfrak{p}$ localmente intersección completa (salvo en $\mathfrak{m}$) entonces $I_{n-2}(\varphi)$ es un ideal $\mathfrak{m}$-primario. En efecto, si localizamos la resolución de $\mathfrak{p}$ en 2.44 en un primo $\mathfrak{q}$ tal que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}$ obtenemos:

$$0 \longrightarrow A_{\mathfrak{q}}^{m-1} \xrightarrow{\varphi_q} A_{\mathfrak{q}}^m \longrightarrow \mathfrak{p}_{\mathfrak{q}} \longrightarrow 0 \tag{2.45}$$

Como la localización de $A/\mathfrak{p}$ en $\mathfrak{q}/\mathfrak{p}$ es una intersección completa, la extensión de $\mathfrak{p}$ a $A_{\mathfrak{q}}$ es un ideal primo generado por dos elementos. Por tanto, usando de nuevo Hilbert-Burch (aunque este caso se hace a mano sin ninguna dificultad), la resolución minimal es de la forma:

$$0 \longrightarrow A_{\mathfrak{q}} \xrightarrow{\psi} A_{\mathfrak{q}}^2 \longrightarrow \mathfrak{p}_{\mathfrak{q}} \longrightarrow 0 \tag{2.46}$$

Por las propiedades de las resoluciones libres, deducimos que 2.45 es suma directa de la resolución minimal y de sucesiones exactas triviales ([Ei95] teorema 20.2). Por tanto, 2.45 es isomorfa como sucesión exacta a:

$$0 \longrightarrow A_{\mathfrak{q}} \oplus A_{\mathfrak{q}}^{m-2} \xrightarrow{\psi\oplus 1} A_{\mathfrak{q}}^2 \oplus A_{\mathfrak{q}}^{m-2} \longrightarrow \mathfrak{p}_{\mathfrak{q}} \longrightarrow 0 \tag{2.47}$$

De esta expresión deducimos que el ideal $I_{n-2}(\varphi_{\mathfrak{q}})$ es $A_{\mathfrak{q}}$. Por otra parte, si localizamos en un primo $\mathfrak{q}$ que no contiene a $\mathfrak{p}$ se tiene $\mathfrak{p}_{\mathfrak{q}} = A_{\mathfrak{q}}$, la sucesión 2.45 escinde y llegamos a la misma conclusión. Por tanto, ningún primo no cerrado contiene a $I_{n-2}(\varphi)$, y la única opción es que $I_{n-2}(\varphi)$ sea $\mathfrak{m}$-primario.

Para acabar basta aplicar la siguiente proposición, cuya demostración se puede ver, por ejemplo, en [Ma86] (13.10):

Proposición 2.23. *Sea A un anillo noetheriano y M una matriz de tamaño $r \times s$ con entradas en A. Sea I_t el ideal generado por los menores de tamaño $t \times t$. Entonces, para todo primo minimal P sobre I_t se cumple:*

$$\operatorname{ht} P \leq (r-t+1)(s-t+1) \tag{2.48}$$

En nuestro caso, la matriz de φ es de tamaño $n \times (n-1)$ y estamos interesados en I_{n-2}. Como $\mathfrak{m}$ es primo minimal de I_{n-2}, deducimos que $\dim A = \operatorname{ht} \mathfrak{m} \leq 6$, como queríamos.

□

Para un anillo noetheriano A no necesariamente local, A es Cohen-Macaulay si cada localización en un primo es Cohen-Macaulay.[6] Decimos que una variedad $X \subset \mathbb{P}^n$ es aritméticamente Cohen-Macaulay si su anillo coordenado $S(X)$ es Cohen-Macaulay. No es complicado probar que $S(X)$ es Cohen-Macaulay si y sólo si $S(X)_{\mathfrak{m}}$ es Cohen-Macaulay (por ejemplo, es el ejercicio 19.10 de [Ei95]). Por tanto, podemos aplicar el teorema anterior para obtener el siguiente:

Teorema 2.24. *Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad lisa (conexa) y aritméticamente Cohen-Macaulay de codimensión 2. Si $n \geq 6$, entonces X es una intersección completa.*

Una condición cohomológica equivalente para que $S(X)$ sea aritméticamente Cohen-Macaulay es que, para todo $k \in \mathbb{Z}$, se tenga $H^i(X, \mathcal{O}_X(k)) = 0$ para $1 \leq i \leq \dim X - 1$ y que la aplicación $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(k))$ sea sobreyectiva. Con esta terminología, en la sección 1.3.3 demostramos que una intersección completa es aritméticamente Cohen-Macaulay.

En general, la construcción de 2.44 se puede revertir. Partiendo de una matriz M de tamaño $m \times (m-1)$ tal que $\operatorname{depth} I_{m-1}(M) \geq 2$, se considera la aplicación ψ cuya matriz es el vector fila cuya i-ésima entrada es $(-1)^i$ veces el menor que resulta tras suprimir la i-ésima fila de M. Entonces se obtiene:

$$0 \longrightarrow A^{m-1} \xrightarrow{\varphi} A^m \xrightarrow{\psi} \mathfrak{p} \longrightarrow 0 \tag{2.49}$$

donde $\mathfrak{p} = I_{m-1}(M)$. Por ejemplo, siguiendo a [Sz72], si en el anillo $k[X_{0,0}, X_{0,1}, X_{1,0}, X_{1,1}, X_{2,0}, X_{2,1}]$ partimos de la matriz:

$$\begin{pmatrix} X_{0,0} & X_{0,1} \\ X_{1,0} & X_{1,1} \\ X_{2,0} & X_{2,1} \end{pmatrix} \tag{2.50}$$

obtenemos el ideal $\mathfrak{p} = (X_{0,0}X_{1,1} - X_{0,1}X_{1,0}, X_{0,1}X_{2,0} - X_{0,0}X_{2,1}, X_{1,0}X_{2,1} - X_{2,0}X_{1,1})$. Se puede comprobar que este ideal es el kernel del homomorfismo de anillos $\varphi : k[X_{0,0}, X_{0,1}, X_{1,0}, X_{1,1}, X_{2,0}, X_{2,1}] \to k[S_0, S_1, S_2, T_0, T_1]$ que lleva $X_{i,j}$ a S_iT_j. En otras palabras, $\mathfrak{p}$ es el ideal asociado a la inmersión de segre $Y = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^5$. Se ve fácilmente que $(X_{0,0}, X_{1,1}, X_{0,1} - X_{2,0}, X_{1,0} - X_{2,1})$ es una sucesión regular de longitud 4 en $S(Y)$, y como $\dim S(Y) = \dim Y + 1 = 4$, deducimos que Y es aritméticamente Cohen-Macaulay. Esta variedad no es una intersección completa, ya que $\dim_k \mathfrak{p}/\mathfrak{m}\mathfrak{p} = 3 > 2 = \operatorname{ht} p$ (más en general, vimos que las variedades de Segre nunca son intersección completa, salvo la cuádrica lisa en $\mathbb{P}^3$). Como Y es lisa concluimos que la cota del teorema 2.22 está ajustada.

