

EL TEOREMA DE PONCELET



GRADO EN MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS,
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID.

TRABAJO DE FIN DE GRADO

ESTHER ADÁN VILARES

TUTOR: ENRIQUE ARRONDO ESTEBAN

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA, GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

14 de febrero de 2019

Índice general

1. El problema clásico de Poncelet	9
1.1. Desarrollo histórico	9
1.2. El Teorema de Poncelet	10
2. Resultados generales de curvas en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	13
3. Sistemas lineales en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	23
4. Demostración del Teorema de Poncelet	31
4.1. Adición de la curva de bigrado $(2, 2)$	31
4.2. Aplicación al Teorema de Poncelet	34
Bibliografía	35

Resumen

El Teorema de Poncelet establece que, dadas dos cónicas C y D , generales en el plano proyectivo, entonces, existe un polígono inscrito en C y circunscrito a su vez a D si y solo si hay infinitos polígonos con estas características.

A lo largo de este estudio, se demostrará dicho Teorema dotando de una estructura de grupo al conjunto de pares (x, ξ) , donde x es un punto de C y ξ una recta tangente a D que pasa por x . La estructura se obtendrá identificando tal conjunto con una curva de bigrado $(2, 2)$ en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Abstract

Poncelet's theorem states that given C y D two smooth conics in general position in the projective plane, there exists a closed polygon inscribed in C and circumscribed about D if and only if there are infinitely many.

In the present work, we will prove such theorem giving a group structure to the set of pairs (x, ξ) , where x denotes a point of C and ξ a tangent line to D with $x \in \xi$. The structure will be obtained by identifying that set with a curve of bidegree $(2, 2)$ in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Introducción

Existe una demostración sencilla del Teorema de Poncelet basada en la estructura de grupo de una curva de bigrado $(2, 2)$ en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Ésta fue dada por Griffiths y Harris [7] utilizando métodos del análisis complejo. El objetivo de este trabajo es rehacer dicha demostración dando geoméricamente la estructura de grupo.

El primer capítulo comienza estudiando el recorrido histórico del problema de Poncelet. La fuente consultada para redactar esta breve introducción histórica es el artículo de Vladimir Dragonić y Milena Radnović, véase [6]. Tras esto, se ha procedido a introducir formalmente el Teorema de Poncelet siguiendo el artículo de Griffiths y Harris [7].

En el segundo capítulo se incluyen todos los resultados relacionados con curvas en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ necesarios para llevar a cabo este trabajo. En él se generalizan los resultados que tradicionalmente se usan en el espacio proyectivo para trabajar con ellos en el producto de dos espacios proyectivos. Nos hemos inspirado en los apuntes de la asignatura Curvas Algebraicas [1] del profesor E. Arrondo y en los apuntes de Variedades Proyectivas [2] del mismo profesor.

El tercer capítulo se basará en el estudio sistemas lineales en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, que son la base necesaria para demostrar la adición de la curva de bigrado $(2, 2)$ en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Se observarán las dos líneas de estudio seguidas en este trabajo. Hasta la Observación 3.11, los resultados expuestos cuentan con demostraciones fundamentadas en argumentos meramente geométricos, mientras que los resultados que se necesitarán para bigrados más elevdos requerirán de la generalización en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ del Teorema $AF + BG$ de Max Noether.

Finalmente, en el cuarto capítulo se prueba la adición de la curva de bigrado $(2, 2)$ y con ello, el Teorema de Poncelet, comparando el resultado obtenido para curvas de bigrado $(2, 2)$ en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ con el problema descrito en el primer capítulo, basado en el artículo de Griffiths y Harris.

Capítulo 1

El problema clásico de Poncelet

1.1. Desarrollo histórico

Jean-Victor Poncelet (1788-1867) fue hecho prisionero y confinado en la cárcel por el ejército ruso tras participar en la campaña napoleónica contra Rusia. Su estancia en prisión duró desde finales de 1812 hasta junio de 1814. Este periodo fue tremendamente prolijo en el desarrollo de la geometría proyectiva, en particular, de las cónicas proyectivas, además de emplear este tiempo en compilar todo lo aprendido durante su etapa como estudiante de sus profesores Monge, Carnot o Brianchon.

Todo este trabajo de estudio conocido como *Cahiers de Saratov*, no fue publicado hasta muchos años después, en 1862, como [11]. Esta obra contiene uno de los más importantes y profundos teoremas de la geometría proyectiva, el Gran Teorema de Poncelet, si bien, la primera publicación de este resultado fue en 1822, formando parte de la obra denominada *Traité des propriétés projectives des figures*, (véase [10]).

Poncelet logró utilizar la estructura de grupo de las curvas elípticas de forma concisa, constituyendo su teorema en definitiva, una equivalencia a los teoremas de adición para curvas elípticas. De este modo, seis años después, en 1828, Jacobi proporcionó otra prueba del teorema mediante la utilización del teorema de adición para funciones elípticas (véase [8]).

Ante el porismo de Poncelet se planteó la posibilidad de que existiese una condición analítica que determinase, para dos cónicas dadas, si existe un n -polígono inscrito en una cónica y circunscrito sobre otra. La respuesta a tal cuestión, fue proporcionada de forma afirmativa por Cayley en 1853, haciendo uso de la teoría

de las integrales Abelianas [5], si bien, quien logró traducir la solución afirmativa en términos geométricos fue Lebesgue mediante el uso de métodos característicos de la geometría y del álgebra. Esto puede encontrarse en su obra *Les coniques* [9].

Ya en el siglo XX, Griffiths y Harris infirieron el teorema de Cayley mediante una condición analítica para puntos de orden finito en una curva elíptica (véase [7]). Llegados a este punto, debemos mencionar que éste es precisamente el enfoque seguido en este trabajo. Sin embargo, a diferencia de Griffiths y Harris, que utilizaron métodos del análisis complejo, en este estudio se usarán métodos geométricos y algebraicos.

Para concluir este desarrollo histórico del Teorema de Poncelet, debemos recalcar que el resultado que originalmente probó Poncelet era más general que el analizado en este trabajo, (véanse [3], [4], [10]). Consideró $n+1$ cónicas de un haz en el plano proyectivo. Si existía un n -polígono cuyos vértices estuvieran en una de las cónicas y cada uno de los n lados tangente a una de las n cónicas, entonces, existirían infinitos n -polígonos cumpliendo dichas características. Este resultado general es conocido como el *Teorema Completo de Poncelet*, y los polígonos que mediante él se obtienen son conocidos como *polígonos de Poncelet*.

1.2. El Teorema de Poncelet

Una vez conocida la trayectoria histórica de este importante resultado, proseguiremos enunciando formalmente el Teorema de Poncelet y estableciendo las bases seguidas en este trabajo.

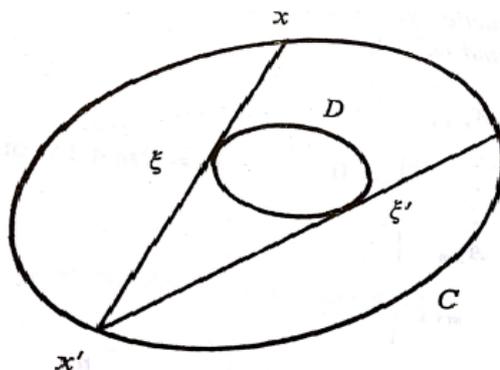
Sean C y D dos cónicas irreducibles generales en el plano proyectivo. El problema clásico de Poncelet, consiste en determinar si existe un polígono cerrado inscrito en C y circunscrito alrededor de D . Su interesante resultado nos dice que existe uno si y solo si hay infinitos. De forma más precisa, si D^* es la cónica dual de las rectas tangentes a D , se define $E \subset C \times D^*$ como el conjunto de los pares de la forma (x, ξ) tal que x es un punto de C y ξ una de las rectas tangentes a D que pasa por x .

De este modo, podemos definir las siguientes operaciones naturales de E en E ,

$$\begin{cases} i'(x, \xi) = (x, \xi') \\ i''(x, \xi) = (x', \xi) \end{cases}$$

donde i' deja fijo el punto x y traza la segunda tangente ξ' a D por x , e i'' deja fija la tangente ξ y cambia el punto x por el otro punto de corte x' de ξ con la cónica C .

