UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA

ESCISIÓN DE FIBRADOS EN $G(1,4)$ Y SUS VARIEDADES

Beatriz Graña Otero

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
NOVIEMBRE 2002

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Memoria presentada para aspirar
al grado de doctor en Matemáticas

ESCISIÓN DE FIBRADOS EN $G(1,4)$ Y SUS VARIEDADES

Fecha: Noviembre 2002

Director de la tesis doctoral *Dn. Enrique Arrondo Esteban*

Para mis padres y mi hermano.

Abstract.

La memoria se divide en dos partes diferenciadas. En la primera, correspondiente al capítulo uno, se clasifican los fibrados sin cohomología intermedia de la Grassmanniana $G(1,4)$ de las rectas de $\mathbb{P}^4$. A diferencia de lo que ocurre en la Grassmanniana de rectas de $\mathbb{P}^3$, se obtienen familias infinitas de fibrados. Como caso particular de la clasificación se caracterizan cohomológicamente las sumas directas de fibrados triviales y fibrados universales de la Grassmanniana, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}^\vee$ (y sus twists).

La segunda parte, dividida en dos capítulos (2 y 3), consiste en la clasificación de las subvariedades lisas Y de dimensión tres de $G(1,4)$, llamadas *congruencias*, que además verifican que el fibrado universal cociente, $\mathcal{Q}$, restringido a ellas escinde en suma directa de fibrados lineales. La clasificación se hace interpretando geométricamente tanto el significado que tiene esta escisión, como el del número de secciones globales independientes que tienen los correspondientes fibrados lineales.

Agradecimientos.

Principalmente he de agradecer a Enrique Arrondo Esteban, mi director de tesis, que tuviese la paciencia infinita de esperarme. Gracias Enrique. Su dirección ha sido incomparable y el gran soporte de saber que siempre existe una respuesta a cualquier duda, pregunta o conflicto científico.

A José Manuel Gamboa Mutuberría que me presentó a Enrique, y sobre todo porque me supo transmitir el amor y el entusiasmo por las matemáticas, así como su belleza, ya desde mi primer año de licenciatura.

A mi familia, Cris, Tevo y Pepi, que siempre me animaron y apoyaron, y en los momentos difíciles, que fueron muchos, nunca lo dudaron. A ellos que no esperan nada de mi y me soportan.

A Daniel Hernández Ruipérez por acogerme y escucharme.

A Isabel Pajares por ayudarme y enseñarme el camino. Sin ella no estaría aquí.

A José Carlos Sierra, mi hermanito científico pequeño, gran encontrador de errores y aclarador de ideas.

Un saludo a mi coche que siempre se estropeó en los momentos claves mientras Enrique me esperaba y yo no llegaba. Has hecho de mi vida un guión de Almodóvar.

Madrid, España — Beatriz Graña
13 de Noviembre de 2002

Índice general

Introducción.

El estudio de las subvariedades de Grassmannianas, especialmente de rectas, ha sido un argumento ya tratado desde hace tiempo por geómetras clásicos como Castelnuovo, Fano, Kummer, Segre, Severi, Veronese y muchos otros. En términos modernos, este estudio se puede retomar a partir de la teoría de fibrados vectoriales sobre variedades, ya que dar un morfismo de una variedad a una Grassmanniana es esencialmente equivalente a dar un fibrado vectorial sobre esa variedad (que a posteriori será el pull-back del fibrado universal cociente de la Grassmanniana). Este doble diccionario permite obtener y pasar resultados de cada uno de estos dos campos al otro.

El caso más conocido y estudiado es el de los fibrados lineales. En este caso, es esencialmente equivalente dar un morfismo de una variedad a un espacio proyectivo (el ejemplo más trivial de Grassmanniana) a dar un fibrado lineal sobre la variedad, y este fibrado resulta ser el pull-back del fibrado lineal hiperplano del espacio proyectivo. Este fibrado hiperplano se puede caracterizar cohomológicamente mediante el teorema de Horrocks [Hor64]: es, salvo producto tensorial por un fibrado lineal, el único fibrado vectorial (a priori de rango arbitrario) indescomponible que no tiene cohomología intermedia. O dicho de otro modo, un fibrado vectorial sobre un espacio proyectivo no tiene cohomología intermedia si y sólo si escinde completamente como suma directa de fibrados lineales.

Es claro que si consideramos Grassmannianas no triviales, los fibrados universales no se pueden caracterizar como los únicos fibrados indescomponibles (módulo producto tensorial por un fibrado lineal) sin cohomología intermedia. Por ejemplo, el primer caso no trivial sería $G(1,3)$ (que se puede identificar con una cuádrica lisa de dimensión cuatro), y en este caso Knörrer [Kn87] y Sols (en un trabajo sin publicar) han demostrado independientemente que los únicos fibrados universales indescomponibles sin cohomología intermedia son (salvo producto tensorial con fibrados lineales) el fibrado hiperplano o alguno de los dos fibrados universales (o, desde el punto de vista de la cuádrica, los fibrados espinores). El hecho de que se obtenga un número finito de posibles fibrados es excepcional, ya que Buchweitz, Greuel y Schreyer [BGS87] han demostrado que las únicas hipersuperficies lisas para las que los fibrados sin cohomología intermedia son un número finito (en el sentido anterior) son las cuádricas.

En efecto, cuando se considera $G(1,4)$, la Grassmanniana de la que nos ocuparemos en esta memoria, se observa que existen familias continuas de fibrados sin cohomología intermedia. Lo que sí existe, no sólo en cualquier Grassmanniana sino también en cualquier cuádrica lisa, es un criterio cohomológico debido a Ottaviani [Ott89], [Ott87] que caracteriza los fibrados vectoriales que escinden completamente como suma directa de fibrados lineales. Por supuesto, parte de la caracterización cohomológica de estos fibrados consiste en que no tengan cohomología intermedia. Entonces, la idea que aplicaremos en el caso concreto de $G(1,4)$, consiste en ir quitando una a una cada una de las demás condiciones del teorema de Ottaviani y ver qué nuevos fibrados van saliendo en cada caso. De este modo, obtendremos una caracterización cohomológica de los fibrados universales, y más en general una descripción de los fibrados sin cohomología intermedia de $G(1,4)$ [AG99]. A todo esto dedicamos el capítulo 1 de la memoria.

Si volvemos a la interpretación de fibrados vectoriales sobre variedades como morfismos de dichas variedades a una Grassmanniana surge un problema interesante, que es el de relacionar la posible estabilidad del fibrado con "el tamaño" de la Grassmanniana en la que se sumerge la variedad. Una conjetura precisa para el caso de superficies y fibrados de rango dos se debe a Dolgachev y Reider [DR91]: si un fibrado de rango dos sobre una superficie da una inmersión de la misma en $G(1,3)$, entonces dicho fibrado es semiestable, a no ser que la imagen esté contenida en un hiperplano. Dicha conjetura demostraría, por el teorema de Bogomolov, otra conjetura, según la cual toda superficie lisa de $G(1,3)$ de bigrado (a,b) verifica que $a \leq 3b$ (y dualmente $b \leq 3a$). Un paso en la dirección de la conjetura de Dolgachev y Reider es el resultado de Arrondo y Sols [AS92] en que se caracterizan las superficies lisas de $G(1,3)$ para las cuales la restricción del fibrado universal cociente de rango dos escinde en suma directa de fibrados lineales (en cierto modo, el caso más extremo de inestabilidad de fibrados).

En esta memoria obtendremos el resultado análogo para subvariedades lisas de dimensión tres de $G(1,4)$ (estas variedades, estudiadas también por los clásicos, han sido objeto de atención reciente por parte de matemáticos como Alzati, Arrondo, Bertolini, De Poi y Turrini). Es decir, clasificamos cuáles de estas variedades verifican que su fibrado universal cociente de rango dos escinde en suma de dos fibrados lineales (el caso de la escisión del subfibrado universal de rango tres ha sido ya estudiado por Arrondo [Arr98b]).

La idea para la clasificación sigue la hecha para superficies de $G(1,3)$. Allí se discutía según la dimensión del espacio de secciones de cada uno de los sumandos del fibrado universal. Si tienen pocas secciones, entonces hay una recta que corta a todas las rectas de la superficie, y las superficies con una recta así están clasificadas [AG93]. Si en cambio tienen muchas secciones, el fibrado universal tiene muchas secciones, con lo que la superficie viene proyectada de una Grassmanniana superior, y de nuevo tales superficies están clasificadas.

En el caso de $G(1,4)$, la situación es bastante más complicada, porque sólo están clasificadas las tres-variedades de $G(1,4)$ proyectadas desde $G(1,7)$ [Arr99], pero no las que vienen de Grassmannianas menores (y su clasificación tampoco parece sencilla, ya que aparecen numerosos ejemplos de variedades proyectadas desde $G(1,5)$). La estrategia entonces es usar que si los sumandos del fibrado universal tienen muchas secciones, pero no demasiadas, entonces la tres-variedad viene proyectada desde una Grassmanniana no muy grande, pero con la propiedad de que todas las rectas cortan a espacios lineales de dimensión muy pequeña. Las variedades con estas propiedades ya sí se pueden clasificar.

Toda esta clasificación se desarrolla en los capítulos 2 y 3 de la memoria. El motivo de partir en dos capítulos es el siguiente: a la hora de ir analizando y clasificando todos los posibles casos, (lo que se hace en el capítulo 2) se obtiene una gran cantidad de posibilidades numéricas, que en su mayor parte hay que ir excluyendo caso a caso. Para evitar entonces una demostración demasiado engorrosa, hemos intercalado en el capítulo 2 una lista de variedades que irán apareciendo en la clasificación del capítulo 3, estudiando para cada una de ellas si verifican las condiciones de las clasificaciones en que vayan apareciendo.

Preliminares.

0.1. Notaciones.

Se fijan aquí las notaciones más frecuentes que se usan a lo largo de la memoria.

Dado un espacio vectorial V de dimensión $N+1$ sobre el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$, se denota por $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^N$ al espacio proyectivo de todos los hiperplanos de V (el espacio de todas las rectas del dual V^*). Se llama $G(k,N)$ a la variedad Grassmanniana de las subvariedades lineales de dimensión k en $\mathbb{P}^N$ (que también se llamarán k-planos). Existe una identificación natural de ésta con el conjunto de los espacios lineales de dimensión $k+1$ de V^*, o los cocientes de dimensión $k+1$ de V.

Sea $\mathcal{F}$ un fibrado vectorial sobre X, se denotará por

i.- $H^i(X, \mathcal{F})$ o simplemente $H^i(\mathcal{F})$ al grupo de cohomología de $\mathcal{F}$ sobre X y por $h^i(\mathcal{F})$ a la dimensión de éste como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Abusando del lenguaje se dirá que $\mathcal{F}$ tiene m secciones cuando $h^0(\mathcal{F}) = m$,

ii.- $R^i p_* \mathcal{F}$ al i-ésimo, (de orden i) functor imagen directa superior por el morfismo p de fibrados,

iii.- $S^l \mathcal{F}$ al producto simétrico l-ésimo de $\mathcal{F}$,

iv.- $\bigwedge^l \mathcal{F}$ al producto exterior l-ésimo de $\mathcal{F}$.

Nota. Se utilizará * para el dual de los espacios vectoriales y $^\vee$ para el dual de los fibrados vectoriales.

Dada una subvariedad Y de X se denotará por

i.- $\mathcal{I}_{Y,X}$ o simplemente $\mathcal{I}_Y$ al haz de ideales de la subvariedad Y en X, ii.- $A(X) = \bigoplus_{i=0}^{dimX} A^i(X)$ al Anillo de Chow de X, donde $A^i(X)$ es el grupo libre abeliano de subvariedades de codimensión i de X, módulo equivalencia racional,

iii.- $[Y]$ a la clase de equivalencia de Y dentro de $A(X)$.

Definición 0.1.1. Un *scroll* en r-planos sobre una variedad X es una subvariedad de $\mathbb{P}^N$ isomorfa a un fibrado proyectivo $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ donde $\mathcal{F}$ es un fibrado vectorial sobre X rango $k+1$ y de manera que todas las fibras del morfismo de estructura $\mathbb{P}(\mathcal{F}) \longrightarrow X$ tengan grado uno en $\mathbb{P}^N$.

Nota. A lo largo de la memoria se utilizará la convención usual de intercambiar libremente las conceptos de fibrado vectorial sobre una variedad proyectiva y su haz localmente libre asociado.

0.2. Algunos resultados generales.

Se enuncia a continuación algunos resultados generales de geometría algebraica y otros específicos que se utilizarán posteriormente a lo largo de la memoria repetidas veces.

Lugar de degeneración de secciones. Se recuerda la siguiente construcción de subvariedades de una variedad proyectiva X (se pueden encontrar más detalles por ejemplo en ([Ful84])). Sea $\mathcal{F}$ un haz localmente libre de rango k sobre X, generado por sus secciones globales, y $s_1, s_2, \ldots, s_m$, m secciones generales con $m \leq k$. Estas definen un morfismo $\mathcal{O}_X^m \longrightarrow \mathcal{F}$, y su lugar de dependencia es el lugar Y donde el morfismo tiene rango a lo más $m-1$. La fórmula de Porteous (o más concretamente el caso particular que es el que se utilizará) asegura lo siguiente:

***Fórmula de Porteus-Giambelli(Caso particular)* 0.2.1.** *Si $\mathcal{F}$ está generado por sus secciones globales, el lugar de dependencia Y de m secciones generales, o es vacío, o tiene la codimensión esperada, es decir $k-m+1$ y su clase en $A^{k-m+1}(X)$ es*

$$[Y] = c_{k-m+1}(\mathcal{F}).$$

Además el lugar singular de Y es el lugar en el cual el morfismo anterior tiene rango a lo más $m-2$. Tiene la codimensión esperada, $2(k-m+1)$, y su clase en $A^{2(k-m+2)}(X)$ puede ser expresada como

$$[SingY] = c_{k-m+2}(\mathcal{F})^2 - c_{k-m+3}(\mathcal{F})c_{k-m+1}(\mathcal{F}).$$

(en todo lo anterior, si la codimensión esperada es mayor estrictamente que la dimensión de X, entonces Y es el conjunto vacío).

El método más efectivo para trabajar con clases de Chern es el llamado "Principio de Escisión" ([Ful84], Obs. 3.2.3). Se enuncia en esta memoria, tras la siguiente proposición ([Ful84],"Splitting construction", pág. 51):

Proposición 0.2.2. *Sea $\mathcal{E}$ un fibrado vectorial sobre una variedad proyectiva X, entonces existe una variedad X' y un morfismo $f : X' \longrightarrow X$ tal que $f^* : A(X) \longrightarrow A(X')$ es inyectiva, y $\mathcal{E}' = f^*(\mathcal{E})$ tiene una filtración por subfibrados tal que el cociente de cada dos subfibrados consecutivos es un fibrado lineal.*

Principio de Escisión 0.2.3. *Supóngase que se quiere probar un fórmula universal que involucra las clases de Chern de un número finito de fibrados vectoriales relacionados entre sí. Si la fórmula es cierta para cualquier fibrado vectorial que admite una filtración como en 0.2.2 y además se preserva haciendo pull-back por un morfismo como en 0.2.2, entonces la fórmula es cierta en general.*

Observación 0.2.4. El polinomio de Chern es aditivo para sucesiones exactas. Entonces el polinomio de Chern de un fibrado que admita una filtración como el enunciado anterior, es el de la suma directa de los fibrados lineales que aparecen como cocientes de dicha filtración. Por tanto, si existen unas fórmulas válidas para fibrados vectoriales escindidos, el principio de escisión asegura que éstas son también válidas para fibrados vectoriales cualesquiera. Es decir, para calcular clases de Chern de fibrados basta conocer su cálculo para fibrados vectoriales escindidos, como mostraremos ahora en un ejemplo.

Sea $\mathcal{E}$ un fibrado vectorial de rango r sobre una variedad proyectiva X que escinde en suma directa de r fibrados lineales, $\mathcal{O}(a_1), \cdots, \mathcal{O}(a_r)$. Entonces el polinomio de Chern de $\mathcal{E}$ se puede calcular de la siguiente manera

$$c_t(\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^{r} c_t(\mathcal{O}(a_i)). \tag{0.2.1}$$

Además, si $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}(a)$ es un fibrado lineal se tiene que

$$c_t(\mathcal{E}) = 1 + c_1(\mathcal{O}(a))t = 1 + a.t \tag{0.2.2}$$

Ejemplo 0.2.5. Sea X variedad proyectiva y sean los $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ dos fibrados sobre X de rango 2. Si suponemos que son escindidos, a efectos de clase de Chern podemos escribir (formalmente) $\mathcal{E} = \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2)$ y $\mathcal{F} = \mathcal{O}(b_1) \oplus \mathcal{O}(b_2)$ sobre X, aplicando el principio de escisión se pueden calcular las clases de Chern de estos fibrados. La primera clase de Chern de $\mathcal{E}$ es la clase dentro del anillo de Chow de X del lugar de dependencia de dos secciones del fibrado, luego $c_1(\mathcal{E}) = a_1 + a_2$. La segunda clase de Chern es el lugar de ceros de una sección de $\mathcal{E}$, por tanto $c_2(\mathcal{E}) = a_1.a_2$. Escribimos entonces $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F} = \mathcal{O}(a_1 + b_1) \oplus \mathcal{O}(a_1 + b_2) \oplus \mathcal{O}(a_2 + b_1) \oplus \mathcal{O}(a_2 + b_2)$ y se puede así calcular

$$\begin{aligned} c_1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) &= c_1(\mathcal{O}(a_1 + b_1) \oplus \mathcal{O}(a_1 + b_2) \oplus \mathcal{O}(a_2 + b_1) \oplus \mathcal{O}(a_2 + b_2)) \\ &= 2(a_1 + a_2) + 2(b_1 + b_2) = 2c_1(\mathcal{E}) + 2c_1(\mathcal{F}) = rg(\mathcal{F})c_1(\mathcal{E}) + rg(\mathcal{E})c_1(\mathcal{F}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
c_2(\mathcal{E}\otimes\mathcal{F}) &= c_2(\mathcal{O}(a_1+b_1)\oplus\mathcal{O}(a_1+b_2)\oplus\mathcal{O}(a_2+b_1)\oplus\mathcal{O}(a_2+b_2))\\
&= (a_1+b_1)(a_2+b_1)+(a_1+b_1)(a_1+b_2)+(a_1+b_1)(a_2+b_2)+\\
&+ (a_2+b_1)(a_1+b_2)+(a_2+b_1)(a_2+b_2)+(a_1+b_2)(a_2+b_2)\\
&= 2c_2(\mathcal{E})+c_1(\mathcal{E})^2+c_1(\mathcal{F})^2+2c_2(\mathcal{F})+3(c_1(\mathcal{E})c_2(\mathcal{F}))=\\
&= [c_1(\mathcal{E})+c_1(\mathcal{F})]^2+c_1(\mathcal{E}).c_1(\mathcal{F})+2[c_2(\mathcal{E})+c_2(\mathcal{F})].
\end{aligned}$$

que por el principio de escisión valen para fibrados $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ arbitrarios.

Análogamente, para calcular la única clase de Chern que tiene el fibrado lineal producto exterior $\bigwedge^2\mathcal{E}$ se hará

$$c_1(\bigwedge^2\mathcal{E}) = c_1(\mathcal{O}(a_1+a_2)) = c_1(\mathcal{E})$$

y del producto simétrico

$$\begin{aligned}
c_1(S^2(\mathcal{E})) &= c_1[\mathcal{O}(2a_1)\oplus\mathcal{O}(2a_2)\oplus\mathcal{O}(a_1+a_2)]\\
&= 3(a_1+a_2) = 3c_1(\mathcal{E})\\
c_2(S^2(\mathcal{E})) &= 2(a_1+a_2)^2+4a_1a_2 = c_1(\mathcal{E})+4c_2(\mathcal{E})\\
c_3(S^2(\mathcal{E})) &= 4a_1a_2(a_1+a_2) = 4c_1(\mathcal{E})c_1(\mathcal{E}).
\end{aligned}$$

Así sucesivamente, el principio de escisión permite calcular las clases de Chern de productos exteriores, de productos tensoriales de fibrados de rangos arbitrarios. Si escribimos $\mathcal{E}=\bigoplus_{i=1}^r\mathcal{O}(a_i)$ y $\mathcal{F}=\bigoplus_{j=1}^s\mathcal{O}(b_j)$, entonces

$$c_t(\mathcal{E}\otimes\mathcal{F}) = \prod_{i,j}(1+(a_i+b_j)t) \tag{0.2.3}$$

$$c_t(\bigwedge^p\mathcal{E}) = \prod_{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq r}(1+(a_{i_1}+\cdots+a_{i_p})t) \tag{0.2.4}$$

$$c_t(\mathcal{E}^\vee) = c_{-t}(\mathcal{E}). \tag{0.2.5}$$

Para calcular resoluciones de lugares de degeneración de morfismos entre fibrados vectoriales se usa el Complejo de Eagon-Northcott (ver [GP82] o [Ott95]), que se recuerda a continuación.

Teorema 0.2.6. ***Complejo de Eagon-Northcott.*** *Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ dos fibrados vectoriales sobre una variedad X, sea $rg\mathcal{E} = m$ y $rg\mathcal{F} = n$ con $m \leq n$. Sea $\phi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ un morfismo de fibrados. Sea $Y \cong D_{m-1}(\phi) \equiv \{x \in X \mid rg(\phi_x) \leq m-1\}$ que tiene la codimensión esperada $n-m+1$, entonces existe la siguiente resolución:*

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow S^{n-m}\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes S^{n-m-1}\mathcal{E} \longrightarrow \textstyle\bigwedge^2 \mathcal{F} \otimes S^{n-m-2}\mathcal{E} \longrightarrow \cdots \\ \cdots \textstyle\bigwedge^{n-m} \mathcal{F} \longrightarrow \det \mathcal{F} \otimes \det \mathcal{E}^\vee \longrightarrow \mathcal{O}_Y \otimes \det \mathcal{F} \otimes \det \mathcal{E}^\vee \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{0.2.6}$$

donde se usa el isomorfismo canónico $\bigwedge^{n-m} \mathcal{F} \cong \det \mathcal{F} \otimes \bigwedge^m \mathcal{F}^\vee$.

En particular, el caso que se utilizará sobre todo en la memoria es el de subvariedades de codimensión 3 que son el lugar de dependencia de secciones de un fibrado vectorial.

Corolario 0.2.7. *En las condiciones del Teorema 0.2.6, supóngase que $n-m=2$ y que $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X{}^{\oplus m}$, entonces la resolución se puede escribir de la siguiente manera:*

$$0 \longrightarrow S^2\big(\mathcal{O}(-c_1(\mathcal{F}))^{\oplus m}\big) \longrightarrow \big(\mathcal{F}(-c_1(\mathcal{F}))\big)^{\oplus m} \longrightarrow \bigwedge^m \mathcal{F}^\vee \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow 0 \tag{0.2.7}$$

En cambio, si la subvariedad tiene codimensión 2 y es el lugar de dependencia de secciones de un fibrado vectorial, la resolución es la siguiente:

Corolario 0.2.8. *En las condiciones del Teorema 0.2.6, supóngase que $n-m=1$ y que $\mathcal{E} = \mathcal{O}^{\oplus m}$, entonces la resolución se puede escribir de la siguiente manera:*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-c_1(\mathcal{F}))^{\oplus m} \longrightarrow \mathcal{F}(-c_1(\mathcal{F})) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow 0 \tag{0.2.8}$$

Al final de los preliminares se da un ejemplo que calcula la resolución de un lugar de dependencia (ver el Ejemplo 0.4.29).

Corolario 0.2.9. *(ver [Oko94])) Supóngase que X es una subvariedad de codimensión dos tal que su haz de ideales tiene una resolución*

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}_X \longrightarrow 0.$$

Entonces una resolución del haz de ideales de la intersección completa Y de X con el lugar de ceros de una sección global s de un fibrado lineal $\mathcal{L}$ sobre X es la siguiente

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{-1} \longrightarrow \mathcal{E} \oplus (\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{-1}) \longrightarrow \mathcal{F} \oplus \mathcal{L}^{-1} \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow 0. \tag{0.2.9}$$

Este resultado se basa en la siguiente proposición.

Proposición 0.2.10. *(ver por ejemplo [Rot79] para el caso de módulos) Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ haces coherentes sobre una variedad X y sean*

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow P_r \xrightarrow{f_r} P_{r-1} \longrightarrow \dots \xrightarrow{f_1} P_1 \xrightarrow{f_0} P_0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow P'_r \xrightarrow{f'_r} P'_{r-1} \longrightarrow \dots \xrightarrow{f'_1} P'_1 \xrightarrow{f'_0} P'_0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0 \end{array}$$

dos sucesiones exactas de estos haces. Si existe un morfismo de haces $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$, entonces existen morfismos $\varphi_i : P_i \longrightarrow P'_i$ tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 \longrightarrow & P_r & \longrightarrow & P_{r-1} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & \\ 0 \longrightarrow & P'_r & \longrightarrow & P'_{r-1} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & P'_1 & \longrightarrow & P'_0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow 0 \end{array}$$

es conmutativo. Además, si φ es inyectivo, el haz $\mathcal{F}/\varphi(\mathcal{E})$ tiene una resolución

$$0 \longrightarrow P_r \longrightarrow P_{r-1} \oplus P'_r \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \oplus P'_1 \longrightarrow \mathcal{F}/\varphi(\mathcal{E}) \longrightarrow 0 \tag{0.2.10}$$

Demostración. del Corolario 0.2.9. Se tiene el siguiente diagrama conmutativo de sucesiones exactas

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{E}\otimes\mathcal{L}^{-1} & \longrightarrow & \mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{-1} & \longrightarrow & \mathcal{L}^{-1} & \longrightarrow & \mathcal{O}_X\otimes\mathcal{L}^{-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow s & & \big\downarrow s & & \big\downarrow s & & \big\downarrow s & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{O}_G & \longrightarrow & \mathcal{O}_X & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & & & \mathcal{O}_Y & & \\
 & & & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & & & 0 & &
\end{array}$$

Aplicando la construcción de la Proposición 0.2.10 se obtiene la resolución del enunciado. □

En [Har77] y en [God64] se pueden encontrar las siguientes proposiciones sobre los functores R^ip_*, *imagen directa superior.*

Proposición 0.2.11. ***Fórmula de proyección.*** *Sea $p : X \longrightarrow Y$ un morfismo entre variedades proyectivas y sean $\mathcal{F}$, $\mathcal{E}$ haces coherentes sobre X y sobre Y respectivamente, entonces se verifica que*

$$R^ip_*(\mathcal{F}\otimes p^*(\mathcal{E})) \cong R^ip_*(\mathcal{F})\otimes\mathcal{E}, \tag{0.2.11}$$

Proposición 0.2.12. *Sea $p : X \longrightarrow Y$ un morfismo entre variedades proyectivas. Sea $\mathcal{F}$ y $\mathcal{E}$ haces coherentes de rango m sobre X y rango $n+1$ sobre Y, si $X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ con fibrado inversible $\mathcal{O}_X(1)$ y p el morfismo proyección, entonces*

i.- $p_*(\mathcal{O}(l)) \cong S^l(\mathcal{E}) \quad \forall\, l \geq 0$

ii.- $p_*(\mathcal{O}(l)) = 0 \quad \forall\, l < 0$

iii.- $R^i p_*(\mathcal{O}(l)) = 0 \quad 0 < i < n \quad y \quad l \in \mathbb{Z}$

iv.- $R^n p_*(\mathcal{O}(l)) = 0 \quad l > -n-1$

v.- $R^n p_*(\mathcal{O}(l)) \cong p_*\big(\mathcal{O}(-l-n-1)\big)^\vee \otimes (\bigwedge^{n+1}\mathcal{E})^\vee \qquad \forall l$

Se utilizará también el siguiente caso particular del teorema de Grauert que se demuestra en [Har77] (Cor. III 12.9).

Proposición (Grauert) 0.2.13. *En las condiciones de la proposición 0.2.11, supóngase que para algún i, se tiene $h^i(p^{-1}(y), \mathcal{F}_{|_{p^{-1}(y)}}) = 0$. Entonces $R^i p_*(\mathcal{F}) = 0$.*

Los siguientes son casos particulares de la sucesión de Leray.

Proposición 0.2.14. *(ver [God64]) Sea $p : X \longrightarrow Y$ un morfismo entre variedades proyectivas. Sea $\mathcal{F}$ un haz coherente sobre X y supóngase que $h^i(Y, R^{i-j}p^*(\mathcal{F})) = 0$ para todo $j < i$. Entonces*

$$h^i(X, \mathcal{F}) = 0.$$

Proposición 0.2.15. *Sea $p : X \longrightarrow Y$ un morfismo entre variedades proyectivas. Sea $\mathcal{F}$ un haz coherente sobre X y supóngase que $R^i p_*(\mathcal{F}) = 0$ para todo $i > 0$. Entonces existen isomorfismos naturales para todo $i \geq 0$,*

$$h^i(X, \mathcal{F}) \cong h^i(Y, p_*\mathcal{F}).$$

Proposición 0.2.16. ***Fórmula de Künneth.*** *Sean X e Y dos variedades proyectivas y sea el fibrado vectorial*

$$\mathcal{O}_{X\times Y}(h,k) \cong p_1^*(\mathcal{O}_X(h)) \otimes p_2^*(\mathcal{O}_Y(k))$$

entonces se verifica la siguiente fórmula:

$$H^q(\mathcal{O}(h,k)) \cong \bigoplus_{i+j=q} H^i(p_1^*\mathcal{O}_X(h)) \otimes H^i(p_2^*(\mathcal{O}_Y(k))) \tag{0.2.12}$$

0.3. Preliminares sobre Grassmannianas.

Se dedica también este primer capítulo a dar algunas definiciones básicas y algunos resultados sobre Grassmannianas que se utilizarán en la memoria. Se introducen además, varios ejemplos que ilustran ideas que de nuevo aparecerán en los capítulos siguientes.

0.3.1. Definiciones y la inmersión de Plücker.

Notación 1. Se utilizará la siguiente notación para un subespacio de dimensión k de $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(V)$:

i.- con una letra minúscula l, si se refiere a este subespacio como un punto de $G(k, N)$;

ii.- con la correspondiente letra mayúscula L, si se le considera como una subvariedad lineal de $\mathbb{P}^N$;

iii.- con la correspondiente letra caligráfica $\mathcal{L}$ si se considera el subespacio vectorial de V^* que define;

Y si X es una subvariedad de $G(k, N)$, se denotará:

iv.- con $\overline{X}$ a la unión dentro de $\mathbb{P}^N$ de los k-planos de una subvariedad X de $G(k, N)$, es decir

$$\overline{X} = \bigcup_{l \in X} L \subset \mathbb{P}^N.$$

Si se fijan coordenadas $(x_0 : \ldots : x_N)$ para $\mathbb{P}^N$, o equivalentemente una base $\{e_0, \ldots, e_N\}$ de V^*, se puede representar un elemento $l \in G(k, N)$ por una matriz $(k+1) \times (N+1)$ de rango $k+1$, (llamada *matriz de Plücker*) donde las columnas son las coordenadas de una base de $\mathcal{L}$.

$$\begin{pmatrix} a_{0,0} & \ldots & a_{0,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,0} & \ldots & a_{k,N} \end{pmatrix}$$

Notación 2. Frecuentemente representaremos un elemento de $G(k, N)$ por su matriz de Plücker.

Esta matriz no es única ya que depende de la base de $\mathcal{L}$ que se tome. Puesto que tiene rango $k+1$ se puede siempre encontrar un menor de orden $k+1$ distinto de cero. Supóngase que este menor es el correspondiente a las primeras $k+1$ columnas, entonces, después de multiplicar por una matriz adecuada, (la inversa del menor distinto de cero formado por las primeras $k+1$ columnas), l puede venir representado de manera única por una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & a_{0,k+1} & \dots & a_{0,N} \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_{k,k+1} & \dots & a_{k,N} \end{pmatrix} \tag{0.3.1}$$

Geométricamente, que l admita una matriz de Plücker como en (0.3.1) equivale a decir que la subvariedad lineal L no corta la subvariedad $H = \{x_0 = \cdots = x_k = 0\}$, de codimensión $k+1$. Las filas de la matriz de Plücker son los puntos intersección de L con los subespacios $\{x_1 = \cdots = x_k = 0\}, \cdots, \{x_0 = \cdots = x_{k-1} = 0\}$, que forman una base del espacio de los subespacios lineales de codimensión k que contienen a H.

Es decir, el conjunto de los k-planos que no cortan a H es un subconjunto abierto afín de dimensión $(N-k)(k+1)$ de coordenadas $(a_{0,k+1}, \dots, a_{k,N})$. Se puede recubrir $G(k, N)$ por subconjuntos abiertos afines de esta clase, lo cual significa que la Grassmanniana $G(k, N)$ puede ser también vista como una variedad abstracta o esquema de dimensión $(N-k)(k+1)$ pegando convenientemente estos abiertos afines.

Se puede probar que $G(k, N)$ es una variedad proyectiva, utilizando la *inmersión de Plücker*, que consiste en el morfismo cuya imagen para cada punto $l \in G(k, N)$ (que se corresponde con el subespacio lineal $\mathcal{L} = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle \subset V^*$ de dimensión $(k+1)$) viene dada por, (tomando para $\bigwedge^{k+1} V^*$ la base $\{\dots, e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{k+1}}, \dots\}$)

$$\begin{aligned} \phi_{k,N} : \quad G(k, N) & \longrightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V) \\ l \quad & \mapsto [v_0 \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_k], \end{aligned}$$

donde $[v_0 \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_k]$ es el punto de $\mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V)$ que corresponde a el vector $v_0 \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$. Si se toma otra base $\langle v'_0, \ldots v'_k \rangle$ del espacio $\mathcal{L}$, la imagen es la misma, ya que $v'_0 \wedge \ldots \wedge v'_k = detA \; v_0 \wedge \ldots \wedge v_k$ donde A es la matriz del cambio de base, así que el morfismo $\phi_{k,N}$ está bien definido. Además, no es difícil ver que $\phi_{k,N}$ es inyectiva. En coordenadas, $\phi_{k,N}$ asocia a un espacio definido por una matriz de Plücker el punto de $\mathbb{P}^{\binom{n+1}{k+1}-1}$ cuyas coordenadas son todos los menores de orden $k+1$ de la matriz.