[6] Esta definición es consistente porque la localización de un Cohen-Macaulay local es Cohen-Macaulay local ([Ma86] 17.3)

Se puede relajar la hipótesis de profundidad en 2.22 a cambio de trabajar en característica 0. En [HO74], Hartshorne y Ogus demuestran el siguiente resultado:

Teorema 2.25. *Sea A un anillo regular local de dimensión n que contiene a su cuerpo residual k de característica* 0*, y sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo tal que $A/\mathfrak{p}$ es localmente intersección completa salvo en el punto cerrado $\mathfrak{m}$. Sea $r = \dim A/\mathfrak{p}$ y $s = \operatorname{ht}\mathfrak{p} = n - r$. Se tiene:*

1. *Si* $\operatorname{depth} A/\mathfrak{p} > \frac{r+1}{2}$ *y* $r \geq s + 3$*, entonces $A/\mathfrak{p}$ es Gorenstein.*
2. *Si* $\operatorname{depth} A/\mathfrak{p} > \frac{r+1}{2}$*,* $s = 2$ *y* $r \geq 5$*, entonces $A/\mathfrak{p}$ es intersección completa.*
3. *Si* $\operatorname{depth} A/\mathfrak{p} > \frac{r+1}{2}$*,* $s = 3$ *y* $r \geq 8$*, entonces $A/\mathfrak{p}$ es intersección completa.*

La demostración usa teoría de cohomología local para demostrar el primer apartado. El segundo apartado se deduce inmediatamente, teniendo en cuenta la siguiente caracterización de anillos de Gorenstein entre los de Cohen-Macaulay ([Ei95] 21.16):

Proposición 2.26. *Sea A un anillo regular local, I un ideal de altura c y supongamos que $R = A/I$ es Cohen-Macaulay. Si $\mathcal{F}$ es la resolución libre minimal de R como A-módulo, entonces la longitud de $\mathcal{F}$ es c.*

$$0 \longrightarrow F_c \longrightarrow F_{c-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \simeq A \longrightarrow R \longrightarrow 0 \tag{2.51}$$

Además, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *R es Gorenstein.*
2. *$\mathcal{F}$ y su dual son isomorfos (como complejos).*
3. *$F_c \simeq A$*

Asumiendo el primer apartado de 2.25 y razonando como en 2.22 vemos que si $s = 2$ y $r \geq 5$, tenemos una resolución como en 2.44. Pero como $A/\mathfrak{p}$ es Gorenstein, deducimos por la proposición mencionada que $A^{m-1} \simeq A$, por lo que $m = 2$ y $A/\mathfrak{p}$ es intersección completa.[7]

El tercer apartado de 2.25 se deduce también de manera directa de estudiar la estructura de la resolución minimal de $A/\mathfrak{p}$ como A-módulo. El resultado que se usa es debido a Buchsbaum y Eisenbud en [BE77] y establece que si $\mathfrak{p}$ es de altura 3 y $A/\mathfrak{p}$ es Gorenstein, entonces $\mathfrak{p}$ está generado por los pfaffianos de ciertas matrices antisimétricas asociadas a la resolución minimal. Además, si $\mathfrak{p}$ no es intersección completa, demuestran que la codimensión del ideal debe ser ≤ 7, de donde se deduce el apartado c).

Otro resultado en codimensión 2 fue obtenido por Zolbani en [Zo07], esta vez pidiendo que el anillo de secciones globales sea Gorenstein.

Teorema 2.27. *Sea A un anillo regular local de dimensión $n \geq 5$ y $\mathfrak{p}$ un primo de altura* 2*. Sea $(V, \mathcal{O}_V)$ el espectro puntuado de $A/\mathfrak{p}$ (es decir, la restricción del esquema* $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{p})$ *al abierto complementario del punto cerrado $\mathfrak{m}$). Si $\Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ es un anillo de Gorenstein, entonces $A/\mathfrak{p}$ es intersección completa.*

2.4 Caso cuadrático de la conjetura de Hartshorne

En esta sección damos las ideas detrás de la demostración de un caso particular de la conjetura de Hartshorne, el de variedades cuadráticas, demostrado en [IR13] por Ionescu y Russo. Trabajamos sobre $\mathbb{C}$. Decimos que un subesquema proyectivo $X \subset \mathbb{P}^N$ es una variedad si es liso e irreducible (y, por tanto, integral). Además, se asume implícitamente que $X \subset \mathbb{P}^N$ es no degenerada, es decir, no está contenida en ningún hiperplano de $\mathbb{P}^{N-1}$. Usualmente, denotamos la dimensión de X por n y la codimensión por c, de manera que $N = n + c$.

[7] Por supuesto, también se puede aplicar 2.22 directamente.

En la demostración va a ser muy importante considerar las rectas contenidas en X que pasan por un punto x. En general, dado un esquema proyectivo $X \subset \mathbb{P}^N$ y un subesquema cerrado $Y \subset X$ podemos considerar la familia de subesquemas $Z \subset X$ que son "similares" a Y. La relación de similitud que se toma es la de tener el mismo polinomio de Hilbert, y se puede demostrar que existe un esquema que representa la parametrización "más general" de subesquemas cerrados $Z \subset X$ similares a Y, que se denomina esquema de Hilbert de X respecto al polinomio $P = P_Y$, y se denota por $\mathcal{H}_P(X)$.[8]

Además, es fácil ver que los k-planos de $\mathbb{P}^N$ son exactamente los subesquemas cerrados con polinomio de Hilbert:

$$P(d) = \binom{k+d}{d} \tag{2.52}$$

Por tanto, dado un esquema proyectivo $X \subset \mathbb{P}^N$ podemos hablar del esquema de Hilbert de k-planos en X. En este caso, es usual denominarlo esquema de Fano de k-planos en X, y denotarlo por $F_k(X)$. La construcción de $F_k(X)$ es muy sencilla comparada con la del esquema de Hilbert $\mathcal{H}_P(X)$ para un P general, y ambas se pueden encontrar en el capítulo 6 de [EH16].

En particular, podemos considerar $F_1(X)$, el esquema de rectas contenidas en una variedad $X \subset \mathbb{P}^N$. Siguiendo a [Ru16], a este esquema lo vamos a denotar por $\mathcal{L}(X)$. Para un punto $x \in X$, al subesquema de $\mathcal{L}(X)$ de las rectas de X que pasan por x lo denotamos por $\mathcal{L}_x(X)$ y, si la variedad X está fija y no hay confusión, simplemente por $\mathcal{L}_x$.

Por supuesto, el esquema $\mathcal{L}(X)$ puede ser vacío, como en el caso de una curva plana que no sea una recta, ser de dimensión positiva, como la cuádrica $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^3$, o ser un conjunto finito de puntos, como en el caso de una superficie cúbica lisa en $\mathbb{P}^3$ y la historia de las 27 rectas ([Ha77] V 4). En general, se puede demostrar que, salvo en ciertos casos particulares, si se cumple $\varphi(N, d, k) = (k+1)(N-k) - \binom{k+d}{k} \geq 0$, entonces para una hipersuperficie general $X \subset \mathbb{P}^n$ de grado d el esquema $F_k(X)$ es equidimensional de dimensión $\varphi(N, d, k)$ ([EH16]).

Analicemos de maneral elemental $\mathcal{L}_x(X)$ para el caso más sencillo, en el que $X \subset \mathbb{P}^N$ es una intersección completa lisa de tipo $(d_1, \dots, d_c)$ con $d_1 \geq \ldots \geq d_c$. Sea $I_X = (F_1, \dots, F_c)$ con F_i homogéneos de grado d_i, que definen hipersuperficies $H_i = V(F_i)$, sea $x \in X$ arbitraria. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x = [1 : 0 : \ldots : 0]$ y que T_xX tiene ecuaciones implícitas $y_1 = \ldots = y_c = 0$. Como X es intersección completa de los H_i, una recta estará en X si y sólo si está en cada H_i. Además, las rectas contenidas en X que pasan por x en particular son tangentes a X en x, así que están contenidas en $T_xX \simeq \mathbb{P}^n$, donde $n = N - c$. Pero todas estas rectas pasan por x, así que están contenidas en el hiperplano $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ de rectas que pasan por x. La identificación con $\mathbb{P}^{n-1}$ asocia a un punto $[z_{c+1} : \ldots : z_N] \in \mathbb{P}^{n-1}$ la recta que pasa por x y por $[0 : \ldots : 0 : z_{c+1} : \ldots : z_n]$.