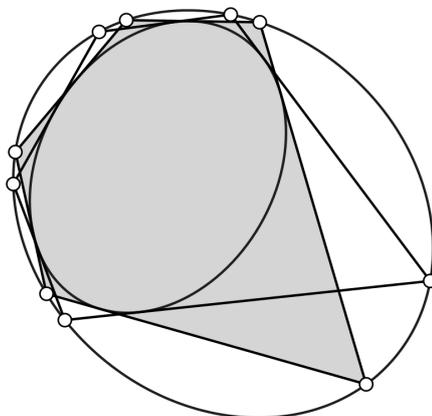
Así, considerando la composición $j = i' \circ i''$, que lleva el punto $a = (x, \xi)$ al punto $(a'')' = (x', \xi')$, como se describe en la siguiente figura sacada de [7],



conseguiamos la construcción que nos dará un polígono cerrado de n lados si y solo si $j^n(a) = a$. De forma más precisa, el teorema se enuncia como sigue:

Teorema 1.1. *La condición para que la n -ésima iteración de esta construcción nos dé de nuevo (x, ξ) es independiente del dato inicial escogido.*

Veamos en la siguiente imagen, (obtenida de Wikipedia), cómo resultan los n -polígonos de Poncelet con independencia del punto en el que se comiencen a trazar:



El objetivo de este trabajo será recuperar la prueba dada por Griffiths y Harris del Teorema de Poncelet dada en [7]. Nuestro enfoque usará la adición de la curva de bigrado $(2, 2)$ en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ que se utilizará para dotar de una estructura de grupo al conjunto de pares (x, ξ) descritos previamente. De hecho, E será la curva de bigrado $(2, 2)$ a la que nos acabamos de referir.

Capítulo 2

Resultados generales de curvas en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

En este segundo capítulo, demostraremos diversos resultados para curvas en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ que necesitaremos posteriormente en nuestro estudio. Enunciemos en primer lugar algunas definiciones básicas.

Definición 2.1. Se llama *polinomio homogéneo* a un polinomio $F \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ tal que todos sus monomios tienen el mismo grado. Diremos que un ideal I es *homogéneo* si está generado por polinomios homogéneos.

A efectos prácticos, un polinomio homogéneo se puede caracterizar de la siguiente forma.

Lema 2.2. *Sea $F \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ un polinomio no nulo. Entonces F es homogéneo de grado d si y solo si $F(TX_0, \dots, TX_n) = T^d F(X_0, \dots, X_n)$ en $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n, T]$.*

Demostración. Véase [1], Lema 1.3. □

Definición 2.3. Se llama *polinomio bihomogéneo de bigrado (a, b)* a un polinomio $F \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n; Y_0, \dots, Y_m]$ homogéneo de grado a en X_0, \dots, X_n y homogéneo de grado b en Y_0, \dots, Y_m .

Diremos que un ideal I es *bihomogéneo* si está generado por polinomios bihomogéneos. Fijados a, b , escribiremos $I_{(a,b)}$ para denotar al conjunto de polinomios bihomogéneos de I de bigrado (a, b) .

Del mismo modo que con el Lema 2.2, podemos caracterizar los polinomios bihomogéneos de la siguiente forma.

Lema 2.4. *Sea $F \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n; Y_0, \dots, Y_m]$ un polinomio no nulo. Entonces, F es bihomogéneo de bigrado (a, b) si y solo si se satisface $F(TX_0, \dots, TX_n, SY_0, \dots, SY_m) = T^a S^b F(X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_m)$.*

Demostración. Se obtiene inmediatamente a partir del Lema 2.2. □

El siguiente resultado será básico a la hora de trabajar con ideales más adelante.

Proposición 2.5. *La descomposición primaria de un ideal I homogéneo está formada por la intersección finita de ideales homogéneos. Del mismo modo, la descomposición primaria de un ideal I bihomogéneo está formada por la intersección finita de ideales bihomogéneos.*

Demostración. Para el caso homogéneo, véase por ejemplo [2], Lema 2.4. El caso bihomogéneo es análogo. □

Los siguientes conceptos que debemos definir son el de curva algebraica en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ y el de resultante de dos polinomios homogéneos.

Definición 2.6. Una *curva algebraica* de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ es una clase de proporcionalidad de polinomios bihomogéneos no nulos de $\mathbb{K}[X_0, X_1; Y_0, Y_1]$. Cualquier representante de la clase se llama *ecuación de la curva*. Llamaremos *soporte de la curva* a $C = V(F) = \{((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \text{ tales que } F(x_0, x_1, y_0, y_1) = 0\} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Llamaremos *bigrado de la curva* al bigrado de F .

Definición 2.7. Dados dos polinomios homogéneos $F, G \in A[X_0, X_1]$, con A un dominio de factorización única, de grados d, e respectivamente, de la forma,

$$\begin{aligned} F &= a_0 X_0^d + a_1 X_0^{d-1} X_1 + \dots + a_d X_1^d \\ G &= b_0 X_0^e + b_1 X_0^{e-1} X_1 + \dots + b_e X_1^e \end{aligned}$$

Llamaremos *resultante de los polinomios F, G* al determinante

$$Res(F, G) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_d & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{d-1} & a_d & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{d-1} & a_d \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{e-1} & b_e & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{e-2} & b_{e-1} & b_e & 0 \cdots & 0 \\ & & & \ddots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{e-1} & b_e \end{vmatrix}$$

Observación 2.8. Sean dos polinomios homogéneos $F, G \in A[X_0, X_1]$, con A un dominio de factorización única, de grados d, e . Entonces, se satisface que $X_0^{d+e} Res(F, G)$, que se calcula multiplicando por X_0^{d+e} la primera columna del determinante de la Definición 2.7, se puede expresar como combinación lineal de F y G . Basta sumarle a la primera columna, la segunda multiplicada por $X_0^{d+e-1} X_1$, la i -ésima por

$X_0^{d+e-i+1}X_1^{i-1}$ y la última por X_1^{d+e} . De este modo, desarrollando el determinante por la primera columna, llegamos a que efectivamente, $X_0^{d+e}Res(F, G) \in (F, G)$.

De forma análoga podemos observar que $X_1^{d+e}Res(F, G)$, que se calcula multiplicando por X_1^{d+e} la última columna del determinante de la Definición 2.7, está en el ideal (F, G) . Basta sumarle a la última columna la penúltima multiplicada por $X_0X_1^{d+e-1}$, la j -ésima por $X_0^{j-1}X_1^{d+e-j+1}$, la primera por X_0^{d+e} y desarrollar el determinante por la última columna.

Más adelante, en la Observación 2.15, tras probar que el ideal generado por F y G es saturado, podremos ver que $Res(F, G)$ puede escribirse como combinación lineal de F y G .

Estudiamos a continuación algunas propiedades de la resultante. En particular, veremos cuándo ésta es nula y que la resultante de polinomios bihomogéneos es un polinomio homogéneo.

Proposición 2.9. *Sea A un dominio de factorización única. Entonces dos polinomios $F, G \in A[X_0, X_1]$ tienen un factor común de grado positivo si y solo si $Res(F, G) = 0$.*

Demostración. Véase [1], Teorema 4.6. □

Teorema 2.10. *Sean $F, G \in \mathbb{K}[X_0, X_1; Y_0, Y_1]$ dos polinomios bihomogéneos de bigrados $(a, b), (c, d)$ respectivamente, primos entre sí. Entonces, la resultante de F y G como polinomio en Y_0, Y_1 es un polinomio homogéneo en $\mathbb{K}[X_0, X_1]$ de grado $ad + bc$.*

Demostración. En primer lugar, escribimos F y G como polinomios homogéneos en Y_0, Y_1 de grados b, d , de la forma

$$\begin{aligned} F &= A_0(X_0, X_1)Y_0^b + \dots + A_i(X_0, X_1)Y_0^{b-i}Y_1^i + \dots + A_b(X_0, X_1)Y_1^b \\ G &= B_0(X_0, X_1)Y_0^d + \dots + B_j(X_0, X_1)Y_0^{d-j}Y_1^j + \dots + B_d(X_0, X_1)Y_1^d \end{aligned}$$

con $A_i(X_0, X_1), B_j(X_0, X_1) \in \mathbb{K}[X_0, X_1]$ polinomios homogéneos en X_0, X_1 de grados a y c , que denotaremos como A_i, B_j .