Definición 0.3.1. Las coordenadas homogéneas inducidas en $\mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V)$ tras una elección de coordenadas en $\mathbb{P}^N$ se llaman *coordenadas de Plücker* y se denotan por $p_{i_0,\ldots,i_k}$.

Se tiene que $p_{i_o\ldots,i_k} = \begin{vmatrix} a_{0,i_0} & \ldots & a_{0,i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,i_0} & \ldots & a_{k,i_k} \end{vmatrix}$

De este modo, el conjunto de k-planos dados por una matriz como (0.3.1) se corresponde con el subconjunto afín $\{p_{0,1,\ldots,k} \neq 0\}$ de la imagen, o lo que es lo mismo, la ecuación $p_{0,1,\ldots,k} = 0$ representa el conjunto de k-planos que cortan a

$$\{x_0 = x_1 = \cdots = x_k = 0\}.$$

Observación 0.3.2. La Grassmanniana $G(k, N)$ de los k-planos en $\mathbb{P}^N$ se identifica de una manera natural por dualidad con la Grassmanniana $G(N-k-1, N)$ del conjunto de los $(N-k-1)$-planos del espacio dual $\mathbb{P}^{N^*}$. Ésta es desde el punto de vista geométrico la correspondencia que asocia a cada k-plano L de $\mathbb{P}^N$, el $(N-k-1)$-plano de $\mathbb{P}^{N^*}$ formado por los hiperplanos que contienen a L.

Entonces, por ejemplo, el dual de la Grassmanniana $G(1, 3)$ es de nuevo una $G(1, 3)$, porque el dual de una recta en $\mathbb{P}^3$ es una recta.

Definición 0.3.3. Sea la subvariedad $Y \subset G(k, N)$, se llamará *subvariedad* $Y^* \subset G(N-k-1, N)$ *dual* de Y como el conjunto de los $N-k-1$-planos de $\mathbb{P}^{N^*}$ que corresponden a los k-planos de Y, (en particular, Y e Y^* son isomorfos).

Nota. Esta noción de dualidad no tiene que ver con la de variedad dual de una variedad proyectiva $X \subset \mathbb{P}^N$ definida como la subvariedad $X^* \subset \mathbb{P}^{N*}$ de los hiperplanos tangentes a X. Esta segunda noción la usaremos sólo para cuádricas. En ese caso se especificará que se está hablando de este tipo de dualidad.

Se puede probar también que el ideal $G(k,N)$ en $\mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V)$ está generado por cuádricas. El método más rápido de obtener estas cuádricas es desarrollando por bloques de tamaño $k+1$ los menores de una matriz con dos filas idénticas (esto se puede hacer siempre al menos para la Grassmanniana o su dual). Así, por ejemplo, sea la Grassmanniana $G(1,3)$ y tómense unas coordenadas en $\mathbb{P}^3$. Un punto de la Grassmanniana es la recta de $\mathbb{P}^3$ representada por la siguiente matriz de Plücker

$$\begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & a_{0,3} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \end{pmatrix}$$

Entonces las seis coordenadas de Plücker son

$$p_{0,1} = \begin{vmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} \end{vmatrix} \quad p_{0,2} = \begin{vmatrix} a_{0,0} & a_{0,2} \\ a_{1,0} & a_{1,2} \end{vmatrix} \quad p_{0,3} = \begin{vmatrix} a_{0,0} & a_{0,3} \\ a_{1,0} & a_{1,3} \end{vmatrix}$$

$$p_{1,2} = \begin{vmatrix} a_{0,1} & a_{0,2} \\ a_{1,1} & a_{1,2} \end{vmatrix} \quad p_{1,3} = \begin{vmatrix} a_{0,1} & a_{0,3} \\ a_{1,1} & a_{1,3} \end{vmatrix} \quad p_{2,3} = \begin{vmatrix} a_{0,2} & a_{0,3} \\ a_{1,2} & a_{1,3} \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante nulo de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & a_{0,3} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & a_{0,3} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \end{pmatrix}$$

se obtiene la ecuación homogénea de una cuádrica de $\mathbb{P}^5$ que es la ecuación de la imagen de $G(1,3)$ en $\mathbb{P}^3$:

$$p_{0,1}p_{2,3} - p_{0,2}p_{1,3} + p_{0,3}p_{1,2} = 0$$

0.3.2. Cálculo de Schubert.

La herramienta básica para el estudio de las intersecciones en Grassmannianas es el cálculo de Schubert y aquí se recuerdan alguna definiciones y resultados básicos (ver por ejemplo para más detalles y/o demostraciones [KL72] o también [Arr96]).

Definición 0.3.4. Fijada una bandera de $k+1$ subvariedades lineales no vacías de $\mathbb{P}^N$, $H_0 \subsetneq H_1 \subsetneq \ldots \subsetneq H_k$. Se define la *variedad de Schubert* asociada a esta bandera como el conjunto

$$\Omega(H_0, \ldots, H_k) = \{l \in G(k,N) \mid \dim(L \cap H_i) \geq i,\ i = 0, \ldots, k\}.$$

Definición 0.3.5. La clase de equivalencia de una variedad de Schubert en el anillo de Chow se llama un *ciclo de Schubert* y se denota por $\Omega(\alpha_0, \ldots, \alpha_k)$, donde $\alpha_i = \dim H_i$. Resulta que $\dim \Omega(\alpha_0, \ldots, \alpha_k) = \sum_{i=0}^{k} (\alpha_i - i)$.

Definición 0.3.6. El *ciclo especial de Schubert* σ_a de codimensión a es el ciclo de k-planos que cortan al espacio lineal de dimensión $N-k-a$, es decir

$$\sigma_a = \Omega(N-k-a, N-k+1, \ldots, N).$$

Ejemplo 0.3.7. El ciclo σ_1 es la sección hiperplana de $G(k,N)$, ya que hemos visto (después de la Definición 0.3.1) que la anulación de una coordenada de Plücker es el conjunto de hiperplanos que cortan a un subespacio de dimensión $N-k-1$.

Se puede ahora establecer el siguiente resultado bien conocido sobre el anillo de Chow $A(G) = \bigoplus_{i=0}^{(N-k)(k+1)} A^i(G)$ donde $G = G(k,N)$.

Teorema 0.3.8. *Para todo $i = 0, \ldots, (k+1)(N-k)$, el grupo de Chow $A^i(G)$ está libremente generado por todos los ciclos de Schubert $\Omega(\alpha_0, \ldots, \alpha_k)$ de codimensión i, es decir tales que $\sum_{j=0}^{k} (\alpha_j - j) = (N-k)(k+1) - i$*

Acerca de la estructura multiplicativa del anillo de Chow, se establecen a continuación los resultados que se utilizarán a lo largo de la memoria.

Teorema 0.3.9. *(Fórmula de Pieri) El producto de intersección de un ciclo de Schubert y un ciclo especial de Schubert está dado por*

$$\Omega(\alpha_0, \ldots, \alpha_k) \cdot \sigma_a = \sum \Omega(\beta_0, \ldots, \beta_k).$$

siendo el sumatorio sobre β_i tal que $\alpha_{i-1} + 1 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ y $\sum \beta_i = \sum \alpha_i - a$.

Teorema 0.3.10. *Si dos ciclos de Schubert tienen dimensión complementaria, entonces su intersección, $\Omega(\alpha_0, \ldots, \alpha_k) \cdot \Omega(\beta_0, \ldots \beta_k)$ es cero a menos que $\alpha_i + \beta_{k-i} = N$ para todo $i = 0, \ldots, k$. En este último caso $\Omega(\alpha_0, \ldots, \alpha_k) \cdot \Omega(\beta_0, \ldots, \beta_k) = \Omega(0, 1, \ldots, k)$, es decir la clase de un punto.*

Las consecuencias de este último teorema es la ortogonalidad con respecto al producto intersección de las bases para dos dimensiones complementarias. Esto permite la extensión de la noción de grado a las Grassmannianas, dándole a cada subvariedad $Y \subset G = G(k, N)$ de codimensión r, su clase $[Y]$ como un elemento del grupo de Chow $A^r(G)$.

Definición 0.3.11. Se denomina *multigrado* de Y al conjunto de coeficientes de la clase $[Y] \in A^r(G)$ con respecto a las bases dadas por los ciclos de Schubert de codimensión r.

Nota. Por la ortogonalidad anterior, si m es el coeficiente de $\Omega(\alpha_0, \ldots, \alpha_k)$, entonces $m = \Omega(\alpha_0, \ldots, \alpha_k)\Omega(N - \alpha_k, \ldots, N - \alpha_0)$, con lo que se corresponde con el número de k-planos de Y que cortan a una subvariedad de dimensión $N - \alpha_{k-i}$ en dimensión i, con $i \in \{0, \ldots, k\}$. Por lo tanto, el multigrado de Y se puede ver también como el conjunto de números de intersección de Y con todos los ciclos de Schubert de dimensión r.

Veamos cómo es el multigrado para las subvariedades que estudiaremos en la memoria.

Definición 0.3.12. En el caso $k = 1$, una subvariedad Y de $G(1, N)$ de dimensión $N - 1$ se llama clásicamente *congruencia* de la Grassmanniana de rectas ($k = 1$). Para ellas la dimensión coincide con la codimensión. En particular, las congruencias de $G(1, 3)$ son superficies y las de $G(1, 4)$ son subvariedades de dimensión tres.

Ejemplo 0.3.13. Considérese el ejemplo concreto de la Grassmanniana de rectas en $\mathbb{P}^3$, $G = G(1, 3)$. Ésta es una variedad de dimensión cuatro, y así el anillo de Chow está dado por $A(G) = \bigoplus_{i=0}^{4} A^i(G)$, donde los generadores de los grupos $A^i(G)$ son los siguientes

$$\begin{aligned}
A^0(G) &= \langle \Omega(2,3) \rangle \\
A^1(G) &= \langle \Omega(1,3) \rangle \\
A^2(G) &= \langle \Omega(0,3), \Omega(1,2) \rangle \\
A^3(G) &= \langle \Omega(0,2) \rangle \\
A^4(G) &= \langle \Omega(0,1) \rangle.
\end{aligned}$$

Así $A^0(G)$ está generado por la clase de toda la Grassmanniana G, $A^1(G)$ por el ciclo de Schubert de todas las rectas que cortan a una recta dada, $A^2(G)$ por los ciclos $\Omega(0, 3)$, es decir las rectas que pasan por un punto, y $\Omega(1, 2)$, es decir las rectas contenidas en un plano fijo. Finalmente $A^3(G)$ está generado por el ciclo de un haz de rectas, es decir las rectas contenidas en un plano y que pasan por un punto de este plano y $A^4(G)$ por la clase de un recta.

Definición 0.3.14. Si p es un punto de $\mathbb{P}^3$, y L una recta contenida en el plano Π de $\mathbb{P}^3$, a las variedades de Schubert, $\Omega(p, \mathbb{P}^3)$ y $\Omega(L, \Pi)$ cuyas clases son los generadores del grupo $A^2(G)$, (las congruencias de $G(1, 3)$) se les llama clásicamente *α-plano* y *β-plano* respectivamente.

Todo los grupos de Chow están generadas por un sólo elemento, excepto $A^2(G)$. Así, una variedad $Y \subset G(1,3)$ tiene sólo un grado, excepto las superficies, las cuales tienen bigrado. Más concretamente, si Y es una superficie de $G(1,3)$, se tiene que $[Y] = a\Omega(0,3) + b\Omega(1,2)$ y del Teorema 0.3.10 resulta que

$$\begin{aligned} a &= [Y] \cdot \Omega(0,3) \\ b &= [Y] \cdot \Omega(1,2), \end{aligned}$$

lo cual significa que a es el número de rectas de Y que pasan por un punto fijo general, mientras que b es el número de rectas contenidas en un plano general de Y).

Definición 0.3.15. Sea Y una congruencia de $G(1,3)$ y sea el (a,b) el bigrado de Y, (es decir, $[Y] = a\Omega(0,3) + b\Omega(1,2)$). Clásicamente se llama *orden* de Y al coeficiente a y *clase* de Y al coeficiente b.

Sea d el grado de Y en $\mathbb{P}^5$ después de la inmersión de Plücker, entonces d es el número de puntos de intersección de Y con dos hiperplanos generales, o el producto de $[Y]$ con la segunda potencia de la sección hiperplana de $G(1,3)$. En este caso $d = \sigma_1^2 \cdot [Y]$ y por el cálculo de Schubert

$$d = [Y] \cdot (\Omega(0,3) + \Omega(1,2)) = a + b.$$

Observación 0.3.16. Si se toma la Grassmanniana dual de $G(1,3)$, que como se ha observado más arriba es de nuevo $G(1,3)$, sea Y una congruencia de bigrado (a,b) y llámese Y^* a su dual. Entonces, ya que en $\mathbb{P}^3$ los puntos son el dual de los planos, las rectas que pasan por un punto dado se corresponden con las rectas contenidas en un plano. Así el bigrado de Y^* es simplemente $(a^*, b^*) = (b, a)$.

Ejemplo 0.3.17. En el caso de una congruencia Y de $G(1,4)$, se tendrá $[Y] = a\Omega(0,4) + b\Omega(1,3)$. Como para $G(1,3)$, el bigrado (a,b) se calcula haciendo la intersección

$$\begin{aligned} a &= [Y] \cdot \Omega(0,4) \\ b &= [Y] \cdot \Omega(1,3), \end{aligned}$$

el grado (total) de Y en el $\mathbb{P}^9$ de Plücker es

$$\begin{aligned} d &= [Y] \cdot \sigma_1^3 = [Y] \cdot (\Omega(1,4) + \Omega(2,3)) \cdot \sigma_1 \\ &= [Y] \cdot (\Omega(0,4) + 2\Omega(1,3)) = a + 2b. \end{aligned}$$

Definición 0.3.18. Sea Y una congruencia de $G(1,4)$ y sea el (a,b) el bigrado de Y, (es decir, $[Y] = a\Omega(0,4) + b\Omega(1,3)$). Clásicamente se llama *orden* de Y al coeficiente a y *clase* de Y a b. Es decir, a es el número de rectas de Y que pasan por un punto general de $\mathbb{P}^4$ y b es el número de rectas de Y contenidas en un hiperplano de $\mathbb{P}^4$.

Se recuerda también lo siguiente:

Fórmulas del punto doble. Sea X una variedad lisa. Las subvariedades proyectivas lisas Y que tienen dimensión al menos igual a su codimensión no pueden tener invariantes arbitrarios puesto que existen relaciones numéricas entre ellos. El caso límite es cuando dimensión y codimensión coinciden, entonces la relación entre sus invariantes viene dada por $c_{dimY}(\mathcal{N}) = [Y]$ (donde $\mathcal{N}$ es el fibrado normal de Y en X). Se denomina *fórmula del punto doble*. Por ejemplo, cuando la variedad es una Grassmanniana se da a continuación la fórmula para las congruencias de la Grassmanniana $G(1,4)$, que será el caso utilizado en la memoria. (Se puede encontrar en [Alz84] y [Arr96]).

***Fórmula del Punto Doble* 0.3.19.** *Sea Y una subvariedad lisa de dimensión tres de $G(1,4)$ entonces la relación que da la fórmula del punto doble entre los invariantes de Y es:*

$$a^2 + b^2 = 3a + 5b + 6(2\pi - 2) + (2g_b - 2) - 60\chi(\mathcal{O}_{\mathcal{S}}) + 10K_{\mathcal{S}}^2 + K_Y^3 + 48\chi(\mathcal{O}_Y) - \chi(Y)$$

donde:

i.- a es el orden de la congruencia Y y b su clase,

ii.- S es la superficie obtenida haciendo la intersección de Y con un hiperplano general, *iii.-* $\chi(Y)$ *es la característica topológica de Euler-Poincaré de* Y*,*

iv.- π *es el género seccional de* Y *(el género de la curva obtenida al hacer la intersección de* Y *con dos hiperplanos de* $\mathbb{P}^9$*),*

v.- g_b *es el género de la curva obtenida al cortar* Y *con un* $\Omega(2,3)$ *general.*

Observación 0.3.20. El género g_b está relacionado con el género seccional π. En efecto, $A^2(G(1,4))$ está generado por $\Omega(1,4)$ y $\Omega(2,3)$ y podemos considerar la intersección de Y con un representante de cualquiera de estas clases (rectas que cortan a una recta dada en el primer caso, rectas contenidas en un hiperplano en el segundo). En el primer caso, se obtiene una curva de grado

$$[Y] \cdot \Omega(1,4) \cdot \sigma_1 = (a\Omega(0,4) + b\Omega(1,3)) \cdot (\Omega(0,4) + \Omega(1,3)) = a + b.$$

En el segundo caso, la curva tendrá grado

$$[Y] \cdot \Omega(2,3) \cdot \sigma_1 = (a\Omega(0,4) + b\Omega(1,3)) \cdot \Omega(1,3) = b.$$

Se denotarán estas curvas respectivamente C_{a+b} y C_b y por g_{a+b} y g_b sus respectivos géneros.

La relación de g_{a+b} y g_b con π se obtiene al tomar dos secciones hiperplanas especiales de la forma $\Omega(\Pi, \mathbb{P}^4)$ y $\Omega(\Pi', \mathbb{P}^4)$, donde Π y Π' son dos planos generales que se cortan a lo largo de una recta L y por tanto que están contenidos en un hiperplano $H \subset \mathbb{P}^4$. Entonces, $\Omega(\Pi, \mathbb{P}^4) \cap \Omega(\Pi', \mathbb{P}^4) = \Omega(L, \mathbb{P}^4) \cup \Omega(\Pi, H)$. Luego al hacer la intersección de Y con estos dos hiperplanos se obtiene la unión de dos curvas C_{a+b} y C_b, obtenidas al intersecar Y respectivamente con $\Omega(L, \mathbb{P}^4)$ y $\Omega(\Pi, H)$. La intersección de estas dos curvas es $Y \cap \Omega(L, \mathbb{P}^4) \cap \Omega(\Pi, H) = Y \cap \Omega(L, H)$, es decir exactamente b puntos (por definición de b). Así, la situación es que un curva seccional de género π puede obtenerse como la unión de dos curvas de géneros g_{a+b} y g_b que se cortan en b puntos. Es esta situación se tiene que $\pi = g_{a+b} + g_b + b - 1$.

Las siguientes nociones son también importantes:

Definición 0.3.21. Sea Y una congruencia de $G(1,N)$ y p un punto de $\mathbb{P}^N$. Clásicamente se dice que p es un *punto fundamental* para Y si existe un número infinito de rectas de Y que pasan por p.

Definición 0.3.22. Siguiendo la notación utilizada en [ABT94] se dirá que una curva $C \in \mathbb{P}^N$ es una *curva fundamental* si corta a todas las rectas de Y.

Observación 0.3.23. Si $N = 3$, una curva C es fundamental si y sólo si está formada por puntos fundamentales, pero si $N > 3$ hay que imponer que por cada punto de C pase una familia de dimensión $N - 2$ de rectas de Y.

Ejemplo 0.3.24. Tómese un plano $\Pi \subset \mathbb{P}^3$, una cónica $C \subset \Pi$ y una recta L que no se interseca con C. La familia de rectas que unen C y L es una congruencia $Y \subset G(1,3)$ y C y L son curvas fundamentales para Y. El bigrado de Y es $(2,2)$.

En efecto, si se toma un punto general $p \in \mathbb{P}^3$, el plano $\Pi_p = \langle p, L\rangle$ interseca a Π en una recta y por tanto a la cónica C en dos puntos p_1, p_2. Las rectas $n_1 = \langle p, p_1\rangle$ y $n_2 = \langle p, p_2\rangle$ intersecan a C y ya que están contenidas en Π_p, cortan además a la recta L. De modo que n_1 y n_2 dan lugar a dos puntos de la congruencia Y y es claro que son los únicos en el α-plano definido por p. Se ha encontrado entonces que el orden de Y es $a = 2$. Para calcular la clase b se tiene que encontrar el número de rectas de Y contenidas en un plano fijo Π_0 general. Pero ya que Π_0 interseca a L en un punto q y a C en dos puntos p_1 y p_2, resulta que existen dos rectas $\langle q, p_1\rangle$ y $\langle q, p_2\rangle$ de Y dentro de Π_0, que claramente son las únicas. Así la clase de Y es $b = 2$. Entonces el bigrado de Y es $(a, b) = (2, 2)$.

El bigrado se puede también calcular observando que la congruencia Y es la intersección de la familia de rectas que cortan a L, cuya clase es el ciclo de Schubert $\Omega(1,3)$, y la familia de rectas que cortan a C, cuya clase es $2\Omega(1,3)$. De modo que $[Y] = 2\Omega(1,3)^2 = 2(\Omega(0,3) + \Omega(1,2))$.

Si se toma la congruencia dual (la cual tiene de nuevo bigrado $(2,2)$), se puede describir como la familia de rectas que cortan un recta M (dual de L) y tangentes a un cono cuadrático $Q \subset \mathbb{P}^3$ (por dualidad, los puntos de una cónica C corresponden a los planos tangentes a un cono cuadrático).

Ejemplo 0.3.25. Se puede especializar el ejemplo anterior al caso en que L interseca a C en un punto p. Si se consideran las rectas que unen L y C todavía se obtiene una congruencia de bigrado $(2,2)$, pero ésta es claramente reducible. De hecho existe dos componentes irreducibles: el α-plano $\Omega(p, \mathbb{P}^3)$ (las rectas que pasan por p), y la clausura del conjunto de las rectas que cortan a L y a C en un par de puntos distintos y diferentes de p. Por tanto la congruencia Y de bigrado $(1,2)$ es esta segunda componente.

Se puede describir la congruencia dual Y^* (que ahora tiene bigrado $(2,1)$) de la siguiente manera. Tómese un cono cuadrático $Q \subset \mathbb{P}^3$ (dual de C) y una recta M (dual de L) tangente a Q, (es decir contenida en un plano Π tangente a Q) y que no pase por el vértice de Q. Entonces tómese la familia de rectas tangentes a Q y que cortan a M. Como antes, se puede eliminar el β-plano de las rectas contenidas en Π (el cual es el dual del α-plano $\Omega(p, \mathbb{P}^3)$) y la clausura del conjunto de rectas que cortan a Qy a L y que no están contenidas en Π es la congruencia Y^*.

0.3.3. Los fibrados universales.

Considérese el siguiente diagrama de incidencia

$$\begin{tikzcd} & I \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ \mathbb{P}^N & & G(k,N), \end{tikzcd} \tag{0.3.2}$$

donde I es la variedad de incidencia $I = \{(x,l) \in \mathbb{P}^N \times G(k,N) \mid x \in L\}$. Entonces, de la sucesión exacta de Euler

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^N}(1) \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1) \longrightarrow 0$$

si se hace el pull-back mediante el morfismo p y luego el push-forward mediante q, se obtiene la *llamada sucesión exacta universal* de $G(k,N)$

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}^{\vee} \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}_G \xrightarrow{\pi} \mathcal{Q} \longrightarrow 0, \qquad (0.3.3)$$

donde los fibrados

$$\mathcal{S}^{\vee} = q_* p^*(\Omega_{\mathbb{P}^N}(1)), \qquad (0.3.4)$$

$$\mathcal{Q} = q_* p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)), \qquad (0.3.5)$$

se denominan los *subfibrado universal* de rango $N-k$ y *fibrado cociente universal* de rango $k+1$ respectivamente. También se puede ver el fibrado vectorial $\mathcal{Q}$ como el dual del fibrado tautológico cuya fibra sobre un punto $l \in G(k,N)$ es el espacio vectorial $\mathcal{L} \subset V^*$ correspondiente a l. Es decir, $\mathcal{Q}^{\vee} = \{(v,\mathcal{L}) \in V^* \times G(k,N) \mid v \in \mathcal{L}\}$. Usando dualidad, de la identidad (0.3.5) se puede probar la siguiente proposición.

Proposición 0.3.26. *Existen identificaciones naturales*

$$H^0(G(k,N),\mathcal{Q}) = V \quad y \quad H^0(G(k,N),\mathcal{S}) = V^*,$$

mientras que $H^i(G(k,N),\mathcal{Q}) = 0$ y $H^i(G(k,N),\mathcal{S}) = 0$ para todo $i > 0$. Bajo las identificaciones anteriores, s secciones independientes de $\mathcal{Q}$ se corresponden con un subespacio lineal $A \subset \mathbb{P}^N$ de codimensión s. Si $s \leq k+1$, el lugar de dependencia de las secciones es justamente el conjunto de k-planos que cortan a A en dimensión al menos $k-s+1$. Análogamente, $r+1$ secciones independientes de $\mathcal{S}$ se corresponden con un subespacio lineal $B \subset \mathbb{P}^N$ de dimensión r. Si $r+1 \leq N-k$, el lugar de dependencia de estas secciones es el conjunto de k-planos que cortan a B.

Si en la proposición anterior se toma el caso particular $s = k+1$ y $r+1 = N-k$ se obtiene el mismo lugar de dependencia. En concreto, usando el Ejemplo 0.3.7, se tiene el siguiente corolario:

Corolario 0.3.27. *El conjunto de k-planos que cortan a un $(N-k-1)$-plano fijo es el lugar de dependencia de $k+1$ secciones de $\mathcal{Q}$, o $N-k$ secciones de $\mathcal{S}$. En particular se tiene la identificación de los fibrados inversibles $\bigwedge^{k+1}\mathcal{Q} \cong \bigwedge^{N-k}\mathcal{S}$ (que se puede deducir también de la sucesión universal* (0.3.3)*) y en ambos casos son isomorfos a $\mathcal{O}_G(1)$.*

Observación 0.3.28. Con esta notación, dado que el fibrado cotangente de $G(k,N)$ es $Hom(\mathcal{Q},\mathcal{S}^\vee)$ se sigue que el fibrado canónico de $G(k,N)$ es $\omega_G \cong \mathcal{O}_G(-N-1)$.

Corolario 0.3.29. *El lugar de dependencia de $N-k-a+1$ secciones de $\mathcal{S}$ es la familia de k-planos que cortan a un espacio lineal de dimensión $(N-k-a)$, es decir $\Omega(N-k-a, N-k+1, \ldots, N) = \sigma_a$. De la Fórmula de Porteous-Giambelli 0.2 resulta que σ_a es la clase de Chern $c_a(\mathcal{S})$.*

Aplicando la Proposición 0.3.26 al caso $s=1$ y $r=0$ se tiene el siguiente corolario:

Corolario 0.3.30. *Dar una sección (salvo multiplicación por constantes) no nula de $\mathcal{Q}$ es lo mismo que dar un hiperplano de $\mathbb{P}^N$. Y dar una sección de $\mathcal{S}$ es lo mismo que dar un punto de $\mathbb{P}^N$. Además el lugar de ceros de un sección de $\mathcal{Q}$ es el conjunto de k-planos contenidos en el correspondiente hiperplano, y el lugar de ceros de una sección de $\mathcal{S}$ es el conjunto de k-planos que pasan por el punto dado.*

Ejemplo 0.3.31. Sea $Y \subset G(1,N)$ una superficie. Entonces

$$[Y] = a\Omega(0,3) + b\Omega(1,2) \in A^{2N-4}(G),$$

donde $a = [Y]\cdot\Omega(N-3,N)$ es el número de rectas de Y que cortan un $\mathbb{P}^{N-3}$ general y $b = [Y]\cdot\Omega(N-2,N-1)$ es el número de rectas contenidas en un hiperplano general de $\mathbb{P}^N$ y que cortan a un $\mathbb{P}^{N-2}$ del hiperplano.

El ciclo de Schubert $\Omega(N-3,N)=\sigma_2$ es el lugar de dependencia de $N-2$ secciones del fibrado vectorial $\mathcal{S}$ de rango $N-1$. Por tanto, la intersección de Y con $\Omega(N-3,N)$ es el lugar de dependencia de $N-2$ secciones de $\mathcal{S}_{|_Y}$

$$a = c_2(\mathcal{S}_{|_Y}). \tag{0.3.6}$$

Análogamente, el ciclo de Schubert $\Omega(N-2,N-1)$ es $c_2(\mathcal{Q})$ (que se corresponde con el lugar de ceros de una sección de $\mathcal{Q}$), luego

$$b = c_2(\mathcal{Q}_{|_Y}).$$

Por otra parte, de (0.3.3) o del Ejemplo 0.3.13 se tiene que $a+b=d=c_1(\mathcal{Q}_{|_Y})^2$, luego $a=c_2(\mathcal{S}_{|_Y})=c_1(\mathcal{Q}_{|_Y})^2-c_2(\mathcal{Q}_{|_Y})$.

Ejemplo 0.3.32. Sea $Y\subset G(1,N)$ una variedad de dimensión tres, análogamente al Ejemplo anterior, $[Y]=a\Omega(0,4)+b\Omega(1,3)\in A^{2N-5}(G)$, donde $a=[Y]\cdot\Omega(N-4,N)$ es el número de rectas de Y que cortan un $\mathbb{P}^{N-4}$ general y $b=[Y]\cdot\Omega(N-3,N-1)$ es el número de rectas contenidas en un hiperplano general de $\mathbb{P}^N$ y que cortan a un $\mathbb{P}^{N-3}$ del hiperplano.

El ciclo de Schubert $\Omega(N-4,N)=\sigma_3$ es el lugar de ceros de $N-3$ secciones del fibrado vectorial $\mathcal{S}$ de rango $N-1$. Por tanto,

$$a = c_3(\mathcal{S}_{|_Y}). \tag{0.3.7}$$

Análogamente, el ciclo de Schubert $\Omega(N-3,N-1)$ se puede ver como el producto del ciclo de Schubert $\Omega(N-2,N-1)=c_2(\mathcal{Q})$ (que se corresponde con el lugar de ceros de una sección de $\mathcal{Q}$), con el ciclo especial de Schubert $\sigma_1=\Omega(N-2,N)=c_1(\mathcal{Q})$, (que es el lugar de dependencia de dos secciones de $\mathcal{Q}$). Luego se tiene la relación

$$b = c_2(\mathcal{Q}_{|_Y})c_1(\mathcal{Q}_{|_Y})$$

Otra manera equivalente de calcular el coeficiente b es la siguiente. El ciclo de Schubert $\Omega(N-3, N-1)$ también se puede ver como el lugar de ceros de una sección del fibrado vectorial $\mathcal{Q} \oplus \mathcal{O}_{G(1,N)}(1)$ de rango tres, (es decir, la sección hiperplana del lugar de ceros de una sección de $\mathcal{Q}$). Así, $\Omega(N-3, N-1)$ es por la fórmula de Porteous

$$b = c_3(\mathcal{Q}_{|_Y} \oplus \mathcal{O}_{G(1,N)}(1)_{|_Y}) = c_2(\mathcal{Q}_{|_Y})c_1(\mathcal{Q}_{|_Y}).$$

Por otra parte, de (0.3.3) se tiene que $c_3(\mathcal{S}) = c_1(\mathcal{Q})^3 - 2c_2(\mathcal{Q})c_1(\mathcal{Q})$, por lo que

$$a = c_1(\mathcal{Q}_{|_Y})^3 - 2c_2(\mathcal{Q}_{|_Y})c_1(\mathcal{Q}_{|_Y}) = c_1(\mathcal{Q}_{|_Y})^3 - 2b$$

Observación 0.3.33. Tómese un hiperplano $H \cong \mathbb{P}^{N-1} \subset \mathbb{P}^N$. Se tiene una inclusión $G(k, H) \cong G(k, N-1) \subset G(k, N)$, que identifica la variedad de Schubert $\Omega(N-2, H)$ con $G(k, H)$. Se denota por $\mathcal{S}$, $\mathcal{Q}$ y $\bar{\mathcal{S}}$, $\bar{\mathcal{Q}}$ los fibrados universales de $G(k, N)$ y de $G(k, N-1)$ respectivamente. Del hecho que $\Omega_{\mathbb{P}^N}(1)|_{\mathbb{P}^{N-1}} = \Omega_{\mathbb{P}^{N-1}}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-1}}$, mientras $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)|_{\mathbb{P}^{N-1}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-1}}(1)$, y de (0.3.4) y de (0.3.5) se sigue que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{|_{G(k,N-1)}} &= \overline{\mathcal{S}} \oplus \mathcal{O}_{G(k,N-1)}, && (0.3.8) \\ \mathcal{Q}_{|_{G(k,N-1)}} &= \overline{\mathcal{Q}}. && (0.3.9) \end{aligned}$$

Dualmente, si $p \in \mathbb{P}^N$ y se identifica el ciclo de Schubert de los k-planos que pasan por p con $G(k-1, N-1)$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{|_{G(k-1,N-1)}} &= \overline{\mathcal{Q}} \oplus \mathcal{O}_{G(k-1,N-1)}, && (0.3.10) \\ \mathcal{S}_{|_{G(k-1,N-1)}} &= \overline{\mathcal{S}}. && (0.3.11) \end{aligned}$$

donde $\overline{\mathcal{Q}}$ y $\overline{\mathcal{S}}$ son ahora los fibrados universales de $G(k-1, N-1)$.

0.4. Morfismos a Grassmannianas.

0.4.1. Generalidades.

Se recuerdan aquí algunas propiedades sobre morfismos a Grassmannianas, que de hecho caracterizan la Grassmanniana como un objeto universal.

Proposición 0.4.1. *Sea X variedad algebraica. Se verifica que dar un morfismo $\varphi : X \longrightarrow G(k, N)$ es equivalente a dar un haz localmente libre $\mathcal{E}$ sobre X de rango $k+1$ y un epimorfismo $\phi : V \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{E}$, donde V es un espacio vectorial de dimensión $N+1$. Además ϕ es el pull-back por φ del epimorfismo universal $\pi : V \otimes \mathcal{O}_G \longrightarrow \mathcal{Q}$ que aparece en* (0.3.3)*.*

La idea geométrica es que por un punto $x \in X$, se tiene un epimorfismo $\phi_x : V \longrightarrow \mathcal{E}_x$ lo que define un punto $l_x = \varphi(x) \in G(k, N)$ tal que $\mathcal{L}_x = \mathcal{E}_x^*$. En particular, si φ es una inmersión, entonces $\mathcal{E}$ es justamente la restricción de $\mathcal{Q}$ a X.