Ahora bien, una recta de coordenadas $[z_{c+1} : \ldots z_N]$ va a estar en H_i si y sólo si $F_i(1, 0, \dots, 0, tz_{c+1}, \dots tz_N)$ es cero para todo $t \in \mathbb{C}$. Podemos escribir $F_i = \sum_{j=0}^{d_i} A_j B_{d_i - j}$ donde A_j es homogéneo de grado j en las variables $Y_0, \dots, Y_c$, donde B_j es homogéneo de grado j en $Y_{c+1}, \dots, Y_n$, y donde $A_0 = B_0 = 1$. Como $x \in X \subset H_i$, tenemos que $A_{d_i}(1, 0, \dots, 0) = 0$, y como $T_xX = \bigcap T_xH_i$, el n-plano de ecuación $y_1 = \ldots = y_c = 0$ es tangente a H_i en x. De aquí deducimos $A_{d_i - 1}(1, 0, \dots, 0)B_1(Y_{c+1}, \dots, Y_n) = 0$. Por tanto, la recta con coordenadas $[z_{c+1} : \ldots z_N]$ está en H_i si y sólo si se satisfacen las $d_i - 1$ ecuaciones definidas en $\mathbb{P}^{n-1}$:

$$A_{d_i-2}(1, 0, \dots, 0)B_2(z_{c+1}, \dots, z_N) = \cdots = A_1(1, 0, \dots, 0)B_{d_i-1}(z_{c+1}, \dots, z_N) = B_{d_i}(z_{c+1}, \dots, z_N) = 0 \tag{2.53}$$

En particular, escribiendo $d = (d_1 - 1) + \ldots (d_c - 1)$, deducimos que $\mathcal{L}_x(X)$ es no vacío siempre y cuando $d \leq n - 1$. Decimos que X está recubierto por rectas si por todo punto x pasa una recta contenida en X, es decir, si $\mathcal{L}_x \neq \emptyset$ para todo $x \in X$. Acabamos de demostrar que una intersección completa con $d \leq n - 1$ está

[8] Para una idea más formal de esta discusión y su relación con el concepto de platitud véase el capítulo 6 de [EH16]

recubierta por rectas.

En este caso, sabemos de la sección 1.6 que $\omega_X = \mathcal{O}_X(d_1 + \ldots + d_c - N - 1) = \mathcal{O}_X(d - n - 1)$. En general, sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad, denotemos por K_X al divisor asociado al haz canónico ω_X, y por H al divisor de la sección hiperplana. Si X es subcanónica, con $-K_X = aH$ para un entero a, decimos que a es el índice de X y lo denotamos por $i(X)$. Cuando $i(X)$ es positivo y $\operatorname{Pic}(X) = \mathbb{Z}\langle H\rangle$, decimos que X es una variedad prima de Fano de índice $i(X)$. En particular, recordando que para una intersección completa lisa de dimensión $n \geq 3$ se tiene $\operatorname{Pic}(X) = \mathbb{Z}$ (teorema 2.1), vemos que las intersecciones completas lisas con de dimensión $n \geq 3$ y $d \leq n$ son variedades primas de Fano, y si $d \leq n-1$, entonces X está cubierta por rectas.

Para la demostración, vamos a considerar variedades $X \subset \mathbb{P}^n$ que son intersección esquemática de hipersuperficies H_i de grados $d_1 \geq \ldots \geq d_m$. Nótese que si $H_i = V(F_i)$, entonces $I_X = \operatorname{Sat}(F_1, \ldots, F_m)$, sin que se tenga $I_X = (F_1, \ldots, F_m)$ en general (lo que sí ocurre cuando X es intersección completa). Además, suponemos que X no es intersección esquemática de un subconjunto propio de las H_i. Si la codimensión de X es c, ponemos $d = (d_1 - 1) + \ldots + (d_c - 1)$ (nótese que sumamos sólo sobre los c primeros índices). Decimos que $X \subset \mathbb{P}^n$ es cuadrática si $d_i = 2$ para todo i (como estamos asumiendo que X no es degenerada, basta con que $d_1 = 2$). En general, se tiene $d \geq c$, y está claro que X es cuadrática si y sólo si $d = c$.

Asociada a cada punto x de X, se puede definir una segunda forma fundamental proyectiva, que denotamos por $|II_{x,X}|$, y que es un sistema lineal de cuádricas en el $\mathbb{P}^{n-1}$ de las rectas tangentes a X que pasan por x, al cual denotamos por $\mathbb{P}((T_xX)^*)$. Además, cuando X es cuadrática, el lugar base del sistema lineal $|II_{x,X}|$ es, esquemáticamente, la variedad $\mathcal{L}_x$. Las demostraciones de estos hechos y de los que ahora citamos se pueden ver en el capítulo 2 de [Ru16].

Por último, recordemos que el defecto secante de X se define como $\delta(X) = 2n + 1 - \dim \operatorname{Sec}(X)$, que mide cuando le falta a $\operatorname{Sec}(X)$ respecto a su dimensión esperada. A continuación enunciamos las proposiciones que necesitamos para relacionar los conceptos anteriores.

Proposición 2.28. *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad (lisa, irreducible, no degenerada) con defecto secante $\delta(X) \geq 1$. Entonces:*

1. *Para un punto $x \in X$ general se tiene $\dim(|II_{X,x}|) = N - n - 1$.*
2. *Se cumple $N \leq \frac{n(n+3)}{2}$ con igualdad si y sólo si $|II_{X,x}|$ es el sistema lineal completo de cuádricas en $\mathbb{P}((T_xX)^*) \simeq \mathbb{P}^{n-1}$*

La siguiente proposición es una mezcla del teorema 2.4 en [IR13] y de la proposición 2.3.8 en [Ru16].

Proposición 2.29. *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad cuadrática de codimensión c y $x \in X$ un punto general. Entonces:*

1. *Si $d = c \leq n - 1$, entonces $\mathcal{L}_x \subset \mathbb{P}((T_xX)^*)$ es una variedad cuadrática definida como intersección esquemática de, como mucho, c cuádricas. En particular, $\mathcal{L}_x \neq \emptyset$.*
2. *Si $d = c \leq n - 2$, y $[L] \in \mathcal{L}_x$, entonces X es una variedad prima de Fano con $i(X) = 2 + \dim_{[L]}(\mathcal{L}_x)$. En particular, $\mathcal{L}_x$ es equidimensional.*

Aquí, si Y es un esquema noetheriano de tipo finito sobre k e $y \in Y$ es un punto, entonces $\dim_y Y$ es la mayor de las dimensiones de las componentes irreducibles de Y que pasan por y o, lo que es lo mismo, la dimensión del anillo local $\mathcal{O}_{Y,y}$.

Proposición 2.30. *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad prima de Fano de índice $i(X) \geq \frac{n+3}{2}$ y $x \in X$ un punto general. Entonces $\mathcal{L}_x \subset \mathbb{P}((T_xX)^*) \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ es una variedad (no degenerada) de dimensión $i(X) - 2$.*

Ya estamos preparados para la demostración de la conjetura de Hartshorne restringida a variedades cuadráticas.

Teorema 2.31. *Sea $X \subset \mathbb{N}$ una variedad cuadrática, y supongamos que $2c + 1 \leq n$, o lo que es lo mismo, $c < \frac{n}{2}$. Entonces X es una intersección completa.*

Demostración ([Ru16] 5.1.3). Podemos asumir $c \geq 2$, así que $n \geq 5$ y $N = n + c \geq 7$. Sea $x \in X$ un punto general. Obviamente $c \leq n - 2$ así que aplicando 2.29 deducimos que X es una variedad prima de Fano con índice $i(X) = 2 + \dim(\mathcal{L}_x)$. También por 2.29, $\mathcal{L}_x$ está definida esquemáticamente por, como mucho, c cuádricas en un $\mathbb{P}^{n-1}$. Como $c \leq (n-1)/2$ y la dimensión ambiente es $n - 1$, estamos en situación de aplicar el criterio de Falting 1.30 para deducir que $\mathcal{L}_x$ es intersección completa de $s = n - 1 - \dim(\mathcal{L}_x)$ cuádricas, con $s \leq c$. Por otra parte, como $\dim(\mathcal{L}_x) \geq n - 1 - c$, y como $c \leq (n-1)/2$, deducimos:

$$\dim(\mathcal{L}_x) \geq \frac{n-1}{2} \quad , \quad i(X) = \dim(\mathcal{L}_x) + 2 \geq \frac{n+3}{2} \tag{2.54}$$