Llamando R a la resultante de F y G respecto de Y_0, Y_1 , obtendremos que $R =$

$Res^{(Y_0:Y_1)}(F, G)$ es un determinante en X_0, X_1 de la forma

$$R(X_0, X_1) = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_0 & \cdots & A_{b-1} & A_b & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & A_0 & A_1 & \cdots & A_{b-1} & A_b \\ B_0 & B_1 & \cdots & B_{d-1} & B_d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_0 & \cdots & B_{d-2} & B_{d-1} & B_d & 0 \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & B_0 & B_1 & \cdots & B_{d-1} & B_d \end{vmatrix}$$

Para ver que es un polinomio homogéneo, aplicaremos a la resultante el Lema 2.2. De este modo, observamos que

$$R(TX_0, TX_1) = \begin{vmatrix} T^a A_0 & T^a A_1 & \cdots & T^a A_b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T^a A_0 & \cdots & T^a A_{b-1} & T^a A_b & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & T^a A_0 & T^a A_1 & \cdots & T^a A_{b-1} & T^a A_b \\ T^c B_0 & T^c B_1 & \cdots & T^c B_{d-1} & T^c B_d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T^c B_0 & \cdots & T^c B_{d-2} & T^c B_{d-1} & T^c B_d & 0 \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & T^c B_0 & T^c B_1 & \cdots & T^c B_{d-1} & T^c B_d \end{vmatrix}$$

ya que, como A_i, B_j son polinomios homogéneos de grados a y c , por el Lema 2.2, $A_i(TX_0, TX_1) = T^a A_i(X_0, X_1) = T^a A_i$ y $B_j(TX_0, TX_1) = T^c B_j(X_0, X_1) = T^c B_j$. Entonces, como hay $d + b$ filas, tenemos que

$$R(TX_0, TX_1) = \underbrace{T^a \cdots T^a}_d \underbrace{T^c \cdots T^c}_b R(X_0, X_1) = T^{ad+bc} R(X_0, X_1)$$

Por tanto, $Res(X_0, X_1)$ es un polinomio homogéneo de grado $ad + bc$. \square

Observación 2.11. Supongamos de ahora en adelante que \mathbb{K} es algebraicamente cerrado. El Teorema 2.10 se usa para calcular la intersección de curvas. En efecto, sean C y D dos curvas sin componentes comunes de bigrados (a, b) y (c, d) en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, de ecuaciones F y G respectivamente.

Dado un punto $((a_0 : a_1), (b_0 : b_1)) \in V(F) \cap V(G)$ entonces $F(a_0, a_1, b_0, b_1) = 0 = G(a_0, a_1, b_0, b_1)$. Fijando a_0, a_1 y dejando libres Y_0, Y_1 tenemos que los polinomios $f = F(a_0, a_1, Y_0, Y_1)$ y $g = G(a_0, a_1, Y_0, Y_1)$, que son homogéneos de grados respectivos b y d , pertenecientes a $\mathbb{K}[Y_0, Y_1]$, tienen una raíz común en $(Y_0 : Y_1) = (b_0 : b_1)$. Como \mathbb{K} es algebraicamente cerrado, esto es equivalente a que f y g tengan algún

factor común de grado positivo, luego es equivalente a que su resultante sea cero. Llamando $R = Res^{(Y_0:Y_1)}(F, G) \in \mathbb{K}[X_0, X_1]$, tenemos que $R(a_0, a_1) = 0$, por lo que $(a_0 : a_1) \in V(R)$, y por el Teorema 2.10, como R es un polinomio homogéneo de grado $ad + bc$, puedo escoger como mucho $ad + bc$ posibles $(a_0 : a_1)$.

Sin embargo, dado que aunque fijemos un $(a_0 : a_1)$ puede haber más de un $(b_0 : b_1)$ en $V(F) \cap V(G)$, no podemos garantizar que haya exactamente $ad + bc$ puntos. El modo preciso de hacerlo es como en [1], definiendo la multiplicidad de intersección mediante las ramas de Puiseux, véase [1]. Siguiendo la demostración dada en [1], Lema 7.5, probaríamos que la multiplicidad de $(a_0 : a_1)$ como raíz de la resultante es la suma de las multiplicidades de intersección de $V(F)$ y $V(G)$ en los puntos de la curva $(\{(a_0 : a_1)\} \times \mathbb{P}^1)$, lo cual concluiría el Teorema de Bézout, que establece que el número de puntos de intersección entre C y D contados con multiplicidad es $ad + bc$. En particular, también podemos deducir el Teorema débil de Bézout, que nos dice que $V(F) \cap V(G)$ consiste como mucho en $ad + bc$ puntos.

A continuación, demos un ejemplo donde veremos cómo utilizar el Teorema débil de Bézout.

Ejemplo 2.12. Una curva C de bigrado $(1, 1)$ que pasa por los puntos $((a_0 : a_1), (b_0 : b_1)), ((a_0 : a_1), (b'_0 : b'_1)) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ es la unión de dos curvas de bigrados $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

Por el teorema débil de Bézout sabemos que, si las curvas no tienen componentes comunes, el número de puntos de intersección de C y $(\{(a_0 : a_1)\} \times \mathbb{P}^1)$, que tiene bigrado $(1, 0)$, es menor o igual que uno. Sin embargo, sabemos por hipótesis que hay dos puntos, por tanto, ambas curvas comparten una componente. Como la curva de bigrado $(1, 0)$ es irreducible, debe estar contenida en C , de lo que deducimos que C es unión de dos curvas, de bigrados $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

Veamos a continuación cómo definir la saturación de un ideal bihomogéneo y qué es un ideal saturado.

Definición 2.13. Dado un ideal bihomogéneo propio $I \subset \mathbb{K}[X_0, X_1; Y_0, Y_1]$, su *saturación respecto de X_0, X_1* son los F tales que algún $X_0^i F$ y algún $X_1^j F$ están en I . De la misma forma, su *saturación respecto de Y_0, Y_1* son los F tales que algún $Y_0^i F$ y algún $Y_1^j F$ están en I . Definimos entonces la *saturación* de un ideal bihomogéneo como la intersección de su saturación respecto de X_0, X_1 y respecto de Y_0, Y_1 . Por último, diremos que un ideal es *saturado* si coincide con su saturación.

Un primer ejemplo de ideal saturado que vamos a usar muy a menudo es el siguiente:

Proposición 2.14. Sean $F, G \in \mathbb{K}[X_0, X_1; Y_0, Y_1]$ dos polinómios bihomogéneos sin factores comunes. Entonces $I = (F, G)$ es un ideal saturado.

Demostración. Observamos en primer lugar que cualquier ideal está contenido en su saturación. Por tanto, en esta demostración, nos centraremos en ver que cualquier elemento de la saturación también debe estar en el ideal.

Dado que $I_{a,b} = \text{sat}(I)_{a,b}$ para $a, b \gg 0$, será suficiente probar que siempre que $I_{a,b} = \text{sat}(I)_{a,b}$, también tendremos que $I_{a-1,b} = \text{sat}(I)_{a-1,b}$ y que $I_{a,b-1} = \text{sat}(I)_{a,b-1}$. A continuación probaremos la primera igualdad, ya que la segunda es análoga.

Sea $H \in \text{sat}(I)_{a-1,b}$. Dado que X_0H, X_1H están en la saturación de I y tienen bigrado (a, b) , por hipótesis están también en I . Así, podemos escribir

$$\begin{cases} X_0H = A_0F + B_0G \\ X_1H = A_1F + B_1G \end{cases} \quad (2.1)$$

De este sistema obtenemos la igualdad $X_1(A_0F + B_0G) = X_0(A_1F + B_1G)$, es decir, $(A_1X_0 - A_0X_1)F = -(B_1X_0 - B_0X_1)G$. Que F y G sean coprimos implica que existe un $C \in \mathbb{K}[X_0, X_1; Y_0, Y_1]$ tal que

$$\begin{cases} A_1X_0 - A_0X_1 = CG \\ B_1X_0 - B_0X_1 = -CF \end{cases}$$

y, dado que $C \in (X_0, X_1)$, por ser homogéneo, podemos escribir $C = C_0X_0 + C_1X_1$. Así, podemos reescribir las ecuaciones anteriores como

$$\begin{cases} (A_1 - C_0G)X_0 = (A_0 + C_1G)X_1 \\ (B_1 - C_0F)X_0 = (B_0 + C_1F)X_1 \end{cases}$$

Como X_0 divide a $(A_0 + C_1G)X_1$ y no divide a X_1 , entonces existen $A, B \in \mathbb{K}[X_0, X_1; Y_0, Y_1]$ tales que

$$\begin{cases} A_0 + C_1G = AX_0 \\ B_0 + C_1F = BX_0 \end{cases}$$

Sustituyendo en (2.1) esta expresión para A_0, B_0 , tenemos que $X_0H = X_0AF + X_0BG$, por lo que $H = AF + BG$, y por tanto, $H \in I$, como queríamos. \square

Vamos a retomar a continuación lo comentado en la Observación 2.8.

Observación 2.15. Sea I el ideal generado por dos polinómios bihomogéneos sin factores comunes $F, G \in \mathbb{K}[X_0, X_1; Y_0, Y_1]$ de bigrados $(a, b), (c, d)$. Si $R(X_0, X_1) = \text{Res}^{(Y_0:Y_1)}(F, G)$ es la resultante de F, G respecto de Y_0, Y_1 , por la Observación 2.8, $Y_0^{b+d}R(X_0, X_1)$ e $Y_1^{b+d}R(X_0, X_1) \in I$. De este modo, como I es saturado, por la Proposición 2.14, tenemos que $R(X_0, X_1) \in I$, y por tanto es combinación lineal de F y G .