Se destaca que, puesto que la inmersión de Plücker de $G(k, N)$ en $\mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V)$ está dada por el fibrado lineal $\bigwedge^{k+1} \mathcal{Q}$, si se toma el morfismo $\bigwedge^{k+1} \phi : \bigwedge^{k+1} V \longrightarrow \bigwedge^{k+1} \mathcal{E}$ se obtiene la inmersión de Plücker de la variedad X.

Observación 0.4.2. Cuando se tiene un morfismo $\varphi : X \longrightarrow G(k, N)$ dado por un fibrado vectorial el cual es la suma directa de $k+1$ fibrados lineales, es fácil dar una descripción de X en $G(k, N)$.

En efecto, dado un fibrado $\mathcal{E} = \mathcal{L}_0 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_k$ descomponible de rango $k+1$ y generado por sus secciones globales, se verifica que cada fibrado lineal $\mathcal{L}_i$ está también generado por sus secciones globales, luego define un morfismo $\varphi_i : X \longrightarrow \mathbb{P}^{n_i}$, donde $n_i = h^0(X, \mathcal{L}_i) - 1$. Llámese X_i a la imagen de X por φ_i. Se tienen por tanto dentro de $\mathbb{P}^N$ (donde $N = (\sum_i n_i) + r$), $k+1$ espacios lineales $\mathbb{P}^{n_i}$ en posición general y en cada uno de ellos variedades X_i y una correspondencia (no necesariamente aplicación) entre sus puntos. Cada vez que se toma un punto $x \in X$, su imagen en $G(k, N)$ es simplemente el k-plano expandido por la imagen de x por los morfismos φ_i, es decir $\varphi(x) = \langle \varphi_0(x), \ldots, \varphi_k(x) \rangle$.

Obsérvese que el morfismo φ puede ser una inmersión a pesar de que alguno de los morfismos φ_i no sea inyectivo. Por ejemplo, si se toma el fibrado vectorial de rango dos $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{L}$, donde $\mathcal{L}$ es un fibrado muy amplio, se obtiene una inmersión de X en la Grassmanniana $G(1, N)$, donde $N = h^0(X, \mathcal{L})$. De hecho, el sumando $\mathcal{O}_X$ manda X a un punto $p \in \mathbb{P}^N$, mientras que $\mathcal{L}$ da una inmersión de X en $\mathbb{P}^{N-1}$, y así las rectas de la imagen de X son una familia de rectas de un cono sobre la imagen de X en $\mathbb{P}^{N-1}$, con vértice p.

Más en general, si se toma el fibrado vectorial $\mathcal{E} = {\mathcal{O}_X}^{\oplus i+1} \oplus \mathcal{L}_1 \cdots \oplus \mathcal{L}_{j+1}$, donde $i+j+2 = k+1$, se obtiene el conjunto de k-planos de un cono con vértice $\mathbb{P}({\mathcal{O}_X}^{\oplus i+1}) \cong \mathbb{P}^i$ de dimensión i.

Ejemplo 0.4.3. Por ejemplo, sea $Y = \mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_2}$ general. La inmersión definida por el fibrado $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_2}}(1, 0) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_2}}(0, 1)$ sumerge la variedad Y en una Grassmanniana $G(1, N)$, donde $N = n_1 + n_2 + 1$. La manera de ver esto, siguiendo la notación de la ecuación (0.4.2) de la Observación 0.4.2 es considerar que el primer sumando del fibrado es la proyección de Y sobre $\mathbb{P}^{n_1}$ identificado con una subvariedad lineal de $\mathbb{P}^N$ y el segundo sumando es la proyección de Y sobre un $\mathbb{P}^{n_2}$ de $\mathbb{P}^N$ disjunto con el $\mathbb{P}^{n_1}$ anterior. Así, las rectas de Y son las definidas por un punto de $\mathbb{P}^{n_1}$ y un punto de $\mathbb{P}^{n_2}$.

Se dan a continuación las ideas básicas sobre las proyecciones en Grassmannianas.

Definición 0.4.4. Considérese la proyección lineal $\pi_H : \mathbb{P}^N \longrightarrow \mathbb{P}^{N-r-1}$ de centro $H \cong \mathbb{P}^r \subset \mathbb{P}^N$. Si se toma un k-plano $l \in G(k, N)$ que no corte el centro de proyección H, entonces su imagen por π_H es de nuevo un k-plano $l' \in G(k, N - r - 1)$. Se tiene entonces un morfismo racional de $G(k, N)$ en $G(k, N-r-1)$ que no está definido sobre la variedad de Schubert de los k-planos que cortan a H. Se utilizará la misma notación π_H para esta proyección en las Grassmannianas.

Existe relación entre las proyecciones desde $G(1,N)$ a una Grassmanniana de rectas de dimensión menor y las proyecciones en el espacio proyectivo después de la inmersión de Plücker. Se verifica lo siguiente:

Proposición 0.4.5. *La proyección* $\pi_H : G(1,N) \to G(1,N-r-1)$ *con centro* $H \cong \mathbb{P}^r$ *es la restricción a* $G(1,N)$ *de la proyección*

$$\pi_{K_H} : \mathbb{P}^{\frac{N^2+N-2}{2}} \dashrightarrow \mathbb{P}^{\frac{(N-r)(N-r-1)}{2}-1}$$

con centro $K_H = \langle \Omega(H, \mathbb{P}^N) \rangle \cong \mathbb{P}^{\frac{(2N-r)(r+1)}{2}-1}$.

Demostración. Tómense coordenadas homogéneas $(x_0 : x_1 : \ldots : x_N)$ en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^N$, para que $H = \{x_{r+1} = x_{r+2} = \ldots = x_N = 0\} \cong \mathbb{P}^r \subset \mathbb{P}^N$, es decir

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

y considérese la proyección $p_h : \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^{N-r-1} = \{x_0 = x_1 = \ldots = x_r = 0\}$. Tómese las dos inmersiones de Plücker de $G(1,N)$ en $\mathbb{P}^{\frac{N^2+N-2}{2}}$ y de $G(1,N-r-1)$ en $\mathbb{P}^{\frac{(N-r)(N-r-1)}{2}-1}$. Denotamos con $l \in G(1,N)$ al punto correspondiente a

$$L = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_N \\ b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_N \end{pmatrix},$$

de una recta general de $\mathbb{P}^N$ que no interseca el centro de proyección H. Las coordenadas de l dentro de $\mathbb{P}^{\frac{N^2+N-2}{2}}$ son los menores de tamaño 2×2 de la matriz anterior. Entonces $l = (\ldots : p_{i,j} : \ldots)$, es decir

$$l = \begin{pmatrix} 0 & p_{0,1} & \cdots & p_{0,N} \\ -p_{0,1} & 0 & \cdots & p_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_{0,N} & -p_{1,N} & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

donde ponemos $p_{i,j} = a_i b_j - a_j b_i$. La imagen de l por π_H es la intersección de $\mathbb{P}^{N-r-1}$ con el $\mathbb{P}^{r+2}$ que expanden H y L. Tenemos que

$$\langle H, L\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_0 & \cdots & a_k & a_{k+1} & \cdots & a_N \\ b_0 & \cdots & b_k & b_{k+1} & \cdots & b_N \end{pmatrix} \right\}$$

y entonces, cuando lo intersecamos con $\mathbb{P}^{N-r-1} = \{x_0 = x_1 = \ldots = x_r = 0\}$ obtenemos la recta

$$\pi_h(l) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{r+1} & \cdots & a_N \\ 0 & \cdots & 0 & b_{r+1} & \cdots & b_N \end{pmatrix},$$

correspondiente a la matriz antisimétrica

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & p_{r+1,r+2} & \cdots & p_{r+1,N-1} & p_{r+1,N} \\ 0 & \cdots & 0 & -p_{r+1,r+2} & 0 & \cdots & p_{r+2,N-1} & p_{r+2,N} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -p_{r+1,N-1} & -p_{r+2,N-1} & \cdots & 0 & p_{N-1,N} \\ 0 & \cdots & 0 & -p_{r+1,N} & -p_{r+2,N} & \cdots & -p_{N-1,N} & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, cuando proyectamos desde H, simplemente estamos olvidándonos de las primeras $\frac{(2N-r)(r+1)}{2}$ coordenadas. Además, se puede ver fácilmente que K_H, el espacio que genera $\Omega(H, \mathbb{P}^N)$ en $\mathbb{P}^{\frac{N^2+N-2}{2}}$ está dado por

$$K_H \cong \mathbb{P}^{\frac{(2N-r)(r+1)}{2}-1} = \{p_{i,j} = 0,\ r \leq i \leq N-1,\ i+1 \leq j \leq N\},$$

y entonces cuando nos olvidamos de las primeras $\frac{(2N-r)(r+1)}{2}$ coordenadas, simplemente estamos proyectando desde $K_H \cong \mathbb{P}^{\frac{(2N-r)(r+1)}{2}-1}$.

$\square$

Interesará estudiar cómo se comportan las subvariedades de $G(k,N)$ respecto a estas proyecciones. Lo mismo que para el espacio proyectivo ($k=0$), se verifica lo siguiente:

Proposición 0.4.6. *Dado $X \subset G(k,N)$ considérese el morfismo*

$$\phi : V \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{Q}_{|X}$$

restricción del universal en $G(k,N)$. Sea el morfismo asociado sobre las secciones globales

$$\overline{\phi} : V \cong H^0(G(k,N),\mathcal{Q}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{Q}_{|X}).$$

Entonces se verifica:

i.- el morfismo $\overline{\phi}$ es inyectivo si y sólo si X no está contenida en $G(k,N-1)$;

ii.- el morfismo $\overline{\phi}$ es sobreyectivo si y sólo si X no es proyección isomorfa de ninguna subvariedad no degenerada de $G(k,N+1)$.

Generalizando también las nociones proyectivas, definimos lo siguiente:

Definición 0.4.7. Diremos que X es *no degenerada* si no está contenida en ningún $G(k,N-1)$; es decir, si $\overline{X} = \bigcup_{l \in X} L \subset \mathbb{P}^N$ no está contenida en ningún hiperplano.

Definición 0.4.8. Diremos que X es *linealmente normal* si no es la proyección de ninguna subvariedad no degenerada de $G(k,N+1)$.

Un criterio para saber si una subvariedad $X \subset G(k,N)$ es linealmente normal es el siguiente.

Proposición 0.4.9. *Una subvariedad X de un Grassmanniana $G(k,N)$ no es proyección isomorfa de ninguna subvariedad no degenerada de $G(k,N+1)$ si y sólo si $h^1(\mathcal{I}_X \otimes \mathcal{Q}) = 0$. Además es no degenerada si y sólo si $h^0(\mathcal{I}_X \otimes \mathcal{Q}) = 0$. En este último caso se tiene que $h^0(\mathcal{Q}_{|X}) = h^0(\mathcal{Q}) + h^1(\mathcal{I}_X \otimes \mathcal{Q})$.*

Demostración. De la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{G(k,N)} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0,$$

tensorizando por $\mathcal{Q}$ y tomando cohomología se obtiene

$$0 \longrightarrow H^0(G, \mathcal{I}_X \otimes \mathcal{Q}) \longrightarrow H^0(G, \mathcal{Q}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{Q}_{|X}) \longrightarrow H^1(G, \mathcal{I}_X \otimes \mathcal{Q}) \longrightarrow 0$$

de donde se deduce que X no es proyección isomorfa de ninguna subvariedad no degenerada de $G(k, N+1)$ si y sólo si $h^1(\mathcal{I}_X \otimes \mathcal{Q}) = 0$. Análogamente para el caso de no degeneración. □

Se centra la atención ahora en proyecciones de Grassmannianas de rectas, que es el caso que se estudiará en la memoria y se resume brevemente la herramienta fundamental para el estudio de proyecciones de subvariedades proyectivas, (ver [Uga01], [Uga02].

Sea $X \subset G(1, N)$ una subvariedad no degenerada de dimensión n, y $p \in \mathbb{P}^N$ un punto de manera que $X \cap \Omega(p, \mathbb{P}^N) = \emptyset$. Se puede ver fácilmente que $l_1, l_2 \in X$, tienen la misma imagen por π_p si y sólo si ambos pertenecen a un plano que además contiene a p.

Más en general, sea la variedad de incidencia $I_0 = \{(l, \pi) \in X \times G(2, N) \mid L \subset \Pi\}$ y el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & I_0 \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X & & G(2,N). \end{tikzcd} \tag{0.4.1}$$

Definición 0.4.10. Se dice que Π es un *plano malo* de X, si $p_2^{-1}(\pi)$ tiene longitud al menos 2. Es decir, sea la subvariedad de $G(2, N)$ que parametriza todos los planos $\Pi \subset \mathbb{P}^N$ tales que el plano $\Omega(1, \Pi) \subset G(1, N)$-definido por todas las rectas en el plano $\Pi \subset \mathbb{P}^N$- corta a X en un esquema de longitud mayor o igual a dos. Se llama *familia de planos malos* a la subvariedad $\Sigma(X) = \{\pi \in G(2, N) \mid \mathrm{long}(p_2^{-1}(\pi)) \geq 2\} \subset G(2, N)$.

El resultado central es el siguiente:

Proposición 0.4.11. *Sea $X \subset G(1,N)$ una subvariedad, no degenerada de dimensión n, tal que $X \cap \Omega(p,\mathbb{P}^N) = \emptyset$. Entonces la proyección π_p restringida a X es un isomorfismo si y sólo si $p \notin \Pi$ para todo $\Pi \in \Sigma(X)$. Por tanto, X es proyectable isomórficamente de $G(1,N)$ a $G(1,N-1)$ desde algún punto si y sólo si*

$$\overline{\Sigma X} = \{q \in \mathbb{P}^N \text{ tales que } q \in \Pi \text{ para algún plano } \quad \Pi \in \Sigma(X)\} \ \subset \mathbb{P}^N$$

tiene a lo más dimensión igual a $N-1$.

Nota 0.4.12. La hipótesis de que $X \cap \Omega(p,\mathbb{P}^N) = \emptyset$ es necesaria para garantizar que el morfismo π_p esté definido. De hecho, un primera diferencia con el caso del espacio proyectivo es que cuando se proyecta $X \subset \mathbb{P}^N$, los puntos para los que la proyección no está definida son simplemente los puntos de X ya que está trivialmente contenida en su variedad secante SX. Por el contrario, cuando se tiene una subvariedad X de un Grassmanniana de rectas en $\mathbb{P}^N$, la proyección π_p no está definida en los puntos $p \in \overline{X}$, la unión de la rectas de X dentro de $\mathbb{P}^N$. Pero en general $\overline{X}$ no está contenida en $\overline{\Sigma X}$. Así que se tiene que imponer una hipótesis extra $X \cap \Omega(p,\mathbb{P}^N) = \emptyset$ en la Proposición 0.4.11.

Observación 0.4.13. Si la subvariedad X es proyectable isomórficamente de $G(1,N)$ a $G(1,n)$ desde una subvariedad lineal Λ de dimensión $N-n-1 \geq 0$ de $\mathbb{P}^N$, como antes se tiene que

$$\overline{\Sigma X} = \{q \in \mathbb{P}^N \text{ tales que } q \in \Pi \text{ para algún plano } \quad \Pi \in \Sigma(X)\} \ \subset \mathbb{P}^N$$

tiene a lo más dimensión igual a n. Pero ahora la condición necesaria y suficiente requiere más restricciones, que no se utilizarán en esta memoria. Para más detalle ver por ejemplo [Uga01] y [Uga02].

Por tanto, una condición necesaria para que una subvariedad de $G(1,N)$ sea proyectable es que la unión de sus planos malos sea una variedad "pequeña". En este sentido el siguiente resultado será muy útil.

Teorema (Rogora-Segre) 0.4.14. *Sea $Y \subset \mathbb{P}^N$ una variedad de dimensión n que o bien contiene al menos una familia de rectas de dimensión $(2n-3)$, o bien cuando $n \geq 4$, una familia de dimensión $(n-1)$ de $(n-2)$-planos. Entonces se verifica una de las siguientes afirmaciones:*

i.- Y es un subespacio lineal de dimensión n;

ii.- Y contiene una familia de dimensión uno de $(n-1)$-planos y un punto general $y \in Y$ está contenido en un único $\mathbb{P}^{n-1}$ de la familia;

iii.- Y es una hipercuádrica de $\mathbb{P}^{n+1}$.

Este es un caso particular de un resultado general de B. Segre (ver [Seg48]). El caso de las rectas ha sido vuelto a probar recientemente por Rogora ([Rog94]), mientras que el caso de los $(n-2)$-planos puede ser deducido del resultado de Rogora observando que el hecho de que contenga muchos $(n-2)$-planos implica que la variedad posee muchas rectas (ver por ejemplo [Arr98b]).

Más concretamente, el caso más utilizado en la memoria es $n = 4$, que podemos demostrar directamente. Primero se verá un lema demostrado en [AS92].

Lema 0.4.15. *Una variedad proyectiva X irreducible de dimensión tres que contiene una familia $\mathcal{F}$ de dimensión dos de planos es un $\mathbb{P}^3$.*

Demostración. Para ver que X es lineal hay que ver que dos puntos cualesquiera de X están unidos por una recta contenida en X. Sean por tanto, x e y dos puntos de X. La subfamilia de planos que pasan por x tiene al menos dimensión uno.

En efecto, sea el diagrama,

$$\begin{tikzcd} & I \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ X & & \mathcal{F} \end{tikzcd}$$

donde $I = \{(p, \Pi) : p \in \Pi\}$ es la variedad de incidencia de $X \times \mathcal{F}$. La fibra de q tiene dimensión dos en cada plano de la familia $\mathcal{F}$, formada por los puntos del plano. Como $\mathcal{F}$ tiene dimensión dos, I tiene dimensión cuatro, y como X tiene dimensión tres, la fibra general de p ha de tener al menos dimensión uno.

Por tanto la subfamilia de $\mathcal{F}$ de los planos que pasan por x recubre necesariamente a X. Así, debe existir uno de estos planos que también contenga a y. En particular, X contiene la recta que une x e y, de modo que X es lineal, luego es un $\mathbb{P}^3$. $\square$

Lema 0.4.16. *Una variedad proyectiva de dimensión cuatro X que contiene una familia $\mathcal{F}$ de dimensión cuatro de planos o bien es un $\mathbb{P}^4$ o bien contiene una familia de dimensión uno de 3-planos. En este último caso, los planos son los de los 3-planos de la familia.*

Demostración. Como antes, sean x e y dos puntos de X. Con un diagrama de incidencia como el anterior, se demuestra que por x pasa una subfamilia de $\mathcal{F}$ que tiene al menos dimensión dos. Existen ahora dos posibilidades:

i.- La unión de los planos por x tiene dimensión cuatro, luego cubre todo X. En consecuencia existe al menos un plano de $\mathcal{F}$ que pasa también por y y ello significa que X contiene la recta que une x e y. Es decir X es un espacio lineal de dimensión 4.

ii.- Si la unión de los planos por x tiene dimensión tres, por el Lema 0.4.15 es un $\mathbb{P}^3$ y entonces X contiene una familia infinita de 3-planos. Además, razonando como en Lema 0.4.15, esta familia tiene dimensión uno.

$\square$

0.4.2. Ejemplos.

Ejemplo 0.4.17. Se verá ahora un ejemplo de una variedad Y de dimensión n que se puede proyectar de $G(1, 2n + 1)$ a $G(1, n + 1)$ (ver [Arr99]).

Sea $Y \cong \mathbb{P}^n$ sumergida en $G(1, 2n+1)$ por el fibrado vectorial $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$. Geométricamente equivale (ver Observación 0.4.2) a tener dos espacios lineales disjuntos H_1 y H_2 de dimensión n de $\mathbb{P}^{2n+1}$ y un isomorfismo entre ellos. Entonces la variedad Y es la familia de rectas que unen un punto de H_1 con su correspondiente en H_2 por el isomorfismo.

En otras palabras, se puede tomar la inmersión de Segre $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^{2n+1}$ y si se llama X a la imagen de este morfismo. Existe una familia de dimensión uno de espacios proyectivos $\mathbb{P}^n$ dentro de X y una familia de dimensión n de rectas transversales a éstos. Esta familia de rectas es la variedad $Y \subset G(1, 2n + 1)$.

Fijando coordenadas sobre $\mathbb{P}^{2n+1}$ de manera que se puedan escribir las ecuaciones de $H_1 = \{x_1 = x_3 = \ldots = x_{2n+1} = 0\}$ y de $H_2 = \{x_0 = x_2 \ldots = x_{2n} = 0\}$. Entonces la inmersión de $\mathbb{P}^n$ en $G(1, 2n + 1)$ que puede ser dada de la siguiente manera

$$(t_0, \ldots, t_n) \mapsto \begin{pmatrix} t_0 & 0 & t_1 & 0 & \ldots & t_n & 0 \\ 0 & t_0 & 0 & t_1 & \ldots & 0 & t_n \end{pmatrix},$$

donde $(t_0 : \ldots : t_n)$ son las coordenadas homogéneas de $\mathbb{P}^n$. Tómese la proyección desde $\mathbb{P}^{2n+1}$ a $\mathbb{P}^{n+1}$ definida por

$$(x_0 : \ldots x_{2n+1}) \mapsto (x_0 : x_1 + x_2 : \ldots : x_{2n-1} + x_{2n} : x_{2n+1}).$$

Esta proyección induce una proyección de $G(1, 2n + 1)$ sobre $G(1, n + 1)$ que permite describir el nuevo morfismo de $\mathbb{P}^n$ en $G(1, n + 1)$ como

$$(t_0, \ldots, t_n) \mapsto \begin{pmatrix} t_0 & t_1 \ldots & t_n & 0 \\ 0 & t_0 \ldots & t_{n-1} & t_n \end{pmatrix}.$$

Ya que los menores de esta matriz forma una base del espacio de los polinomios homogéneos de grado dos, cuando se compone el morfismo $\mathbb{P}^n \longrightarrow G(1, n + 1)$ con la inmersión de Plücker de $G(1, n+1)$ en $\mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-1}$, se obtiene la inmersión doble de Veronese de $\mathbb{P}^n$. En particular el primer morfismo debe ser una inmersión y así la proyección restringida a Y es un isomorfismo.

Definición 0.4.18. Siguiendo la notación de [Arr99], se llamará a la variedad Y definida más arriba *variedad de Veronese de dimensión* n en la Grassmanniana.

Ejemplo 0.4.19. En particular, para $n = 1$ se tiene que si se toma una de las familias de rectas de una cuádrica de $\mathbb{P}^3$, la variedad es una curva de $G(1, 3)$ que puede ser proyectada a $G(1, 2)$. La imagen es una cónica en $G(1, 2) = \mathbb{P}^{2^*}$, así que se puede ver como la familia de las rectas tangentes a una cónica lisa de $\mathbb{P}^2$.

Ejemplo 0.4.20. Sea la superficie de Veronese $Y \subset G(1, 3)$, $\mathcal{Q}_{|_Y}$ es el fibrado vectorial de rango dos $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ y por tanto $b = c_2(\mathcal{Q}_{|_Y}) = 1$. Del Ejemplo 0.3.31 $a = c_2(\mathcal{S}_{|_{\mathbb{P}^2}}) = c_1(\mathcal{Q}_{|_{\mathbb{P}^2}})^2 - c_2(\mathcal{Q}_{|_{\mathbb{P}^2}}) = 3$. De modo que la superficie de Veronese tiene bigrado $(3, 1)$.

Ejemplo 0.4.21. Sea ahora la variedad de Veronese de dimensión tres en $Y \subset G(1, 4)$. El fibrado cociente universal $\mathcal{Q}$ restringido a Y es $\mathcal{Q}_{|_Y} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$. Del Ejemplo 0.3.32, se sigue que $b = c_2(\mathcal{Q}_{|_Y})c_1(\mathcal{Q}_{|_Y}) = 2$ y $a = c_3(\mathcal{S}_{|_Y}) = c_1(\mathcal{Q}_{|_Y})^3 - 2c_1(\mathcal{Q}_{|_Y}) \cdot c_2(\mathcal{Q}_{|_Y}) = 8 - 4 = 4$. Así Y tiene bigrado $(4, 2)$.

El interés de las variedades del Ejemplo 0.4.17 viene del siguiente resultado 0.4.23, sobre la caracterización de la variedad de Veronese demostrado en [Arr99]. Primero son necesarias las siguientes definiciones:

Sea X una subvariedad de dimensión n de la Grassmanniana $G(k, N)$, se dan las siguientes definiciones:

Definición 0.4.22. X es *no compresible* si $\dim \overline{X} = n + k$, es decir si X tiene la dimensión esperada. (Ver ([Arr99]). Esto significa que la proyección de la variedad de incidencia

$$\mathcal{I}_X \equiv \{(l,p) \in X \times \mathbb{P}^N \mid p \in \mathcal{L}\}$$

sobre $\mathbb{P}^N$ es genéricamente finita sobre su imagen.

Teorema (Arrondo) 0.4.23. *Sea X una subvariedad irreducible incompresible de dimensión n de $G(1, n+1)$ que es proyección isomórficamente de una variedad tri-dimensional no degenerada X' en $G(1,N)$ y supóngase que $N \geq 2n+1$. Entonces $N = 2n+1$ y X es la variedad de Veronese del ejemplo 0.4.21 anterior.*

Nota. En el capítulo 3 de la memoria se enuncia de nuevo este teorema pero allí para el caso en que se utiliza en las demostración.

Ejemplo 0.4.24. Un ejemplo análogo al anterior es el siguiente. Sea Y la explosión de $\mathbb{P}^3$ en un punto p de $\mathbb{P}^3$ y se considera $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_Y(H-E) \oplus \mathcal{O}_Y(H)$, donde E es el divisor excepcional de la explosión y H es la sección hiperplana de $\mathbb{P}^3$.

Como $\mathcal{E}$ está generado por sus secciones globales y

$$h^0(\mathcal{E}) = h^0(\mathcal{O}(H-E)) + h^0(\mathcal{O}(E)) = 3 + 4 = 7,$$

se tiene un morfismo $Y \xrightarrow{\varphi} G(1,6)$. De hecho, el morfismo definido por el fibrado escindido anterior es una inmersión. Tomando coordenadas $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ en $\mathbb{P}^3$ tales que $p = (1:0:0:0)$, el morfismo φ se puede describir (abusando de la notación) como

$$\begin{array}{ccccc} Y & \longrightarrow & G(1,6) & \hookrightarrow & \mathbb{P}^{20} \\ (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} & & \end{array}$$

donde la última inclusión es la inmersión de Plücker. Los menores de la matriz de Plücker dada generan el sistema lineal completo de cuádricas de $\mathbb{P}^3$ que pasan por p, por lo que φ es una inmersión.

Se toman ahora coordenadas $(z_0 : \dots z_6)$ de $\mathbb{P}^6$ correspondientes a las columnas de la matriz de Plücker anterior. Así, Y está contenida en el conjunto de rectas que cortan a la subvariedad lineal de dimensión tres de $\mathbb{P}^6$

$$A = \{z_0 = z_1 = z_2 = 0\},$$

definida por el proyectivizado de las secciones globales de $\mathcal{O}(H)$, y al plano

$$B = \{z_3 = z_4 = z_5 = z_6 = 0\},$$

el proyectivizado de la secciones globales de $\mathcal{O}(H - E)$. La aplicación

$$\varphi_1 : Y \longrightarrow A,$$

definida por H no es sino la contracción del divisor excepcional E de Y a un punto $p' \in A$ (en otras palabras, se puede identificar A con el $\mathbb{P}^3$ de partida). Y la aplicación

$$\varphi_2 : Y \longrightarrow B,$$

definida por $H - E$ se puede ver, identificando B con el conjunto de rectas de $\mathbb{P}^3$ que pasan por p, como la aplicación que asocia a cada punto de $\mathbb{P}^3$ (distinto de p) la recta generada por él y por p.

En otras palabras, se tiene un isomorfismo entre el conjunto de rectas de A que pasan por p' y el plano B, y la variedad Y consiste en el conjunto de rectas que unen un punto q de A con el punto de B correspondiente a la recta $p'q$.

El bigrado de Y es $(3, 2)$ que se obtiene de la Observación 0.3.32:

$$\begin{aligned} b &= c_2(\mathcal{Q}_{|_Y})c_1(\mathcal{Q}_{|_Y}) = ((H-E)H)(H-E+H) = 2 \\ a &= c_3(\mathcal{S}_{|_Y}) = c_1(\mathcal{Q}_{|_Y})^3 - 2c_1(\mathcal{Q}_{|_Y}) \cdot c_2(\mathcal{Q}_{|_Y}) = (2H-E)^3 - 2(2) = \\ &= 8H^3 - E^3 - 4 = 7 - 4 = 3 \end{aligned}$$

Si, como en el Ejemplo 0.4.17, se considera ahora la proyección $\mathbb{P}^6 \dashrightarrow \mathbb{P}^4$ definida por $(z_0 : \ldots : z_6) \mapsto (z_3 : z_4 : z_5 + z_0 : z_0 + z_1 : z_2)$ se tiene que la imagen de Y en $G(1,4)$ por esta proyección viene dada por

$$(z_0 : \ldots : z_6) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los menores de la matriz de Plücker aún generan el sistema lineal completo de cuádricas que pasan por p. Por tanto, esta congruencia es un ejemplo de variedad que se proyecta isomórficamente de $G(1,6)$ en $G(1,4)$. Cabe destacar que la existencia de esta congruencia lisa en $G(1,4)$ había quedado como problema abierto en [ABT98].

Ejemplo 0.4.25. Tómese de nuevo la congruencia $Y' \subset G(1,3)$ de bigrado $(2,1)$ del Ejemplo 0.3.25, es decir la familia de rectas tangentes a un cono cuadrático $Q \subset \mathbb{P}^3$ y que cortan una recta fija M (tangente también al cono Q). Como ya se sabe de [AS92], esta congruencia viene proyectada desde $G(1,4)$, pero damos aquí una descripción directa.

En efecto, fíjese un plano Π de manera que el vértice q del cono no pertenece al plano Π. Entonces los planos tangentes a Q se pueden ver como los planos generados por q y por las rectas tangentes a la cónica $C := \Pi \cap Q$. En el Ejemplo 0.4.19 se ha visto que esta familia de dimensión uno de rectas es la imagen de una de las familias $\mathcal{F}_1$ de rectas de una cuádrica Q' en un $\mathbb{P}^3$. Así, la familia de planos tangentes a Q es la imagen de los planos de $\mathbb{P}^4$ generados por el punto q y las rectas de $\mathcal{F}_1$. Es decir, es una de las dos familias de dimensión uno de planos contenidos en el cono cuadrático, con vértice q y base Q'. En particular esto muestra que la superficie Y' es la proyección de una superficie de $G(1,4)$, en concreto la superficie consistente en las rectas contenidas en dicha familia de planos y que cortan a una recta fija contenida en uno de ellos y que no pasa por q.

Veamos aún de otra forma que Y' proviene de $G(1,4)$. Considérese en $\mathbb{P}^3$ el cono cuadrático Q (de partida) de vértice q y la recta M tangente a Q en un punto, p_0.

Sea Π_0 el plano tangente de Q que contienen a M (entonces $\Pi_0 = \langle q, M\rangle$). Se fija Π, un plano tangente a Q, diferente de Π_0, y se considera $\Omega(q,\Pi)$, el haz de rectas en Π que pasan por el vértice q. Cada vez que se toma un punto $p \in M$ con $p \neq p_0$, existe exactamente un plano tangente a Q diferente de Π_0 y que contiene a p. Llámese Π_p a este plano. Las rectas de Y que pasan por p son exactamente el haz de rectas $\Omega(p,\Pi_p)$, de dimensión uno. Ya que Π y Π_p se cortan en una recta L_p del haz $\Omega(q,\Pi)$, si se asocia al punto p la recta L_p, se ha encontrado un isomorfismo $\sigma : M \longrightarrow \Omega(q,\Pi)$. Además, por construcción, el plano Π_p está generado por p y por $\sigma(p)$. Se recupera así la construcción de [AS92] para la congruencia de bigrado $(2,1)$. A cada punto $p \in M$ se le asocia sencillamente el haz de rectas que pasa por p y que está contenido en el plano $\langle p, \sigma(p)\rangle$, y la congruencia Y' es la unión de estos haces.

Así que de igual modo que en el Ejemplo 0.4.24, esta construcción implica que Y' es isomorfo a $\mathbb{P}^2$ explotado en un punto, sumergido por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(M-E) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(M)$. Como $h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(M-E) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(M)) = 5$, Y' viene proyectada de $G(1,4)$.

Falta sólo observar que de hecho el haz de rectas $\Omega(p,\Pi)$ de la construcción no está unívocamente determinado, porque se puede escoger cualquier plano tangente al cono cuadrático, y por tanto existe una familia de dimensión uno de tales haces de rectas. Esto se corresponde con el hecho que no existe un único epimorfismo

$$\mathcal{O}_{Y'}(M) \oplus \mathcal{O}_{Y'}(M-E) \longrightarrow \mathcal{O}_{Y'}(M)$$

(salvo multiplicación por una constante), porque dar uno de esos epimorfismos es equivalente a dar una sección del fibrado $\mathcal{O}_{Y'} \oplus \mathcal{O}_{Y'}(E)$, y $h^0(Y', \mathcal{O}_{Y'} \oplus \mathcal{O}_{Y'}(E)) = 2$.

Nota 0.4.26. En particular, las subvariedades X de $G(1,N)$ para las cuales el fibrado universal $\mathcal{Q}$ restringido a X descompone en suma directa de dos fibrados lineales $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, son las subvariedades de $G(1,N)$, para las cuales cada punto en ellas, es una recta definida por un punto en una subvariedad de $\mathbb{P}(H^0(\mathcal{L}_1))$ y su correspondiente en otra subvariedad de $\mathbb{P}(H^0(\mathcal{L}_2))$. Es decir, se puede definir la aplicación

$$\begin{array}{rcc} X & \hookrightarrow & \mathbb{P}(H^0(\mathcal{L}_1)) \times \mathbb{P}(H^0(\mathcal{L}_2)) \\ l & \mapsto & (\phi_1(l), \quad \phi_1(l)) \end{array} \tag{0.4.2}$$

de modo que los puntos de X son rectas que unen puntos de dos subespacios lineales que no se cortan de $\mathbb{P}^N$, donde $N+1 = h^0(\mathcal{Q}_{|X})$.