Ahora podemos aplicar 2.30 y deducir que $\mathcal{L}_x \subset \mathbb{P}^{n-1}$ es una variedad (es decir, es lisa, irreducible y no degenerada). Por otra parte, para el defecto secante tenemos $\delta(X) = 2n + 1 - \mathrm{Sec}(X) \geq 2n + 1 - N = n + 1 - c \geq (n+3)/2 \geq 1$. Por tanto, podemos aplicar 2.28 para deducir que $\dim(|II_{X,x}|) = N - n - 1 = c - 1$. Como $\mathcal{L}_x$ es el lugar base de $|II_{X,x}|$, deducimos que hay c cuádricas linealmente independientes que se anulan en $\mathcal{L}_x$. Es decir, si consideramos el ideal $I_{\mathcal{L}_x}$ de $\mathcal{L}_x$ como variedad proyectiva en $\mathbb{P}^{n-1}$ tenemos que $I_{\mathcal{L}_x}$ contiene al menos c polinomios homogéneos linealmente independientes de grado 2. Pero como $\mathcal{L}_x$ es intersección completa de s cuádricas, deducimos que $I_{\mathcal{L}_x}$ tiene dimensión s en grado 2. Por tanto, $c \leq s$. Como teníamos $s \leq c$, deducimos $s = c$, por lo que $\dim(\mathcal{L}_x) = n - 1 - c$ y el índice de X es $i(X) = n + 1 - c = N + 1 - 2c$. Como $\omega_X = \mathcal{O}_X(-i(X))$, se satisfacen las hipótesis del criterio 1.29 y deducimos, por fin, que X es intersección completa (de c cuádricas). □

Por último, podemos demostrar que las variedades cuadráticas que cumplen $3n = 2N$ son ejemplos clásicos.

Teorema 2.32. *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad cuadrática con dimensión n de manera que $3n = 2N$. Si $X \subset \mathbb{P}^N$ no es una intersección completa, entonces es proyectivamente equivalente (existe un automorfismo de $\mathbb{P}^N$ que lleva una variedad a la otra) a una de las siguientes:*

1. *La grassmanniana $\mathbb{G}(1,4) \subset \mathbb{P}^9$*
2. *La variedad de espinores $S^{10} \subset \mathbb{P}^{15}$*

Antes de dar la demostración, establecemos un poco más de terminología. En general, una variedad X es de Fano si su divisor anticanónico $-K_X$ es amplio. Si X es una variedad de Fano, el mayor entero positivo r tal que existe un divisor (necesariamente amplio) H con $-K_X = rH$, es el índice de X. Cuando $X \subset \mathbb{P}^N$ y $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}\langle \mathcal{O}_X(1) \rangle$ recuperamos la noción de variedad de Fano prima. Para una variedad de Fano X, el coíndice se define como $\dim X - r + 1$.

De acuerdo a la terminología de [Mu89], $X \subset \mathbb{P}^N$ es una F-variedad si es linealmente normal y $-K_X = \mathcal{O}_X(n-2)$. Una F-variedad $X \subset \mathbb{P}^N$ es de primera clase si su grupo de Picard está generado por la sección hiperplana. Por último, decimos que una variedad de Fano X es de tipo del Pezzo si $-K_X$ es divisible por $n - 1$ (en $\mathrm{Pic}(X)$).

Demostración de 2.32 ([Ru16] 5.1.4). Supongamos que X no es intersección completa. Podemos asumir $N \geq 6$. Sea $x \in X$ un punto general. Igual que en la demostración anterior deducimos que X es una variedad prima de Fano con índice $i(X) = 2 + \dim(\mathcal{L}_x)$. Tenemos $\delta(X) \geq 2n + 1 - N = c + 1 \geq 1$, así que podemos aplicar 2.28 para deducir que $\dim(|II_{X,x}|) = N - n - 1 = c - 1$, y como $\mathcal{L}_x$ es el lugar base (esquemáticamente) de $|II_{X,x}|$, deducimos que $\mathcal{L}_x$ es intersección esquemática de c cuádricas linealmente independientes. Por tanto, $\dim(\mathcal{L}_x) \geq n - 1 - c$, así que $i(X) \geq n + 1 - c = N + 1 - 2c$. Como estamos asumiendo que X no es intersección completa, por el contrarrecíproco de 1.29 tenemos $\dim(\mathcal{L}_x) \geq n - c = \frac{n}{2} \geq \frac{n-1}{2}$. Por tanto, $i(X) \geq \frac{n+3}{2}$ y podemos aplicar 2.30 para deducir que $\mathcal{L}_x \subset \mathbb{P}^{n-1}$ es una variedad no degenerada.

Si $\mathcal{L}_x$ fuera una intersección completa, razonando como en la demostración anterior llegaríamos a una contradicción. Por tanto, asumimos que $\mathcal{L}_x$ no es intersección completa y vamos a aplicar el contrarrecíproco del criterio 1.31 a $\mathcal{L}_x \subset \mathbb{P}^{n-1}$. Denotamos por n' a la dimensión de $\mathcal{L}_x$, $N' = n - 1$ a la dimensión ambiente, $c' = N' - n'$ a la codimensión y por m' al número de hipersuperficies que definen esquemáticamente a $\mathcal{L}_x$. Como $\dim(\mathcal{L}_x) \geq n - c = c$, tenemos $m' = c \leq \dim(\mathcal{L}_x) + 1 = n' + 1$. Aplicando el contrarrecíproco de 1.31, deducimos $m' \geq N' - 2n'/3$ y $n' < 3N'/4 - 1/2$, que, teniendo en cuenta $n = 2c$, podemos reescribir como:

$$\frac{3n-6}{4} \leq \dim(\mathcal{L}_x) < \frac{3n-5}{4} \tag{2.55}$$

Por tanto, $4\dim(\mathcal{L}_x) = 3n-6$ y existe un entero positivo $r \geq 1$ con $n = 4r+2$ y $\dim(\mathcal{L}_x) = 3r$. Si $r > 2$, entonces $\dim(\mathcal{L}_x) = 3r \geq 2r+3 = 2(n-1-\dim(\mathcal{L}_x)+1$, y podemos aplicar el caso que acabamos de resolver de la conjetura de Hartshorne para deducir que $\mathcal{L}_x$ es intersección completa. Por tanto, $r = 1$ o $r = 2$. Pero estos casos están resueltos en la literatura. Si $r = 1$, entonces $n = 6$, el índice es $i(X) = 5$, y tenemos una variedad de del Pezzo. Con estos datos, se deduce del análisis en la sección I.8 de [Fu90] que $X \subset \mathbb{P}^9$ es proyectivamente equivalente a $\mathbb{G}(1,4) \subset \mathbb{P}^9$. Si $r = 2$, entonces $n = 10$, el índice es $i(X) = 8$, el coíndice es 3 y tenemos una F-variedad de Fano de primera especie. Con esta información el teorema 2 en [Mu89] permite concluir que $X \subset \mathbb{P}^{15}$ es proyectivamente equivalente a $S^{10} \subset \mathbb{P}^{15}$, como queríamos. $\square$

Apéndice A

Resultados básicos de dimensión para morfismos

En esta sección recolectamos algunos resultados fundamentales sobre la dimensión de esquemas de tipo finito. Primero, necesitamos la siguiente proposición general.