Procedamos ahora a caracterizar los ideales saturados.

Proposición 2.16. *Un ideal $I \subset \mathbb{K}[X_0, X_1; Y_0, Y_1]$ es saturado respecto de X_0, X_1 si y solo si no tiene componentes primarias I_i tales que $(X_0, X_1) \subset \sqrt{I_i}$.*

Demostración. Escribimos $I = I_0 \cap I'$, donde I_0 es la intersección de las componentes primarias de I cuyo radical contiene a (X_0, X_1) e I' es la intersección del resto de componentes.

Sea $F \in I'$. Como el radical de I_0 contiene a (X_0, X_1) , existen $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $X_0^a, X_1^b \in I_0$. Por tanto, $X_0^a F, X_1^b F \in I$, luego F está en la saturación de I respecto de X_0, X_1 .

Por otro lado, supongamos que $F \in \text{sat}_{X_0, X_1}(I)$. Entonces, $X_0^a F, X_1^b F \in I$ y así, $X_0^a F, X_1^b F \in I_i$ para toda componente primaria I_i cuyo radical no contiene a (X_0, X_1) . Como $X_0, X_1 \notin \sqrt{I_i}$ a la vez, tenemos que $X_0^a, X_1^b \notin I_i$ a la vez, y como I_i es primario, entonces $F \in I_i$. \square

Proposición 2.17. *Un ideal $I \subset \mathbb{K}[X_0, X_1; Y_0, Y_1]$ es saturado respecto de Y_0, Y_1 si y solo si no tiene componentes primarias I_i tales que $(Y_0, Y_1) \subset \sqrt{I_i}$.*

Demostración. Es análoga a la Proposición 2.16. \square

Proposición 2.18. *Un ideal $I \subset \mathbb{K}[X_0, X_1; Y_0, Y_1]$ es saturado si y solo si no tiene componentes primarias I_i tales que (X_0, X_1) ó $(Y_0, Y_1) \subset \sqrt{I_i}$.*

Demostración. Sabemos que $\text{sat}(I) = \text{sat}_{X_0, X_1}(I) \cap \text{sat}_{Y_0, Y_1}(I)$. Tal y como se ha visto en la Proposición 2.16, podemos obtener $\text{sat}_{X_0, X_1}(I)$ como la intersección de las componentes primarias de I tales que su radical no contenga a (X_0, X_1) . Del mismo modo, por la Proposición 2.17, definimos la saturación de I respecto de (Y_0, Y_1) como la intersección de las componentes primarias de I tales que su radical no contienen a (Y_0, Y_1) . Por tanto, por la propia definición de I , se satisface que I no tiene componentes primarias I_i tales que (X_0, X_1) ó $(Y_0, Y_1) \subset \sqrt{I_i}$ \square

Observación 2.19. Nuestro siguiente paso será caracterizar los ideales bihomogéneos cuando sus radicales contienen a (X_0, X_1) o (Y_0, Y_1) . Esto viene caracterizado por el Teorema débil de los ceros en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Para ello, usaremos el Teorema débil de los ceros en \mathbb{P}^1 , que puede demostrarse fácilmente:

Lema 2.20. Sea $I \subset \mathbb{K}[X_0, X_1]$ un ideal homogéneo. Entonces $V(I) = \emptyset$ si y solo si $(X_0, X_1) \subset \sqrt{I}$.

Demostración. Es evidente que, si (X_0, X_1) está en el radical de I , entonces $V(I) = V(\sqrt{I}) \subset V(X_0, X_1) = \emptyset$. Por tanto, basta demostrar que si (X_0, X_1) no está contenido en el radical de I entonces $V(I) \neq \emptyset$. Supongamos que (X_0, X_1) no está contenido en el radical de I , por ejemplo $X_0 \notin \sqrt{I}$. Definimos el ideal $I' = \{F(1, x) \mid F \in I\}$. Entonces, como ningún $X_0^i \in I$, tenemos que $1 \notin I'$. Como I' es un ideal de $\mathbb{K}[X]$, que es DIP, está generado por un polinomio f , que no será una constante no nula. Como \mathbb{K} es algebraicamente cerrado, existe un $a \in \mathbb{K}$ tal que $f(a) = 0$. Además, para todo $F \in I$, $f/F(1, x)$ por lo que $F(1, a) = 0$ y así el punto $(1 : a) \in V(I)$. \square

Teorema 2.21. Sea $I \subset \mathbb{K}[X_0, X_1; Y_0, Y_1]$ un ideal bihomogéneo. Entonces $V(I) = \emptyset$ si y solo si (X_0, X_1) ó $(Y_0, Y_1) \subset \sqrt{I}$.

Demostración. Como en la demostración del Lema 2.20, resulta trivial probar que si (X_0, X_1) ó $(Y_0, Y_1) \subset \sqrt{I}$, entonces $V(I) = \emptyset$.

Probemos por tanto que, si (X_0, X_1) no está contenido en \sqrt{I} o (Y_0, Y_1) no está contenido en \sqrt{I} entonces $V(I) \neq \emptyset$. Definimos $I' = I \cap \mathbb{K}[X_0, X_1]$. Como I' es un ideal homogéneo cuyo radical no contiene a (X_0, X_1) , por el Lema 2.20, $V(I') \neq \emptyset$. Por tanto existe un punto $(a_0 : a_1) \in V(I')$.

Consideremos ahora el ideal homogéneo $J = \{H(a_0, a_1, Y_0, Y_1) \mid H \in I\}$ contenido en $\mathbb{K}[Y_0, Y_1]$. Demostremos, por reducción al absurdo, que no puede ser $V(J) = \emptyset$. Si fuera así, por el Lema 2.20, existen potencias $Y_0^b, Y_1^d \in J$. Por tanto, existen polinomios $F, G \in I$ de bigrados $(a, b), (c, d)$ respectivamente, tales que, $F(a_0, a_1, Y_0, Y_1) = Y_0^b$ y $G(a_0, a_1, Y_0, Y_1) = Y_1^d$. Con esto, podemos escribir F y G como,

$$\begin{aligned} F &= Y_0^b + \dots + A_i(X_0, X_1)Y_0^{b-i}Y_1^i + \dots + A_b(X_0, X_1)Y_1^b \\ G &= B_0(X_0, X_1)Y_0^d + \dots + B_j(X_0, X_1)Y_0^{d-j}Y_1^j + \dots + Y_1^d \end{aligned}$$

con $A_i(X_0, X_1), B_j(X_0, X_1) \in \mathbb{K}[X_0, X_1]$ y $A_1(a_0, a_1) = \dots = A_b(a_0, a_1) = B_0(a_0, a_1) = \dots = B_{d-1}(a_0, a_1) = 0$.

Sea $Res^{(Y_0:Y_1)}(F, G) = R(X_0, X_1) \in \mathbb{K}[X_0, X_1]$ la resultante de F y G respecto

de Y_0, Y_1 . Entonces, ésta es de la forma:

$$R(X_0, X_1) = \begin{vmatrix} 1 & A_1 & \cdots & A_b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & A_{b-1} & A_b & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & A_1 & \cdots & A_{b-1} & A_b \\ B_0 & B_1 & \cdots & B_{d-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_0 & \cdots & B_{d-2} & B_{d-1} & 1 & 0 \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & B_0 & B_1 & \cdots & B_{d-1} & 1 \end{vmatrix}$$

Por la Observación 2.15, $R(X_0, X_1)$ es una combinación lineal de F y G . Por tanto, $R(X_0, X_1) \in I'$, y así, $R(a_0, a_1) = 0$. Sin embargo, evaluándola en (a_0, a_1) se obtiene que:

$$R(a_0, a_1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Como estamos ante el determinante de la identidad, tenemos que $R(a_0, a_1) = 1$, lo cual contradice el hecho de que $R(a_0, a_1) = 0$. Por tanto, $V(J) \neq \emptyset$.

Finalmente, del hecho de que $V(J)$ no sea el vacío, se deduce que existe un punto $(b_0 : b_1)$ que pertenece a $V(J)$. De este modo, el punto $((a_0 : a_1), (b_0 : b_1)) \in V(I)$ y por tanto, $V(I) \neq \emptyset$. \square

Observación 2.22. Con lo visto anteriormente, podemos demostrar el resultado análogo al Teorema de Max Noether para curvas en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$: Dadas dos curvas C y D sin factores comunes y con ecuaciones F y G , si existe una curva H que pasa por todos los puntos de intersección de F y G contados con multiplicidad, entonces H puede escribirse como $H = AF + BG$. En efecto, sea I el ideal generado por F y G . Entonces, por la Proposición 2.14, I es un ideal saturado. Si $I = I_1 \cap \dots \cap I_n$ es la descomposición primaria de I , la Proposición 2.18 implica que el radical de ninguna I_i contiene a (X_0, X_1) o (Y_0, Y_1) , luego, por el Teorema 2.21, $V(I_i)$ es no vacío. Además, como $\sqrt{I_i}$ es un ideal primo, $V(I_i)$ es irreducible, luego es necesariamente un punto, ya que está contenido en $V(F, G)$, que es un conjunto finito.