Terminamos esta sección de ejemplos con dos generales que nos serán muy útiles. Si Y es una congruencia de $G(1,4)$ cuyo fibrado universal escinde $\mathcal{Q}_{|Y} \cong \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ en suma de dos fibrados lineales y tiene $N+1$ secciones globales, escribimos $h^0(\mathcal{L}_1) = n_1 + 1$ y $h^0(\mathcal{L}_2) = n_2 + 1$ como se hizo en la Observación 0.4.26 anterior.

Ejemplo 0.4.27. Como caso particular del Ejemplo 0.3.31, supóngase que $Y \subset G(1,5)$ tiene dimensión tres y existen dos planos disjuntos tales que las rectas de Y cortan a ambos. Entonces $Y \subset \mathbb{P}_1^2 \times \mathbb{P}_2^2$. En este ejemplo se calcula la relación entre el bigrado de Y y los coeficientes de la clase de la congruencia dentro del anillo de Chow $A(\mathbb{P}_1^2 \times \mathbb{P}_2^2)$.

Como Y tiene dimensión 3, es un divisor en $Z = {\mathbb{P}_1}^2 \times {\mathbb{P}_2}^2$, por lo que se puede escribir su clase en $A^*(Z)$ como

$$[Y]_Z = \alpha h_1 + \beta h_2, \tag{0.4.3}$$

donde h_i es la sección hiperplana de $\mathbb{P}_i^2$.

Por otro lado, el morfismo $\varphi : {\mathbb{P}_1}^2 \times {\mathbb{P}_2}^2 \longrightarrow G(1,5)$ está definido por el fibrado vectorial de rango dos $\mathcal{Q}_Z \cong \mathcal{O}_{{\mathbb{P}_1}^2 \times {\mathbb{P}_2}^2}(1,0) \oplus \mathcal{O}_{{\mathbb{P}_1}^2 \times {\mathbb{P}_2}^2}(0,1)$. Y por la Observación 0.3.32, el bigrado se calcula en función de las clases de Chern de $\mathcal{Q}_{|Y}$ (en particular es invariante por proyección). En concreto:

$$\begin{array}{rcl} a & = & c_1(\mathcal{Q}_{|Y})^3 - 2c_1(\mathcal{Q}_{|Y})c_2(\mathcal{Q}_{|Y}) = [Y]c_1(\mathcal{Q}_{|Z})^3 - 2c_1(\mathcal{Q}_{|Z})c_2(\mathcal{Q}_{|Z}) = \alpha + \beta \\ b & = & c_1(\mathcal{Q}_{|Y})c_2(\mathcal{Q}_{|Y}) = [Y]c_1(\mathcal{Q}_{|Z})c_2(\mathcal{Q}_{|Z}) = \alpha + \beta \end{array}$$

Ejemplo 0.4.28. Supóngase ahora que $Y \subset G(1,6)$ de dimensión tres y existe un plano y un $\mathbb{P}^3$ disjuntos de manera que las rectas de Y cortan a ambos subespacios lineales. Análogamente al ejemplo precedente, se calcula aquí la relación entre el bigrado de Y

y los coeficientes de su clase dentro del anillo de Chow $A(\mathbb{P}_1^2 \times \mathbb{P}_2^3)$. En este caso Y es un subvariedad de $Z = {\mathbb{P}_1}^2 \times {\mathbb{P}_1}^3$ pero ahora con codimensión dos. De modo que su clase en el anillo de Chow de Z se escribe como

$$[Y]_{|Z} = \alpha {h_1}^2 + \beta h_1 h_2 + \gamma {h_2}^2, \tag{0.4.4}$$

donde h_1 es una sección hiperplana de ${\mathbb{P}_1}^2$ y h_2 la sección hiperplana de ${\mathbb{P}_2}^3$.

Como en el ejemplo anterior, el bigrado de Y se obtiene de la Observación 0.3.32, y se tiene que

$$\begin{aligned} a &= c_1(\mathcal{Q}_{|Y})^3 - 2c_1(\mathcal{Q}_{|Y})c_2(\mathcal{Q}_{|Y}) = [Y]c_1(\mathcal{Q}_{|Z})^3 - 2c_1(\mathcal{Q}_{|Z})c_2(\mathcal{Q}_{|Z}) = \alpha + \beta + \gamma \\ b &= c_1(\mathcal{Q}_{|Y})c_2(\mathcal{Q}_{|Y}) = [Y]c_1(\mathcal{Q}_{|Z})c_2(\mathcal{Q}_{|Z}) = \beta + \gamma \end{aligned}$$

Damos para terminar esta sección un ejemplo de como el Complejo de Eagon-Northcott (Teorema 0.2.6) permite calcular resoluciones.

Ejemplo 0.4.29. Sea Y la congruencia de $G(1,4)$ definida por ser el lugar de dependencia de tres secciones de $\mathcal{Q} \oplus \mathcal{S}$. Se puede aplicar el Corolario 0.2.7 anterior para obtener la resolución del haz de ideales de Y siguiente :

$$\begin{aligned} 0 \;&\longrightarrow\; (S^2\mathcal{O}^{\oplus 3})(-c_1(\mathcal{F})) \longrightarrow (\mathcal{F})^{\oplus 3}(-c_1(\mathcal{F})) \longrightarrow \bigwedge^3(\mathcal{F})^\vee \longrightarrow \bigwedge^3(\mathcal{O}^{\oplus 3})^\vee \longrightarrow \\ &\longrightarrow\; \mathcal{O}_Y \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Considerando además la forma bilineal no degenerada

$$\bigwedge^3(\mathcal{F}) \otimes \bigwedge^2(\mathcal{F}) \longrightarrow \bigwedge^5(\mathcal{F}) = \mathcal{O}(c_1(\mathcal{F})),$$

se tiene que $\bigwedge^3(\mathcal{Q} \oplus \mathcal{S})^\vee \cong \bigwedge^2(\mathcal{S} \oplus \mathcal{Q}) \otimes \mathcal{O}(-c_1(\mathcal{S} \oplus \mathcal{Q}))$. Por tanto, la sucesión de Eagon-Northcott se puede escribir de la siguiente manera

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-2)^{\oplus 6} \longrightarrow \mathcal{S}(-2)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{Q}(-2)^{\oplus 3} \longrightarrow \bigwedge^2(\mathcal{S} \oplus \mathcal{Q})(-2) \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow 0$$

Ahora bien, de la identificación $\bigwedge^2(\mathcal{S}\oplus\mathcal{Q})\cong\mathcal{S}^\vee(1)\oplus(\mathcal{S}\otimes\mathcal{Q})\oplus\mathcal{O}(1)$ se sigue que

$$\begin{aligned} 0 \quad\longrightarrow\quad & \mathcal{O}(-2)^{\oplus 6}\longrightarrow\mathcal{S}^{\oplus 3}(-2)\oplus\mathcal{Q}^{\oplus 3}(-2)\longrightarrow\mathcal{S}^\vee(-1)\oplus \\ \oplus\quad & (\mathcal{S}\otimes\mathcal{Q})(-2)\oplus\mathcal{O}(-1)\longrightarrow\mathcal{I}_Y\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

es una resolución de $\mathcal{I}_Y$.

Capítulo 1

Fibrados sin cohomología intermedia de $G(1,4)$.

En este capítulo se caracterizarán los fibrados vectoriales sobre la Grassmanniana de rectas en $\mathbb{P}^4$ que no tienen cohomología intermedia. Se inicia el capítulo recordando la regla de Littlewood-Richardson para calcular grupos de cohomología de fibrados en Grassmannianas. Se continuará con una sección de definiciones de algunos fibrados y se incluyen las tablas de cohomologías de los fibrados universales de la Grassmanniana, productos tensoriales de estos y sus twists. Se da a continuación una caracterización cohomológica de los fibrados $\mathcal{S}$ y $\mathcal{Q}$, y finalmente se demuestra el teorema principal de clasificación de fibrados vectoriales sin cohomología intermedia de la Grassmanniana de rectas en $\mathbb{P}^4$.

1.1. Regla de Littlewood-Richardson

Se recuerda en esta sección un método muy útil para el cálculo de los grupos de cohomología de ciertos fibrados, en concreto aquellos que pueden ser puestos como producto simétrico de potencias exteriores de $\mathcal{Q}$ y de $\mathcal{S}$ o de sus duales. La referencia principal es [LR34].

Sea $G(k,N)$ la Grassmanniana de los k-planos de $\mathbb{P}^N$, y sean $\mathcal{S}$ y $\mathcal{Q}$ los fibrados universales de rango $N-k$ y $k+1$ respectivamente, según se definieron en la sección 0.3.3 de los preliminares.

Notación 3. Se denota por

$$(a_1, \dots, a_{k+1} | b_1, \dots, b_{N-k})$$

al producto

$$(S^{a_1} \bigwedge^{k+1} \mathcal{Q}^\vee) \otimes (S^{a_2 - a_1} \bigwedge^{k} \mathcal{Q}^\vee) \otimes \dots \otimes (S^{a_{k+1} - a_k} \bigwedge^{1} \mathcal{Q}^\vee) \otimes \dots$$

$$\dots \otimes (S^{b_1} \bigwedge^{N-k} \mathcal{S}) \otimes \dots \otimes (S^{b_{N-k} - b_{N-k-1}} \bigwedge^{1} \mathcal{S}),$$

donde $(a_1, a_2, \dots, a_{k+1})$ y $(b_1, b_2, \dots, b_{N-k})$ son $(k+1)$ y $(N-k)$-uplas ordenadas con $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{k+1}$ y $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{N-k}$ y $S^\bullet$ es el producto simétrico.

Ejemplo 1.1.1. Los fibrados vectoriales sobre la Grassmanniana $G(1,N)$, $\mathcal{Q} \otimes \mathcal{Q}$ y $(S^2(\mathcal{Q}^\vee(1))) \oplus \bigwedge^2(\mathcal{Q}^\vee(1))$ son isomorfos, luego

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} \otimes \mathcal{Q} &\cong [(S^2 \mathcal{Q}^\vee) \oplus \bigwedge^2 \mathcal{Q}^\vee] \otimes \mathcal{O}(2) = \\ &= (0,2|2,2,2,\dots) \oplus (1,1|2,2,2,\dots) \end{aligned}$$

De forma análoga se podrán obtener todos los fibrados vectoriales que son producto tensorial de $\mathcal{S}$ y de $\mathcal{Q}$ que interesan en esta memoria. Obsérvese que se verifica que $(a_1, \dots, a_{k+1} | b_1, \dots, b_{N-k}) = (a_1 + l, \dots, a_{k+1} + l | b_1 + l, \dots, b_{N-k} + l)$.

La propiedad fundamental es que un fibrado vectorial así escrito tiene cohomología natural, es decir tiene todos los grupos de cohomología iguales a cero, salvo si acaso uno. El método de Littlewood-Richardson consiste precisamente en obtener el orden del grupo de cohomología no nulo, calculando además su dimensión.

Teorema 1.1.2. *Si $(a_1, \dots, a_{k+1} | b_1, \dots, b_{N-k})$ es como en la Notación 3, sean $c_i = a_i + i$ para todo $i \in \{1, \dots, k+1\}$ y $c_{j+k+1} = b_j + j + k + 1$ para todo $j \in \{1, \dots, N-k\}$, entonces se verifica:*

i.- Si en $c_1, \ldots, c_{N+1}$ *hay dos elementos repetidos, entonces*

$$h^i(a_1, \ldots, a_{k+1}|b_1, \ldots, b_{N-k}) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

ii.- Si los $c_1, \ldots, c_{N+1}$ *son todos distintos entre sí, sea* k *el mínimo número de trasposiciones que ordenan* $c_1, \ldots, c_{N+1}$ *de menor a mayor. Entonces*

$$h^k(a_1, \ldots, a_{k+1}|b_1, \ldots, b_{N-k}) \neq 0.$$

iii.- En las condiciones de [ii.−] siendo $d_1 < \ldots < d_{N+1}$ *el resultado de ordenar* $c_1, \ldots, c_{N+1}$*, y si* $e_i = d_i - i$ *para* $i \in \{1, \ldots, N+1\}$*, entonces escribiendo* $V \cong H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$*, se tiene que*

$$H^k(a_1, \ldots, a_{k+1}|b_1, \ldots, b_{N-k}) \cong (S^{e_1}(\bigwedge^{N+1} V^*)) \otimes \ldots \otimes (S^{e_{N+1}-e_N}(\bigwedge^{1} V^*)).$$

Ejemplo 1.1.3. Comprobemos con la regla de Littlewood-Richardson que en $G(1,4)$ $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{Q}, \mathcal{S}^\vee) \cong H^1(\mathcal{S}^\vee \otimes \mathcal{Q}^\vee)$ está generado por la extensión que da la sucesión universal de la Grassmanniana. Por las consideraciones anteriores, de $\bigwedge^2 \mathcal{S}^\vee \cong \mathcal{S}(-1)$ y de $\mathcal{Q}^\vee \cong \mathcal{Q}(-1)$ se tiene que $\mathcal{S}^\vee \otimes \mathcal{Q}^\vee = \mathcal{S}^\vee(1) \otimes \mathcal{Q}^\vee(-1) \cong \bigwedge^2 \mathcal{S} \otimes \mathcal{Q}^\vee \otimes \bigwedge^2 \mathcal{Q}^\vee = (1,2|0,1,1)$. Para calcular su cohomología aplicamos el método de Littlewood-Richardson

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ + & & & & & \\ & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{array}$$

da la 5-upla $(2,4,3,5,6)$ que necesita una trasposición para ser ordenada. De modo que $k = 1$ y $H^1(\mathcal{S}^\vee \otimes \mathcal{Q}^\vee) \cong \bigwedge^5 V^* \cong \mathbb{C}$.

Ejemplo 1.1.4. Veamos ahora, siempre en $G(1,4)$ que el fibrado $(\mathcal{Q}^\vee \otimes \mathcal{S} \otimes \mathcal{S})(-1)$ tiene el primer grupo de cohomología distinto de cero. En efecto,

$$(\mathcal{Q}^\vee \otimes \mathcal{S} \otimes \mathcal{S})(-1) \cong (\mathcal{O}(-1) \otimes \mathcal{Q}^\vee \otimes S^2\mathcal{S}) \oplus (\mathcal{O}(-1) \otimes \mathcal{Q}^\vee \otimes \bigwedge^2 \mathcal{S}),$$

y utilizando el Método de Littlewood-Richardson 1.1, esto es

$$(1,2|0,0,2) \quad + \quad (1,2|0,1,1).$$

Claramente el primer paréntesis tiene todos los grupos de cohomología igual a cero pues al sumarle i a cada a_i y $j+2$ a cada b_j sale $a_2+2=4=b_2+4$. Para el segundo paréntesis,

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ + & & & & & \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{array}$$

se necesita una trasposición entre el 4 y el 3 para obtener una sucesión ordenada. Luego tiene cohomología de orden uno distinta a cero e igual a $\bigwedge^5 V^* \cong \mathbb{C}$.

Es decir, $H^1(\mathcal{Q}^\vee \otimes S^2\mathcal{S}(-1)) = 0$ y $H^1(\mathcal{Q}^\vee \otimes \bigwedge^2 \mathcal{S}(-1)) = \mathbb{C}$ y por tanto

$$H^1(\mathcal{Q}^\vee \otimes \mathcal{S} \otimes \mathcal{S}(-1)) \cong \mathbb{C}$$

y

$$h^i(\mathcal{Q}^\vee \otimes \mathcal{S} \otimes \mathcal{S}(-1)) = 0$$

para todo $i \neq 1$.

1.2. Definiciones y algunas tablas de cohomología.

Durante el resto de este capítulo se llamará G a la Grassmanniana de rectas de $\mathbb{P}^4$. Se comienza con la siguiente definición (que claramente se puede generalizar a cualquier variedad proyectiva).

Definición 1.2.1. Sea $\mathcal{F}$ un fibrado vectorial sobre G. Se dice que $\mathcal{F}$ *no tiene cohomología intermedia* si $h^i(G, \mathcal{F}(l)) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, 5$ y todo $l \in \mathbb{Z}$.

Se verán a continuación ejemplos de fibrados sobre G sin cohomología intermedia, para demostrar luego que son esencialmente los únicos.

Es fácil concluir a partir de las definiciones o la Regla de Littlewood-Richardson, que los fibrados universales $\mathcal{Q}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}^\vee$, así como $S^2\mathcal{Q}$ no tienen cohomología intermedia. La potencia simétrica segunda del epimorfismo de la sucesión exacta universal de G

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}^\vee \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}_G \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0 \tag{1.2.1}$$

que define los fibrados vectoriales universales $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{S}$ de rango dos y tres respectivamente, induce una sucesión exacta larga (utilizando la identificación $\bigwedge^2 \mathcal{S}^\vee \cong \mathcal{S}(-1)$)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{S}(-1) \arrow[r] & \mathcal{S}^\vee \otimes V \arrow[rr] \arrow[dr] & & S^2V \otimes \mathcal{O}_G \arrow[r] & S^2\mathcal{Q} \arrow[r] & 0 \\
& & & \mathcal{M} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd} \tag{1.2.2}$$

donde el fibrado vectorial de rango doce $\mathcal{M}$ está definido como el núcleo correspondiente. Una rápida comprobación demuestra que éste es un fibrado sin cohomología intermedia, simplemente observando que al tomar cohomología en

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}(l) \longrightarrow S^2V \otimes \mathcal{O}_G(l) \longrightarrow S^2\mathcal{Q}(l) \longrightarrow 0$$

para todo $2 \leq i \leq 5$, resulta que

$$H^{i-1}(S^2\mathcal{Q}(l)) \longrightarrow H^i(\mathcal{M}(l)) \longrightarrow H^i(\mathcal{O}_G(l))^{\oplus 15}$$

es exacta, y como tanto $H^{i+1}(\mathcal{O}_G(l))$ como $H^i(S^2\mathcal{Q}(l))$ son cero $\forall l$, entonces $H^{i+1}(\mathcal{M}(l))$ también es cero. Para $i = 1$ (y de hecho para $1 \leq i \leq 4$) basta tomar cohomología en

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}(l-1) \longrightarrow \mathcal{S}^\vee(l)^{\oplus 5} \longrightarrow \mathcal{M}(l) \longrightarrow 0$$

y concluir que $H^1(\mathcal{M}(l)) = 0$. La cohomología $\mathcal{M}$ se resume en el Cuadro 1.3.

Por otra parte, tomando la segunda potencia exterior en la sucesión universal dual se tiene la siguiente sucesión exacta larga de forma natural (que define el fibrado vectorial de rango siete $\mathcal{K}$ como un núcleo):

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S^2\mathcal{Q}^\vee \arrow[r] & \mathcal{Q}^\vee \otimes V^* \arrow[rr] \arrow[dr] & & \bigwedge^2 V^* \otimes \mathcal{O}_G \arrow[r] & \bigwedge^2 \mathcal{S} \arrow[r] & 0 \\
& & & \mathcal{K} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd} \tag{1.2.3}$$

Análogamente a lo hecho para el caso de $\mathcal{M}$, es ahora también inmediato comprobar que $\mathcal{K}$ es un fibrado vectorial sin cohomología intermedia. Se resume su cohomología en el Cuadro 1.4. Además, de la sucesión universal, tensorizando con $\mathcal{K}$ y tomando cohomología, es fácil calcular los grupos de cohomología de $\mathcal{S}^\vee \otimes \mathcal{K}$. El resumen de estas cohomologías viene dado en el Cuadro 1.6.

En particular, $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{S}, \mathcal{K}) = \mathbb{C}^5$ (de hecho es naturalmente isomorfo a V^*, como se verá enseguida) así que, existen infinitas extensiones no equivalentes

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow 0.$$

Más generalmente, para cualesquiera par de números naturales i, j existen extensiones no triviales, por tanto se da la siguiente definición

Definición 1.2.2. Un sumando directo indescomponible de un fibrado vectorial $\mathcal{G}$ como en la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}^{\oplus i} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{S}^{\oplus j} \longrightarrow 0. \tag{1.2.4}$$

se llamará un *fibrado vectorial de tipo (I)*. Como ni $\mathcal{K}$, ni $\mathcal{S}$ tienen cohomología intermedia, tampoco $\mathcal{G}$ la tendrá, ni ninguno de sus sumandos.

Ejemplo 1.2.3. Considérese el siguiente diagrama conmutativo de sucesiones exactas provenientes de las sucesiones (1.2.3) y del dual de (1.2.2), que define $\mathcal{P}$ como un pull-back:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{K} & \longrightarrow & \bigwedge^2 V^* \otimes \mathcal{O}_G & \longrightarrow & \mathcal{S}^\vee(1) & \longrightarrow & 0 \\
 & & || & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{S} \otimes V^* & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & \mathcal{M}^\vee & = & \mathcal{M}^\vee & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Ya que $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_G, \mathcal{M}^\vee) = 0$, se sigue que la sucesión exacta vertical del medio escinde, y por tanto $\mathcal{P} \cong \mathcal{M}^\vee \oplus \mathcal{O}_G^{10}$. Esto muestra que $\mathcal{M}^\vee$ es un fibrado vectorial de tipo (I). La sucesión exacta horizontal del medio

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{M}^\vee \oplus \mathcal{O}_G{}^{\oplus 10} \longrightarrow \mathcal{S} \otimes V^* \longrightarrow 0 \qquad (1.2.5)$$

es un elemento no trivial de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{S} \otimes V^*, \mathcal{K})$ que proviene de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{S}^\vee(1), \mathcal{K}) \cong \mathbb{C}$. De aquí se obtiene, aplicando $\mathrm{Hom}(\mathcal{S}, -)$ a la sucesión (1.2.5), un isomorfismo

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{S}, \mathcal{K}) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{S}, \mathcal{S} \otimes V^*) \cong V^*$$

ya que $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{S}, \mathcal{M}^\vee) = 0$, y por tanto

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{S} \otimes V^*, \mathcal{K}) \cong V \otimes \mathrm{Ext}^1(\mathcal{S}, \mathcal{K}) \cong V \otimes V^*$$

y la extensión (1.2.5) que vive en $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{S} \otimes V^*, \mathcal{K})$ se puede ver como un elemento de $\mathrm{Hom}(V, V)$. Además, dicho elemento es la identidad en V. En efecto, la extensión viene de la identidad en $\mathcal{S} \otimes V^*$ mediante la aplicación

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{S} \otimes V^*, \mathcal{S} \otimes V^*) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{S} \otimes V^*, \mathcal{K}),$$

pero hay un isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}(V^*, V^*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathcal{S} \otimes V^*, \mathcal{S} \otimes V^*)$$

que manda la identidad a la identidad.

Análogamente, se puede observar que $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{K}^\vee, \mathcal{K}) = V$, luego también hay infinitas extensiones no equivalentes

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K}^\vee \longrightarrow 0.$$

Tomando una de dichas extensiones para cada fibrado de tipo (I) se obtiene un diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{K}^{\oplus i} & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{S}^{\oplus j} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & || & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{H}^{\oplus i} & \longrightarrow & \mathcal{G}' & \longrightarrow & \mathcal{S}^{\oplus j} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & (\mathcal{K}^\vee)^{\oplus i} & = & (\mathcal{K}^\vee)^{\oplus i} & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

definiendo $\mathcal{G}'$ como un push-forward.

Del diagrama anterior se tiene una inclusión $\mathcal{K}^{\oplus i} \hookrightarrow \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{G}'$, cuyo conúcleo $\mathcal{R}$ aparece en el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & \mathcal{K}^{\oplus i} & = & \mathcal{K}^{\oplus i} & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G}' & \longrightarrow & (\mathcal{K}^{\vee})^{\oplus i} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{S}^{\oplus j} & \longrightarrow & \mathcal{R} & \longrightarrow & (\mathcal{K}^{\vee})^{\oplus i} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Como $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{K}^{\vee}, \mathcal{S}) = 0$, la última fila del diagrama anterior escinde, luego se tiene una sucesión exacta del tipo

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}^{\oplus i} \longrightarrow \mathcal{G}' \longrightarrow \mathcal{S}^{\oplus j} \oplus (\mathcal{K}^{\vee})^{\oplus l} \longrightarrow 0. \tag{1.2.6}$$

(en realidad en nuestro caso con $l = i$)

Tenemos por tanto la siguiente generalización de los fibrados de tipo (I), que incluye también a las extensiones en $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{K}^{\vee}, \mathcal{K})$.

Definición 1.2.4. Un sumando directo indescomponible de un fibrado vectorial $\mathcal{G}'$ como en 1.2.6 se llamará un *fibrado vectorial de tipo (II).* Del hecho que ni $\mathcal{S}$, ni $\mathcal{K}$, ni $\mathcal{K}^{\vee}$ tengan cohomología intermedia, se sigue que los fibrados de tipo (II) no tienen cohomología intermedia.

Por último, la sucesión exacta corta de la izquierda de (1.2.3) muestra que $\mathcal{K}(1)$ está generado por sus secciones globales. En efecto, tensorizando (1.2.3) con $\mathcal{O}_G(1)$ sigue siendo una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow S^2\mathcal{Q}^{\vee}(1) \longrightarrow \mathcal{Q}^{\vee}(1) \otimes V^* \longrightarrow \mathcal{K}(1) \longrightarrow 0$$

y puesto que $\mathcal{Q} \cong \mathcal{Q}^\vee(1)$ está generado por sus secciones globales, existe un epimorfismo $\mathcal{O}_G \otimes V \otimes V^* \twoheadrightarrow \mathcal{Q} \otimes V^*$ que compuesto con $\mathcal{Q} \otimes V^* \longrightarrow \mathcal{K}(1) \longrightarrow 0$ demuestra que $\mathcal{K}(1)$ está generado por sus secciones globales.

Esto da lugar a la siguiente sucesión exacta que define a $E(1)$ como un núcleo,

$$0 \longrightarrow E(1) \longrightarrow V \otimes V^* \otimes \mathcal{O}_G \longrightarrow \mathcal{K}(1) \longrightarrow 0 \tag{1.2.7}$$

donde E es un fibrado vectorial de rango 18. El fibrado $E(1)$ tiene los siguientes grupos de cohomología distintos de cero: $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{K}(1), E(1))$ (generado por la extensión (1.2.7), $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{Q}, E(1))$, $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{K}^\vee, E(1))$ y $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{S}, E(1))$.

Damos finalmente una definición general que contiene como caso particular los fibrado vectoriales de tipo (II) y sus duales:

Definición 1.2.5. Un fibrado vectorial de tipo (III) será cualquier sumando directo indescomponible de una extensión (quizás trivial)

$$0 \longrightarrow E(1)^{\oplus i} \oplus \mathcal{K}^{\oplus j} \oplus (\mathcal{S}^\vee)^{\oplus k} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{S}^{\oplus l} \oplus (\mathcal{K}^\vee)^{\oplus m} \oplus \mathcal{Q}^{\oplus n} \longrightarrow 0$$

Ejemplo 1.2.6. De la sucesión (1.2.7) y de la primera sucesión exacta corta de (1.2.3) se obtiene el siguiente diagrama conmutativo de sucesiones exactas que definen $\mathcal{P}$ como un pull-back:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & V \otimes V^* \otimes \mathcal{O}_G(-1) & \longrightarrow & \mathcal{K} & \longrightarrow & 0 \\
 & & || & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{Q}^\vee \otimes V^* & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & S^2\mathcal{Q}^\vee & = & S^2\mathcal{Q}^\vee & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Como $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_G(-1), S^2\mathcal{Q}^\vee) = 0$, se sigue que la sucesión exacta corta vertical del medio escinde y por tanto $S^2\mathcal{Q}^\vee(1)$ es del tipo (III).

Observación 1.2.7. Es fácil ver que los fibrados vectoriales $\mathcal{Q}, \mathcal{S}, \mathcal{S}^\vee, \mathcal{K}, \mathcal{K}^\vee, E$ son simples (es decir, los únicos endomorfismos que poseen son las multiplicaciones por constantes), indescomponibles y no tienen cohomología intermedia. Esto implica que en particular todos los fibrados vectoriales del tipo (III) no tienen cohomología intermedia (de hecho, todos los fibrados vectoriales que aparecen en esta sección son, salvo twist, de tipo (III), como se ha observado). El objetivo de esta parte de la memoria es probar que cualquier fibrado vectorial de G sin cohomología intermedia se obtiene de esta manera.

Se termina esta sección dando explícitamente las tablas de cohomología de estos fibrados y algunos twist, que serán necesarios en la siguiente sección y también más adelante en la memoria.

Cuadro 1.1: Cohomología del fibrado cociente universal

i \ l	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
0	175	40	5	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	5

$h^i(\mathcal{Q}(l))$

Cuadro 1.2: Cohomología del subfibrado universal

i \ l	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	
0	210	45	5	0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$h^i(\mathcal{S}(l))$
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
6	0	0	0	0	0	0	0	0	10	75	

Cuadro 1.3: Cohomología de $\mathcal{M}(l)$

i \ l	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	
0	330	45	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$h^i(\mathcal{M}(l))$
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
6	0	0	0	0	0	0	0	15	150	735	

Tabla 1.2.8. Para facilitar la lectura de este capítulo se da a continuación una lista de los únicos grupos de cohomología intermedia distintos de cero de los cinco fibrados vectoriales descritos más arriba cuando se tensorizan con $\mathcal{Q}$ y con $\mathcal{S}^\vee$:

$$\begin{aligned}
& h^1(\mathcal{Q}\otimes\mathcal{S}^\vee(-1)) = h^5(\mathcal{S}\otimes\mathcal{Q}(-5)) = h^1(\mathcal{S}^\vee\otimes\mathcal{Q}(-1)) = \\
= \;& h^2(\mathcal{S}^\vee\otimes\mathcal{S}^\vee(-1)) = h^2(\mathcal{K}\otimes\mathcal{Q}(-2)) = h^3(\mathcal{K}\otimes\mathcal{S}^\vee(-2) = \\
= \;& h^4(\mathcal{K}^\vee\otimes\mathcal{Q}(-4)) = h^5(\mathcal{K}^\vee\otimes\mathcal{S}^\vee(-4)) = h^3(E\otimes\mathcal{Q}(-2)) = \\
= \;& h^4(E\otimes\mathcal{S}^\vee(-2)) = 1.
\end{aligned}$$

Cuadro 1.4: Cohomología de $\mathcal{K}(l)$

i \ l	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
0	185	25	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	10	95	455

$h^i(\mathcal{K}(l))$

Cuadro 1.5: Cohomología de $\mathcal{S} \otimes \mathcal{S}^\vee(l)$

i \ l	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
0	330	50	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	1	50

$h^i(\mathcal{S} \otimes \mathcal{S}^\vee(l))$

$$\begin{aligned} & h^1(\mathcal{K} \otimes \mathcal{S}^\vee) = h^1(E \otimes \mathcal{Q}) = \\ = \quad & h^2(E \otimes \mathcal{S}^\vee) = h^1(E \otimes \mathcal{S}^\vee(1)) = 5. \end{aligned}$$

La mayoría de las igualdades anteriores se pueden obtener unas de otras utilizando la sucesión exacta universal (1.2.1) o la dualidad de Serre, y teniendo en cuenta que el fibrado lineal canónico sobre G es $\omega_G = \mathcal{O}_G(-5)$.

Cuadro 1.6: Cohomología de $\mathcal{S}^\vee \otimes \mathcal{K}(l)$

i \ l	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
0	225	5	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	5	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	50	425

$h^i(\mathcal{S}^\vee \otimes \mathcal{K}(l))$

Cuadro 1.7: Cohomología de $\mathcal{S} \otimes \mathcal{S}(l)$

i \ l	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
0	201	25	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	5	95

$h^i(\mathcal{S} \otimes \mathcal{S}(l))$

1.3. Caracterización de los fibrados universales.

Se comienza recordando (particularizando para $G(1,4)$) la caracterización de Ottaviani de las sumas directas de fibrados lineales en Grassmannianas.

Teorema 1.3.1. (Ottaviani) ([Ott87], [Ott89]) *Sea $\mathcal{F}$ un fibrado vectorial de $G(1,4)$. Entonces $\mathcal{F}$ es una suma directa de fibrados lineales si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:*

i.- $\mathcal{F}$ *no tiene cohomología intermedia*

ii.- $h^i(\mathcal{F} \otimes \mathcal{Q}(l)) = 0$ *para cualquier* $i = 1, \dots, 5$ *y* $l \in \mathbb{Z}$

iii.- $H^1(\mathcal{F} \otimes \mathcal{S}^\vee(l)) = 0$ *para cualquier* $l \in \mathbb{Z}$.

Cuadro 1.8: Cohomología de $\mathcal{S} \otimes \mathcal{Q}(l)$

i \ l	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
0	175	24	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	45

$h^i(\mathcal{S} \otimes \mathcal{Q}(l))$

Nota 1.3.2. El resultado original de Ottaviani no es como se ha enunciado antes. En lugar de las condiciones *ii.*− y *iii.*−, sus condiciones son (ver [Ott87], Thm. 1 (c) para $k = 1$, $n = 4$):

b) $h^i(\mathcal{F} \otimes \mathcal{S}(l)) = 0$ para cualquier $i = 2, 3, 4$ y $l \in \mathbb{Z}$

c) $h^i(\mathcal{F} \otimes \mathcal{S}^\vee(l)) = 0$ para cualquier $i = 1, 2, 3$ y $l \in \mathbb{Z}$.

Existe claramente una equivalencia entre nuestras condiciones *ii.*−, *iii.*− y las condiciones *b*) y *c*) del enunciado anterior. Para verlo basta tomar cohomología en la sucesión exacta universal (1.2.1) y sus duales tensorizados con $\mathcal{F}(l)$, y utilizar que $\mathcal{F}$ no tiene cohomología intermedia.

La idea para demostrar el teorema principal de este capítulo de la memoria es eliminar una a una las seis condiciones cohomológicas extra que aparecen en *ii.*− y *iii.*− para finalmente caracterizar aquellos fibrados vectoriales sin cohomología intermedia. Cada vez que se elimine una condición, aparecerá una nueva familia de fibrados vectoriales. La tabla 1.2.8 sugerirá qué nuevo fibrado vectorial debe aparecer cada vez. Se caracterizarán en esta sección de este capítulo los fibrados vectoriales universales, eliminando una a una las condiciones del Teorema 1.3.1 que no son satisfechas por éstos.