Proposición A.1. *Sea X un esquema quasicompacto e $Y \subseteq X$ un subconjunto cerrado no vacío. Entonces Y contiene un punto cerrado.*

Demostración. Supongamos que $X = \cup V_i$ para $1 \leq i \leq n$ donde $V_i = \operatorname{Spec} A_i$ son abiertos afines. Vamos a definir subconjuntos cerrados no vacíos Y_i para $i = 0, \ldots, n$ con $Y_i \subseteq Y_{i-1}$ para $i = 1, \ldots, n$ que son de la forma $Y_i = \overline{\{p_i\}}$ para $i \geq 1$. Ponemos $Y_0 = Y$. Sin pérdida de generalidad, $Y_0 \cap V_1$ es un cerrado no vacío en $V_1 = \operatorname{Spec} A_i$ que, por la definición de la topología de Zariski, contiene un punto $p_1 \in Y_0 \cap V_1$ cerrado en V_1 (es decir, un ideal maximal en el espectro). Definimos $Y_1 = \overline{\{p_1\}}$, donde el cierre es relativo a X. Inductivamente, si $Y_i \cap V_{i+1}$, ponemos $p_{i+1} = p_i$, $Y_{i+1} = Y_i$, y si $Y_i \cap V_{i+1}$ es no vacío, elegimos un punto $p_{i+1} \in Y_i \cap V_{i+1}$ cerrado en V_{i+1} y definimos $Y_{i+1} = \overline{\{p_{i+1}\}}$. En tal caso $p_n \in Y_n \subseteq Y$ es un punto cerrado de X. En efecto, basta comprobar que $\{p_n\} \cap V_i \subseteq Y_i \cap V_i$ es, o bien vacío, o el conjunto $\{p_i\}$ que es cerrado en V_i por construcción. Por tanto, p_n es un punto cerrado de X contenido en Y. □

La primera proposición sobre dimensión es más que razonable.

Proposición A.2. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo dominante ($\overline{f(X)} = Y$) entre esquemas de tipo finito sobre un cuerpo k. Entonces* $\dim Y \leq \dim X$

Demostración. Considerando la descomposición en componentes irreducibles, $X = \cup_i X_i$, $Y = \cup_j Y_j$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, tenemos $Y = \overline{f(X)} = \cup \overline{f(X_i)}$. Además, como X_i es irreducible, $f(X_i)$ también y, por tanto, $\overline{f(X_i)} \subseteq Y_j$ para cierto j. De lo anterior deducimos que para cada $1 \leq j \leq m$ hay al menos un i_j con $\overline{f(X_{i_j})} = Y_j$. Por tanto, podemos reducir al caso en que X e Y son irreducibles,
Además, si consideramos la estructura de esquema reducida $r_X : X_{red} \to X$, y $r_Y : Y_{red} \to Y$, entonces X_{red} es un esquema de tipo finito reducido, r_X es un homeomorfismo, y lo mismo para Y_{red} y r_Y (más detalles en [SP] [01IZ]). Además, por la propiedad universal de Y_{red} y por ser X_{red} reducido, obtenemos $f_{red} : X_{red} \to Y_{red}$ con el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X_{red} \arrow[r, "f_{red}"] \arrow[d, "r_X"] & Y_{red} \arrow[d, "r_Y"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} \tag{A.1}$$

Por tanto, como r_X, r_Y son homeomorfismos, podemos reducir al caso en que X, Y son irreducibles y reducidos, o de manera equivalente, integrales.
Por último, si X e Y son esquemas de tipo finito integrales, por la teoría clásica de dimensión tenemos $\dim(X) = \operatorname{tr.deg}_k k(X)$, $\dim(Y) = \operatorname{tr.deg}_k k(Y)$, donde $k(X), k(Y)$ son los cuerpo de funciones de los esquemas integrales X, Y ([Ha77] Ejer. II 3.20 b). Si $\xi_X \in X$, $\xi_Y \in Y$ son los puntos genéricos, que $f : X \to Y$ sea

dominante equivale a que $f(\xi_X) = \xi_Y$. Pero se tiene $k(X) = \mathcal{O}_{X,\xi_X}$ y lo mismo para Y, así que el morfismo dominante f induce un homomorfismo de cuerpos (necesariamente inyectivo) $k(Y) \hookrightarrow k(X)$ sobre k. De ello deducimos $\operatorname{tr.deg} k(Y) \leq \operatorname{tr.deg} k(X)$, y hemos acabado. □

Podemos hacer bastante más fuerte el resultado anterior ([Ha77] Ex II 3.22):

Proposición A.3. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo dominante entre esquemas integrales de tipo finito sobre k. Por la proposición anterior, $e = \dim X - \dim Y \geq 0$. Entonces se tiene:*

1. *Si $y \in f(X)$, entonces toda componente irreducible de $f^{-1}(y)$ tiene dimensión $\geq e$. .*
2. *Hay un abierto no vacío $V \subseteq f(X)$ tal que $\dim f^{-1}(y) = e$.*

Demostración. Reducimos la proposición a álgebra conmutativa. Para el apartado a), si $X_{y,i}$ es una componente irreducible de $f^{-1}(y)$, consideramos $x \in X_{y,i}$, y tomamos abiertos afines $x \in U \subseteq X$, $f(x) \in V \subseteq Y$ con $f(U) \subseteq V$. Entonces $X_{y,i} \cap U$ es una componente irreducible de $f^{-1}(y) \cap U = f|_U^{-1}(y)$. Como $\overline{f(U)} = f(V)$ y $U = \operatorname{Spec} B$, $V = \operatorname{Spec} A$ son esquemas afines reducidos, el homomorfismo inducido entre anillos es inyectivo y basta demostrar:

Proposición A.4. *Si $\varphi : A \hookrightarrow B$ es una inyección de dominios finitamente generados sobre un cuerpo k, y $p \in \varphi^*(\operatorname{Spec} B)$, entonces toda componente irreducible de $\operatorname{Spec}(k(p) \otimes B)$ tiene dimensión mayor o igual que $\dim B - \dim A$.*

Sea $q \in \operatorname{Spec}(B)$ minimal tal que $q \cap A = p$. Entonces tenemos la inyección $\overline{\varphi} : A' \hookrightarrow B'$, donde $A' = A/p$, $B' = B/q$ son dominios finitamente generados sobre k. Localizando respecto al conjunto multiplicativo $S = A' - \{0\}$ tenemos:

$$k \subseteq \operatorname{Frac}(A') \subseteq S^{-1}B' \subseteq \operatorname{Frac}(B') \tag{A.2}$$

donde $\operatorname{Frac}(A')$ es el cuerpo de fracciones de A', y lo mismo para B'. Si $B' = k[x_1, \dots, x_n]$ entonces claramente $S^{-1}B' = Q(A')[x_1, \dots, x_n]$. Es decir, $S^{-1}B'$ es un dominio finitamente generado sobre $\operatorname{Frac}(A')$. Por tanto, $\dim S^{-1}B' = \operatorname{tr.deg}_{\operatorname{Frac}(A')} S^{-1}B' \leq \operatorname{tr.deg}_{\operatorname{Frac}(A')} \operatorname{Frac}(B')$. Además, $\dim A' = \operatorname{tr.deg}_k \operatorname{Frac}(A')$, $\dim B' = \operatorname{tr.deg}_k \operatorname{Frac}(B')$ y en la cadena de cuerpos $k \subseteq \operatorname{Frac}(A') \subseteq \operatorname{Frac}(B')$ se cumple:

$$\operatorname{tr.deg}_k \operatorname{Frac}(B') = \operatorname{tr.deg}_k \operatorname{Frac}(A') + \operatorname{tr.deg}_{\operatorname{Frac}(A'} \operatorname{Frac}(B') \tag{A.3}$$