Es decir, cada I_i define un punto p_i con la multiplicidad de intersección de C y D , es decir, un polinomio H está en I_i para todo i si y solo si $V(H)$ pasa por cada p_i con la multiplicidad definida por I_i , si y solo si $H \in \bigcap I_i = (F, G)$, de lo que deducimos que $H = AF + BG$.

Asimismo, y siguiendo las técnicas de [2], se puede demostrar que, si l_1, l_2 son suficientemente grandes, la parte homogénea de bigrado (l_1, l_2) de $\mathbb{K}[X_0, X_1; Y_0, Y_1]/(F, G)$ tiene dimensión $ad + bc$, siendo (a, b) el bigrado de F y (c, d) el bigrado de G . De aquí se deduce que también la dimensión de la parte bihomogénea de cada $\mathbb{K}[X_0, X_1; Y_0, Y_1]/I_i$ es finita, que es precisamente la multiplicidad de intersección de $V(F)$ y $V(G)$ en p_i . Esto sirve para dar una demostración alternativa al teorema de Bézout.

Capítulo 3

Sistemas lineales en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

En este capítulo se asentarán las bases necesarias para poder definir la adición de la curva de bigrado $(2, 2)$ en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. La herramienta principal utilizada para ello serán los sistemas lineales. Al principio se demostrarán resultados cuyas demostraciones solo requieran ideas esencialmente geométricas mientras que los últimos necesitarán argumentos más fuertes. Comencemos estudiando la dimensión del espacio proyectivo de las curvas de bigrado (a, b) contenidas en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Proposición 3.1. *Las curvas de bigrado (a, b) contenidas en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ forman un espacio proyectivo de dimensión $ab + a + b$. Lo denotaremos por $\mathbb{P}_{(a,b)}$.*

Demostración. Sabemos que el espacio proyectivo de las curvas de bigrado (a, b) es el proyectivizado del espacio vectorial de los polinomios homogéneos de bigrado (a, b) en $\mathbb{K}[X_0, X_1; Y_0, Y_1]$. La base de este espacio vectorial la forman los monomios de bigrado (a, b) . Observamos que hay $a+1$ monomios en X_0, X_1 y $b+1$ monomios en Y_0, Y_1 , luego la cantidad total de monomios es $(a+1)(b+1) = ab + a + b + 1$. Al proyectivizar, la dimensión disminuye en una unidad, por tanto, como queríamos probar, la dimensión del espacio proyectivo $\mathbb{P}_{(a,b)}$ de las curvas de bigrado (a, b) es $ab + a + b$. \square

Como ejemplo, podemos estudiar también la dimensión del subespacio formado por el conjunto de curvas de bigrado (a, b) que pasan por r puntos de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Proposición 3.2. *El conjunto de curvas de bigrado (a, b) que pasan por un punto p de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ es un hiperplano H_p de $\mathbb{P}_{(a,b)}$. Por tanto, el conjunto de curvas de bigrado (a, b) que pasan por r puntos de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ es un subespacio de $\mathbb{P}_{(a,b)}$ de dimensión al menos $ab + a + b - r$.*

Demostración. Una curva de bigrado (a, b) viene dada por un polinomio de la forma,

$$u_{00}X_0^aY_0^b + u_{10}X_0^{a-1}X_1Y_0^b + u_{01}X_0^aY_0^{b-1}Y_1 + \dots + u_{ij}X_0^{a-i}X_1^iY_0^{b-j}Y_1^j + \dots + u_{ab}X_1^aY_1^b$$

Entonces, las coordenadas homogéneas de la curva como punto en $\mathbb{P}_{(a,b)}$ son,

$$(u_{00} : u_{10} : u_{01} : \dots : u_{ij} : \dots : u_{ab})$$

De este modo, si fijamos un punto $p = ((a_0 : a_1), (b_0 : b_1)) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, el subconjunto de curvas de bigrado (a, b) que pasan por p son las que satisfacen la ecuación

$$a_0^a b_0^b U_{00} + a_0^{a-1} a_1 b_0^b U_{10} + a_0^a b_0^{b-1} b_1 U_{01} + \dots + a_0^{a-i} a_1^i b_0^{b-j} b_1^j U_{ij} + \dots + a_1^a b_1^b U_{ab} = 0,$$

que es precisamente un hiperplano.

Luego, si la condición de pasar por un punto genera un hiperplano, el conjunto de curvas que pasan por r puntos será la intersección de r hiperplanos de $\mathbb{P}_{(a,b)}$, y de esta forma la dimensión de este subespacio será al menos $ab + a + b - r$. \square

Definición 3.3. Se llama *sistema lineal* de curvas de bigrado (a, b) a un subespacio lineal $\Lambda \subset \mathbb{P}_{(a,b)}$. Si $\dim \Lambda = 1$, diremos que Λ es un *haz*.

El siguiente lema nos resultará de gran ayuda a la hora de demostrar los resultados estudiados sobre sistemas lineales.

Lema 3.4. *Por cada punto de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ pasa una única curva de bigrado $(1, 0)$ y otra de bigrado $(0, 1)$. Además, una curva de bigrado $(a, 0)$ es la unión de a curvas de bigrado $(1, 0)$. Del mismo modo, una curva de bigrado $(0, b)$ es la unión de b curvas de bigrado $(0, 1)$.*

Demostración. Probaremos el resultado en el caso de las curvas de bigrado $(1, 0)$ ya que el caso de las curvas de bigrado $(0, 1)$ es simétrico.

Observamos en primer lugar que $u_0 X_0 + u_1 X_1$ se anula en $\{(u_1, -u_0)\} \times \mathbb{P}^1$. Por tanto, cada vez que tenga un punto $p = ((a_0 : a_1), (b_0 : b_1)) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, únicamente anulará a la curva $a_1 X_0 - a_0 X_1$ de bigrado $(1, 0)$. De este modo, habrá una única curva de bigrado $(1, 0)$ por p .

Por otro lado, sabemos que los polinomios de grado a en $\mathbb{K}[X_0, X_1]$ factorizan siempre en a factores lineales de grado 1. Por tanto, una curva de bigrado $(a, 0)$ será la unión de a curvas de bigrado $(1, 0)$. \square

Notación 3.5. De ahora en adelante, denotaremos por L' a una curva de bigrado $(1, 0)$ y por L'_a a la única curva de bigrado $(1, 0)$ que pasa por a . De la misma forma, denotaremos por L'' a una curva de bigrado $(0, 1)$ y por L''_a a la única curva de bigrado $(0, 1)$ que pasa por a .

El siguiente resultado nos dará una caracterización muy útil sobre cuándo un sistema lineal es un haz.

Lema 3.6. *Sea Λ un sistema lineal de curvas que tiene al menos dimensión uno. Entonces son equivalentes:*

1. Λ es un haz.
2. Existe un punto $p \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ tal que hay una única curva de Λ que pasa por a .
3. Existen dos puntos $p, p' \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ tales que ninguna curva de Λ pasa al mismo tiempo por p y p' .

Demostración. Estudiemos las distintas implicaciones.

1) \Rightarrow 2): Tomando un punto $p \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ que no esté en alguna curva de Λ se tendrá que Λ no está contenido en el hiperplano H_p de las curvas de bigrado (a, b) que pasan por p . De este modo, la intersección de Λ con H_p es un único punto, lo que significa que existe una única curva de Λ que pasa por p .

2) \Rightarrow 3): Sea $p \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ tal que existe una única curva C de Λ que pase por p . Tomando $p' \notin C$, no habrá ninguna curva de Λ que pase al mismo tiempo por p y p' .

3) \Rightarrow 1): Si Λ no fuese un haz, entonces $\dim(\Lambda) \geq 2$. Luego, para todo $p, p' \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, la intersección de Λ con los hiperplanos $H_p, H_{p'}$ tiene dimensión al menos cero, con lo que la intersección es siempre no vacía, lo cual contradice 3. \square

Con el siguiente lema, comienzan los resultados sobre sistemas lineales que se han estudiado en este trabajo.