La primera condición que se eliminará será *iii.*−, que es la única que $\mathcal{Q}$ no satisface. Así, $\mathcal{Q}$ debería estar caracterizado por las condiciones *i.*− y *ii.*− del teorema de Ottaviani. Obsérvese que entonces se obtiene un resultado completamente análogo al teorema de Horrocks, en el que el papel de los fibrados lineales lo juegan ahora los fibrados lineales y sus productos tensoriales con $\mathcal{Q}$. Se probará este resultado con detalle, mientras que para los sucesivos se dará una idea de la demostración ya que son similares a ésta (de hecho, esta primera demostración tendrá una dificultad adicional al principio que no aparece en las demás demostraciones). El enunciado preciso es:

Teorema 1.3.3. *Sea $\mathcal{F}$ un fibrado vectorial indescomponible sobre $G(1,4)$. Entonces $\mathcal{F}$ es, salvo un twist con un fibrado lineal, o bien el fibrado lineal trivial, o bien $\mathcal{Q}$ si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:*

i.- $\mathcal{F}$ no tiene cohomología intermedia

ii.- $h^i(\mathcal{F} \otimes \mathcal{Q}(l)) = 0$ para cualquier $i = 1, \ldots, 5$ y $l \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un fibrado vectorial que satisface $i.-$ y $ii.-$. Se demostrará el resultado anterior por inducción sobre $\sum_l h^1(\mathcal{F} \otimes \mathcal{S}^\vee(l))$ con $l \in \mathbb{Z}$. Si esta suma es cero, entonces se está en la hipótesis del teorema de Ottaviani 1.3.1, así que $\mathcal{F}$ es una suma directa de fibrados lineales.

De modo que supóngase que $h^1(\mathcal{F} \otimes \mathcal{S}^\vee(l)) \neq 0$ para algún $l \in \mathbb{Z}$. Cambiando si es necesario $\mathcal{F}$ por un twist, se puede suponer que $l = 0$. Entonces existe un elemento no cero de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{S}, \mathcal{F})$, que genera una extensión no trivial

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow 0. \tag{1.3.1}$$

Afirmamos en primer lugar que $\mathcal{P}$ también verifica las condiciones $i.-$ y $ii.-$. Claramente $\mathcal{P}$ verifica $i.-$ por verificarla $\mathcal{F}$ y $\mathcal{S}$. Respecto a la propiedad $ii.-$, $\mathcal{S}$ la verifica excepto para $i = 5$, $l = -5$, en que $h^5(\mathcal{S} \otimes \mathcal{Q}(-5)) = 1$. Basta probar por tanto que $H^5(\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}(-5)) = 0$. Para ello, en primer lugar se dualiza y se tensoriza adecuadamente las sucesiones exactas 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3, y utilizando los isomorfismos naturales $\bigwedge^2 \mathcal{S} \cong \mathcal{S}^\vee(1)$ y $S^2\mathcal{Q}^\vee \cong S^2\mathcal{Q}(-2)$ se consigue una sucesión exacta larga

$$
\begin{aligned}
0 \;\longrightarrow\;& \mathcal{Q}(-5) \longrightarrow \mathcal{O}_G(-4)^{\oplus 5} \longrightarrow \mathcal{O}_G(-3)^{\oplus 10} \longrightarrow \mathcal{Q}(-3)^{\oplus 5} \longrightarrow \\
\longrightarrow\;& \mathcal{O}_G(-1)^{\oplus 15} \longrightarrow \mathcal{M}^\vee(-1) \longrightarrow 0.
\end{aligned}
$$

El hecho que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{S}$ (y por tanto también $\mathcal{P}$) satisfagan las condiciones $i.-$, $\mathcal{F}$ también $ii.-$ y también que $h^2(\mathcal{S}\otimes\mathcal{Q}(-3)) = h^3(\mathcal{S}\otimes\mathcal{Q}(-3)) = 0$ implica tensorizando por $\mathcal{P}$ y por $\mathcal{S}$ la sucesión anterior y tomando cohomología, que existe un diagrama conmutativo

$$
\begin{array}{ccc}
H^5(\mathcal{P}\otimes\mathcal{Q}(-5)) & \longrightarrow & H^5(\mathcal{S}\otimes\mathcal{Q}(-5)) \\
\uparrow & & \uparrow \\
H^1(\mathcal{P}\otimes\mathcal{M}^\vee(-1)) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{S}\otimes\mathcal{M}^\vee(-1))
\end{array}
$$

donde los morfismos verticales son isomorfismos provenientes de la sucesión exacta larga anterior. Ya que lo que se necesita probar es que el morfismo de arriba es cero, es suficiente probar lo mismo para el morfismo de abajo. Considerando la sucesión dual de la primera sucesión corta de (1.2.2) (y tensorizar por $\mathcal{P}(-1)$ y $\mathcal{S}(-1)$), este morfismo aparece en un diagrama conmutativo

$$
\begin{array}{ccc}
H^0(\mathcal{P}\otimes\mathcal{S}^\vee) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{S}\otimes\mathcal{S}^\vee) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^1(\mathcal{P}\otimes\mathcal{M}^\vee(-1)) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{S}\otimes\mathcal{M}^\vee(-1)).
\end{array}
$$

La afirmación se sigue observando que el morfismo vertical de la izquierda es un epimorfismo (su conúcleo está en $H^1(\mathcal{P}\otimes\mathcal{S}(-1)\otimes V^*) = H^2(\mathcal{P}\otimes\mathcal{Q}^\vee(-1)\otimes V^*) = 0$), mientras el morfismo superior es cero puesto que la extensión (1.3.1) es no trivial y $\mathcal{S}$ es simple.

Es también muy fácil comprobar que $h^1(\mathcal{P}\otimes\mathcal{S}^\vee(l)) = h^1(\mathcal{F}\otimes\mathcal{S}^\vee(l))$ para cualquier l excepto para $l=0$, por el cual $h^1(\mathcal{P}\otimes\mathcal{S}^\vee) = h^1(\mathcal{F}\otimes\mathcal{S}^\vee) - 1$. Lo último se sigue de que la sucesión siguiente es exacta

$$
H^0(\mathcal{P}\otimes\mathcal{S}^\vee) \longrightarrow H^0(\mathcal{S}\otimes\mathcal{S}^\vee) \longrightarrow H^1(\mathcal{F}\otimes\mathcal{S}^\vee) \longrightarrow H^1(\mathcal{P}\otimes\mathcal{S}^\vee) \longrightarrow H^1(\mathcal{S}\otimes\mathcal{S}^\vee) = 0,
$$

en la cual, como se ha observado, el primer morfismo es cero y $h^0(\mathcal{S}\otimes\mathcal{S}^\vee) = 1$.

Se puede de esta manera aplicar la hipótesis de inducción a $\mathcal{P}$ y concluir que descompone como suma directa de sumandos de tipo $\mathcal{O}_G(l)$ y $\mathcal{Q}(l)$. Consideramos finalmente el siguiente diagrama conmutativo que define a $\mathcal{P}'$ como un pull-back (y en el cual el morfismo vertical derecho es el dual de 1.2.1):

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & 0 & & \\ & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{S} & \longrightarrow & 0 \\ & & || & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{P}' & \longrightarrow & \mathcal{O}_G{}^{\oplus 5} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & & & \mathcal{Q}^\vee & = & \mathcal{Q}^\vee & & \\ & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

La sucesión exacta horizontal del medio escinde ya que $\mathcal{F}$ no tiene cohomología intermedia. La sucesión exacta vertical del medio también escinde, ya que $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{P}, \mathcal{Q}^\vee) \cong H^5(\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}(-5))^* = 0$. Así $\mathcal{P} \oplus \mathcal{Q}^\vee \cong \mathcal{F} \oplus \mathcal{O}_G{}^{\oplus 5}$. El Teorema de Krull-Schmidt (ver [Ati56]) demuestra que un fibrado tiene una descomposición única en suma fibrados indescomponible, entonces se sigue el enunciado y esto demuestra el teorema. $\square$

Teorema 1.3.4. *Sea $\mathcal{F}$ un fibrado vectorial indescomponible sobre $G(1,4)$. Entonces $\mathcal{F}$ es, salvo twist con un fibrado lineal, o bien el fibrado lineal trivial, o bien $\mathcal{Q}$, o bien $\mathcal{S}$ si y sólo si las siguientes condiciones se verifican:*

i.- $\mathcal{F}$ no tiene cohomología intermedia

ii.- $h^i(\mathcal{F} \otimes \mathcal{Q}(l)) = 0$ para cualquier $i = 1,2,3,4$ y $l \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Se demuestra por inducción sobre $\sum_l h^5(\mathcal{F} \otimes \mathcal{Q}(l))$. El caso cero es consecuencia inmediata del Teorema 1.3.3. Por tanto supóngase que $h^5(\mathcal{F} \otimes \mathcal{Q}(l)) \neq 0$ para algún l, y se puede suponer también sin perdida de generalidad que $l = -5$. Así, por la dualidad de Serre, existe un elemento no cero en $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{Q}, \mathcal{F}^\vee)$. Esto produce una extensión no trivial

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^\vee \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0. \tag{1.3.2}$$

Es ahora inmediato (en contraste con la demostración del Teorema 1.3.3) demostrar que $\mathcal{P}^\vee$ todavía satisface las condiciones *i.–* y *ii.–* (esto es porque $\mathcal{Q} \otimes \mathcal{Q}$ no tiene cohomología intermedia). También, se sigue que $h^5(\mathcal{P}^\vee \otimes \mathcal{Q}(l)) = h^5(\mathcal{F} \otimes \mathcal{Q}(l))$ para cualquier l, excepto para $l = -5$ para el cual $h^5(\mathcal{P}^\vee \otimes \mathcal{Q}(-5)) = h^5(\mathcal{F} \otimes \mathcal{Q}(-5)) - 1$ (ya que por la dualidad de Serre

$$h^5(\mathcal{P}^\vee \otimes \mathcal{Q}(-5)) = h^1(\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}^\vee) \quad \text{y} \quad h^5(\mathcal{F} \otimes \mathcal{Q}(-5)) = h^1(\mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{Q}^\vee)$$

y como en el Teorema 1.3.3 se demuestra que $h^1(\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}^\vee) = h^1(\mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{Q}^\vee) - 1$) Por tanto, por hipótesis de inducción, $\mathcal{P}^\vee$ descompone como suma directa de sumandos de tipo $\mathcal{O}_G(l)$, $\mathcal{Q}(l)$ y $\mathcal{S}(l)$.

Se considera ahora el siguiente diagrama conmutativo que define $\mathcal{P}'$ como un pull-back:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}^\vee & \longrightarrow & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{Q} & \longrightarrow & 0 \\
 & & || & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}^\vee & \longrightarrow & \mathcal{P}' & \longrightarrow & {\mathcal{O}_G}^{\oplus 5} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & \mathcal{S}^\vee & = & \mathcal{S}^\vee & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Como en la demostración del Teorema 1.3.3, la sucesión exacta horizontal del medio escinde por no tener $\mathcal{F}$ cohomología intermedia. Por tanto, el resultado se seguirá si la sucesión exacta vertical del medio también escinde (ésta es la única dificultad que no apareció en el Teorema 1.3.3 y que aparecerá en el resto de las demostraciones). Para demostrar esto, estudiamos los sumandos directos de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{P},\mathcal{S}^\vee) \cong H^1(\mathcal{P}^\vee \otimes \mathcal{S}^\vee)$ correspondientes a la descomposición de $\mathcal{P}$ en suma directa. Sólo un sumando del tipo $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ (si existe) produce un sumando no nulo $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{Q},\mathcal{S}^\vee) \subset \mathrm{Ext}^1(\mathcal{P},\mathcal{S}^\vee)$. Pero entonces la componente correspondiente del elemento $\xi \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{P},\mathcal{S}^\vee)$ definido por la extensión vertical debe ser cero. En efecto, ξ es la imagen de la extensión universal 1.2.1 bajo el morfismo $\pi^* : \mathrm{Ext}^1(\mathcal{Q},\mathcal{S}^\vee) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{P},\mathcal{S}^\vee)$ inducido por la proyección $\pi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ en la sucesión 1.3.2. Ya que ésta no escinde y los únicos endomorfismos de $\mathcal{Q}$ son la multiplicación por constantes, se sigue que la restricción de π a cualquier sumando directo $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ es necesariamente cero. Por tanto la correspondiente componente de ξ (obtenida como imagen en la composición $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{Q},\mathcal{S}^\vee)\xrightarrow{\pi^*}\mathrm{Ext}^1(\mathcal{P},\mathcal{S}^\vee)\xrightarrow{i^*}\mathrm{Ext}^1(\mathcal{Q},\mathcal{S}^\vee)$, donde i es la inclusión) es cero, ya que $i\pi = 0$.

□

Finalmente, se demuestra el teorema que caracteriza cohomológicamente los fibrados vectoriales universales de $G(1,4)$.

Teorema 1.3.5. *Sea $\mathcal{F}$ un fibrado vectorial indescomponible sobre $G(1,4)$. Entonces $\mathcal{F}$ es, salvo twist con un fibrado lineal, o bien el fibrado trivial, o bien $\mathcal{Q}$, o bien $\mathcal{S}$, o bien $\mathcal{S}^\vee$ si y sólo si las siguientes condiciones se verifican:*

i.- $\mathcal{F}$ no tiene cohomología intermedia

ii.- $h^i(\mathcal{F} \otimes \mathcal{Q}(l)) = 0$ para cualquier $i = 2,3,4$ y $l \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Se utiliza ahora inducción sobre $\sum_l h^1(\mathcal{F} \otimes \mathcal{Q}(l))$, siendo el caso igual a cero consecuencia inmediata del Teorema 1.3.4. Así que de nuevo se puede suponer que $h^1(\mathcal{F} \otimes \mathcal{Q}(-1)) \neq 0$. Por tanto, existe un elemento no cero en $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{Q},\mathcal{F})$, el cual genera una extensión no trivial

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0.$$

Como en el teorema anterior, $\mathcal{P}$ todavía satisface las condiciones $i.-$ y $ii.-$ y además $h^1(\mathcal{P}\otimes\mathcal{Q}(l)) = h^1(\mathcal{F}\otimes\mathcal{Q}(l))$ para cualquier l, excepto para $l=-1$ para el cual $h^1(\mathcal{P}\otimes\mathcal{Q}(-1)) = h^1(\mathcal{F}\otimes\mathcal{Q}(-1))-1$. Así, por hipótesis de inducción, $\mathcal{P}$ descompone como suma directa de sumandos del tipo $\mathcal{O}_G(l)$, $\mathcal{Q}(l)$, $\mathcal{S}(l)$ y $\mathcal{S}^\vee(l)$.

Finalmente, se considera el siguiente diagrama conmutativo que define a $\mathcal{P}'$ como un pull-back:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{Q} & \longrightarrow & 0 \\
 & & || & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{P}' & \longrightarrow & {\mathcal{O}_G}^{\oplus 5} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & \mathcal{S}^\vee & = & \mathcal{S}^\vee & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

La sucesión exacta horizontal escinde como en los teoremas anteriores, y demostrar que la sucesión exacta vertical escinde también se hace como en el Teorema 1.3.4 (porque $\mathcal{Q}$ no tiene más endomorfismos que las multiplicaciones por constantes). Esto permite terminar la demostración. $\square$

1.4. Fibrados vectoriales sin cohomología intermedia.

Se continúa aquí la estrategia seguida en la sección previa. La diferencia ahora es que no se obtendrá un número finito de fibrados vectoriales cuando se elimina cualquiera de las condiciones del Teorema 1.3.5 $ii.-$.

Teorema 1.4.1. *Sea $\mathcal{F}$ un fibrado vectorial indescomponible sobre $G(1,4)$. Entonces $\mathcal{F}$ es, salvo twist con un fibrado lineal, o bien el fibrado lineal trivial, o bien $\mathcal{Q}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}^\vee$, o bien un fibrado vectorial de tipo (I) si y sólo si las siguientes condiciones se verifican:*

i.- $\mathcal{F}$ no tiene cohomología intermedia

ii.- $h^i(\mathcal{F}\otimes\mathcal{Q}(l))=0$ para cualquier $i=3,4$ y $l\in\mathbb{Z}$.

Demostración. Se utiliza ahora inducción sobre $\sum_l h^2(\mathcal{F}\otimes\mathcal{Q}(l))$, y como siempre el caso igual a cero es el teorema previo, en este caso el Teorema 1.3.5. Se puede suponer por tanto que $h^2(\mathcal{F}\otimes\mathcal{Q}(-2))\neq 0$. Así, tomando cohomología en la sucesión dual de la universal (1.2.1) tensorizada por $\mathcal{F}(-1)$ existe un elemento no cero en $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{S}^\vee(1),\mathcal{F})$, el cual da una extensión no trivial

$$0\longrightarrow\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{S}^\vee(1)\longrightarrow 0.$$

Como en las demostraciones de la sección precedente, $\mathcal{P}$ todavía satisface las condiciones $i.-$ y $ii.-$ y además $h^2(\mathcal{P}\otimes\mathcal{Q}(l))=h^2(\mathcal{F}\otimes\mathcal{Q}(l))$ para cualquier l, excepto para $l=-2$ en cuyo caso $h^2(\mathcal{P}\otimes\mathcal{Q}(-2))=h^2(\mathcal{F}\otimes\mathcal{Q}(-2))-1$. Luego por hipótesis de inducción, $\mathcal{P}$ descompone como suma directa de sumandos del tipo $\mathcal{O}_G(l)$, $\mathcal{Q}(l)$, $\mathcal{S}(l)$, $\mathcal{S}^\vee(l)$ y twists de fibrados vectoriales de tipo (I).

Ahora se considera el siguiente diagrama conmutativo que define $\mathcal{P}'$ con un pullback, y en el que la columna derecha es la segunda sucesión exacta corta de (1.2.3):

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{S}^\vee(1) & \longrightarrow & 0\\
 & & || & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{P}' & \longrightarrow & {\mathcal{O}_G}^{\oplus 10} & \longrightarrow & 0\\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & \mathcal{K} & = & \mathcal{K} & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

La sucesión exacta horizontal del medio escinde como en los teorema anteriores, porque $\mathcal{F}$ no tiene cohomología intermedia. En cuanto a la sucesión exacta vertical del medio, la principal diferencia ahora con las demostraciones precedentes es que el elemento de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{P},\mathcal{K})$ que define la extensión puede tener componentes no nulas diferentes de las correspondientes a posibles sumandos $\mathcal{S}^\vee(1)\subset\mathcal{P}$ (que como las otras veces se demuestra que producen una coordenada cero). En efecto, un sumando directo de tipo (I) (se incluyen aquí los posibles sumandos $\mathcal{S}\subset\mathcal{P}$) podría crear un sumando no nulo de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{P},\mathcal{K})$. Descompondremos entonces $\mathcal{P}=\mathcal{P}_1\oplus\mathcal{P}_2$, donde $\mathcal{P}_1$ es una suma de fibrados vectoriales de tipo (I) y $\mathcal{P}_2$ no tiene ningún sumando de tipo (I). Como además $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{P},\mathcal{K})=\mathrm{Ext}^1(\mathcal{P}_1,\mathcal{K})\oplus\mathrm{Ext}^1(\mathcal{P}_2,\mathcal{K})$ y la segunda coordenada es cero, se puede construir el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & \mathcal{K} & = & \mathcal{K} & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{P}_2 & \longrightarrow & \mathcal{P}' & \longrightarrow & \mathcal{P}_1' & \longrightarrow & 0\\
 & & || & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{P}_2 & \longrightarrow & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P}_1 & \longrightarrow & 0\\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

que define a $\mathcal{P}'$ como un pull-back, (pues la columna central del último diagrama es la imagen de la extensión no trivial vertical de la derecha que pertenece a $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{P}_1,\mathcal{K})=\mathrm{Ext}^1(\mathcal{P},\mathcal{K})$). Por otro lado, como la última fila es trivial y su imagen (porque $\mathcal{P}'$ es un pull-back) es la fila central del diagrama, ésta es también una extensión trivial. Así, $\mathcal{P}'\cong\mathcal{P}_1'\oplus\mathcal{P}_2$.

Por último, de la sucesión exacta

$$0\longrightarrow\mathcal{K}\longrightarrow\mathcal{P}_1'\longrightarrow\mathcal{P}_1\longrightarrow 0$$

que define a $\mathcal{P}_1'$, se sigue que este es una suma directa de fibrados vectoriales de tipo (I).

En efecto, se puede construir el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{K}^i & \longrightarrow & 0 \\
 & & || & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{P}'_1 & \longrightarrow & \mathcal{P}'_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & \mathcal{S}^j & = & \mathcal{S}^j & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

y ya que $H^1(\mathcal{K}^\vee \otimes \mathcal{K}) = 0$, se tiene que $\mathcal{P}'_1$ es también un fibrado de tipo (I). Esto completa la demostración. $\square$

Teorema 1.4.2. *Sea $\mathcal{F}$ un fibrado vectorial indescomponible sobre $G(1,4)$. Entonces $\mathcal{F}$ es, salvo twist con un fibrado lineal, o bien el fibrado lineal trivial, o bien $\mathcal{Q}$, o bien $\mathcal{S}$, o bien $\mathcal{S}^\vee$, o bien un fibrado vectorial de tipo (II), o bien el dual de un fibrado vectorial de tipo (II) si y sólo si las siguientes condiciones se verifican:*

i.- $\mathcal{F}$ no tiene cohomología intermedia

ii.- $H^3(\mathcal{F} \otimes \mathcal{Q}(l)) = 0$ para cualquier $l \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Se utiliza inducción sobre $\sum_l h^4(\mathcal{F} \otimes \mathcal{Q}(l))$, y el caso igual a cero es el Teorema 1.4.1. Se puede suponer entonces que $h^2(\mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{Q}^\vee(-1)) = h^4(\mathcal{F} \otimes \mathcal{Q}(-4)) \neq 0$. Así, tomando cohomología en la sucesión dual de la universal (1.2.1) tensorizada por $\mathcal{F}^\vee$ existe un elemento no nulo en $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{S}^\vee(1), \mathcal{F}^\vee)$, el cual produce una extensión no trivial

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^\vee \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{S}^\vee(1) \longrightarrow 0.$$

Como siempre, el fibrado $\mathcal{P}^\vee$ todavía satisface las condiciones $i.-$ y $ii.-$ y además $h^4(\mathcal{P}^\vee \otimes \mathcal{Q}(l)) = h^4(\mathcal{F} \otimes \mathcal{Q}(l))$ para cualquier l, excepto para $l = -4$ en cuyo caso se verifica que $h^4(\mathcal{P}^\vee \otimes \mathcal{Q}(-4)) = h^4(\mathcal{F} \otimes \mathcal{Q}(-4)) - 1$. Por hipótesis de inducción, $\mathcal{P}^\vee$ (o equivalentemente $\mathcal{P}$) descompone como suma directa de sumandos de tipo $\mathcal{O}_G(l)$, $\mathcal{Q}(l)$, $\mathcal{S}(l)$, $\mathcal{S}^\vee(l)$ y twists de fibrados vectoriales de tipo (II) o de sus duales.

Ahora se considera el siguiente diagrama que define a $\mathcal{P}'$ como un pull-back:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}^\vee & \longrightarrow & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{S}^\vee(1) & \longrightarrow & 0 \\
 & & || & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}^\vee & \longrightarrow & \mathcal{P}' & \longrightarrow & {\mathcal{O}_G}^{\oplus 10} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & \mathcal{K} & = & \mathcal{K} & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

(donde la columna vertical derecha es de nuevo la segunda sucesión corta de (1.2.3)).

Una vez más, la sucesión exacta horizontal del medio escinde, y la única componente distinta de cero (que corresponde a sumandos directos de $\mathcal{P}$) en el elemento $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{P}, \mathcal{K})$ que define la extensión vertical del medio puede ser aquella que viene de los posibles sumandos de tipo (II) de $\mathcal{P}$ (como en las demostraciones precedentes, las coordenadas correspondientes a posibles factores $\mathcal{S}^\vee(1)$ son cero). Y como en la demostración del Teorema 1.4.1, consideramos $\mathcal{S}$ y $\mathcal{K}^\vee$ como fibrados vectoriales de tipo (II). Descomponemos ahora $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2$, donde $\mathcal{P}_1$ es una suma de fibrados vectoriales de tipo (II) y $\mathcal{P}_2$ no tiene ningún sumando de tipo (II). De nuevo como en el Teorema 1.4.1 se obtiene que $\mathcal{P}' \cong \mathcal{P}'_1 \oplus \mathcal{P}_2$, donde $\mathcal{P}'_1$ aparece en una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{P}'_1 \longrightarrow \mathcal{P}_1 \longrightarrow 0$$

y también que $\mathcal{P}'_1$ es por tanto una suma directa de fibrados vectoriales de tipo (II). Todo ello completa la demostración. $\square$

Se puede por fin establecer y demostrar el resultado de caracterización de fibrados vectoriales sobre $G(1,4)$ sin cohomología intermedia.

Teorema 1.4.3. *Un fibrado vectorial indescomponilbe sobre $G(1,4)$ sin cohomología es, salvo twist con un fibrado lineal, un fibrado vectorial de tipo (III).*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un fibrado vectorial sobre $G(1,4)$ sin cohomología intermedia. Se utiliza una vez más inducción sobre $\sum_l h^3(\mathcal{F}\otimes\mathcal{Q}(l))$, siendo el caso igual a cero el Teorema 1.4.2. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $h^3(\mathcal{F}\otimes\mathcal{Q}(-3))\neq 0$. Así, utilizando el dual de las sucesiones exactas (1.2.1) y (1.2.3) y la identificación $\bigwedge^2\mathcal{S}\cong\mathcal{S}^\vee(1)$, existe un elemento no cero en $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{K}(1),\mathcal{F})$, que genera una extensión no trivial

$$0\longrightarrow\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{K}(1)\longrightarrow 0. \tag{1.4.1}$$

Como siempre, $\mathcal{P}$ no tiene cohomología intermedia y $h^3(\mathcal{P}\otimes\mathcal{Q}(l))=h^3(\mathcal{F}\otimes\mathcal{Q}(l))$ para cualquier l, excepto para $l=-3$ para el cual $h^3(\mathcal{P}\otimes\mathcal{Q}(-3))=h^3(\mathcal{F}\otimes\mathcal{Q}(-3))-1$. Así, por hipótesis de inducción, $\mathcal{P}$ descompone como suma directa de twists de fibrados vectoriales de tipo (III).

Ahora se considera el siguiente diagrama conmutativo que define $\mathcal{P}'$ como un pull-back, y en el que la columna derecha es la sucesión exacta (1.2.7):

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{K}(1) & \longrightarrow & 0\\
 & & || & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{P}' & \longrightarrow & {\mathcal{O}_G}^{\oplus 25} & \longrightarrow & 0\\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & E(1) & = & E(1) & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

La sucesión exacta horizontal del medio escinde una vez más porque $\mathcal{F}$ no tiene cohomología intermedia. Mientras que para la sucesión exacta vertical del medio, se descompone $\mathcal{P}=\mathcal{P}_1\oplus\mathcal{P}_2$, donde $\mathcal{P}_1$ es una suma de fibrados vectoriales de tipo (III) y los sumandos de $\mathcal{P}_2$ no son de tipo (III), sino twists de fibrados vectoriales de tipo (III) por fibrados lineales no triviales. Como en las otras demostraciones de esta sección, es suficiente probar que el elemento $\xi \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{P}, E(1)) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{P}_1, E(1)) \oplus \mathrm{Ext}^1(\mathcal{P}_2, E(1))$ que corresponde a la extensión vertical del medio tiene cero como segunda componente de esta descomposición.

La dificultad extra ahora es que, si un sumando $H \subset \mathcal{P}_2$ produce un sumando distinto de cero $\mathrm{Ext}^1(H, E(1)) \subset \mathrm{Ext}^1(\mathcal{P}_2, E(1))$, no es necesariamente $H = \mathcal{K}(1)$, sino que podría ocurrir, más en general, que $H(-1)$ sea un fibrado vectorial de tipo (III). En este caso, H es un sumando directo de un fibrado vectorial $\mathcal{G}(1)$ que aparece en una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow E(2)^{\oplus i} \oplus \mathcal{K}(1)^{\oplus j} \oplus \mathcal{S}^{\vee}(1)^{\oplus k} \longrightarrow \mathcal{G}(1) \longrightarrow \mathcal{S}(1)^{\oplus l} \oplus \mathcal{K}^{\vee}(1)^{\oplus m} \oplus \mathcal{Q}(1)^{\oplus n} \longrightarrow 0$$

Por reducción al absurdo, supóngase que la componente de ξ en $\mathrm{Ext}^1(H, E(1))$ no es cero. Entonces, al menos un sumando $\mathcal{K}(1)$ de esta sucesión exacta debe producir un morfismo distinto de cero

$$\mathcal{K}(1) \subset E(2)^{\oplus i} \oplus \mathcal{K}(1)^{\oplus j} \oplus (\mathcal{S}^{\vee}(1))^{\oplus k} \longrightarrow \mathcal{G}(1) \longrightarrow H \subset \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{K}(1)$$

(la proyección $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{K}(1)$ es la dada en 1.4.1). Como los únicos endomorfismos de $\mathcal{K}$ son la multiplicación por constantes, esto implica que la proyección $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{K}(1)$ tiene una sección, así que la extensión 1.4.1 ha de ser trivial, lo cual es una contradicción. $\square$

Capítulo 2

Ejemplos de congruencias.

En este capítulo se recuerdan las tablas de clasificación dadas en [ABT98] de las congruencias de $G(1,4)$ de grado menor o igual que 8 y se explica la construcción de algunas de ellas (construyendo además la única que en [ABT98] no se sabía si existía). Entre ellas estarán todas las que tienen el fibrado universal $\mathcal{Q}_{|Y}$ escindido en suma directa de dos fibrados lineales, a cuya clasificación se dedicará el capítulo siguiente. En una primera sección se recuerdan los resultados generales de clasificación. En la segunda, se estudian en detalle los ejemplos que nos interesarán para el capítulo siguiente. Se termina con una sección demostrando que sólo una congruencia de $G(1,4)$ con recta fundamental no es linealmente normal.

2.1. Algunos resultados de clasificación de congruencias de $G(1,4)$.

En primer lugar, en el Cuadro 2.1 se recuerda la clasificación de las posibles congruencias de $G(1,4)$ de bigrado (a,b) de grado $a+2b \leq 8$ obtenidas en [ABT98]. De buena parte de los casos se da con una construcción explícita. Las construcciones se dan mediante lugares de dependencia de un morfismo de fibrados vectoriales o mediante la intersección de tales lugares con un hiperplano o una hipersuperficie. Los invariantes de estos ejemplos se han obtenido con la ayuda del programa Schubert ([KS]). Cabe añadir que la construcción de tipo 15) es nueva, ya que su existencia quedaba sin decidir en [ABT98]. Por tanto, el Cuadro 2.1 de la página 79 es ahora una clasificación completa.

Recordamos ahora de [ABT94] la clasificación de congruencias con curva fundamental (aunque allí está hecho para una Grassmanniana de rectas arbitraria, damos aquí sólo el caso $n = 4$).

Teorema 2.1.1. *Las congruencias Y de $G(1,4)$ con curva fundamental C son:*

i.- Si C es una recta, entonces o bien Y es la intersección en el $\mathbb{P}^9$ de Plücker de $\Omega(C, \mathbb{P}^4)$ con una hipersuperficie de grado d (en cuyo caso Y tiene bigrado (d, d)) o bien existe un hiperplano $H \subset \mathbb{P}^4$ que contiene a C, tal que $Y \cup \Omega(C, H)$ es la intersección de $\Omega(C, \mathbb{P}^4)$ con una hipersuperficie de grado d (y entonces Y tiene bigrado $(d, d-1)$).

ii.- Y es un scroll en planos sobre C y entonces o bien C es una cónica, $b = 2$ y $a = 1$ (caso 7) del Cuadro 2.1) o $a = 2$ (caso 11) del Cuadro 2.1), o bien C es una cúbica plana con $a = b = 3$;

iii.- La curva C es una cúbica plana con $a = 3$ y $b = 6$.

La última clasificación que recordamos es la de congruencias de rectas en $\mathbb{P}^4$ con estructura de fibrado en cuádricas y sin curva fundamental. En [ABT00] se clasifican las congruencias Y de $G(1, n)$ que son fibrados en cuádricas sobre una curva C de género g. En concreto, en la Grassmanniana $G(1,4)$ para tales congruencias existe un morfismo $\pi : Y \longrightarrow C$ de manera que la fibra general en un punto de C, $Q_p = \pi^{-1}(p)$ tiene grado dos en el $\mathbb{P}^9$ de Plücker. Por tanto, la clase de Q_p en $G(1,4)$ es $a\Omega(0,3) + b\Omega(1,2)$ con $a + b = 2$. A nosotros nos interesarán las congruencias en que $a = b = 1$, es decir, que cada Q_p es una cuádrica dentro de una $G(1,3) \subset G(1,4)$, y además que C sea racional. La clasificación de las congruencias de este tipo se resume en la tabla 2.2 de la página 80:

Analizamos ahora algunos de los tipos particulares de congruencias que han aparecido en el Cuadro 2.1, centrándonos en las propiedades que nos servirán en el capítulo siguiente.