Juntando lo anterior, deducimos $\dim S^{-1}B' \geq \dim B' - \dim A'$. Pero los primos de $S^{-1}B'$ son justamente los primos de B' que contraen al 0, que están en correspondencia con los primos de B que contienen a q y cumplen $q \cap A = p$. Es decir, $\dim S^{-1}B'$ es la dimensión de la componente irreducible de $k(p) \otimes B$ correspondiente al primo q minimal tal que $q \cap A = p$. Por tanto, basta ver que $\dim B' - \dim A' \geq \dim B - \dim A$. Como A, B son dominios finitamente generadas sobre un cuerpo, son catenarios, en particular $\dim A = \dim A/p + \dim A_p$ y $\dim B = \dim B/q + \dim B_q$. Por tanto, basta demostrar que $\dim A_p \geq \dim B_q$. COnsideremos la inyección natural $A_p \to B_q$. Como q es minimal en B tal que $q \cap A = p$, necesariamente q es minimal sobre $f(p)^e$. Si $\dim A_p = r$, existe un ideal primario $I = (z_1, \dots, z_r) \subseteq A_p$ tal que $\sqrt{I} = pA_p$. Entonces, usando que los anillos son noetherianos, considerando la extensión $I^e = (z_1, \dots, z_r) \subseteq B_q$ se cumple $\sqrt{I^e} = qB_q$ por lo que $\dim B_q \leq r = \dim A_p$ (teoría de dimensión de anillos locales noetherianos; ver, por ejemplo, [AM69], capítulo 11). Con esto hemos demostrado el apartado 1.
Para el apartado 2, necesitamos algún resultado de platitud genérica. Por ejemplo, nos vale la siguiente proposición ([SP], etiqueta [051R]):

Proposición A.5. *Sea $\varphi : R \to S$ un homomorfismo de anillos, donde R es un dominio noetheriano y S es una R álgebra finitamente generada (para el homomorfismo φ). Si M es un S-módulo finito, entonces existe $0 \neq f \in R$ tal que M_f es un A_f módulo libre.*

Equipados con este resultado, pasemos a demostrar el apartado 2. Primero vemos que $f(X)$ contiene a un abierto denso de Y. En efecto, por el teorema de Chevalley ([Va17] 7.4.2) $f(X)$ es un conjunto constructible de Y, por lo que se puede expresar como $f(X) = \cup Y_i$, $1 \leq i \leq n$, donde Y_i es localmente cerrado no vacío, es decir $Y_i = \overline{Y_i} \cap U_i$. Como f es dominante, $Y = \overline{f(X)} = \cup \overline{Y_i}$, y como Y es irreducible, $Y = \overline{Y_i}$ para algún i,

digamos $i = 1$. En tal caso, $Y_1 = \overline{Y_1} \cap U_1 = U_1$, donde U_1 es un abierto no vacío. Por tanto, $U_1 \subseteq f(X)$ es un abierto denso en la imagen de X. Sea $\operatorname{Spec} A = U \subseteq U_1$ un abierto afín denso.
Ahora, $f : f^{-1}(U) \to U$ es un morfismo sobreyectivo entre esquemas integrales de tipo finito sobre k, con U afín. Si $f^{-1}(U) = \cup V_i$ con $V_i = \operatorname{Spec} B_i$ finitos abiertos afines, las restricciones de f dan lugar a inyecciones $\varphi_i : A \hookrightarrow B_i$, donde B_i es de tipo finito sobre k y, en particular, sobre A. Aplicando la proposición mencionada sobre platitud genérica con $M = B_i$, deducimos que existe $g_i \in A$ no nulo tal que con la inlcusión $A_{g_i} \hookrightarrow (B_i)_{g_i}$, $(B_i)_{g_i}$ es un A_{g_i}-módulo libre. Tomando $g = \prod g_i$ y localizando en g, vemos que hay $g \in A$ tal que simultáneamente, $(B_i)_g$ es un A_g-módulo libre para todo i.
En tales condiciones está claro que $I^{ec} = I$ para cualquier ideal, así que estos homomorfismos son fielmente planos, y la aplicación asociada de espectros es sobreyectiva. En particular, por ser planos se satisface el going down. De ello, si $q \in \operatorname{Spec}(B_i)_g$, la contracción a A_g, digamos $p \in \operatorname{Spec} A_g$ cumple $\operatorname{ht} p \leq \operatorname{ht} q$. Si $p \in \operatorname{Spec} A_g$ y q es minimal en $(B_i)_g$ tal que $q^c = p$, entonces juntando con el argumento del apartado *a* tenemos $\operatorname{ht} p = \operatorname{ht} q$, y deducimos que la componente irreducible de $k(p) \otimes (B_i)_g$ que contiene a q tiene dimensión $\dim B - \dim A = \dim X - \dim Y$. Si volvemos al nivel de esquemas, y ponemos $W = D(g) \subseteq U$, se comprueba inmediatamente que $W_i := f^{-1}(W) \cap V_i = D(\varphi_i(g)) \subseteq V_i$ y entonces las restricciones $f_i : W_i \to W$ son sobreyectivas y en ellas la fibra de cada punto de W es equidimensional de dimensión $e = \dim X - \dim Y$. Como W_i forma un recubrimiento de $f^{-1}(W)$, deducimos el apartado *b*. □

Usando la proposición anterior podemos dar un resultado de mucha utilidad cuando tratamos con relaciones de incidencia proyectivas:

Proposición A.6. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo propio dominante entre esquemas reducidos de tipo finito sobre k. Además, supongamos que Y es irreducible y que, para todo punto cerrado $y \in Y$, la fibra $f^{-1}(y)$ (que es no vacía por ser f sobreyectivo) es irreducible de dimensión r fija. Entonces X es irreducible y se tiene* $\dim X = \dim Y + r$.

Nótese que si $f : X \to Y$ es un morfismo, que f sea propio equivale, por definición, a que sea de tipo finito (quasicompacto + localmente de tipo finito), separado y universalmente cerrado (es decir, que a nivel topológico cualquier cambio de base de f sea una aplicación cerrada). En particular, f es cerrada, por lo que decir que f es dominante ($\overline{f(X)} = Y$) equivale a decir que f es sobreyectivo.

Demostración. Sea $X = \cup_i X_i$, $1 \leq i \leq n$, la descomposición de X en componentes irreducibles, y supongamos que X no es irreducible (es decir, $n \geq 2$). Como f es propio, es una aplicación cerrada, así que $f(X_i)$ es cerrado para cada i. Por ser dominante, para algún i, digamos $i = 1$ sin pérdida de generalidad, se cumple $f(X_1) = Y$. Si $i_0 \neq 1$, $f(X_{i_0})$ es un subconjunto cerrado no vacío de Y, y por ser Y quasicompacto, necesariamente contiene un punto cerrado $y \in f(X_{i_0})$. Pero $f(X_1) = Y$, por lo que $f^{-1}(y) \subseteq \cup X_i$ interseca a las componentes X_1 y X_{i_0}, contradiciendo así la irreducibilidad de la fibra. Por tanto, $X = X_1$ es irreducible. Por tanto estamos en la situación de la proposición anterior, y considerando $p \in Y$ cerrado genérico, deducimos $\dim X - \dim Y = r$, como queríamos. □

Otro corolario de las proposiciones anteriores es la siguiente:

Proposición A.7. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas de tipo finito, y $n \geq 0$ tal que para todo punto cerrado y en la imagen de f se tiene $\dim f^{-1}(y) \leq n$. Entonces $\dim X \leq \dim Y + n$*

Demostración. Considerando el diagrama inducido:

$$\begin{tikzcd} X_{red} \arrow[r, "f_{red}"] \arrow[d, "r_X"] & Y_{red} \arrow[d, "r_Y"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} \tag{A.4}$$

r_X, r_Y son homeomorfismos a nivel topológico así que podemos asumir que X e Y son reducidos (la dimensión es topológica y r_X da homeomorfismo entre las fibras de los puntos cerrados de f y f_{red}). Si $X = \cup X_i$ y basta ver que $\dim X_i \leq \dim Y + n$. Consideramos $Z_i = \overline{f(X_i)}$ con la estructura de subesquema reducido de Y. Entonces $\dim Z_i \leq \dim Y$ y X_i, Z_i son esquemas integrales a los que podemos aplicar A.3 (basta el apartado 1), para deducir $\dim X \leq \dim Y + n$. □

Apéndice B

Dos ejemplos clásicos.

Por completitud, recordamos brevemente por qué las dos variedades de 2.32 son cuadráticas y no son intersección completa.