Lema 3.7. *El sistema lineal de curvas de bigrado $(1, 1)$ que pasan por dos puntos distintos de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ forman un haz. Además, existe una única curva de bigrado $(1, 1)$ que pasa por tres puntos distintos de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ si y solo si no hay ninguna curva de bigrado $(1, 0)$ o $(0, 1)$ que pase por esos tres puntos.*

Demostración. Sea Λ el sistema lineal de curvas de bigrado $(1, 1)$ que pasan por a_1 y a_2 , puntos distintos de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

En primer lugar, supongamos que a_1 y a_2 están en una curva L' . Sea un punto $p \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ tal que $p \notin L'$ y consideremos la curva L''_p . Entonces, por el teorema débil de Bézout (ver Ejemplo 2.12), la curva $L' \cup L''_p$ es la única curva de bigrado

$(1, 1)$ de Λ que pasa por p , y por el Lema 3.6, Λ es un haz.

Supongamos ahora que a_2 no está en la curva L'_{a_1} , y consideremos la curva L''_{a_2} . Tomamos $p \in L'_{a_1}$ distinto de a_1 tal que L'_{a_1} es la única curva que pasa por p . Entonces, de nuevo por el teorema débil de Bézout, la curva $L'_{a_1} \cup L''_{a_2}$ es la única curva de bigrado $(1, 1)$ de Λ que pasa por p , y por el Lema 3.6, Λ es un haz.

Probemos a continuación la segunda parte del lema. Sean a_1, a_2 y a_3 tres puntos distintos de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Si una curva L' pasara por a_1, a_2 y a_3 , entonces existirían infinitas curvas de bigrado $(1, 1)$ por dichos puntos, ya que bastaría unir la curva L' que contiene dichos puntos, con cualquier otra curva L'' . De la misma forma, si los tres puntos están en una curva L'' , existen infinitas curvas de bigrado $(1, 1)$ que pasan por ellos.

Supongamos ahora que existe una curva L' que pasa por dos de los puntos, por ejemplo a_1, a_2 , pero no por el tercero. En este caso, por el teorema débil de Bézout, la única curva de bigrado $(1, 1)$ que pasa por a_1, a_2 y a_3 , es la unión de L' con la curva L''_{a_3} . Análogamente, si hay dos pero no tres de los puntos en una curva L'' se obtiene una única curva de bigrado $(1, 1)$ que pasa por a_1, a_2, a_3 .

Terminemos estudiando el caso en el que no hay ninguna curva L' o L'' que contenga a dos de los puntos. En este caso, el haz de curvas que pasan por a_1, a_2 no está contenida en el hiperplano H_{a_3} , ya que $L'_{a_1} \cup L''_{a_2}$ no pasa por a_3 . Por tanto, la intersección del haz con H_{a_3} es un punto, es decir, existe una única curva de bigrado $(1, 1)$ que pasa por a_1, a_2, a_3 . \square

Proposición 3.8. *Por cinco puntos distintos de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ pasa una única curva de bigrado $(2, 1)$ si y solo si:*

1. *No hay cuatro de los puntos en una curva de bigrado $(0, 1)$.*
2. *No hay tres de los puntos en una curva de bigrado $(1, 0)$.*
3. *No todos los puntos están en una curva de bigrado $(1, 1)$.*

Demostración. Sean a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , cinco puntos distintos de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Probemos en primer lugar que las tres condiciones son necesarias:

Si a_1, a_2, a_3, a_4 están en una curva L'' , entonces, por el teorema débil de Bézout, la unión de L'' con la curva L'_{a_5} sería la única curva de bigrado $(1, 1)$ que pasase por a_1, \dots, a_5 . Por tanto, uniendo cualquier curva de bigrado $(1, 0)$, existirían infinitas curvas de bigrado $(2, 1)$ por a_1, \dots, a_5 .

Si a_1, a_2, a_3 estuvieran en una curva L' , la unión de L' con una curva de bigrado $(1, 1)$ por a_4, a_5 (y hay infinitas por el Lema 3.7) sería una curva de bigrado $(2, 1)$ por a_1, \dots, a_5 .

Si todos los puntos estuvieran contenidos en una curva C de bigrado $(1, 1)$, entonces, tomando la unión de C con cualquier curva L' , existirían infinitas curvas de bigrado $(2, 1)$ que pasen por a_1, \dots, a_5 .

Probemos a continuación la suficiencia de las tres condiciones. Para ello, estudiaremos todas las posibles posiciones de los cinco puntos.

Supongamos primero que existe una curva L'' que pasa por tres de los puntos, pero no por cuatro. Supongamos que los puntos son a_1, a_2, a_3 . Cualquier curva de bigrado $(2, 1)$ que pase por a_1, \dots, a_5 debe ser, por el teorema débil de Bézout, la unión de L'' y una curva de bigrado $(2, 0)$ que pase por a_4, a_5 . Por el Lema 3.4, ésta será a la vez la unión de dos curvas L'_1, L'_2 . Además, a_4, a_5 no pueden estar simultáneamente en la misma L_i , ya que de ser así, tendríamos una curva de bigrado $(1, 1)$ que pasaría por los cinco puntos, lo cual contradiría la condición 3. Por tanto, por el teorema débil de Bézout, $L'' \cup L'_1 \cup L'_2$ es la única curva de bigrado $(2, 1)$ que pasa por a_1, \dots, a_5 . Supondremos de ahora en adelante que no existe ninguna curva L'' que contenga tres de los puntos.

Supongamos ahora que dos de los puntos, por ejemplo a_1, a_2 , están contenidos en una curva L' . Así, necesariamente, por el teorema débil de Bézout, cualquier curva de bigrado $(2, 1)$ que contenga a a_1, \dots, a_5 será la unión de L' y una curva de bigrado $(1, 1)$ que contenga a a_3, a_4, a_5 , que por el Lema 3.7, es única. Asumamos a partir de ahora que no hay ninguna curva L' que contenga dos de los puntos.

Asumamos ahora que cuatro de los puntos, por ejemplo a_1, \dots, a_4 , están en una curva C de bigrado $(1, 1)$. La curva C es irreducible, ya que, de no serlo, por el teorema débil de Bézout, sería unión de dos curvas L' y L'' . Por las dos suposiciones anteriores, C solo podría contener tres de los cuatro puntos que hemos supuesto que contiene, luego C es irreducible. Así, por el teorema débil de Bézout, existe una única curva de bigrado $(2, 1)$ por a_1, \dots, a_5 , a saber, la unión de C con la curva L'_{a_5} . Supondremos de ahora en adelante que no hay cuatro de los puntos en una curva de bigrado $(1, 1)$.

Por último, sea Λ el sistema lineal de curvas de bigrado $(2, 1)$ que pasan por a_1, \dots, a_5 . Hay que demostrar que la dimensión de Λ es cero. Por la Proposición

3.2, su dimensión es al menos 0, y si fuera 1, por el Lema 3.6, para cada p existiría una curva de bigrado $(2, 1)$ por los 5 puntos y p . Por el Lema 3.7, existe una única curva C de bigrado $(1, 1)$ que contiene a a_1, a_2, a_3 , y estamos suponiendo que no pasa ni por a_4 ni por a_5 . Distinguimos dos casos:

- Si C es reducible, es decir, $C = L' \cup L''$, necesariamente L' contiene solo un punto, por ejemplo a_1 , y L'' los otros dos. En este caso, tomamos $p \in L''$ distinto de a_2, a_3 , y el teorema de Bézout implica que toda curva de bigrado $(2, 1)$ que contenga a a_1, \dots, a_5, p es necesariamente la unión de L'' con una curva de bigrado $(2, 0)$ que pase por a_1, a_4, a_5 , lo que es imposible por el Lema 3.4 y nuestra hipótesis.
- Si C es irreducible, tomamos $p \in C$ distinto de a_1, a_2, a_3 . Entonces, cualquier curva de bigrado $(2, 1)$ que contenga a a_1, \dots, a_5, p será, por el teorema débil de Bézout, la unión de C con la curva L' que contenga a a_4, a_5 . Sin embargo, hemos supuesto previamente que las curvas L' no contenían dos de los puntos, luego no existe una curva de bigrado $(2, 1)$ que pase por a_1, \dots, a_5 y p .

Por tanto, hay una única curva de bigrado $(2, 1)$ por a_1, \dots, a_5 . □

Teorema 3.9. Sean $a_1, \dots, a_7 \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ tales que:

1. No hay tres de los puntos en una curva de bigrado $(0, 1)$ o $(1, 0)$.
2. No hay cinco de los puntos en una curva de bigrado $(1, 1)$.

Entonces, el sistema lineal de curvas de bigrado $(2, 2)$ que contienen a a_1, \dots, a_7 es un haz.

Demostración. Sea Λ el sistema lineal de curvas de bigrado $(2, 2)$ que contienen a a_1, \dots, a_7 .