Cuadro 2.1: Congruencias de $G(1,4)$ de grado $a+2b \leq 8$

	(a,b)	Descripción	Existencia en $G(1,4)$
1)	$(1,0)$	$\mathbb{P}^3$	Una sección de $\mathcal{S}$
2)	$(0,1)$	Cuádrica	Sección hiperplana de una sección de $\mathcal{Q}$
3)	$(1,1)$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$	Sección hiperplana de dos secciones de $\mathcal{S}$
4)	$(0,2)$	Scroll sobre $\mathbb{P}^1$	Dos secciones de $\mathcal{Q} \oplus \mathcal{Q}$
5)	$(0,2)$	Threefold de Del Pezzo	Sección hipercuádrica de una sección de $\mathcal{Q}$
6)	$(2,1)$	Scroll sobre $\mathbb{P}^1$	Dos secciones de $\mathcal{S} \oplus \mathcal{O}(1)$
7)	$(1,2)$	Scroll sobre $\mathbb{P}^1$	con cónica fundamental
8)	$(1,2)$	Threefold de Del Pezzo	Una sección de $\mathcal{O}(1)^{\oplus 3}$
9)	$(0,3)$	Scroll sobre $\mathbb{P}^1$	Con curva de planos fundamentales
10)	$(0,3)$	Variedad de Mukai	Sección hipercúbica de una sección de $\mathcal{Q}$ (intersección completa)
11)	$(2,2)$	Scroll sobre $\mathbb{P}^1$	Tres secciones de $\mathcal{S} \oplus \mathcal{Q}$ (con cónica fundamental)
12)	$(2,2)$	Threefold de Del Pezzo $(\mathbb{P}(\mathrm{T}_{\mathbb{P}^2}))$	ver la construcción hecha en el Ejemplo 2.1.10
13)	$(2,2)$	Fibrado en cuádricas sobre $\mathbb{P}^1$	Sección hipercuádrica de dos secciones de $\mathcal{S}$ (con recta fundamental)
14)	$(1,3)$	Fibrado en cuádricas sobre $\mathbb{P}^1$	Sección hiperplana de dos secciones de $\mathcal{Q} \oplus \mathcal{O}(1)$
15)	$(3,2)$	Threefold de Del Pezzo (explosión de $\mathbb{P}^3$ en un punto)	Proyección desde $G(1,6)$ de Y inmersa con $\mathcal{O}(H) \oplus \mathcal{O}(H-E)$ (ejemplo 0.4.24)
16)	$(3,2)$	Fibrado en cuádricas sobre $\mathbb{P}^1$	Dos secciones de $\mathcal{S} \oplus \mathcal{O}(2)$ (con recta fundamental)
17)	$(0,4)$	Threefold de Veronese	Una sección de $\mathcal{S}^2\mathcal{Q}$
18)	$(0,4)$	Threefold de Calabi-Yau	Sección hipercuártica de una sección de $\mathcal{Q}$ (intersección completa)
19)	$(2,3)$	Fibrado en cuádricas sobre $\mathbb{P}^1$	Sección hiperplana de dos secciones de $\mathcal{S}^{\vee}(1)$
20)	$(2,3)$	Fibrado en rectas sobre $\mathbb{P}^2$	Sección hiperplana de tres secciones de $\mathcal{S} \oplus \mathcal{O}(1)$
21)	$(4,2)$	Threefold de Veronese	Cuatro secciones de $\mathcal{S}^{\oplus 2}$

Cuadro 2.2: Fibrados en cuádricas en $G(1,4)$ con fibra de clase $\Omega(0,3)+\Omega(1,2)$

Fibrados en cuádricas en $G(1,4)$ con fibra de clase $\Omega(0,3)+\Omega(1,2)$

	(a,b)	g	Descripción
a)	$(1,3)$	0	Tipo 14) del Cuadro 2.1
b)	$(1,4)$	0	$\mathcal{O}_G^{\oplus 2} \longrightarrow (\mathcal{Q}\oplus\mathcal{O}_G(1))^{\oplus 2}$
c)	$(2,3)$	0	Tipo 19) del Cuadro 2.1
d)	$(2,4)$	0	$\mathcal{O}_G^{\oplus 2} \longrightarrow \bigwedge^2 \mathcal{S}\oplus\mathcal{O}_G(1)$

Ejemplo 2.1.2. (Congruencia del tipo 1)). Sea Y una congruencia para la cual existe un punto $p \in \mathbb{P}^4$ por el que pasan todas las rectas de Y. Por razones de dimensión, es claro que Y es la congruencia de todas las rectas de $\mathbb{P}^4$ que pasan por p, ya que $\Omega(p,\mathbb{P}^4)$ es irreducible y de dimensión tres. Por la Proposición 0.3.26 la congruencia Y es el lugar de ceros de una sección global de $\mathcal{S}$ y su bigrado es $(1,0)$.

Cortando cada recta de Y con un hiperplano fijo $H \subset \mathbb{P}^4$ que no pase por p, se obtiene que $Y \cong \mathbb{P}^3$. Además $\mathcal{Q}_{|Y} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$ es el fibrado que da una inmersión en $G(1,4)$ (ver (0.3.10) en Observación 0.3.33).

Por último, es útil demostrar que la congruencia anterior es la única de bigrado $(1,0)$, es decir con clase $\Omega(0,4)$ en $A^3(G(1,4))$, (ver [ABT98] lema 4.1). En efecto, dada una congruencia Y' cuya clase de equivalencia sea $[Y'] = \Omega(0,4)$, entonces, ya que $\Omega(0,4)\Omega(2,3) = 0$ se sigue que un hiperplano general de $\mathbb{P}^4$ no contiene rectas de Y. Dualizando, la congruencia Y' se convierte en una familia de dimensión tres de planos de $\mathbb{P}^{4^*}$ de manera que un punto general no está en ninguno de ellos. Así, la unión de estos planos está contenida en una hipersuperficie V irreducible. Ahora bien, se trata de una hipersuperficie de $\mathbb{P}^{4^*}$ que contiene una familia de dimensión tres de planos. Por el Lema 0.4.15 se deduce que V es un hiperplano de $\mathbb{P}^{4^*}$. Volviendo ahora a dualizar, se sigue el resultado.

Ejemplo 2.1.3. (Congruencias de tipo 2)) Sea Y la congruencia descrita dentro de $G(1,4)$ como la sección hiperplana del lugar de ceros de una sección del fibrado cociente universal $\mathcal{Q}$. El lugar de ceros de una sección de $\mathcal{Q}$ es $c_2(\mathcal{Q}) = \Omega(\Pi, H)$, conjunto de rectas contenidas en un hiperplano $H \subset \mathbb{P}^4$, como se vio en la Proposición 0.3.26.

Por tanto

$$[Y] = \Omega(2,3) \cdot \Omega(2,4) = \Omega(1,3)$$

es decir, Y tiene bigrado $(0,1)$.

Por otro lado, como $G(1,3) \cong \Omega(\Pi, H)$ es un cuádrica de dimensión cuatro, Y, que es una sección hiperplana suya también es una cuádrica (de dimensión tres). Finalmente de la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}_{|_{G(1,3)}}(-1) \longrightarrow \mathcal{Q}_{|_{G(1,3)}} \longrightarrow \mathcal{Q}_{|_Y} \longrightarrow 0$$

se obtiene

$$h^0(\mathcal{Q}_{|_Y}) = 4.$$

Ejemplo 2.1.4. (Congruencias de tipo 3)) El cuadro 2.1 muestra que el único ejemplo de una congruencia Y de grado $a + 2b = 3$ es la definida por una sección hiperplana del lugar de dependencia de dos secciones de $\mathcal{S}$ y se tiene además (ver [ABT98]) que Y es el conjunto de rectas que unen un punto de una recta L y un punto de un plano Π (siendo L y Π disjuntos en $\mathbb{P}^4$).

Por la Proposición 0.3.26, el lugar de dependencia de dos secciones de $\mathcal{S}$ es $\Omega(L, \mathbb{P}^4)$, (que por otra parte es el cono del Teorema 2.1.1), y por tanto la clase de equivalencia de Y es

$$\Omega(1,4)\sigma_1 = \Omega(0,4) + \Omega(1,3),$$

es decir, tiene bigrado $(1,1)$.

Además, el fibrado que define la inmersión de Y en una Grassmanniana escinde, ya que por el Ejemplo 0.4.3, $\mathcal{Q}_{|_Y}$ es $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2}(1,0) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2}(0,1)$.

Esta congruencia es por tanto un ejemplo de congruencia con recta fundamental, L, de bigrado $(1,1)$ y con fibrado universal escindido y linealmente normal, puesto que $h^0(\mathcal{Q}_{|_Y}) = 5$.

Ejemplo 2.1.5. (Congruencia del tipo 6)) Por el Cuadro 2.1, la congruencia Y es un scroll sobre un $\mathbb{P}^1$ dada por el lugar de dependencia de dos secciones del fibrado $\mathcal{S}\oplus\mathcal{O}(1)$, luego bigrado $c_3(\mathcal{S}\oplus\mathcal{O}(1)) = 2\Omega(0,4)+\Omega(1,3))$. Utilizando el caso particular del Complejo de Eagon-Northcott descrito en el Corolario 0.2.7, se obtiene la resolución del haz de ideales de Y siguiente

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-2)^{\oplus 3} \longrightarrow \mathcal{S}(-2)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}(-1)^{\oplus 2} \longrightarrow \mathcal{S}(-1) \oplus \mathcal{S}^{\vee}(-1) \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow 0$$

que al tensorizarlo con $\mathcal{Q}$ y tomar cohomología (utilizando las tablas de cohomología del capítulo anterior), ya que $H^1(\mathcal{S}^{\vee} \otimes \mathcal{Q}(-1)) \cong \mathbb{C}$, se demuestra que $h^1(\mathcal{Q}\otimes\mathcal{I}_Y) = 1$. Luego la congruencia Y viene proyectada desde $G(1,5)$ a $G(1,4)$.

Ésta es una congruencia proyectada con recta fundamental (recta definida por las dos secciones de $\mathcal{S}$). Más precisamente, en [Alz86] la congruencia se describe de la siguiente manera: Dado un hiperplano H de $\mathbb{P}^4$ existe una recta distinguida L' y se fija una correspondencia φ entre los puntos de L y los planos que contienen a L' dentro de H, de modo que para cada punto p de la recta fundamental L el conjunto de las rectas de Y que pasan por p son las rectas que además están contenidas en el $\mathbb{P}^3$ generado por p y $\varphi(p)$. La variedad $\overline{Y} \subset G(1,5)$ que se proyecta a Y tiene la misma descripción, pero cambiando L y H por una recta $\overline{L}$ y un 3-plano $\overline{H}$ de $\mathbb{P}^5$ disjuntos entre sí. Como $\overline{Y}$ está contenida en el conjunto de rectas de $\mathbb{P}^5$ que cortan a $\overline{L}$ y $\overline{H}$, y por el Ejemplo 0.4.3 este conjunto es $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$ y $Q_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^3} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^3}(1,0) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^3}(0,1)$. Por tanto $\mathcal{Q}_{|_Y}$ también escinde.

En el Teorema 2.2.9 se demostrará que ésta es la única congruencia con recta fundamental no linealmente normal.

Ejemplo 2.1.6. (Congruencia del tipo 7)) La estructura de scroll en planos de esta congruencia viene dada de la siguiente forma ([ABT94]):

Existe una cónica fundamental C y una recta $L \subset \mathbb{P}^4$ que no corta al plano Π que contiene a la cónica. Fijado un punto $q \in C$ se considera el haz de rectas $\Omega(q,\Pi)$ (que está parametrizado por los puntos de C). Entonces para cada punto $p \in C$ se considera la recta $L_p = \langle q, p\rangle$ del haz $\Omega(q, \Pi)$ que une los puntos q y p, y se considera hiperplano H_p de $\mathbb{P}^4$ generado por L_p y L. Las rectas de la congruencia que pasan por p son todas las rectas que además están contenidas en H_p, es decir $\Omega(p, H_p) \cong \mathbb{P}^2$. De hecho la construcción dada en [ABT94] para un scroll en espacios lineales de dimensión $n-2$ sobre $\mathbb{P}^1$ (con cónica fundamental) en $G(1,n)$ es ésta que hemos indicado, simplemente cambiando L por un subespacio de codimensión 3. En particular, cortando con un hiperplano de $\mathbb{P}^4$ que contenga el plano Π se obtiene la congruencia lisa de bigrado $(1,2)$ en $G(1,3)$.

Observación 2.1.7. Se puede observar igualmente, que la construcción hecha para un n arbitrario en [ABT94], no sólo para los scrolls en planos sobre una cónica fundamental sino también para el caso del apartado *ii.*− del Teorema 2.1.1 con cúbica plana fundamental y de bigrado $(3,3)$ y el caso *iii.*− con cúbica plana del mismo, verifica la misma propiedad de restricción. En particular, nos interesará notar que, considerando de nuevo las rectas de un hiperplano H que contenga a la curva fundamental, se obtiene la correspondiente congruencia lisa de $\mathbb{P}^3$ con curva fundamental.

Ejemplo 2.1.8. (Congruencia de tipo 8)) Sea Y la intersección completa $(1,1,1)$, es decir el lugar de ceros de una sección de $\mathcal{O}(1)^{\oplus 3}$. Comprobemos que Y es una congruencia de $G(1,4)$ de bigrado $(1,2)$ y linealmente normal.

El bigrado se calcula tomando la clase de la sección hiperplana de $G(1,4)$ dentro del anillo de Chow, σ_1, y haciendo su auto-intersección tres veces. Como

$$(\sigma_1)^3 = (\Omega(1,4) + \Omega(2,3))\sigma_1 = \Omega(0,4) + 2\Omega(1,3)$$

se concluye que el bigrado es $(1,2)$.

Para ver que es linealmente normal se utiliza el Complejo de Eagon-Northcott enunciado en el Corolario 0.2.7, que en el caso de $\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}(1)^{\oplus 3}$ toma la forma

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-3) \longrightarrow \mathcal{O}(-2)^{\oplus 3} \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^{\oplus 3} \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow 0$$

y que al tensorizar por $\mathcal{Q}$ y tomar cohomología, implica que

$$H^1(\mathcal{Q} \otimes \mathcal{I}_Y) = 0,$$

luego Y es linealmente normal.

Ejemplo 2.1.9. (Congruencias del tipo 11)) Sea Y el lugar de dependencia de tres secciones de $\mathcal{Q} \oplus \mathcal{S}$. Comprobemos que es una congruencia de $G(1,4)$ proyectable desde $G(1,5)$ de bigrado $(2,2)$, cuyo fibrado universal no escinde, con cónica fundamental y con estructura de scroll en planos sobre dicha cónica.

En efecto, en primer lugar esta variedad es una congruencia de bigrado $(2,2)$, pues $c_3(\mathcal{S} \oplus \mathcal{Q}) = 2\Omega(0,4) + 2\Omega(1,3)$.

Por otro lado, para ver que viene proyectada de $G(1,5)$, basta ver que $h^0(\mathcal{Q}_{|_Y}) = 6$ o equivalentemente $h^1(\mathcal{Q} \otimes \mathcal{I}_Y) = 1$. Como ya hemos visto en el Ejemplo 0.4.29, existe una resolución

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^6(-2) \longrightarrow (\mathcal{S} \oplus \mathcal{Q})^{\oplus 3}(-2) \longrightarrow \mathcal{S}^\vee(-1) \oplus (\mathcal{S} \otimes \mathcal{Q})(-2) \oplus \mathcal{O}(-1) \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow 0. \tag{2.1.1}$$

que tensorizando por $\mathcal{Q}$, y usando las tablas de cohomología del capítulo anterior (en particular que $H^1(\mathcal{S}^\vee \otimes \mathcal{Q}(-1)) \cong \mathbb{C}$) se obtiene que

$$H^1(\mathcal{Q} \otimes \mathcal{I}_Y) \cong \mathbb{C}, \tag{2.1.2}$$

luego Y viene de $G(1,5)$.

Será útil hacer notar también que de (2.1.1) se deduce que $h^0(\mathcal{I}_Y(1)) = 1$. Esto implica que no existen dos planos Π_1 y Π_2 que corten a todas las rectas, ya que cada conjunto de rectas que cortan a un plano definen una sección hiperplana de $G(1,4)$, mientras que Y está sólo contenida en un hiperplano.

Para finalizar, veamos directamente que esta congruencia posee una cónica fundamental y es un scroll de planos sobre esa curva. (En ([ABT94]) está demostrado que la única congruencia con estas características posee una cónica fundamental y es un scroll en planos, pero aquí se dará una construcción explícita.)

Sea $s = (s_1, s_2, s_3) : \mathcal{O}^{\oplus 3} \longrightarrow \mathcal{Q} \oplus \mathcal{S}$ el morfismo cuyo lugar de generación es Y, y llámese $s_{\mathcal{Q}} : \mathcal{O}^{\oplus 3} \longrightarrow \mathcal{Q}$ y $s_{\mathcal{S}} : \mathcal{O}^{\oplus 3} \longrightarrow \mathcal{S}$ a las proyecciones de s a $\mathcal{Q}$ y a $\mathcal{S}$. Para cada sección de $\mathcal{Q} \oplus \mathcal{S}$, la proyección a $\mathcal{Q}$ consiste en dar un hiperplano, y la proyección a $\mathcal{S}$ en dar un punto de $\mathbb{P}^4$ y en general no son incidentes. Sea $E \subset H^0(\mathcal{Q} \oplus \mathcal{S})$, que es el lugar geométrico de las secciones s' de $\mathcal{Q} \oplus \mathcal{S}$ de manera que el punto definido por $(s')_{\mathcal{S}}$, está en el hiperplano definido por $(s')_{\mathcal{Q}}$. Tomando coordenadas $(x_0 : \cdots : x_4)$ en $\mathbb{P}^4$ y $(u_0 : \cdots : u_4)$ sus duales en $\mathbb{P}^{4^*}$, E (módulo multiplicación por constantes) se puede ver como la cuádrica definida por las ecuaciones

$$(u_0 : u_1 : u_2 : u_3 : u_4 : x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4) : \sum_{i=0}^{4} u_i x_i = 0.$$

Entonces, ya que

$$Y = \{l \in G(1,4) : rg(s_{1|_L}, s_{2|_L}, s_{3|_L}) \leq 2\}$$

se tiene que

$$l \in Y \Leftrightarrow \exists s' \in < s_1, s_2, s_3 >: s'_{|_L} = 0, \tag{2.1.3}$$

por tanto $s' \in E$ ya que L contiene el punto definido por $s'_{\mathcal{S}}$ y está en el hiperplano definido por $s'_{\mathcal{Q}}$.

Recíprocamente, si $s' \in E \cap \langle s_1, s_2, s_3 \rangle$, todas las rectas que pasan por el punto correspondiente a $s'_{\mathcal{S}}$ y contenidas en el hiperplano definido por $s'_{\mathcal{Q}}$ están en $(s')_0$, y por tanto en Y.

Sea $\mathbb{P}^2$ la red de secciones de $\mathcal{Q} \oplus \mathcal{S}$ definida por s. Su intersección con la cuádrica de $\mathbb{P}^9$ (de las secciones de $\mathcal{Q} \oplus \mathcal{S}$) definida por E es una cónica C, y se tiene un morfismo $\Pi : Y \longrightarrow C$ que asocia a cada l la sección s' descrita arriba. Por otra parte, s define otra red (que se puede identificar también con $\mathbb{P}^2$) de secciones de $\mathcal{S}$, y por tanto un plano en $\mathbb{P}^4$ en el que estará la imagen de la cónica C, que será una curva fundamental de Y. La fibra de Π es, como hemos visto, el conjunto de rectas que pasan por un punto (el correspondiente de C) y contenidas en un hiperplano que pasa por el punto. Por tanto, Π da una estructura de scroll.

Ejemplo 2.1.10. (Congruencias del tipo 12)) La proyectivización del fibrado tangente al plano proyectivo da una congruencia de bigrado $(2,2)$ que como variedad en $\mathbb{P}^9$ es una sección hiperplana de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$. De hecho, el proyectivizado del fibrado tangente del $\mathbb{P}^2$ se puede ver como la variedad de incidencia $Y \cong \{(x, L) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2^*} : x \in L\}$, y la ecuación de incidencia $\{(x_0 : x_1 : x_2 : u_0 : u_1 : u_2) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2^*} : \sum_{i=0}^{2} u_i x_i = 0\}$ es un hiperplano de la inmersión de Segre de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2^*}$ en $\mathbb{P}^9$ por medio del fibrado $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2*}}(1,1)$.

La construcción (obtenida en ([ABT98])) de esta congruencia es la siguiente: considérese la congruencia Y' definida como la sección hiperplana del lugar de dependencia de dos secciones de $\mathcal{S}^\vee(1)$. Como

$$c_2(\mathcal{S}^\vee(1)).\sigma_1 = 2\Omega(1,4) + 3\Omega(1,3)$$

Y' tiene bigrado $(2,3)$. Se verá ahora que $H^0(\mathcal{S}(1) \otimes \mathcal{I}_{Y'}) \neq 0$. Para ello basta utilizar la resolución del haz de ideales $\mathcal{I}_{Y'}$ de Y', dada por el Corolario 0.2.9. En este caso, puesto que Y' es la sección hiperplana de dos secciones de $\mathcal{S}^\vee(1)$, utilizando una vez más el Corolario 0.2.9, $\mathcal{I}_Y$ tiene una resolución

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^2(-1) \longrightarrow \mathcal{O}^2 \oplus \mathcal{S}^\vee \longrightarrow \mathcal{S}^\vee(1) \oplus \mathcal{O}(1) \longrightarrow \mathcal{I}_{Y'}(2) \longrightarrow 0,$$

de la cual al tensorizar por $\mathcal{S}(-1)$ se puede concluir que $H^0(\mathcal{I}_{Y'} \otimes \mathcal{S}(1)) \neq 0$.

Por tanto, Y' está contenida en una congruencia X definida por una sección de $\mathcal{S}(1)$. Como $c_3(\mathcal{S}(1)) = 4\Omega(0,4) + 5\Omega(1,3)$, X tiene bigrado $(4,5)$. Por la Proposición 2.5 de ([Arr98a]), la congruencia residual Y de Y' dentro del lugar de ceros de una sección general de $\mathcal{S}(1)$ es lisa. Y puesto que $X = Y \cup Y'$ y la clases dentro del anillo de Chow son aditivas, $[X] = [Y] + [Y']$, se sigue que

$$[Y] = (2,2).$$

Además, de [Arr98a] se sigue también que $\mathcal{I}_Y$ tiene una resolución que demuestra, al tensorizar por $\mathcal{Q}$, que $h^1(\mathcal{I}_Y \otimes \mathcal{Q}) = 1$, luego Y viene de $G(1,5)$. El hecho de que Y sea $\mathbb{P}(\mathrm{T}_{\mathbb{P}^2})$ implica que tiene dos estructuras de fibrado en rectas sobre $\mathbb{P}^2$. Además, cada una de estas estructuras produce un plano que corta a todas las rectas de Y (el plano se obtiene al variar el centro de los haces de rectas que son las fibras sobre $\mathbb{P}^2$). Por tanto, todas las rectas de Y cortan a dos planos Π y Π'. Como Y proviene de $\overline{Y} \subset G(1,5)$ no degenerada, Π y Π' tienen que ser imagen de dos planos $\overline{\Pi}, \overline{\Pi'} \subset \mathbb{P}^5$ disjuntos y todas las rectas de $\overline{Y}$ cortan a $\overline{\Pi}$ y $\overline{\Pi'}$. Como por el Ejemplo 0.4.3 el conjunto de rectas que cortan a $\overline{\Pi}$ y $\overline{\Pi'}$ es $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ sumergido en $G(1,5)$ por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2}(1,0) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2}(0,1)$, se sigue que $\mathcal{Q}_{|_Y}$ es escindido.

Obsérvese que $\mathbb{P}(\mathrm{T}_{\mathbb{P}^2})$ es la sección hiperplana de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$, pero en el espacio de Plücker de $G(1,4)$, este $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ no está contenido en $G(1,4)$, mientras que en el espacio de Plücker de $G(1,5)$, $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ sí está $G(1,5)$.

Ejemplo 2.1.11. (Congruencias del tipo 13)) En [ABT00] se prueba que ésta es la única congruencia de grado seis con estructura de fibrado en cuádricas sobre $\mathbb{P}^1$. Tiene además una recta fundamental y es la intersección de un hipercuádrica de $\mathbb{P}^4$ con el lugar de dependencia de dos secciones de $\mathcal{S}$ (ver el cuadro 2.1). Veamos que esta sección hipercuádrica es un congruencia de bigrado $(2,2)$ linealmente normal de $G(1,4)$.

En efecto, el bigrado se calcula observando que

$$c_2(\mathcal{S})2\sigma_1 = \Omega(1,4)2\Omega(2,4) = 2(\Omega(0,4) + \Omega(1,3))$$

y por tanto el bigrado de Y es $(2,2)$.

Para ver que es una congruencia linealmente normal se utiliza una vez más la resolución dada por el Corolario 0.2.9

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-3)^{\oplus 2} \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{S}(-3) \longrightarrow \mathcal{S}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2) \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow 0$$

de donde se deduce que $H^1(\mathcal{Q} \otimes \mathcal{I}_Y) = 0$ y por tanto Y es linealmente normal.

Ejemplo 2.1.12. (Congruencias de tipo 14)) Sea Y la sección hiperplana de dos secciones de $\mathcal{Q} \oplus \mathcal{O}(1)$. Como

$$c_2(\mathcal{Q} \oplus \mathcal{O}(1))\sigma_1 = \Omega(0,4) + 3\Omega(1,3)$$

Y es una congruencia de bigrado $(1,3)$. Además por el Corolario 0.2.9, de la resolución de la variedad de dimensión cuatro X generada por el lugar de dependencia de dos secciones de $\mathcal{Q} \oplus \mathcal{O}(1)$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{\oplus 2} \longrightarrow \mathcal{Q} \oplus \mathcal{O}(1) \longrightarrow \mathcal{I}_X(2) \longrightarrow 0$$

se obtiene una resolución de $\mathcal{I}_Y$, que es la siguiente:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-3)^{\oplus 2} \longrightarrow \mathcal{O}(-2)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{Q}(-3) \oplus \mathcal{O}(-3) \longrightarrow \mathcal{Q}(-2) \oplus \mathcal{O}(-1)^{\oplus 2} \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow 0$$

Tensorizando con $\mathcal{Q}$ y tomando cohomología resulta que $H^1(\mathcal{Q} \otimes \mathcal{I}_Y) = 0$ y la congruencia es linealmente normal.

Ejemplo 2.1.13. (Congruencias de tipo 16)) Sea Y el lugar de dependencia de dos secciones de $\mathcal{S} \oplus \mathcal{O}(2)$. Como el lugar de dependencia de dos secciones de $\mathcal{S}$ es $\Omega(L, \mathbb{P}^4)$, para cierta recta L, entonces L es una recta fundamental para Y. Además

$$c_3(\mathcal{S} \oplus \mathcal{O}(2)) = 3\Omega(0,4) + 2\Omega(1,3),$$

luego Y tiene bigrado $(3,2)$.

Veamos también que es una congruencia linealmente normal. Del Complejo de Eagon-Northcott se tiene la sucesión exacta siguiente

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-3)^{\oplus 3} \longrightarrow \mathcal{S}(-3)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}(-1)^{\oplus 2} \longrightarrow \mathcal{S}(-1) \oplus \mathcal{S}^{\vee}(-2) \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow 0.$$

Tras tensorizar con $\mathcal{Q}$, se concluye que $H^1(\mathcal{Q} \otimes \mathcal{I}_Y) = 0$, por lo que en efecto es linealmente normal.

Ejemplo 2.1.14. Congruencias de tipo 19) Sea Y la sección hiperplana de dos secciones de $\mathcal{S}^{\vee}(1)$. De nuevo por el Corolario 0.2.9, de la resolución de la variedad de dimensión cuatro X generada por el lugar de dependencia de dos secciones de $\mathcal{S}^{\vee}(1)$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{\oplus 2} \longrightarrow \mathcal{S}^{\vee}(1) \longrightarrow \mathcal{I}_X(2) \longrightarrow 0$$

se obtiene una resolución $\mathcal{I}_Y$, que es la siguiente:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-3)^{\oplus 2} \longrightarrow \mathcal{O}(-2)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{S}^\vee(-2) \longrightarrow \mathcal{S}^\vee(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow 0$$

Tensorizando con $\mathcal{Q}$ y tomando cohomología, puesto que $H^1(\mathcal{S}^\vee \otimes \mathcal{Q}(-1)) \cong \mathbb{C}$ resulta que $H^1(\mathcal{Q} \otimes \mathcal{I}_Y) \cong \mathbb{C}$. De modo que la congruencia Y viene proyectada desde $G(1,5)$ y de ninguna otra Grassmanniana de rectas de dimensión mayor.

Ejemplo 2.1.15. (Congruencias del tipo 21)) Construyamos por medio de fibrados la variedad de dimensión tres de Veronese que viene proyectada desde $G(1,7)$ que hemos construido mediante proyecciones en el Ejemplo 0.4.17.

Por [ABT98], Y es el lugar de dependencia de cuatro secciones de $\mathcal{S} \oplus \mathcal{S}$. Como

$$c_3(\mathcal{S} \oplus \mathcal{S}) = 4\Omega(0,4) + 2\Omega(1,3)$$

se demuestra una vez más que el bigrado de Y es $(4,2)$.

Por otro lado, sabemos por el Ejemplo 0.4.17 que ésta es una congruencia que se proyecta isomórficamente desde $G(1,7)$ en $G(1,4)$. Veamos que en efecto $h^1(\mathcal{Q} \otimes \mathcal{I}_Y) = 3$, usando de nuevo el Complejo de Eagon-Northcott

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{\oplus 10}(-2) \longrightarrow (\mathcal{S} \oplus \mathcal{S})^{\oplus 4}(-2) \longrightarrow \bigwedge^2 (\mathcal{S} \oplus \mathcal{S})(-2) \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow 0.$$

Tensorizado por $\mathcal{Q}$ y utilizando que

$$H^1((\mathcal{Q} \otimes \bigwedge^2 \mathcal{S})(-2))^{\oplus 2} \cong H^1((\mathcal{Q} \otimes \mathcal{S}^\vee)(-1))^{\oplus 2} \cong H^1((\mathcal{Q}^\vee \otimes \mathcal{S}^\vee))^{\oplus 2} \cong \mathbb{C}^2.$$

y que $H^1(\mathcal{Q}^\vee \otimes \mathcal{S} \otimes \mathcal{S})(-1))$ por el Ejemplo 1.1.4 es $\mathbb{C}$, se sigue que $H^1(\mathcal{Q} \otimes \mathcal{I}_Y) \cong \mathbb{C}^3$.

Ejemplo 2.1.16. (Congruencias fibradas en cuádricas de tipo b)) Sea Y el lugar de dependencia de dos secciones de $\mathcal{Q} \oplus \mathcal{O}(1)^{\oplus 2}$. Puesto que

$$c_3(\mathcal{Q} \oplus \mathcal{O}(1)) = \Omega(0,4) + 4\Omega(1,3)$$

el bigrado de Y es $(1,4)$. Por el corolario 0.2.7 del Complejo de Eagon-Northcott, se tiene la sucesión

$$0 \longrightarrow S^2\mathcal{O}(-3)^{\oplus 2} \longrightarrow \mathcal{O}^{\oplus 2} \otimes (\mathcal{Q} \oplus \mathcal{O}(1)^{\oplus 2})(-3) \longrightarrow (\bigwedge^2 \mathcal{Q} \oplus \mathcal{O}(1)^{\oplus 2})^\vee \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow 0$$

que es una resolución de $\mathcal{I}_Y$

$$0 \to \mathcal{O}(-3)^{\oplus 3} \to \mathcal{Q}(-3)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}(-2)^{\oplus 4} \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{Q}^\vee(-1)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}(-2) \to \mathcal{I}_Y \to 0$$

Tensorizando con $\mathcal{Q}$, tomando cohomología y haciendo unos cálculos sencillos resulta que $H^1(\mathcal{Q} \otimes \mathcal{I}_Y) = 0$. Por tanto la congruencia es linealmente normal.

Ejemplo 2.1.17. (Congruencias fibradas en cuádricas de tipo d)) Sea Y el lugar de dependencia de dos secciones de $\mathcal{S}^\vee(1) \oplus \mathcal{O}(1)$. Utilizando el Corolario 0.2.7, se tiene

$$0 \to (S^2\mathcal{O})(-3)^{\oplus 2} \longrightarrow \mathcal{O}^2 \otimes (\mathcal{S}^\vee(1) \oplus \mathcal{O}(1)) \otimes \mathcal{O}(-3) \to (\bigwedge^2 \mathcal{S}^\vee(1) \oplus \mathcal{O}(1))^\vee \to \mathcal{I}_Y \to 0$$

que da una resolución de $\mathcal{I}_Y$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-3)^{\oplus 3} \longrightarrow \mathcal{S}^\vee(-2)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}(-2)^{\oplus 2} \longrightarrow \mathcal{S}^\vee(-1) \oplus \mathcal{S}(-2) \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow 0$$

Tensorizando con $\mathcal{Q}$ y tomando cohomología como $H^1(\mathcal{Q} \otimes \mathcal{S}^\vee(-1)) \cong \mathbb{C}$, se sigue que $H^1(\mathcal{Q} \otimes \mathcal{I}_Y) \cong \mathbb{C}$. Por tanto la congruencia es la proyección isomorfa de una variedad de $G(1,5)$.

2.2. Normalidad lineal de congruencias con recta fundamental.

En [ABT94] se da una clasificación (enunciada en esta memoria en el Teorema 2.1.1) de cuáles son todas las congruencias en $G(1,4)$ con curva fundamental, es decir, cuyas rectas cortan siempre una curva dada. Entre éstas, salvo para un número finito de familias, la curva es una recta. Se dedica esta sección a clasificar qué congruencias con recta fundamental están proyectadas desde una Grassmanniana de dimensión superior. El resultado será que la única congruencia en estas condiciones es la del Ejemplo 2.1.5.

La demostración de un teorema que demuestre la unicidad de las congruencias proyectables con recta fundamental necesita varios lemas y proposiciones que se enuncian y prueban a continuación.

Proposición 2.2.1. *La variedad de Schubert, $\Gamma = \Omega(L, \mathbb{P}^4)$, de las rectas de $\mathbb{P}^4$ que cortan a una dada L es un cono de base $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ (sumergido en $\mathbb{P}^5$ por la inmersión de Segre) y vértice el punto correspondiente por la inmersión de Plücker a la recta L. En particular, $\Omega(L, \mathbb{P}^4)$ está contenida en un $\mathbb{P}^6$ del $\mathbb{P}^9$ de Plücker.*

Demostración. Sea $l' \neq l$ un punto de $\Omega(L, \mathbb{P}^4)$. Entonces las rectas correspondientes de $\mathbb{P}^4$, L y L', se cortan, con lo que la recta $\langle l, l' \rangle$ del $\mathbb{P}^9$ de Plücker es el haz de rectas de $\mathbb{P}^4$ que pasan por $L \cap L'$ y contenidas en $\langle L, L' \rangle$. Por tanto, $\langle l, l' \rangle \subset \Omega(L, \mathbb{P}^4)$, con lo cual $\Omega(L, \mathbb{P}^4)$ es un cono de vértice l.