B.1 La grassmaniana de rectas

El embebimiento de Plücker $\varphi : \mathbb{G}(k,n) \to \mathbb{P}^{\binom{n+1}{k+1}-1}$ es la aplicación que a un k-plano $\Lambda =< x_0, \ldots, x_k >$ representado por la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \ldots & x_{0,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{k,0} & z_{k,1} & \ldots & x_{k,n} \end{pmatrix} \tag{B.1}$$

le asigna las coordenadas homogéneas $[M_I]$, donde $I = \{j_0, \ldots, j_k\}$ recorre los subconjunto de $k+1$ elementos de $\{0, 1, \ldots, n\}$ (que se ordenan de antemano) y M_I es el menor de M formado por las $k+1$ filas y las columnas $j_0, \ldots, j_k$. Si en vez de M se considera la matriz AM, donde A es invertible, tendríamos $[(AM)_I] = [\det(A)M_I] = [M_I]$ y la aplicación está bien definida. Es inmediato comprobar que la aplicación es regular y da un embebimiento cerrado en $\mathbb{P}^{\binom{n+1}{k+1}-1}$. De una manera más intrínseca, sin bases, dado un espacio vectorial V de dimensión $n+1$, el embebimiento de Plücker $\varphi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V)$ asigna a un k-plano $\Lambda =< v_0, \ldots, v_k >$ el multivector $v_0 \wedge \ldots \wedge v_k$.

Desde este punto de vista, la imagen de φ es el conjunto de multivectores no nulos $w \in \mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V)$ que son totalmente decomponibles, es decir, tales que $w = v_0 \wedge \ldots \wedge v_k$ para ciertos $v_0, \ldots, v_k \in V$. Con un poco de álgebra lineal, es sencillo ver que el conjunto de $k+1$ multivectores totalmente decomponibles es el conjunto de ceros de unas relaciones cuadráticas $\Xi_{\alpha,\beta}$, que llamamos relaciones de Plücker (véase [Ha92], 6). Donde sí reside cierta dificultad, es en demostrar que las relaciones $\Xi_{\alpha,\beta}$ generan el ideal homogéneo de $\mathbb{G}(k,n) \subset \mathbb{P}^{\binom{n+1}{k+1}-1}$, lo que equivale, por el Nullstellensatz, a que las $\Xi_{\alpha,\beta}$ generen un ideal primo. Una prueba de este hecho, con algo más de generalidad, puede verse en ([Fu96], cap. 8, prop. 2). En particular, $\mathbb{G}(k,n) \subset \mathbb{P}^{\binom{n+1}{k+1}-1}$ es una variedad cuadrática.

Demostrar que no es una intersección completa se puede hacer de muchas maneras. Por ejemplo, trabajando sobre $\mathbb{C}$, se le puede dar a $\mathbb{G}(k,n)$ una estructura de CW complejo con celdas únicamente en dimensión par, y de aquí se calcula su homología integral. El resultado es el siguiente ([GH78], pág 196)[1]:

Proposición B.1. *La homología integral de la grassmaniana $\mathbb{G}(k,n)$ está generada como grupo abeliano libre por los ciclos $\sigma_{a_0,\ldots,a_k} = \overline{[W_{a_1,\ldots,a_k}]}$ en dimensión real $2((k+1)(n-k) - \sum a_i)$, donde $\{(a_0, \ldots, a_k)\}$ recorre las sucesiones no crecientes de $k+1$ enteros entre 0 y $n-k$.*

[1]Nótese que en [GH78] $G(k,n)$ denota la grassmaniana de k-planos vectoriales en un espacio vectorial de dimensión n, lo que nosotros denotamos por $\mathbb{G}(k-1, n-1)$

Por ejemplo, para $\mathbb{G}(1,4)$, que es una variedad analítica de dimensión compleja 6 y dimensión real 12, sus grupos de homología integrales son (nótese la dualidad de Poincaré, [Ha02] 3.30):

$$\begin{array}{cccc} H_0 = \mathbb{Z} & H_2 = \mathbb{Z} & H_4 = \mathbb{Z}^2 & \\ & & & H_6 = \mathbb{Z}^2 \\ H_{12} = \mathbb{Z} & H_{10} = \mathbb{Z} & H_8 = \mathbb{Z}^2 & \end{array}$$

y triviales en el resto de dimensiones. En particular, por el teorema de Lefschetz, $\mathbb{G}(1,4)$ no es intersección completa en ningún proyectivo, porque es de dimensión compleja 6 y $H^4(\mathbb{G}(1,4),\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z} = H^4(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z})$. En general, el mismo argumento demuestra que $\mathbb{G}(k,n)$ no es intersección completa en ningún proyectivo si $1 \leq k \leq n-2$ y $n \geq 4$.

Si no queremos usar el teorema de Lefschetz, podemos desarrollar la parte multiplicativa del cálculo de Schubert y tener en cuenta que el grado de $\mathbb{G}(k,n) \subset \mathbb{P}^{\binom{n+1}{k+1}-1}$ viene dado por $\sigma_1^{(k+1)(n-k)}$. En el caso $\mathbb{G}(1,4)$ obtenemos que el grado por el embebimiento de Plücker es $\sigma_1^6 = 5$ ([GH78], pág. 206). Por otra parte, es muy sencillo ver que $\mathbb{G}(1,4)$ nunca está contenida en un hiperplano, por lo que (sin asumir que su ideal está generado en grado 2) si fuera intersección completa lo sería de tipo (d_1, d_2, d_3) con $d_i \geq 2$ y su grado sería $d_1d_2d_3 \geq 8 > 5$. Por tanto, deducimos que $\mathbb{G}(1,4) \subset \mathbb{P}^9$ no es intersección completa.

B.2 Variedad de espinores

Para esta parte seguimos de cerca [Mu85] y las secciones 5.4 y 5.5 de [Pr07]. Trabajamos sobre $\mathbb{C}$.

Sea $\bigwedge^{ev} U$ el álgebra de Clifford par sobre un espacio vectorial de dimensión ν. Los elementos invertibles $r \in \bigwedge^{ev} U$ de norma $N(r) = 1$ forman un grupo de Lie, $\mathrm{Spin}(U)$, con álgebra de Lie $\bigwedge^2 U$, que resulta ser un doble recubrimiento del grupo especial ortogonal $SO(V)$ ([Pr07]). La aplicación exponencial lleva $\bigwedge^2 U$ en $\mathbb{P}(\bigwedge^{ev} U)$, y su cierre proyectivo es la variedad de espinores par (que en la terminología de [Mu85] es la grassmaniana ortogonal par). En el caso $\nu = 5$, obtenemos la variedad $S^{10} \subset \mathbb{P}^{15}$ que, de acuerdo a [Mu85], está definida por las ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} N_1 = \xi_\emptyset\xi_{2345} - \xi_{23}\xi_{45} + \xi_{24}\xi_{35} - \xi_{25}\xi_{34} & N_{-1} = \xi_{12}\xi_{1345} - \xi_{13}\xi_{1245} + \xi_{14}\xi_{1235} - \xi_{15}\xi_{1234} \\ N_2 = \xi_\emptyset\xi_{1345} - \xi_{13}\xi_{45} + \xi_{14}\xi_{35} - \xi_{15}\xi_{34} & N_{-2} = \xi_{12}\xi_{2345} - \xi_{23}\xi_{1245} + \xi_{24}\xi_{1235} - \xi_{25}\xi_{1234} \\ N_3 = \xi_\emptyset\xi_{1245} - \xi_{12}\xi_{45} + \xi_{14}\xi_{25} - \xi_{15}\xi_{24} & N_{-3} = \xi_{13}\xi_{2345} - \xi_{23}\xi_{1345} + \xi_{34}\xi_{1235} - \xi_{35}\xi_{1234} \\ N_4 = \xi_\emptyset\xi_{1235} - \xi_{12}\xi_{35} + \xi_{13}\xi_{25} - \xi_{15}\xi_{23} & N_{-4} = \xi_{14}\xi_{2345} - \xi_{24}\xi_{1345} + \xi_{34}\xi_{1245} - \xi_{45}\xi_{1234} \\ N_5 = \xi_\emptyset\xi_{1234} - \xi_{12}\xi_{34} + \xi_{13}\xi_{24} - \xi_{14}\xi_{23} & N_{-5} = \xi_{15}\xi_{2345} - \xi_{25}\xi_{1345} + \xi_{35}\xi_{1245} - \xi_{45}\xi_{1235} \end{array}$$

Un cómputo con Macaulay2 revela que el ideal generado por estos polinomios es primo, por lo que es el ideal homogéneo de S^{10}, y que el polinomio de Hilbert es:

$$P_{S^{10}}(z) = 12\binom{z+10}{10} - 18\binom{z+9}{9} + 8\binom{z+8}{8} + \binom{z+7}{7} \tag{B.2}$$

Por tanto, S^{10} es una variedad cuadrática de dimensión 10 en $\mathbb{P}^{15}$. Si fuera intersección completa, como su ideal está generado en grado 2, el grado de la variedad sería 2^5. Pero del polinomio de Hilbert vemos que el grado es 12 y deducimos que $S^{10} \subset \mathbb{P}^{15}$ no es intersección completa.