Supongamos en primer lugar que dos de los puntos, por ejemplo a_1, a_2 , están en una curva L'' . Fijando otro punto $p \in L''$, entonces la única curva de bigrado $(2, 2)$ que pasa por a_1, \dots, a_7 y p , por el teorema débil de Bézout, es la unión de L'' con la curva de bigrado $(2, 1)$ que pasa por a_3, \dots, a_7 , que además es única por la Proposición 3.8. Luego, por el Lema 3.6, Λ es un haz. Asumiremos por tanto que no hay dos de los puntos en una curva L'' o, simétricamente en una curva L' .

A continuación, supongamos que cuatro de los puntos, por ejemplo a_1, \dots, a_4 , están en una curva C de bigrado $(1, 1)$. Esta curva es necesariamente irreducible ya que cuatro puntos no pueden distribuirse en la unión de una curva L' y otra L'' . Fijando otro punto $p \in C$, por el teorema de Bézout, cualquier curva de bigrado

$(2, 2)$ que pase por a_1, \dots, a_7, p es necesariamente la unión de C con una curva de bigrado $(1, 1)$ que pase por a_5, a_6, a_7 , que es única por el Lema 3.7. Así, llegamos de nuevo a que, por el Lema 3.6, Λ es un haz. De este modo, asumiremos también que no hay cuatro de los puntos en una curva de bigrado $(1, 1)$.

Por último, tomemos la única curva C de bigrado $(1, 1)$ que pasa por tres de los puntos, por ejemplo a_1, a_2, a_3 (es única por el Lema 3.7). Además, es irreducible, porque a_1, a_2, a_3 no se pueden distribuir entre una curva L' y otra L'' . Entonces, tomando dos puntos $p, p' \in C$ distintos de a_1, a_2, a_3 , concluimos que no existe una curva de bigrado $(2, 2)$ que pase por a_1, \dots, a_7, p y p' , ya que de no ser así, por el teorema débil de Bézout, sería la unión de C con una curva de bigrado $(1, 1)$ que contenga los cuatro puntos restantes. Sin embargo, esto contradiría la última suposición hecha que afirma que no hay cuatro de los puntos en una curva de bigrado $(1, 1)$. Por tanto, por el Lema 3.6 Λ es un haz. \square

Corolario 3.10. *Sea C una curva irreducible de bigrado $(2, 2)$, y sea D otra curva de bigrado $(2, 2)$ que corta a C en exactamente ocho puntos. Entonces, cualquier curva de bigrado $(2, 2)$ que pase por siete de los ocho puntos de intersección entre C y D , pasa necesariamente por el punto sobrante.*

Demostración. Para probar este resultado, basta demostrar que el sistema de curvas de bigrado $(2, 2)$ que pasa por siete de los ocho puntos es un haz, ya que, en ese caso, estas curvas serán combinaciones lineales de las ecuaciones de C y D , y por tanto, se anularán también en el octavo punto. Esto es inmediato aplicando el Teorema 3.9. Por tanto, basta demostrar que el hecho de que C sea irreducible implique que se cumplan las hipótesis 1 y 2 del Teorema 3.9. Si hubiera tres puntos de C en una curva L' o L'' , el teorema de Bézout implicaría que tal curva está contenida en C , lo que es absurdo. De la misma forma, el teorema de Bézout implica que C no puede contener cinco puntos en una curva de bigrado $(1, 1)$, lo cual concluye nuestra demostración. \square

Observación 3.11. En todos los resultados anteriores estamos tratando con puntos distintos, pero siguen siendo ciertos cuando se cuentan con multiplicidad. Para demostrarlo, será necesario usar la generalización del teorema de Max Noether (Observación 2.13). En concreto, tenemos el siguiente resultado que generaliza el Corolario 3.10 y que será crucial en el capítulo siguiente.

Proposición 3.12. *Sean $C, D \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ dos curvas de bigrados $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ respectivamente y sin componentes comunes. Supongamos que C es irreducible y que una curva E de bigrado $(a_1 + b_1 - 2, a_2 + b_2 - 2)$ pasa por $a_1 b_2 + a_2 b_1 - 1$ de los puntos de intersección de C y D . Entonces, E también pasa por el punto restante.*

Demostración. Sea una curva irreducible L de bigrado $(1, 1)$ que pasa por el punto restante al que hacíamos mención en el enunciado y que no pasa por ningún otro de los puntos de intersección entre C y D . Así, por la Observación 2.22, la ecuación de $E \cup L$ puede ser escrita como $AF + BG$, donde F, G son las ecuaciones de C y D .

En particular, B define una curva de bigrado $(a_1 - 1, a_2 - 1)$ que pasa por $a_1 + a_2 - 1$ puntos de $C \cap L$. Dado que L es irreducible, observamos que la ecuación de L divide a B . De este modo, la ecuación de L también divide a AF , de lo que deducimos que la ecuación de L divide a A , ya que C es irreducible. Esto implica que la ecuación de E es una combinación de F y G , y por tanto, E contiene todos los puntos de intersección de C y D . \square

Por último, vamos a explicitar esta proposición para el caso que nos hará falta en el siguiente capítulo.

Corolario 3.13. *Si C es una curva irreducible de bigrado $(2, 2)$, para cualquier curva D de bigrado (b_1, b_2) que no contenga a C , se tiene que cualquier curva de bigrado (b_1, b_2) que pase por $2b_1 + 2b_2 - 1$ de los puntos de intersección de C y D , también pasa por el punto restante.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata del resultado anterior. \square

Capítulo 4

Demostración del Teorema de Poncelet

4.1. Adición de la curva de bigrado $(2, 2)$

El objetivo de esta sección será dotar de estructura de grupo a las curvas irreducibles de bigrado $(2, 2)$ en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Para ello, llamaremos E a una curva irreducible de bigrado $(2, 2)$ en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, y O a un punto fijo de E , que llevará a cabo la función del elemento neutro.

Notación 4.1. Para cualquier punto $a \in E$, a' denotará el otro punto de E en la única curva L'_a de bigrado $(1, 0)$ que pasa por a . Del mismo modo, a'' denotará el otro punto de E en la única curva L''_a de bigrado $(0, 1)$ que pasa por a .

Lema 4.2. Sean a, b, c, d los puntos de intersección de E con una curva de bigrado $(1, 1)$. Entonces, los puntos a', b', c', d'' están también en una curva de bigrado $(1, 1)$.

Demostración. Sea D la curva de bigrado $(1, 1)$ que pasa por a, b, c, d y sea D' la curva de bigrado $(1, 1)$ que pasa por a', b', c'' . Los puntos de intersección entre la curva $L'_a \cup L'_b \cup L'_c \cup L''_d$, que tiene bigrado $(2, 2)$, con E , son $a, b, c, d, a', b', c'', d''$. Dado que $D \cup D'$ contiene a a, b, c, d, a', b', c'' , por el Corolario 3.13, entonces también contiene a d'' , por lo que D' contiene a d'' . \square

Observación 4.3. En el lema anterior, los puntos a, b, c, d no tienen por que ser distintos. Si dos de ellos fueran iguales, querría decir que las curvas E y la de bigrado $(1, 1)$ son tangentes en ese punto.

El siguiente resultado supone la clave de este trabajo. En él se demuestra la adición de la curva de bigrado $(2, 2)$.

Teorema 4.4. *Dados $a, b \in E$, se define $a + b$ como el cuarto punto en la única curva de bigrado $(1, 1)$ que pasa por a', b'', O . Entonces $(E, +)$ es un grupo conmutativo donde O es el elemento neutro.*

Demostración. Para probar que $(E, +)$ es un grupo conmutativo, veremos que se cumplen todas las propiedades.

En primer lugar, comprobemos que O es el elemento neutro. Por el teorema débil de Bézout, para cualquier $a \in E$ la única curva C de bigrado $(1, 1)$ que pasa por a', O'', O , es la unión $L'_a \cup L''_O$. Como $C \cap E = a, a', O, O''$, deducimos que $a + O = a$.

Veamos ahora cuál es el inverso de un elemento a . Sea b el cuarto punto en la curva C de bigrado $(1, 1)$ que contiene a a' y que es tangente a E en O . La curva C pasa por a' y, por la Observación 4.3, también pasa por O con multiplicidad dos. Por tanto, C contiene a los puntos a', b, O, O . Luego, por cómo hemos definido la suma, es claro que $a + b'' = O$.

Probemos a continuación la conmutatividad. Decir que $a + b = c$ equivale a decir que a', b'', c, O están en una curva de bigrado $(1, 1)$. Por el Lema 4.2, esto implica que a, b, c', O'' están en una curva de bigrado $(1, 1)$. De nuevo por el Lema 4.2, esto implica que los puntos a'', b', c, O están en una curva de bigrado $(1, 1)$, por tanto $c = b + a$.