Para calcular la base del cono basta cortar Γ con una sección hiperplana de $\mathbb{P}^9$ que no pase por el vértice. Una sección hiperplana particular de la Grassmanniana es tomar un plano Π de $\mathbb{P}^4$ y considerar el conjunto $\Omega(\Pi, \mathbb{P}^4)$ de las rectas que cortan el plano Π. Además si Π y L no se cortan, entonces $\Omega(\Pi, \mathbb{P}^4)$ no pasa por el vértice del cono. La intersección $\Omega(L, \mathbb{P}^4) \cap \Omega(\Pi, \mathbb{P}^4)$ es el conjunto de las rectas de $\mathbb{P}^4$ que cortan simultáneamente a la recta L y al plano Π dado. Por tanto la base del cono se puede identificar con el conjunto de las rectas formadas al unir un punto arbitrario de L con un punto arbitrario de Π. Pero según vimos en el Ejemplo 0.4.3, esto no es sino la inmersión de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ en $G(1,4)$ mediante el fibrado $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2}(1,0) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2}(0,1)$, y por tanto, bajo la inmersión de Plücker es $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ sumergido por

$$\bigwedge^2 (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2}(1,0) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2}(0,1)) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2}(1,1)$$

en $\mathbb{P}^9$, es decir sumergido por la inmersión de Segre. $\square$

Nota 2.2.2. Obsérvese que el hecho de que Γ esté contenido en un $\mathbb{P}^6$ era conocido a priori. En efecto, Γ está contenida en el sistema lineal de dimensión dos de hiperplanos dado por las rectas que cortan a cada uno de los planos que contienen a L. En coordenadas, si $L = \langle x_0 = x_1 = x_2 = 0 \rangle$ entonces $\Omega(L, \mathbb{P}^4)$ es la intersección de $G(1,4)$ con el subespacio $p_{01} = p_{02} = p_{12} = 0$, con lo que quedan ecuaciones

$$\begin{aligned} p_{01} = p_{02} = p_{12} &= 0 \\ p_{03}p_{14} + p_{04}p_{13} &= 0 \\ p_{03}p_{24} + p_{04}p_{23} &= 0 \\ p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} &= 0 \end{aligned}$$

es decir, el cono de vértice $(p_{01} : \cdots : p_{24} : p_{34}) = (0 : \cdots : 0 : 1)$ (el punto L) y base el subconjunto de $p_{01} = p_{02} = p_{12} = p_{34} = 0$ de ecuaciones $rg \begin{pmatrix} p_{03} & p_{13} & p_{23} \\ p_{04} & p_{14} & p_{24} \end{pmatrix} = 1$ (que es la variedad de Segre).

Lema 2.2.3. *Sea Γ el cono de $G(1,4)$ descrito en la proposición anterior, entonces una desingularización del cono consiste en el fibrado proyectivo*

$$\widetilde{\Gamma} \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-1,-1))$$

y además, el morfismo de $\widetilde{\Gamma}$ a $G(1,4)$ viene definido por un fibrado $\mathcal{Q}_{\widetilde{\Gamma}}$ que aparece en la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,1)) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(E) \longrightarrow \mathcal{Q}_{\widetilde{\Gamma}} \longrightarrow p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(1,0)) \longrightarrow 0$$

donde $p : \widetilde{\Gamma} \longrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ es el morfismo de estructura y $\mathcal{O}(E)$ es el fibrado lineal tautológico cociente de $\widetilde{\Gamma}$.

Demostración. Se observa en primer lugar que la familia de los planos de $\mathbb{P}^4$ que contienen la recta L viene dada por el morfismo $\mathbb{P}^2 \longrightarrow G(2,4)$ definido por el fibrado ${\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}}^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$, donde ${\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}}^{\oplus 2} = H^0(\mathcal{O}_L(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$. Nótese que el único cociente canónico del fibrado es este último sumando (que corresponde a L), mientras que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ correspondería a fijar un plano de $\mathbb{P}^4$ que no contiene a la recta L. Así, el fibrado universal cociente de $G(2,4)$ restringido a $\mathbb{P}^2$ aparece de forma natural en la extensión

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \longrightarrow \overline{\mathcal{Q}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}{}^{\oplus 2} \longrightarrow 0$$

Por otra parte, para considerar las rectas de los planos que contienen a L, basta tomar el proyectivizado dual de $\overline{\mathcal{Q}}$; es decir, $X' = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}{}^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)) \longrightarrow \mathbb{P}^2$. Como dado un plano Π, el fibrado universal de rango dos de $G(1,\Pi)$ es $\mathcal{T}_\Pi(-1)$, la aplicación natural $X' \longrightarrow G(1,4)$ viene definida por $\mathcal{T}_{X'/\mathbb{P}^2}(-1)$, siendo $\mathcal{O}_{X'}(1)$ el fibrado lineal cociente tautológico y $\mathcal{T}_{X'/\mathbb{P}^2}$ el tangente relativo. Multiplicando todo por $\mathbb{P}^1 = L$, se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X = \mathbb{P}^1 \times X' & & \\ \big\downarrow p & \searrow^{\mathcal{T}_{X/\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-1)} & \\ \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 & & G(1,4) \end{array}$$

donde se puede escribir $X = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}{}^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,-1))$. Los puntos de X se pueden ver como ternas (p, Π, L'), donde $p \in L$, Π es un plano que contiene a L y $L' \subset \Pi$. Se quiere identificar ahora el subconjunto $\widetilde{\Gamma}$ de X para el cual $p \in L'$. Para ello se considera el siguiente diagrama de sucesiones exactas horizontales

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & & & \\ & & & & \uparrow & & & & \\ 0 \to & p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-1,0)) & \to & & p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}{}^{\oplus 2}) & \to & p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(1,0)) & \to & 0 \\ & & & & \uparrow & & & & \\ 0 \to & \mathcal{O}_X(-1) & \to & & p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}{}^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,1)) & \to & \mathcal{Q}_X & \to & 0 \\ & & & & \uparrow & & & & \\ & & & & \mathcal{O}_X{}^{\oplus 5} & & & & \end{array} \tag{2.2.1}$$

La primera sucesión horizontal es la sucesión exacta de Euler para la recta L y la segunda es la sucesión universal dual del fibrado proyectivo X. El cociente

$$\mathcal{O}_X{}^{\oplus 5} \longrightarrow p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2})^{\oplus 2} \longrightarrow p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(1,0))$$

define en cada punto (p, Π, L') el punto p dentro de $L \subset \mathbb{P}^4$, mientras que el cociente

$$\mathcal{O}_X{}^{\oplus 5} \longrightarrow p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}{}^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,1)) \longrightarrow \mathcal{Q}_X$$

define la recta $L' \subset \mathbb{P}^4$. Por tanto, la variedad de incidencia $\widetilde{\Gamma}$ consiste en los puntos para los que el morfismo $p^*(\mathcal{O}^{\oplus 2}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,1)) \longrightarrow p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(1,0))$ del diagrama 2.2.1 factoriza por $\mathcal{Q}_X \longrightarrow p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(1,0))$, es decir, donde el morfismo compuesto $\mathcal{O}_X(-1) \longrightarrow p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(1,0))$ es cero. Por tanto, $\widetilde{\Gamma}$ es el conjunto de cocientes

$$p^*(\mathcal{O}^2 \oplus \mathcal{O}(0,-1)) \longrightarrow \mathcal{O}_X(1)$$

tales que

$$p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-1,0)) \longrightarrow p^*(\mathcal{O}^{\oplus 2}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,-1)) \longrightarrow \mathcal{O}_X(1)$$

es cero. Como el conúcleo de

$$p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-1,0)) \longrightarrow p^*(\mathcal{O}^{\oplus 2}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,-1))$$

es $p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(1,0) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,-1))$ se tiene que

$$\widetilde{\Gamma} = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(1,0) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,-1))$$

como subfibrado proyectivo de $\mathbb{P}(\mathcal{O}^2 \oplus \mathcal{O}(0-1)) = X$. Si tensorizamos por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-1,0)$ podemos entonces escribir

$$\widetilde{\Gamma} = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-1,-1)),$$

y basta multiplicar por $p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-1,0))$ para obtener el fibrado tautológico $\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(E)$ de $\widetilde{\Gamma}$. Es decir,

$$\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(E) \cong \mathcal{O}_{X|\widetilde{\Gamma}}(1) \otimes p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-1,0)).$$

Por definición, sobre $\widetilde{\Gamma}$ tenemos un epimorfismo $\mathcal{Q}_{\widetilde{\Gamma}} \longrightarrow p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(1,0))$. Por otra parte, del diagrama 2.2.1 se deduce que $c_1(\mathcal{Q}_X) = \mathcal{O}_X(1) \otimes p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,1))$. Luego $c_1(\mathcal{Q}_X) = \mathcal{O}(E) \otimes \mathcal{O}(1,1)$ y por tanto el núcleo de $\mathcal{Q}_{\widetilde{\Gamma}} \twoheadrightarrow p^*(\mathcal{O}(1,0))$ es $p^*(\mathcal{O}(0,1)) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(E)$, con lo que se obtiene la sucesión exacta del enunciado

$$0 \longrightarrow p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,1)) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(E) \longrightarrow \mathcal{Q}_{\widetilde{\Gamma}} \longrightarrow p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(1,0)) \longrightarrow 0 \qquad (2.2.2)$$

□

Observación 2.2.4. Aunque no se necesita, es interesante observar que $\widetilde{\Gamma}$ es en realidad la explosión del cono $\Omega(L, \mathbb{P}^4)$ en su vértice y que E es el divisor excepcional de ésta.

Lema 2.2.5. *En las condiciones del lema anterior, se verifica que el divisor E de $\widetilde{\Gamma}$ consistente en las ternas (p, Π, L') con $L' = L$ se obtiene como el lugar de ceros de una sección de $\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(E)$, y además*

$$(p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,1)) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(E))_{|E} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-1,0),$$

(identificando E con $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$).

Demostración. Todo se reduce a observar que el divisor E se obtiene proyectivizando el cociente $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(1,1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}$, ya que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}$ define la contracción a un punto, precisamente el vértice del cono. Así, $E \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-1,-1))$, y el fibrado tautológico $\mathcal{O}(E)_{|E}$ es $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-1,-1)$ □

Como primer paso para demostrar que todas las congruencias con recta fundamental de $G(1,4)$ son linealmente normales veamos primeramente que $\widetilde{\Gamma}$ es linealmente normal. Esa es la conclusión del siguiente lema.

Lema 2.2.6. *En las condiciones del Lema 2.2.3, se verifican las siguientes afirmaciones:*

i.- $R^1p_*(p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,1)) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(E)) = 0$

ii.- $H^1(\widetilde{\Gamma}, p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,1)) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(E)) = 0$

iii.- $h^0(\widetilde{\Gamma}, \mathcal{Q}_{\widetilde{\Gamma}}) = 5$

Demostración. Para ver *i.*− se utiliza la fórmula de proyección (ver Proposición 0.2.11). Así,

$$R^1p_*(p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,1)) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(E)) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,1) \otimes R^1p_*(\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(E)).$$

Veamos que el factor $R^1p_*(\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(E)))$ del anterior fibrado es nulo. En efecto, por el Lema 2.2.3, el fibrado inversible $\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(E)$ es el fibrado hiperplano relativo de

$$\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-1,-1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2})\cong\widetilde{\Gamma},$$

por tanto $H^1(p^{-1}(p,\Pi),\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(E)_{|_{p^{-1}(p,\Pi)}})\cong H^1(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ es cero. Luego la Proposición 0.2.13 implica que el fibrado $R^1p_*(\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(E))$ es nulo, por lo que se verifica *i.–*.

Veamos que de esto último se sigue el punto *ii.–* del enunciado. En efecto, puesto que se verifica *i.–*, se sigue de la Proposición 0.2.15 que

$$\begin{aligned} H^1(\widetilde{\Gamma},p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,1))\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(E)) &= H^1(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2,p_*(p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,1))\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(E)))\\ &= H^1(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,1)\otimes p_*(\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(E))). \end{aligned}$$

donde la última igualdad es de nuevo la fórmula de proyección. Como $p_*(\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(E))\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-1,-1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}$, (ver la Proposición 0.2.12) por tanto

$$H^1(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,1)\otimes p_*(\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(E)))=H^1(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-1,0)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,1)).$$

Por último, la fórmula de Künneth, (ver Proposición 0.2.16), permite calcular la cohomología anterior

$$\begin{aligned} & H^1\big(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-1,0)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,1)\big)\cong\\ \cong\ & H^1\big(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-1,0)\big)\oplus H^1\big(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,1)\big)\cong\\ \cong\ & H^0\big(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)\big)\otimes H^1\big(\mathbb{P}^2,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}\big)\oplus H^1\big(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)\big)\otimes H^0\big(\mathbb{P}^2,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}\big)\oplus\\ \oplus\ & H^0\big(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\big)\otimes H^1\big(\mathbb{P}^2,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)\big)\oplus H^1\big(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\big)\otimes H^0\big(\mathbb{P}^2,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)\big)=0 \end{aligned}$$

Para terminar la demostración, falta probar el apartado *iii.–*, que significa que $\widetilde{\Gamma}$ es linealmente normal.

La sucesión exacta (2.2.2) obtenida en el Lema 2.2.3 produce la sucesión larga en cohomología

$$0\to H^0(\widetilde{\Gamma},p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,1))\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(E))\longrightarrow H^0(\widetilde{\Gamma},\mathcal{Q}_{\widetilde{\Gamma}})\to H^0(\widetilde{\Gamma},p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(1,0)))\to 0 \tag{2.2.3}$$

donde hemos usado que, por *ii.*– $H^1(p^*(\mathcal{O}(0,1)) \otimes \mathcal{O}(E)) = 0$. Hallamos la dimensión de $H^0(\widetilde{\Gamma}, \mathcal{Q}_{\widetilde{\Gamma}})$ calculando las dimensiones de los extremos. La de la derecha es claramente dos, y para la dimensión de la izquierda usaremos la sucesión exacta

$$0 \to p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,1)) \to p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,1)) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(E) \to (p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,1)) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(E))_{|E} \to 0.$$

Como $h^0(p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,1)) = 3$, basta ver que $h^0(p^*((\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,1)) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(E))_{|E}) = 0$. Ahora bien, por el Lema 2.2.5 se sabe que

$$(p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,1)) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(E))_{|E} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-1,0),$$

luego es inmediato que no tiene secciones. □

Nos centramos ya en las congruencias con recta fundamental

Observación 2.2.7. Con las mismas notaciones de los lemas precedentes, sea Y la congruencia con recta fundamental L, es decir $Y \subset \Gamma$ y sea $\widetilde{Y} = p^{-1}(Y) \subset \widetilde{\Gamma}$. En [ABT94] se demuestra que si Y es una congruencia con recta fundamental el fibrado $\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(-\widetilde{Y})$ sobre $\widetilde{\Gamma}$ es, o bien $\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(\widetilde{Y}) \cong p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(\alpha,\alpha)) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(\alpha E)$, o bien $\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(\widetilde{Y}) \cong p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(\alpha+1,\alpha)) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(\alpha E)$, con α un número entero no negativo. Además, allí se prueba también que para el primer caso, el bigrado de Y es (α,α) y en el segundo de bigrado $(\alpha+1,\alpha)$. Obsérvese que si α es cero, el único caso que tiene sentido es el segundo y resulta la congruencia del Ejemplo 2.1.2. Ésta es el conjunto de rectas que pasan por un punto p, y en realidad es un caso extremo de congruencia con recta fundamental (en el sentido de que cualquier recta que pase por p es fundamental, pues corta a todas las rectas de la congruencia). De todas formas sabemos que es linealmente normal. Si $\alpha = 1$, entonces las congruencias que salen son de bigrados $(1,1)$ y $(2,1)$. La primera es linealmente normal como se indica en el Ejemplo 2.1.4, mientras que para la segunda, el Ejemplo 2.1.5 demuestra que viene proyectada desde $G(1,5)$. Supondremos pues en lo que sigue que $\alpha \geq 2$.

Lema 2.2.8. *En las condiciones del Lema 2.2.3 y la Observación 2.2.7, si Y es una congruencia con recta fundamental L, con $\alpha \geq 2$, entonces $H^1(\widetilde{\Gamma}, \mathcal{Q}_{\widetilde{\Gamma}}(-\widetilde{Y})) = 0$.*

Demostración. De la sucesión exacta (2.2.2) del Lema 2.2.3, tensorizada por $\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(\widetilde{Y})$ se deduce que el lema quedará demostrado si se prueba que

$$H^1(\widetilde{\Gamma}, p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2})(1,0)(-\widetilde{Y})) = 0 \tag{2.2.4}$$

y

$$H^1(\widetilde{\Gamma}, p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,1)) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(E) \otimes p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2})(-\widetilde{Y})) = 0. \tag{2.2.5}$$

Demostraremos que estos dos grupos de cohomología son cero dependiendo de cada uno de los dos casos de $\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(\widetilde{Y})$ y usando la Proposición 0.2.14 y la fórmula de proyección.

Para (2.2.4), si $\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(\widetilde{\Gamma}) \cong p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(\alpha,\alpha)) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(\alpha E)$, la Proposición 0.2.14 afirma que basta demostrar

$$H^1\Big(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2, p_*[p^*\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(1-\alpha,-\alpha)\big) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(-\alpha E)]\Big) = 0, \tag{2.2.6}$$

y

$$H^0\Big(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2, R^1p_*[p^*\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(1-\alpha,-\alpha)\big) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(-\alpha E)]\Big) = 0, \tag{2.2.7}$$

y si $\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(\widetilde{\Gamma}) \cong p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(1+\alpha,\alpha)) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(\alpha E)$, basta demostrar

$$H^1\Big(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2, p_*[p^*\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-\alpha,-\alpha)\big) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(-\alpha E)]\Big) = 0, \tag{2.2.8}$$

y

$$H^0\Big(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2, R^1p_*[p^*\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-\alpha,-\alpha)\big) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(-\alpha E)]\Big) = 0. \tag{2.2.9}$$

Análogamente, para (2.2.5) si $\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(\widetilde{Y}) \cong p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(\alpha,\alpha)) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(\alpha E)$, basta demostrar

$$H^1\Big(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2, p_*[p^*\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-\alpha,1-\alpha)\big) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}((1-\alpha)E]\Big) = 0 \tag{2.2.10}$$

y

$$H^0\Big(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2, R^1p_*[p^*\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-\alpha, 1-\alpha)\big) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}((1-\alpha)E]\Big) = 0 \qquad (2.2.11)$$

y si $\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(\widetilde{Y}) \cong p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(1+\alpha, \alpha)) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(\alpha E)$ basta demostrar

$$H^1\Big(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2, p_*[p^*\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-\alpha-1, 1-\alpha)\big) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}((1-\alpha)E]\Big) = 0 \qquad (2.2.12)$$

y

$$H^0\Big(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2, R^1p_*[p^*\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-\alpha-1, 1-\alpha)\big) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}((1-\alpha)E]\Big) = 0. \qquad (2.2.13)$$

Demostramos finalmente, usando la fórmula de proyección (Proposición 0.2.11) cada una de las ocho igualdades (2.2.6)-(2.2.13).

Demostración de (2.2.6):

$$H^1\Big(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2, p_*[p^*\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(1-\alpha, -\alpha)\big) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(-\alpha E)]\Big) = 0.$$

Por la fórmula de proyección

$$p_*[p^*\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(1-\alpha, -\alpha)\big) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(-\alpha E)] \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(1-\alpha, -\alpha) \otimes p_*\big(\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(-\alpha E)\big),$$

y por la Proposición 0.2.12 *ii.*– $p_*(\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(-\alpha E)) = 0$ ya que $\alpha \geq 2$.

Demostración de (2.2.7):

$$H^0\Big(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2, R^1p_*[p^*\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(1-\alpha, -\alpha)\big) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(-\alpha E)]\Big) = 0.$$

De nuevo por medio de la fórmula de proyección, se tiene que:

$$\begin{aligned} & R^1p_*[p^*\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}\big)(1-\alpha, -\alpha) \otimes \mathcal{O}(-\alpha E)] \cong \\ \cong\ & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(1-\alpha, -\alpha))) \otimes R^1p_*(\mathcal{O}(-\alpha E)). \end{aligned}$$

Usando el apartado $v.-$ de la Proposición 0.2.12 y por el Lema 2.2.3 se tiene que

$$R^1p_*(\mathcal{O}(-\alpha E)) \cong p_*\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(\alpha-2)^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(1,1),$$

y puesto que $\alpha \geq 2$, se sigue de la Proposición 0.2.12 que

$$\begin{aligned} p_*\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(\alpha-2)^\vee &\cong S^{\alpha-2}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-1,-1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2})^\vee \cong \\ &\cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(\alpha-2,\alpha-2)\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(1,1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} R^1p_*(\mathcal{O}(-\alpha E)) &\cong p_*\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(\alpha-2)^\vee\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(1,1) \cong \\ &\cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(\alpha-1,\alpha-1)\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(2,2)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(1,1), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & H^0(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(1-\alpha,-\alpha)))\otimes R^1p_*(\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(-\alpha E)) \cong \\ \cong\; & H^0(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,-1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-1,-2)\oplus\cdots\oplus \\ & \oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(2-\alpha,1-\alpha)) = 0 \end{aligned}$$

que es cero para todo $\alpha \geq 2$, por la fórmula de Künneth (Proposición 0.2.16).

Demostración de (2.2.8):

$$H^1\Big(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2, p_*[p^*\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-\alpha,-\alpha)\big)\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(-\alpha E)]\Big) = 0.$$

Como para (2.2.6), de la fórmula de proyección y de la Proposición 0.2.12 apartado $ii.-$

$$p_*[p^*\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-\alpha,-\alpha)\big)\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(-\alpha E)] = 0$$

con lo que no tiene grupo de cohomología de orden uno.

Demostración de (2.2.9):

$$H^0\Big(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2, R^1p_*[p^*\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-\alpha,-\alpha)\big)\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(-\alpha E)]\Big) = 0.$$

Como en (2.2.7) por la fórmula de proyección,

$$R^1p_*[p^*\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-\alpha,-\alpha)\big)\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(-\alpha E)]\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-\alpha,-\alpha)\otimes R^1p_*\big(\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(-\alpha E)\big).$$

y por la expresión de $R^1p_*(\mathcal{O}(-\alpha E))$ ya obtenida entonces se sigue que

$$\begin{aligned} & H^0(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-\alpha,-\alpha)))\otimes R^1p_*(\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(-\alpha E))\cong \\ \cong\ & H^0(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-1,-1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-2,-2)\oplus\cdots\oplus \\ \oplus\ & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(1-\alpha,1-\alpha))=0. \end{aligned}$$

Demostración de (2.2.10):

$$H^1\Big(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2,p_*[p^*\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-\alpha,1-\alpha)\big)\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(1-\alpha)E)]\Big)=0.$$

De nuevo por la fórmula de proyección se tiene que

$$p_*(p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-\alpha,1-\alpha)\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(1-\alpha)E)\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-\alpha,1-\alpha)\otimes p_*\big(\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}((1-\alpha)E)\big)$$

y por la Proposición 0.2.12 *ii.–* $p_*(\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(1-\alpha)E)=0$ por ser $\alpha\geq 2$.

Demostración de (2.2.11):

$$H^0\Big(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2,R^1p_*[p^*\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-\alpha,1-\alpha)\big)\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(1-\alpha)E]\Big)=0.$$

Como antes por la fórmula de proyección se tiene que

$$R^1p_*[p^*\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-\alpha,1-\alpha)\big)\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(1-\alpha)E]=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-\alpha,1-\alpha)\otimes R^1p_*(\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(1-\alpha)E)$$

Usando de nuevo la Proposición 0.2.12 apartados *ii.–* y *v.–* se tiene que

$$\begin{aligned} R^1p_*(\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}((1-\alpha)E)) &\cong p_*(\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(\alpha-3))^\vee\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(1,1)\cong \\ &\cong S^{\alpha-3}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-1,-1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2})^\vee\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(1,1), \end{aligned}$$

o cero si $\alpha = 2$. Luego

$$H^0(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-\alpha, 1-\alpha) \otimes R^1 p_*((1-\alpha)E))) =$$
$$H^0(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-2,-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-3,-2) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(1-\alpha, 2-\alpha))) = 0$$

Demostración de (2.2.12):

$$H^1\Big(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2, p_*[p^*\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-\alpha-1, 1-\alpha)\big) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(1-\alpha)E]\Big) = 0.$$

De nuevo por la fórmula de proyección

$$\begin{aligned} & p_*[p^*\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-\alpha-1, 1-\alpha)\big) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(1-\alpha)E] = \\ = \; & \mathcal{O}(-\alpha-1, 1-\alpha) \oplus p_*(\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(1-\alpha)E) \end{aligned}$$

que es cero por la Proposición 0.2.12 *ii.*– si $\alpha \geq 2$. Cabe resaltar que es aquí donde falla la anulación para la congruencia del Ejemplo 2.1.5 , ya que si $\alpha = 1$ se obtiene $h^1(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2, p_*p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-2,0)) = 1$.

Demostración de (2.2.13):

$$H^0\Big(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2, R^1p_*[p^*\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-\alpha-1, 1-\alpha)\big) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(1-\alpha)E]\Big) = 0.$$

De la fórmula de proyección

$$R^1p_*[p^*\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-\alpha-1,1-\alpha)\big)\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(1-\alpha)E] = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-\alpha-1,1-\alpha)\otimes R^1p_*((1-\alpha)E))$$

por la expresión para $R^1p_*(\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}((1-\alpha)E)$ encontrada en la demostración de (2.2.11) se sigue que (si $\alpha \geq 3$)

$$H^0(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-\alpha-1, 1-\alpha) \otimes R^1 p_*((1-\alpha)E))) =$$
$$H^0(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-3,-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-4,-2) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(-\alpha, 2-\alpha))) = 0$$

$\square$

Podemos ya demostrar el teorema central de esta sección

Teorema 2.2.9. *Sea Y una congruencia de $G(1,4)$ con recta fundamental L que no sea la congruencia del Ejemplo 2.1.5. Entonces Y es linealmente normal.*

Demostración. Como Y posee recta fundamental ha de estar contenida en la variedad de Schubert $\Gamma \cong \Omega(L, \mathbb{P}^4)$. Sea $\widetilde{Y} = p^{-1}(Y) \subset \widetilde{\Gamma}$. Dado que el morfismo $\widetilde{\Gamma}$ en $G(1,4)$ está definido por el fibrado de rango dos $\mathcal{Q}_{\widetilde{\Gamma}}$, del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{Y} & \subset & \widetilde{\Gamma} & \xrightarrow{\mathcal{Q}_{\widetilde{\Gamma}}} & G(1,4) \\ \downarrow & & \downarrow & {\scriptstyle \mathcal{Q}_{\Gamma}} \nearrow & \\ Y & \subset & \Gamma & & \end{array}$$

se sigue que $p^*\mathcal{Q}_Y = \mathcal{Q}_{\widetilde{\Gamma}|\widetilde{Y}}$. Por tanto $H^0(Y, \mathcal{Q}_{|_Y}) \subset H^0(Y, p_*p^*\mathcal{Q}_{|_Y}) = H^0(\widetilde{Y}, \mathcal{Q}_{\widetilde{\Gamma}|\widetilde{Y}})$. Y la demostración se terminará si se prueba que $h^0(\mathcal{Q}_{\widetilde{\Gamma}|_{\widetilde{Y}}}) \leq 5$.

De la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(-\widetilde{Y}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}|_{\widetilde{Y}}} \longrightarrow 0$$

tensorizada con $\mathcal{Q}_{\widetilde{\Gamma}}$ y tomando cohomología, se sigue usando el Lema 2.2.8 que se tiene un epimorfismo

$$H^0(\mathcal{Q}_{\widetilde{\Gamma}}) \longrightarrow H^0(\mathcal{Q}_{\widetilde{\Gamma}|_{\widetilde{Y}}}) \longrightarrow 0, \tag{2.2.14}$$

y por tanto $h^0(\mathcal{Q}_{\widetilde{\Gamma}|\widetilde{Y}}) \leq h^0(\mathcal{Q}_{\widetilde{\Gamma}})$. Luego por el Lema 2.2.6 se tiene que $h^0(\mathcal{Q}_{\widetilde{\Gamma}|\widetilde{Y}}) \leq 5$. $\square$

Capítulo 3

Congruencias con fibrado universal cociente escindido.

Finalmente, en este último capítulo de la memoria, se da una clasificación de las congruencias Y de $G(1,4)$ que tienen el fibrado cociente universal escindido. En la primera sección enunciamos el teorema y dividimos la demostración en casos, dependiendo del número de secciones globales independientes de cada uno de los sumandos del fibrado. Los dos casos más complicados los trataremos cada uno en una sección.

3.1. Teorema de clasificación.

En el caso de congruencias en $\mathbb{P}^3$, Arrondo y Sols (ver [AS92] Proposición 5.7) clasifican aquéllas cuyo fibrado universal cociente escinde. El resultado preciso (que necesitamos más adelante) es el siguiente:

Proposición 3.1.1. *Las únicas congruencias de $G(1,3)$ con fibrado universal cociente escindido son:*

i.- $S = \mathbb{P}^2$, $\mathcal{Q}_{|S} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ *y bigrado* $(1,0)$.

ii.- $S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $\mathcal{Q}_{|S} = \mathcal{O}_S(1,0) \oplus \mathcal{O}_S(0,1)$ *y bigrado* $(1,1)$.

iii.- $S = \widetilde{\mathbb{P}^2}$ *es la explosión del plano en un punto,* $\mathcal{Q}_{|S} = \mathcal{O}_S(L-E) \oplus \mathcal{O}_S(L)$ *y bigrado* $(2,1)$.

iv.- $S = \mathbb{P}^2$, $\mathcal{Q}_{|_S} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ *y bigrado* $(3,1)$.

El resultado análogo para $\mathbb{P}^4$, a cuya demostración se dedica este capítulo, es el teorema siguiente:

Teorema 3.1.2. ***Teorema de clasificación.*** *Si* Y *es una congruencia de* $G(1,4)$ *tal que la restricción del fibrado cociente* $\mathcal{Q}$ *descompone, entonces el par* $(Y, \mathcal{Q}_{|_Y})$ *es uno de los siguientes:*

i.- $Y \cong \mathbb{P}^3$ *es la congruencia formada por todas las rectas que pasan por un punto* p *de* $\mathbb{P}^4$, *y* $\mathcal{Q}_{|_Y} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$. *El bigrado es* $(1,0)$ *(ver el Ejemplo 2.1.2).*

ii.- $Y \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ *y* $\mathcal{Q}_{|_Y} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(1,0) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2}(0,1)$. *El bigrado es* $(1,1)$ *(ver el Ejemplo 2.1.4).*

iii.- $Y \cong H \cap \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$ *es una sección hiperplana de* $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$ *y* $\mathcal{Q}_{|_Y} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^3}(1,0)_{|Y} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^3}(0,1)_{|Y}$. *El bigrado es* $(2,1)$ *(ver el Ejemplo 2.1.5).*

iv.- $Y \cong \mathbb{P}(\mathrm{T}_{\mathbb{P}^2})$ *es la variedad de incidencia de* $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2*}$ *definida por el fibrado escindido* $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^{2*}}(1,0) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^{2*}}(0,1)$. *El bigrado es* $(2,2)$ *(ver el Ejemplo 2.1.10).*

v.- $Y \cong \widetilde{\mathbb{P}^3}$ *es la explosión de* $\mathbb{P}^3$ *en un punto y* $\mathcal{Q}_{|_Y} = \mathcal{O}_Y(H) \oplus \mathcal{O}_Y(H-E)$, *donde* H *es un hiperplano de* $\mathbb{P}^3$ *y* E *es el divisor excepcional de la explosión. El bigrado es* $(3,2)$ *(ver el Ejemplo 0.4.24).*

vi.- $Y \cong \mathbb{P}^3$ *es la variedad de dimensión tres de Veronese y* $\mathcal{Q}_{|_Y} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$. *El bigrado es* $(4,2)$ *(ver el Ejemplo 2.1.15).*

A partir de ahora, Y denotará una congruencia de $G(1,4)$ cuyo fibrado universal cociente $\mathcal{Q}_{|_Y}$ escinde en suma directa de fibrados lineales y escribiremos $\mathcal{Q}_{|_Y} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$. Se supondrá también que $h^0(\mathcal{L}_1) \leq h^0(\mathcal{L}_2)$. Obsérvese que la descomposición de $\mathcal{Q}_{|_Y}$ implica que todas las rectas de Y cortan a los subespacios de $\mathbb{P}^4$ determinados por $H^0(\mathcal{L}_1)$ y por $H^0(\mathcal{L}_2)$. En particular, si $h^0(\mathcal{L}_1) = 1$, entonces Y tiene un punto fundamental, y como se observó en el Ejemplo 2.1.2, Y debe ser la congruencia del caso *i.–* del Teorema 3.1.2. Por tanto, se puede suponer que $h^0(\mathcal{L}_1) \geq 2$. Veamos primero cuáles son los posibles valores de $h^0(\mathcal{Q}_{|_Y})$.

Recordamos en primer lugar que cuando la dimensión del primer grupo de cohomología $H^0(\mathcal{Q}_{|Y})$, es mayor estrictamente que cinco, la congruencia Y no es linealmente normal en G, sino que proviene de $G(1,n)$ con $n = h^0(\mathcal{Q}_{|Y}) - 1 > 4$,

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[dr] & G(1,n) \arrow[d, dotted] \\ & G(1,4) \end{tikzcd} \tag{3.1.1}$$

donde la inmersión $Y \hookrightarrow G(1,n)$ está definida por $\mathcal{Q}_{|_Y}$.