Otra manera, bastante más elegante, de probar que no es intersección completa, es usando unos argumentos de teoría de representación para demostrar que es autodual y, en particular, que se tiene $\dim X^* = 10$ ([Mu85] 2.7). Como en la sección 1.13 vimos que la dual de una intersección completa en $\mathbb{P}^n$ tiene dimensión $n-1$, deducimos que S^{10} no es intersección completa.

Bibliografía

[Ar04] Enrique Arrondo. *La correspondencia de Serre hecha a mano* Contribuciones Matemáticas, UCM (2004), 61-72.

[Ar07] Enrique Arrondo. *A Home-Made Hartshorne-Serre Correspondence.* Rev. Mat. Complut. 20(2007), no. 2, 423–443

[AM69] M.F. Atiyah, I.G. Macdonald. *Introduction to Commutative Algebra.* Addison-Wesley, 1969

[At56] Michael F. Atiyah. *On the Krull-Schmidt theorem with application to sheaves.* Bulletin de la S. M. F., tome 84 (1956), p. 307-317

[BH98] Winfried Bruns, H. Jürgen Herzog. *Cohen-Macaulay Rings.* Cambridge University Press, 1998

[Co12] Iustin Coandă *A Simple Proof of Tyurin's Babylonian Tower Theorem* Communications in Algebra, 40:12, 4668-4672

[Ei87] Lawrence Ein *Varieties with small dual varieties, I* I. Invent Math 86, 63–74 (1986)

[BE77] David A. Buchsbaum and David Eisenbud *Algebra Structures for Finite Free Resolutions, and Some Structure Theorems for Ideals of Codimension 3* American Journal of Mathematics, Jun., 1977, Vol. 99, No. 3

[Ei95] David Eisenbud *Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry* Springer-Verlag, 1995

[EH16] David Eisenbud, Joe Harris. *3264 and All That. A Second Course in Algebraic Geometry.* Cambridge University Press, 2016

[EG81] E. Graham Evans and Phillip Griffith *The Syzygy Problem* Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 114, No. 2 (Sep., 1981), pp. 323-333

[Fu90] Takao Fujita *Classification Theories of Polarized Varieties* Cambridge University Press, 1990

[Fu96] William Fulton *Young Tableaux.* Cambridge University Press, 1996

[FL81] W. Fulton, R. Lazarsfeld. *On the connectedness of degeneracy loci and special divisors.* Acta Math 146, 271–283 (1981)

[FH79] W. Fulton, J. Hansen *A connectedness theorem for projective varieties, with applications to intersections and singularities of mapping* Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 110, No. 1 (Jul., 1979), pp. 159-166

[GH78] Phillip Griffiths, Joe Harris. *Principles of Algebraic Geometry.* John Wiley and Sons, 1978

[Gr61] Alexander Grothendieck. *Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV : les schémas de Hilbert.* Séminaire Bourbaki, no. 6 (1961), Exposé no. 221, 28 p.

[Ha92] Joe Harris. *Algebraic Geometry. A First Course.* Springer-Verlag New York, 1992

[Ha66] Robin Hartshorne. *Ample vector bundles.* Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 29 (1966), p. 63-94

[Ha74] Robin Hartshorne. *Varieties of small codimension in projective space.* Bulletin of the American Mathematical Society, 80, 6, 1974

[Ha77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, New York, 1977.

[HO74] Robin Hartshorne, Ogus Arthur. *On the Factoriality of LocalRings of Small Embedding Codimension* Communications in Algebra, 1:5,415-437

[Ha02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2002

[HE71] M. Hochster and John A. Eagon *Cohen-Macaulay Rings, Invariant Theory, and the Generic Perfection of Determinantal Loci* American Journal of Mathematics, Vol. 93, No. 4 (Oct., 1971), pp. 1020-1058

[IR13] Paltin Ionescu, Francesco Russo. *Manifolds covered by lines and the Hartshorne Conjecture for quadratic manifolds.* American Journal of Mathematics 135 (2013), 349-360

[Jo83] Jean-Pierre Jouanolou. *Théorèmes de Bertini et Applications.* Birkhaüser, 1983

[KPR03] N. Mohan Kumar, Chris Peterson, A. Prabhakar Rao *Monads on projective spaces* manuscripta math. 112, 183–189 (2003)

[Ku76] Wei-Eihn Kuan. *Some results on normality of a graded ring.* Pacific Journal of Mathematics, Vol. 64, No. 2, 1976

[Ly93] Gennady Lyubeznik. *Etale Cohomological Dimension and the Topology of Algebraic Varieties.* Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 137, No. 1 (Jan., 1993)

[Ma86] Hideyuki Matsumura. *Commutative Ring Theory.* Cambridge University Press, Cambridge 1986, 9th. Printing 2006

[Ma71] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician.* Springer-Verlag, 1971

[Mu89] Shigeru Mukai *Biregular Classification of Fano 3-Folds and Fano Manifolds of Coindex 3* Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, May 1, 1989, Vol. 86, No. 9 (May 1, 1989), pp. 3000-3002

[Mu85] Shigeru Mukai *Curves and Symmetric Spaces, I.* American Journal of Mathematics, Dec., 1995, Vol. 117, No. 6

[OSS88] Christian Okonek, Michael Schneider, Heinz Spindler *Vector Bundles on Complex Projective Spaces* Birkhäuser Verlag 1988

[Ot95] Giorgio Ottaviani. *Varietà proiettive di codimensione piccola.* Aracne, 1995

[Pr07] Claudio Procesi. *Lie Groups. An approach through Invariants and Representations* Springer-Verlag, 2007

[Ru16] Francesco Russo. *On the Geometry of Some Special Projective Varieties.* Springer, 2016

[SP] A. J. de Jong et al. *The Stacks Project.* https://stacks.math.columbia.edu/

[Sz72] L. Szpiro *Variétés de codimension* 2 *dans* $\mathbb{P}^n$ Publications mathématiques et informatique de Rennes, no. 4 (1972), Exposé no. 15, 7 p.

[Va17] Ravi Vakil. *The Rising Sea. Foundations of Algebraic Geometry.* http://math.stanford.edu/ vakil/216blog/FOAGnov1817public.pdf, 2017

[We94] Charles A. Weibel. *Introduction to Homological Algebra.* Cambridge University Press, 1994

[Za48] Oscar Zariski. *Analytical Irreducibility of Normal Varieties.* Annals of Mathematics , Apr., 1948, Second Series, Vol. 49, No. 2, pp. 352-361

[ZS60] O. Zariski, P. Samuel. *Commutative Algebra II.* Van Nostrand, Princeton-Toronto-London-New York, 1960

[Zo05] Mahdi Majidi-Zolbanin *Splitting of Vector Bundles on Punctured Spectrum of Regular Local Rings* CUNY Academic Works, 2005

[Zo07] Mahdi Majidi-Zolbanin *Gorenstein ring of sections and complete intersections in codimension two* Journal of Algebra Volume 312, Issue 1, 1 June 2007, Pages 74-85