Por último, para la asociatividad necesitamos mostrar que para cualesquiera $a, b, c \in E$, el cuarto punto d en la curva D de bigrado $(1, 1)$ que contiene los puntos $(a + b)', c'', O$, coincide con el cuarto punto \bar{d} en la curva \bar{D} de bigrado $(1, 1)$ que contiene a los puntos $a'', (b + c)', O$. Consideremos las siguientes curvas:

- La curva D_1 de bigrado $(1, 1)$ que corta a E en $(a + b)', c'', O, d$.
- La curva C_1 de bigrado $(1, 1)$ que corta a E en $a'', (b + c)', O, \bar{d}$.
- La curva C_2 de bigrado $(1, 0)$ que corta a E en $a + b, (a + b)'$.
- La curva D_2 de bigrado $(1, 0)$ que corta a E en $b + c, (b + c)'$.
- La curva D_3 de bigrado $(1, 1)$ que corta a E en $a'', b', O, a + b$.
- La curva C_3 de bigrado $(1, 1)$ que corta a E en $b', c'', O, b + c$.

De este modo tenemos la curva $D_1 \cup D_2 \cup D_3$ de bigrado $(3, 2)$ que corta a E en $2O, a'', b', c'', a + b, (a + b)', b + c, (b + c)', d$. Como la curva $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ corta a E en $2O, a'', b', c'', a + b, (a + b)', b + c, (b + c)', \bar{d}$, por el Corolario 3.13 deducimos que $d = \bar{d}$, como queríamos. Por tanto, $(E, +)$ es un grupo conmutativo donde O es el elemento neutro. \square

Proposición 4.5. *Sea $O \in E$ un punto por el que L'_O es tangente a E ; es decir, $O = O'$. Tomando O como el elemento cero de la suma, tendremos que $a + b = 0$ si y solo si a y b están en la misma curva de bigrado $(1, 0)$, es decir, que $b = a'$.*

Demostración. Por la Observación 4.3, $a + b = O$ si y solo si hay una curva D de bigrado $(1, 1)$ que pase por a', b' y que sea tangente a E en O . Como D y L'_O son tangentes en O , el teorema de Bézout implica que D es la unión de L'_O y otra curva L'' que es necesariamente L''_b . Esto es equivalente a decir que $a' \in L''_b$, es decir, $a' = b$. \square

Proposición 4.6. *Sea $O \in E$ un punto tal que la curva de bigrado $(1, 0)$ que pasa por él es tangente a E . Entonces, para cualquier $a \in E$, tenemos que $(a')'' = a + O''$. Como consecuencia, si definimos $j : E \rightarrow E$ como $j(a) = (a')''$, dado un $n \in \mathbb{N}$, se tiene que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $nO'' = O$.
2. $j^n : E \rightarrow E$ es la identidad.
3. Existe un $a \in E$ tal que $j^n(a) = a$.

Demostración. En primer lugar, observamos que $L'_a \cup L''_O$ es una curva de bigrado $(1, 1)$ que pasa por a, a', O, O'' . Por el Lema 4.2, existe una curva de bigrado $(1, 1)$ que pasa por $a'', (a')'', O', (O'')'$. Por definición, $a + O''$ es el cuarto punto en la única curva de bigrado $(1, 1)$ que pasa por $(O'')', a'', O$, y dado que $O' = O$, deducimos por descarte que $(a')'' = a + O''$.

Veamos a continuación que las tres afirmaciones son equivalentes:

1) \Rightarrow 2): Para todo $a \in E$ sabemos que

$$a \mapsto (a')'' = a + O'' \mapsto (a + O'') + O'' = a + 2O'' \mapsto a + nO''$$

Por hipótesis se tiene que $nO'' = O$, entonces, $a + nO'' = a + O = a$. Por tanto, $j^n : E \rightarrow E$ es la identidad.

2) \Rightarrow 3): Es inmediato.

3) \Rightarrow 1): Si existe un $a \in E$ tal que $j^n(a) = a$, entonces, como vimos anteriormente, $j^n(a) = a + nO''$, lo cual es posible si y solo si $nO'' = O$. \square

Observación 4.7. La demostración de esta última proposición es, en esencia, la demostración del Teorema de Poncelet. Veamos a continuación cómo interpretar el estudio realizado en los términos descritos en el capítulo 1.

4.2. Aplicación al Teorema de Poncelet

Como establecimos en la sección 1.2 del capítulo 1, E es una curva contenida en $C \times D^*$, donde C y D son dos cónicas irreducibles generales en el plano proyectivo, y la curva D^* es la cónica dual de las rectas tangentes a D . Además, un elemento $a \in E$ es un par de la forma (x, ξ) tal que x es un punto de C y ξ una de las rectas tangentes a D que pasa por x .

Dado que $C \simeq \mathbb{P}^1$ y $D^* \simeq \mathbb{P}^1$, podemos definir las siguientes proyecciones,

$$\pi_1 : E \subset C \times D^* \longrightarrow C \simeq \mathbb{P}^1$$

$$\pi_2 : E \subset C \times D^* \longrightarrow D^* \simeq \mathbb{P}^1$$

cuyas imágenes inversas son,

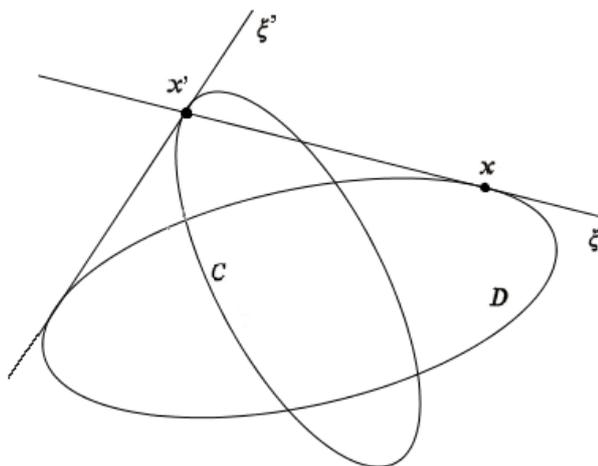
$$\pi_1^{-1}(x) = (\{x\} \times \mathbb{P}^1) \cap E = \{(x, \xi), (x, \xi')\}$$

$$\pi_2^{-1}(\xi) = (\mathbb{P}^1 \times \{\xi\}) \cap E = \{(x, \xi), (x', \xi)\}$$

Como el cardinal de las imágenes inversas de las dos proyecciones es 2, entonces E es una curva de bigrado $(2,2)$. Además, el operador $'$ coincide con i' y el operador $''$ coincide con i'' , por lo que de este modo, las operaciones que existían sobre E quedan de la forma,

$$\begin{cases} i'(x, \xi) = (x, \xi)' = (x, \xi') \\ i''(x, \xi) = (x, \xi)'' = (x', \xi) \end{cases}$$

De esta forma, construimos la composición $j = i' \circ i''$. Evaluando j en un punto cualquiera $a = (x, \xi) \in E$, obtenemos que $j(x, \xi) = (x', \xi')$, construcción que puede observarse en la siguiente imagen.



Por lo tanto, el Teorema de Poncelet es ahora consecuencia inmediata de la Proposición 4.6, lo cual concluye este estudio.

Bibliografía

- [1] E. Arrondo, *Apuntes de curvas algebraicas*, Apuntes del curso 2017/2018, disponibles online en <http://www.mat.ucm.es/~arrondo/curvas.pdf>. Universidad Complutense de Madrid.
- [2] E. Arrondo, *Introduction to projective varieties*, version of November 26.2017, disponibles online en <http://www.mat.ucm.es/~arrondo/projvar.pdf>. Universidad Complutense de Madrid.
- [3] M. Berger, *Geometry. I*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [4] M. Berger, *Geometry. II*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [5] A. Cayley, *Developments on the porism of the in-and-circumscribed polygon*, Philosophical magazine 7 (1854), 339–345.
- [6] V. Dragović, M. Radnović, *Bicentennial of the great Poncelet theorem (1813–2013): Current advances*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 51 no. 3 (2014) 373–445.
- [7] P. Griffiths - J. Harris, *On Cayley's explicit solution to Poncelet's porism*, Enseign. Math. (2) 24 (1978), no. 1-2, 31–40.
- [8] C. Jacobi, *Vorlesungen über Dynamic. Gesammelte Werke, Supplementband*, Berlin, 1884.
- [9] H. Lebesgue, *Les coniques*, Gauthier-Villars, Paris, 1942.
- [10] J. V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, Metz, Paris, 1822.
- [11] J. V. Poncelet, *Applications d'analyse et de géométrie*, Mallet-Bachelier, Paris, 1862.