Observación 3.1.3. Si $h^0(\mathcal{Q}_{|_Y}) \leq 4$, entonces $Y \subset G(1,H)$ para algún hiperplano $H \subset \mathbb{P}^4$, y $h^0(\mathcal{L}_1) = h^0(\mathcal{L}_2) = 2$. Por tanto, las rectas de Y cortan dos rectas disjuntas de H e Y estaría contenida en un variedad de dimensión dos, lo que es absurdo. Por tanto, se tiene siempre que $h^0(\mathcal{Q}_{|_Y}) \geq 5$.

Si $h^0(\mathcal{Q}_{|_Y}) = 5$ se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.1.4. *Las únicas congruencias Y de $G(1,4)$ que son variedades linealmente normales y cuyo fibrado universal $\mathcal{Q}_{|_Y}$ escinde son los casos i.– y ii.– del Teorema 3.1.2.*

Demostración. Como se ha indicado, si Y no es la congruencia del caso *i.–* del Teorema 3.1.2, entonces $h^0(\mathcal{L}_1) = 2$ y $h^0(\mathcal{L}_2) = 3$. Por tanto, la congruencia Y está contenida en

$$\Omega(L, \mathbb{P}^4) \cap \Omega(\Pi, \mathbb{P}^4),$$

donde L es una recta y Π un plano de $\mathbb{P}^4$ disjuntos entre sí definidos respectivamente por $H^0(\mathcal{L}_1)$ y $H^0(\mathcal{L}_2)$. Puesto que la codimensión de $\Omega(L, \mathbb{P}^4)$ es dos y la de $\Omega(\Pi, \mathbb{P}^4)$ es uno, la de su intersección es tres. Por tanto, por motivos de dimensión e irreducibilidad ambos conjuntos coinciden. Así, Y es el conjunto de las rectas de $\mathbb{P}^4$ que cortan una recta y un plano disjuntos dentro de $\mathbb{P}^4$, luego es la congruencia del Ejemplo 2.1.4. Exactamente el caso *ii.–* del Teorema 3.1.2. $\square$

Si por el contrario se tiene que $h^0(\mathcal{Q}_{|_Y}) \geq 6$, entonces se verifica:

Proposición 3.1.5. *Si Y es una congruencia de $G(1,4)$ tal que $\mathcal{Q}_{|_Y} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ con $h^0(\mathcal{Q}_{|_Y}) \geq 6$ y $h^0(\mathcal{L}_1) = 2$ entonces Y es la congruencia del Ejemplo 2.1.5 y $h^0(\mathcal{Q}_{|_Y}) = 6$ (por tanto, estamos en el caso iii.– del Teorema 3.1.2).*

Demostración. Como $h^0(\mathcal{L}_1) = 2$, la congruencia Y tiene recta fundamental definida por $H^0(\mathcal{L}_1)$ y como $h^0(\mathcal{Q}_{|_Y}) \geq 6$, Y no es linealmente normal. Por el Teorema 2.2.9 la única congruencia con recta fundamental no linealmente normal es la del Ejemplo 2.1.5, de modo que se sigue el resultado. $\square$

Por otra parte, se tiene siempre que $h^0(\mathcal{Q}_{|_Y}) \leq 8$ y en el caso en que sea exactamente $h^0(\mathcal{Q}_{|_Y}) = 8$ se tiene justamente el caso *vi.–* del Teorema 3.1.2, como se deduce del siguiente teorema demostrado en [Arr99]:

Teorema 3.1.6. *Sea Y una congruencia de $G(1,4)$ que es proyección isomorfa de una variedad tridimensional $\overline{Y}$ no degenerada de $G(1,7)$. Entonces Y es la variedad de Veronese del Ejemplo 2.1.15.*

Observación 3.1.7. Por tanto quedan por estudiar sólo dos casos: $h^0(\mathcal{Q}_{|_Y}) = 6$ y $h^0(\mathcal{L}_1) = h^0(\mathcal{L}_1) = 3$ y $h^0(\mathcal{Q}_{|_Y}) = 7$, $h^0(\mathcal{L}_1) = 4$, $h^0(\mathcal{L}_1) = 3$. Se dedican las dos secciones siguientes a estudiar ambos casos, viendo que el primero se da exactamente para el Ejemplo 2.1.10 (caso *iv.–* del Teorema 3.1.2), y que el segundo para el Ejemplo 0.4.24 (caso *v.–* del Teorema 3.1.2).

3.2. Congruencias proyectables desde $G(1,5)$ sin recta fundamental.

Para clasificar el caso $h^0(\mathcal{L}_1) = h^0(\mathcal{L}_2) = 3$, demostraremos en esta sección el siguiente teorema:

Teorema 3.2.1. *Sea $Y \subset G(1,4)$ una congruencia que es proyección isomorfa de una variedad no degenerada $Y' \subset G(1,5)$ tal que todas las rectas de Y' cortan a dos planos disjuntos de Π_1 y Π_2 de $\mathbb{P}^5$. Entonces Y es la congruencia del caso iv.− del Teorema 3.1.2.*

Demostración. El conjunto de rectas de $\mathbb{P}^5$ que cortan a Π_1 y Π_2 se puede identificar (ver Ejemplo 0.4.3) con $Z = \Pi_1 \times \Pi_2$ sumergido en $G(1,5)$ mediante $\mathcal{Q}_Z \cong \mathcal{O}_Z(1,0) \oplus \mathcal{O}_Z(0,1)$. Identificando Y' con Y, podemos ver Y como divisor de Z. El grupo de Picard, $Pic(Z)$, de Z está generado por las clases de las secciones hiperplanas de cada unos de los planos Π_1 y Π_2. Sea h_1 la sección hiperplana de Π_1, y h_2 la sección hiperplana de Π_2, entonces la clase de Y en el anillo de Chow $A(Z)$ de Z será de la forma

$$[Y]_Z = \alpha h_1 + \beta h_2, \tag{3.2.1}$$

para ciertos α y β en $\mathbb{Z}$. Del Ejemplo 0.4.27 se sigue que la relación entre el bigrado de Y en $G(1,5)$ (que es el mismo que en $G(1,4)$) y la clase de Y en Z es

$$a = \alpha + \beta = b. \tag{3.2.2}$$

La idea ahora es ver que el hecho de que Y se proyecte a $G(1,4)$ impone fuertes condiciones numéricas sobre α y sobre β.

En efecto, sea p el punto centro de proyección de $\mathbb{P}^5$ a $\mathbb{P}^4$ que induce la proyección $G(1,5) \dashrightarrow G(1,4)$. Si p está en Π_i para algún $i \in \{1,2\}$, la proyección de ese plano es una recta L de $\mathbb{P}^4$. Por tanto en este caso, la proyección de Y sería una congruencia en $\mathbb{P}^5$ con recta fundamental. Ya se ha visto (Teorema 2.2.9) que la única congruencia proyectada con recta fundamental es la del Ejemplo 2.1.5, que no tiene dos planos fundamentales.

Por tanto, p no está ni en Π_1 ni en Π_2, y la proyección de ambos planos Π_1 y Π_2 son otros dos planos de $\mathbb{P}^4$ pero que ahora se cortan en un punto. Sean entonces $p_2 = \langle p,\ \Pi_1\rangle \cap\ \Pi_2$ y $p_1 = \langle p,\ \Pi_2\rangle \cap\ \Pi_1$. Como $\langle p, \Pi_1\rangle \cap \langle p, \Pi_2\rangle$ tiene dimensión uno y contiene a los dos puntos anteriores p_1, p_2 y el centro de proyección p, se sigue que p, p_1, p_2 *son tres puntos alineados* (de hecho p_1 y p_2 se proyectan al mismo punto, al de intersección de las imágenes de Π_1 y Π_2).

La condición para que dos rectas L_1 y L_2 de $\mathbb{P}^5$ (que no pasen por p) se proyecten desde p en la misma recta de $\mathbb{P}^4$, es que el espacio que generan, $\langle L_1, L_2\rangle$, sea de dimensión dos y que contenga a p. En este caso, si los puntos $L_1 \cap \Pi_1$, $L_2 \cap \Pi_1$, $L_1 \cap \Pi_2$ y $L_2 \cap \Pi_2$ fueran distintos entonces los dos primeros generarían una recta de Π_1 y los dos últimos una recta de Π_2, que deberían cortarse por estar contenidas en el plano $\langle L_1, L_2\rangle$. Como Π_1 y Π_2 no se cortan, esto es un absurdo.

Por tanto, si L_1 y L_2 se proyecta a la misma recta de $\mathbb{P}^4$,

$$L_1 \cap L_2 \subset\ \Pi_1, \qquad \text{o bien} \qquad L_1 \cap L_2 \subset\ \Pi_2.$$

Si por ejemplo $L_1 \cap L_2 \subset \Pi_1$, entonces el plano $\langle L_1, L_2\rangle$ está generado por p y los respectivos puntos de intersección de L_1 y L_2 con Π_2. Por tanto, $\langle L_1, L_2\rangle \subset \langle p_1, \Pi_2\rangle$, por lo que necesariamente el punto de intersección de L_1 y L_2 (que es la intersección de L_1 y L_2) es p_1. De aquí se deduce también que $\langle L_1, L_2\rangle \cap \Pi_2$ es una recta L que contiene a p_2.

Es decir, todas las rectas de un haz $\Omega(p_1, \Pi)$ (resp. $\Omega(p_2, \Pi)$) donde Π es el plano generado por p_1 (resp. p_2) y una recta de Π_2 (resp. Π_1) que pasa por p_2 (resp. p_1) se proyecta en la misma recta.

En consecuencia, como Y es proyectable, el producto intersección en Z de Y con cada uno de los haces anteriores A es a lo más uno. La clase en Z de un haz de la forma $\Omega(p_1, \Pi)$ es ${h_1}^2 h_2$, por lo que

$$1 \geq [Y].h_1^2 h_2 = \alpha h_1^3 h_2 + \beta h_1^2 h_2^2 = \beta.$$

Análogamente, la clase de un haz de la forma $\Omega(p_2, \Pi)$ es $h_1{h_2}^2$, por lo que

$$\alpha \leq 1.$$

Por tanto, de (3.2.2) se obtiene que los posibles bigrados de Y en $G(1,4)$ son, $(1,1)$ o $(2,2)$.

La única congruencia de bigrado $(1,1)$ de $G(1,4)$ es la del Ejemplo 2.1.4, (ver Cuadro 2.1 en la sección 2.1). Pero hemos visto que es linealmente normal.

Para bigrado $(2,2)$, los únicos ejemplos posibles son (ver de nuevo la tabla 2.1 en la sección 2.1), el Ejemplo 2.1.9, el 2.1.10 y el 2.1.11. El Ejemplo 2.1.11 lo excluimos por ser linealmente normal, mientras que el Ejemplo 2.1.9 se excluye porque vimos que no tenía dos planos que cortaran a todas las rectas. Queda sólo el caso del Ejemplo 2.1.10 (caso *iv.*− del Teorema 3.1.2), que ya vimos que no es linealmente normal y su fibrado universal escinde. □

Un modo alternativo para excluir a priori el bigrado $(1,1)$ en la demostración anterior es observar que $\alpha = 0$ (resp. $\beta = 0$) implica que por un punto general de Π_1 (resp. Π_2) no pasan rectas de Y, por lo que existiría una curva en Π_1 (resp. Π_2) tal que por cada punto de ella pasa una familia de dimensión 2 de rectas de Y; es decir, Y tendría curva fundamental. Esta posibilidad se excluye con el siguiente resultado (que se utilizará en la siguiente sección):

Proposición 3.2.2. *Si Y es una congruencia de $G(1,4)$ que posee una curva fundamental y cuyo fibrado cociente $\mathcal{Q}_{|Y}$ escinde, entonces la curva es una recta.*

Demostración. Supóngase que el fibrado $\mathcal{Q}_{|Y}$ de Y escinde en suma de dos fibrados lineales, $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, y supóngase también que Y posee una curva fundamental que no es una recta. Por el teorema de Arrondo, Bertolini, Turrini que enunciamos en el Teorema 2.1.1, la curva fundamental es plana y los posibles bigrados son $(1,2)$, $(2,2)$, $(3,3)$ ó $(3,6)$. Por la Observación 2.1.7 considerando las rectas de Y contenidas en un hiperplano general que contenga al plano de la curva fundamental se obtiene una superficie lisa S de $G(1,3)$ con curva fundamental y el mismo bigrado que Y. Pero entonces el fibrado universal de $G(1,3)$ restringido a S debe escindir, y se puede usar la clasificación de [AS92] (que hemos enunciado en la Proposición 3.1.1). Pero ninguno de los bigrados de las superficies de tal clasificación coincide con los anteriores , por lo que se llega a contradicción.

Por tanto, la curva fundamental es una recta. $\square$

3.3. Congruencias proyectables desde $G(1,6)$.

En esta sección estudiamos el caso $h^0(\mathcal{Q}_{|Y}) = 7$ con $h^0(\mathcal{L}_1) = 3$ y $h^0(\mathcal{L}_2) = 4$.

Se dedica toda esta sección a demostrar el siguiente resultado:

Teorema 3.3.1. *La única congruencia Y de $G(1,4)$ que viene proyectada desde $G(1,6)$ y cuyo fibrado universal $\mathcal{Q}_{|Y}$ escinde como $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ con $H^0(\mathcal{L}_1) = 3$ y $H^0(\mathcal{L}_2) = 4$ es el caso v.− del Teorema 3.1.2.*

Puesto que el número de secciones globales independientes de $\mathcal{Q}_{|Y}$ es siete, Y vendrá de una proyección de $G(1,6)$ en $G(1,4)$ definida por una proyección $\mathbb{P}^6 \dashrightarrow \mathbb{P}^4$ desde una recta L.

Notación 4. Se denotará por $\Pi_1 \cong \mathbb{P}(H^0(\mathcal{L}_1))$ de dimensión dos y por $A_2 \cong \mathbb{P}(H^0(\mathcal{L}_2))$ de dimensión tres, a las dos subvariedades lineales disjuntas de $\mathbb{P}^6$ que intersecan a todas las rectas de la imagen de Y en $G(1,6)$.

Proposición 3.3.2. *Si Y es una variedad de $G(1,6)$ proyectable a $G(1,4)$ y en las condiciones de la Notación 4 anterior, e $\overline{Y}$ es la variedad de $\mathbb{P}^5$ unión de las rectas de Y, entonces se verifica:*

i.- $\overline{Y} \supset \Pi_1$ *y* $dim(\overline{Y} \cap A_2) \geq 2$.

ii.- El centro de proyección L no corta a Π_1.

iii.- El centro de proyección L no corta a A_2.

Demostración. Para demostrar $i.-$, usaremos reducción al absurdo.

Si $dim(\overline{Y} \cap \Pi_1)$ fuera cero o $dim(\overline{Y} \cap A_2)$ es cero, entonces Y tendría un punto fundamental y sería la congruencia del Ejemplo 2.1.2 que es linealmente normal y proyectable, lo cual es imposible.

Si en cambio $\overline{Y} \cap \Pi_1$ o $\overline{Y} \cap A_2$ fuera una curva, la congruencia Y tendría curva fundamental y fibrado cociente universal escindido. Y por la Proposición 3.2.2 la curva fundamental sería una recta. Pero el Teorema 2.2.9 demuestra que una congruencia de $G(1,4)$ con recta fundamental viene proyectada a lo más de $G(1,5)$, con lo que llegamos a una contradicción.

Para demostrar $ii.-$ basta observar que el centro de proyección no puede cortar a $\overline{Y}$ y como por $i.-$ $\overline{Y} \supset \Pi_1$, tampoco corta a Π_1.

Para demostrar $iii.-$, se observa que, como L no corta a $\overline{Y}$, de $i.-$ se deduce que corta a A_2 a lo más en un punto. Si L cortara a A_2 en un punto p, (lo que se puede dar sólo si $dim(\overline{Y} \cap A_2) = 2$), entonces se podría descomponer la proyección $G(1,6) \dashrightarrow G(1,4)$ en dos proyecciones desde un punto (el primero de ellos el punto p). Así, la variedad Y sería, tras la primera proyección, el conjunto de rectas que unen puntos de la proyección de Π_1 sobre $\mathbb{P}^5$, que sigue siendo un plano, y la proyección de A_2 que es un plano ahora. Es decir, Y sería una subvariedad de dimensión tres de $G(1,5)$ proyectable a $G(1,4)$ formada por las rectas que cortan dos planos disjuntos. Pero el Teorema 3.2.1 excluye la existencia de tal variedad, ya que la única que existiría no proviene de $G(1,6)$. $\square$

En nuestras condiciones, Y está contenida en $Z = \Pi_1 \times A_2$ sumergido en $G(1,6)$ por $\mathcal{O}_Z(1,0) \oplus \mathcal{O}_Z(0,1)$ (ver Ejemplo 0.4.3). Sea h_2 la clase de la sección hiperplana del plano $\mathbb{P}^2$, y sea h_3 la sección hiperplana de A_2, entonces la clase de Y en Z sería de la forma:

$$[Y]_Z = \alpha h_2^2 + \beta h_2 h_3 + \gamma h_3^2, \tag{3.3.1}$$

donde α, β y γ son número enteros. La idea es limitar α, β, γ y usar el Ejemplo 0.4.28 para calcular los posibles bigrados.

Lema 3.3.3. *Con la notación de (3.3.1), $\beta = 0$ ó $\beta = 1$.*

Demostración. Sea L el centro de la proyección $\mathbb{P}^6 \dashrightarrow \mathbb{P}^4$ que induce la proyección $G(1,6) \dashrightarrow G(1,4)$. Por la Proposición 3.3.2, $dim(\overline{Y} \cap A_2) > 2$ y el centro de proyección no corta ni a Π_1 ni a A_2. Así, Π_1 y A_2 se proyectan isomórficamente en $\mathbb{P}^4$, y la imagen de Y tras la proyección está formada por las rectas que cortan siempre dos subespacios lineales de $\mathbb{P}^4$ de dimensión dos y tres, respectivamente. Sin embargo, estos nuevos subespacios de $\mathbb{P}^4$ se cortan en una recta de $\mathbb{P}^4$.

Sean las rectas

$$L_2 = \langle L, A_2 \rangle \cap \ \Pi_1 \quad \text{y} \quad L_3 = \langle L, \Pi_1 \rangle \cap \ A_2.$$

(ambas tendrán la misma imagen por la proyección, precisamente la intersección de las imágenes de Π_1 y A_2). En Z se tiene de forma natural un subconjunto $Q = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ que se corresponde con las rectas de $\mathbb{P}^6$ que cortan a L_2 y a L_3. Su clase en $A^*(Z)$ es ${h_2h_3}^2$ y por construcción se tiene que todas las rectas de Q se proyectan a una misma recta L' de $\mathbb{P}^4$ (la intersección de las proyecciones de Π_1 y A_2). Como Y se proyecta isomórficamente desde L, ha de ocurrir que el producto intersección de las clases de Y y de Q en el anillo de Chow de Z, $A^*(Z)$ sea menor o igual que uno. Como

$$1 \geq [Y].[Q] = (\alpha h_2^2 + \beta h_2 h_3 + \gamma h_3^2)(h_2 h_3^2) = \beta, \tag{3.3.2}$$

se sigue el resultado. □

Por otro lado, sea $p_2 \in \Pi_1$ un punto general y considérese el correspondiente subconjunto (de codimensión 2), $\{p_2\} \times A_2 \subset Z$ de las rectas que pasan por p_2 y cortan a A_2. Por la Proposición 3.3.2 $i.-$, $Y \cap (\{p_2\} \times A_2)$ es una curva , que será de la forma $\{p_2\} \times C_{p_2}$, donde C_{p_2} es una curva de A_2.

Lema 3.3.4. *La curva C_{p_2} general es una recta.*

Demostración. Si C_{p_2} no es una recta, los planos generados por el punto p_2 y una bisecante de la curva $C_{p_2} \subset A_2$ son planos malos de Y (ver Definición 0.4.10). Distinguiendo los casos en que C_{p_2} es curva plana o no, se tiene:

i.- La curva es plana, entonces las bisecantes a C_{p_2} generan un plano. Por tanto $\overline{\Sigma Y}_{p_2}$ -unión de los planos malos de Y por el punto p_2- es un $\mathbb{P}^3$.

ii.- La curva no es plana, luego las secantes a C_{p_2} generan todo el espacio que contiene a la curva y $\overline{\Sigma Y}_{p_2}$ es un $\mathbb{P}^4$.

De modo que se obtiene de esta manera una familia $\overline{\Sigma Y}$ de dimensión dos (al variar p_2 en un abierto de Π_1) de espacios lineales de dimensión tres o cuatro, respectivamente contenidos en la unión de planos malos. Pero la unión de los planos malos de Y tiene dimensión como máximo 4, pues Y es proyectable. Por el Lema 0.4.16, la única posibilidad es que la unión de los planos malos sea un $\mathbb{P}^4$. Pero cada recta de Y está contenida en un plano malo, con lo que se tendría que la congruencia Y está contenida en una $G(1,\mathbb{P}^4)$, lo que es absurdo. □

Nota 3.3.5. De ahora en adelante escribiremos r_{p_2} en vez de C_{p_2} para todo p_2 en Π_1.

Sea V la familia de rectas r_{p_2} de $G(1,A_2)$ al variar p_2 en un abierto U de Π_1.

Lema 3.3.6. *V tiene dimensión dos.*

Demostración. Si la familia de rectas r_{p_2} de A_2 tuviera dimensión cero, entonces $r_{p_2} = r$ $\forall p_2$ y r sería una recta fundamental para Y. Pero el Teorema 2.2.9 demuestra que no existen congruencias en $G(1,4)$ proyectables desde $G(1,6)$.

El caso en que V tuviera dimensión 1 se elimina, en parte, de nuevo mirando la dimensión de los planos malos. En efecto, el morfismo $\Pi_1 \xrightarrow{\varphi} V$, que asocia a cada punto p_2 la recta r_{p_2}, tendría fibra general de dimensión uno. La observación principal es que, fijada $r \in V$ y dados p_2, $p'_2 \in \Pi_1$ tales que $r_{p_2} = r_{p'_2} = r$, entonces todos los planos generados por p_2 y p'_2 y un punto q cualquiera de r son planos malos (ya que las rectas $\langle p_2, q\rangle$ y $\langle p'_2, q\rangle$ están en Y).

En este punto, el razonamiento se termina dependiendo de cómo es la fibra general de φ sobre un elemento $r \in V$, que puede identificarse con una curva C_r (plana) de Π_1. Por la observación anterior, el cono con vértice la recta r y base la variedad de secantes de C_r es unión de planos malos. Si C_r no fuera una recta, tal cono sería lineal de dimensión 4, en concreto el subespacio generado por la recta r y el plano Π_1. Como la unión de planos malos de Y tiene dimensión 4, tal subespacio es fijo al variar r, con lo que Y estaría contenido en una $G(1,4)$, lo que es absurdo.

Si en cambio C_r fuera una recta, se tendría que por un punto general de Π_1 pasa sólo una recta de la familia $\{C_r\}_{r\in V}$. En efecto, si por un punto general q de Π_1 pasaran dos rectas C_r y $C_{r'}$ distintas, entonces $r = \varphi(q) = r'$, lo que es absurdo. Por tanto la familia $\{C_r\}_{r\in V}$ tiene que ser un haz de rectas, y en particular V es una curva racional. Para cada C_r, se tiene que el conjunto de las rectas que cortan a C_r y a r (que es una cuádrica lisa en $G(1,6)$) está contenido en Y. Por tanto, Y tendría estructura de fibrado en cuádricas sobre una curva racional. Por la clasificación de [ABT00] (ver Teorema 2.2) la proyección de Y a $G(1,4)$ tiene que ser la de una de los Ejemplo 2.1.12, 2.1.16, 2.1.14 o 2.1.17. Pero se ha visto que todas ellas tienen $h^0(\mathcal{Q}_{|Y}) \leq 6$, con lo que se llega a una contradicción.

Tal contradicción viene de suponer que V tiene dimensión uno. Luego V tiene dimensión dos. □

Observación 3.3.7. En la demostración anterior, del hecho de que la familia $\{C_r\}_{r\in V}$ fuera un haz de rectas con base un punto q no se deduce que todas las rectas C_r tengan la misma imagen r, ya que q no es general y por tanto φ puede no estar definida en q.

Lema 3.3.8. *Por un punto general de A_2 pasa una única recta de V.*

Demostración. Supóngase que por un punto general $p_3 \in A_2$ pasan dos rectas r_{p_2} y $r'_{p'_2}$ correspondientes a puntos p_2 y p'_2 de Π_1. Entonces las rectas $\langle p_2, p_3\rangle$ y $\langle p'_2, p_3\rangle$ son puntos de Y y generan un plano malo que pasa por $p_3 \in A_2$. Al variar p_3 en A_2 se obtiene una familia de dimensión tres de planos malos. Como por un punto general del A_2 pasa sólo un número finito de planos de esta familia la dimensión de la unión de los planos malos es al menos cinco. Pero como Y es proyectable, la dimensión de la unión de los planos malos de Y es menor o igual que cuatro, lo que es imposible. □

Observación 3.3.9. Puesto que entonces la familia V es una congruencia de $G(1, A_2)$ de orden uno, se puede terminar la demostración utilizando el resultado de Ran [Ran86] sobre la clasificación de las congruencias de orden uno en $G(1,3)$. Calculando para cada una de ellas los coeficientes dentro del anillo de Chow y descartando las que tienen β mayor que uno se llegaría al resultado del Teorema 3.3.1.

Sin utilizar el resultado de clasificación de congruencias de $G(1,3)$ de orden uno también se puede demostrar el teorema 3.3.1 directamente de la siguiente manera:

Lema 3.3.10. *Con la notación 3.3.1, $\alpha = 1$.*

Demostración. Claramente $\alpha = Y.\ h_3^3$, luego geométricamente es el número de rectas de Y que pasan por un punto general de A_2. Por la Proposición 3.3.2, $\alpha > 0$. Supóngase que $\alpha > 1$ y sea $p \in A_2$. Como por el Lema 3.3.8 por p pasa una única recta r_{p_2} para cierto $p_2 \in \Pi_1$ de la familia V, se sigue que para todo q en r_{p_2}, la recta $\langle p_2, q\rangle$ pertenece a Y, y en particular, la recta $m = \langle p_2, p\rangle$ es un elemento de Y. Como se está suponiendo $\alpha > 1$, existe al menos otra recta de Y que pasa por p. Es decir, existe $p' \in \Pi_1$ tal que $m' = \langle p', p\rangle$ está en Y. Claramente $\langle m, m'\rangle$ es un plano malo que pasa por p. Moviendo ahora p en A_2 se obtiene una familia de dimensión tres de planos malos de Y. Como en la demostración del Lema 3.3.8, se llega a una contradicción con el hecho de que Y es proyectable a $G(1,4)$ y que por tanto la unión de los planos malos tiene a lo máximo dimensión 4. □

Lema 3.3.11. *Con la notación 3.3.1, $\gamma = 1$.*

Demostración. Del mismo modo que en el caso anterior, γ es el número intersección siguiente
$$\gamma = Y.\ h_2^2.\ h_3$$
correspondiente al número de rectas de Y que pasan por un punto general p_2 de Π_1 y corta a un plano general H de A_2. Dado $p_2 \in \Pi_1$, sea r_{p_2} su correspondiente recta de A_2 de la familia. Tomando H que no contenga a r_{p_2}, y escribiendo $q = H \cap r_{p_2}$, entonces $\langle p_2, q\rangle$ es la única recta de Y que pasa por p_2 y corta a A_2 en un punto de H. Por tanto, $\gamma = 1$. $\square$

De modo que la clase de Y en el anillo de Chow de Z, $A^*(Z)$ es

$$[Y]_Z = h_2^2 + \beta h_2 h_3 + h_3^2 \tag{3.3.3}$$

y donde $\beta \in \{0, 1\}$.

Por el Ejemplo 0.4.28, $a = \alpha + \beta + \gamma$ y $b = \beta + \gamma$, y entonces los posible bigrados de Y son $(a, b) = (2, 1)$ y $(a, b) = (3, 2)$.

Y para terminar la demostración, de la clasificación de [ABT98] escrita en esta memoria en el Cuadro 2.1, si Y tiene bigrado $(2, 1)$, es la del Ejemplo 2.1.5. Allí vimos que viene proyectada sólo desde $G(1, 5)$, ya que $H^1(\mathcal{Q} \otimes \mathcal{I}_Y) \cong \mathbb{C}$, lo cual no puede ser.

Por tanto Y tiene bigrado $(3, 2)$ y de nuevo por el Cuadro 2.1, las posibles congruencias son de tipo 15) y de tipo 16). Esta última, tiene recta fundamental, luego por la Proposición 2.2.9 se concluye que debe ser linealmente normal (o bien está demostrado en el Ejemplo 2.1.13) y en consecuencia no está en nuestras hipótesis. Así, la congruencia es de tipo 15), que es el caso *iv.–* del Teorema 3.1.2, que ya vimos en el Ejemplo 0.4.24 que viene de $G(1, 6)$ y que su fibrado universal descompone.

Bibliografía

[ABT94] E. Arrondo, M. Bertolini, and C. Turrini. Classification of Smooth Congruences with a Fundamental Curve. *Marcel Dekker*, (166), 1994.

[ABT98] E. Arrondo, M. Bertolini, and C. Turrini. Congruences of small degree in G(1,4). *Comm. Algebra*, 26(10):3249–3266, 1998.

[ABT00] E. Arrondo, M. Bertolini, and C. Turrini. Quadric bundle congruences in G(1,n). *Forum Math.*, 12:649–666, 2000.

[AG93] E. Arrondo and M. Gross. On smooth surfaces in G(1,3) with a fundamental curve. *Man. Math.*, (79):283–298, 1993.

[AG99] E. Arrondo and B. Graña. Vector bundles on G(1,4) without intermediate cohomology. *Journal of Algebra*, 214(1):128–142, 1999.

[Alz84] A. Alzati. Varietà di Grassmann e loro sottovarietà. *Rend. Sc. Ist. Lomb.*, A 118:325–345, 1984.

[Alz86] A. Alzati. 3-scroll immersions in $G(1,4)$. *Ann. Univ. Ferrara*, 32:45–54, 1986.

[Arr96] E. Arrondo. Subvarieties of Grassmannians. *Lectures Notes Series Dipartimento di Matematica Univ. Trento*, 10, 1996.

[Arr98a] E. Arrondo. Appendix to "Congruences of small degree in $G(1,4)$": Pfaffian linkage in codimension three and applications to congruences. *Comm. Algebra*, 26(10):3267–3274, 1998.

[Arr98b] E. Arrondo. The universal rank-(n-1) bundles on G(1,n) restricted to subvarieties. *collect. Math.*, 49(2-3):173–183, 1998. Dedicado a la memoria de Fernando Serrano.

[Arr99] E. Arrondo. Projections on Grassmannians of lines and characterization of Veronese varietes. *J.Algebraic Geom.*, 8(50):85–101, 1999.

[AS92] E. Arrondo and I. Sols. On congruences of lines in the projective space. *Mém. Soc. Math. France*, N.S.(50):96, 1992.

[Ati56] M. Atiyah. On Krull-Schmidt theorem with application to sheaves. *Bull. Soc. Math. France*, 84(1956):317–17, 1956.

[BGS87] R.O. Buchweizt, G.M. Greuel, and F.O. Schreyer. Cohen-Macaulay modules on hypersurface singularities, II. *Invent. Math.*, 88:165–182, 1987.

[DR91] I. Dolgachev and I. Reider. On rank 2 vector bundles with $c_1^2 = 10$ and $c_2 = 3$ on Enriques surfaces. *Lecture Notes in Math.*, 1479:39–49, 1991.

[Ful84] W. Fulton. *Intersection theory.* Springer-Verlang, Berlin, 1984.

[God64] R. Godement. *Théorie des faisceaux.* Public. l'institut Math. l'univ. Strasbourg, Paris, 1964.

[GP82] L. Gruson and C. Peskine. Courbes de l'espace projectif varietiés de sécantes, Enumertive geometry and classical algebraic geometry. *Progress in Math 24 Birkhäuser*, pages 1–31, 1982.

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, New York, 1977.

[Hor64] G. Horrocks. Vector bundles on the punctured spectrum of a ring. *Proc. London Math. Soc.*, 3(14):289–713, 1964.

[KL72] S.L. Kleiman and D. Laksov. Schubert calculus. *Amer. Math. Monthly*, 79:1061–1082, 1972.

[Kn87] H. Knörrer. Cohen-Macaulay modules on hypersurface singularities, I. *Invent. Math.*, 88:153–164, 1987.

[KS] S. Katz and S.A. Strømme. *Schubert, a Maple package for intersection theory.*

[LR34] D.E. Littlewood and A.R. Richardson. Group characters and algebra. *Phil. Trans. Royal Soc. London*, A 233:99–141, 1934.

[Oko94] C. Okonek. Notes on varieties of codimension 3 in $\mathbb{P}^N$. *Manuscripta Math.*, 84(23-4):421–442, 1994.

[Ott87] G. Ottaviani. Critères de scindage pour les fibrés vectoriels sur les Grassmanniennnes et les quadriques. *C. R. Acad. Sci. Paris sèr. I Math.*, 305(6):257–260, 1987.

[Ott89] G. Ottaviani. Some extensions of Horrocks criterion to vector bundles on Grassmannians and quadrics. *Ann. mat. Pura Appl.*, 4(155):317–341, 1989.

[Ott95] G. Ottaviani. *Varietá proiettive di codimensione piccola.* Quad INDAM, Aacre, Roma, 1995.

[Ran86] Z. Ran. Surfaces of order 1 in Grassmannians. *J. Reine angew. Math.*, 368:119–126, 1986.

[Rog94] E. Rogora. Varieties with many lines. *Manuscripta Math.*, 82:207–220, 1994.

[Rot79] J.J. Rotman. *An introduction to homological algebra.* Academic Press, New York, 1979.

[Seg48] B. Segre. Sulle V_n contenenti più di $\infty^{n-k} S_k$. *Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, 5(8):275–280, 1948.

[Uga01] L. Ugaglia. *Projection of Subvarieties of Grassmannians of Lines.* PhD thesis, Dipartimento di Matematica dell'Universitá degli studi di Milano, 2001.

[Uga02] L. Ugaglia. Subvarieties of the Grassmannian $G(1, N)$ with small secant variety. *Communications in algebra*, 30(8):4059–4083, 2002.