

Proyecciones en la Grassmanniana e inmersiones  
dobles de Veronese de  $\mathbb{P}^n$

José Carlos Sierra García

16 de febrero de 2004



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>0 Preliminares</b>	<b>9</b>
0.1 Convenios y notaciones . . . . .	9
0.2 Generalidades de la Grassmanniana . . . . .	12
0.2.1 Los fibrados universales . . . . .	15
0.2.2 Cálculo de Schubert . . . . .	16
0.2.3 Morfismos a la Grassmanniana . . . . .	20
0.3 Proyecciones lineales en la Grassmanniana . . . . .	23
<b>1 Superficies en <math>\mathbb{G}(1, 5)</math> con un punto doble aparente</b>	<b>32</b>
1.1 Introducción . . . . .	32
1.2 Preliminares . . . . .	33
1.3 Ejemplos . . . . .	36
1.4 Algunas propiedades interesantes . . . . .	40
1.5 El teorema de clasificación . . . . .	43
<b>2 Variedades proyectables a <math>\mathbb{G}(1, n + 1)</math></b>	<b>46</b>
2.1 Introducción . . . . .	46
2.2 Preliminares y ejemplos . . . . .	47
2.3 Teorema de estructura para variedades proyectables . . . . .	49
2.4 Variedades proyectables de $\mathbb{G}(1, 2n)$ a $\mathbb{G}(1, n + 1)$ . . . . .	55

---

<b>3</b>	<b>Inmersiones dobles de Veronese de <math>\mathbb{P}^n</math> en <math>\mathbb{G}(1, N)</math></b>	<b>61</b>
3.1	Introducción . . . . .	61
3.2	Preliminares . . . . .	62
3.3	Ejemplos . . . . .	64
3.4	Teorema de clasificación . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Superficies en <math>\mathbb{P}^4</math> con una familia de curvas planas</b>	<b>71</b>
4.1	Introducción . . . . .	71
4.2	Ejemplos . . . . .	72
4.3	El resultado principal . . . . .	75
4.4	$V_\Sigma$ es un cono . . . . .	77
4.5	$V_\Sigma$ no es un cono . . . . .	79
	<b>Bibliografía</b>	<b>82</b>

# Introducción

Las Grassmannianas y sus subvariedades han sido estudiadas tanto por géometras algebraicos clásicos como modernos. Entre los primeros podemos citar a G. Castelnuovo, G. Fano, E.E. Kummer, G. Marletta, B. Segre, C. Segre o F. Severi. Más recientemente matemáticos como A. Alzati, E. Arrondo, E. Ballico, M. Bertolini, P. De Poi, L. Giraldo, N. Goldstein, B. Graña, M. Gross, R. Hernández, S.L. Kleiman, D. Laksov, E. Mezzetti, G. Ottaviani, A. Papantonopoulou, M. Pedreira, D. Portelli, E. Rogora, Z. Ran, L.E. Solá, I. Sols, C. Turrini, L. Ugaglia, S. Verra y otros han contribuido de alguna manera al estudio de las Grassmannianas con técnicas actuales.

Una parte importante de los progresos realizados procede de transportar a la Grassmanniana resultados del espacio proyectivo.

Esta memoria trata principalmente de proyecciones lineales en la Grassmanniana de rectas y es, por tanto, una continuación natural del trabajo [6] de E. Arrondo y de la tesis doctoral de L. Ugaglia [42].

Las proyecciones lineales en una Grassmanniana de rectas  $\mathbb{G}(1, N)$  fueron por vez primera consideradas por E. Arrondo e I. Sols en [4]. El resultado obtenido es la clasificación de las congruencias lisas de  $\mathbb{G}(1, 3)$  que vienen proyectadas de  $\mathbb{G}(1, N)$  con  $N \geq 4$ . En particular se demuestra que la única que viene proyectada desde  $\mathbb{G}(1, N)$  con  $N \geq 5$  es la superficie de Veronese, es decir,  $\mathbb{P}^2$  inmersa por el fibrado vectorial  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$  de rango 2. Este resultado, en la línea del conocido Teorema de Severi sobre la superficie de Veronese, fue mejorado más tarde por el propio E. Arrondo en [6] introduciendo las variedades secantes en la Grassmanniana y caracterizando la inmersión doble de Veronese de  $\mathbb{P}^n$  en  $\mathbb{G}(1, 2n+1)$  por medio de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ , como la única que, bajo una hipótesis adicional, puede proyectarse isomórficamente a  $\mathbb{G}(1, n+1)$  desde  $\mathbb{G}(1, N)$  con  $N \geq 2n+1$ . En este caso su análogo proyectivo es el teorema de F.L. Zak que caracteriza la inmersión doble de Veronese  $v_2(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-1}$  como la única variedad  $n$ -dimensional que se proyecta isomórficamente a  $\mathbb{P}^{2n}$  desde  $\mathbb{P}^N$  con  $N \geq \binom{n+2}{2} - 1$  (véase [46] VI, Theorem 2.1) en un caso particular de su clasificación de las variedades de Scorza.

Posteriormente L. Ugaglia sistematizó en [42] y [43] el estudio de las proyecciones lineales y las variedades secantes en las Grassmannianas de rectas obteniendo, entre otros resultados, un teorema de estructura para las variedades  $n$ -dimensionales proyectables a  $\mathbb{G}(1, n+1)$ .

La idea que subyace en todos estos resultados, tanto en el espacio proyectivo como en la Grassmanniana, es la dificultad para sumergir variedades  $n$ -dimensionales  $X$  como subvariedades de una variedad ambiente  $2n$ -dimensional  $Y$ , ya sea  $\mathbb{P}^{2n}$  o  $\mathbb{G}(1, n+1)$ , debido a la fórmula de autointersección  $[X]^2 = c_n(\mathcal{N}_{X,Y})$ , donde  $\mathcal{N}_{X,Y}$  denota el fibrado normal de  $X$  en  $Y$  (véase [25]).

En los problemas anteriores, la forma de sumergir  $X$  en  $Y$  es por medio de proyecciones lineales. Surge de modo natural preguntarse qué ocurre cuando la proyección lineal no es un isomorfismo pero la imagen tiene un único punto doble. Cuando  $Y = \mathbb{P}^{2n}$  tales variedades se conocen clásicamente como *variedades con un punto doble aparente*. El primer resultado en esta dirección corresponde de nuevo a F. Severi que estudió el caso  $n = 2$  en [37] afirmando que las superficies con un punto doble aparente son los scrolls racionales normales  $S(2, 2)$  y  $S(1, 3)$  así como la superficie de Del Pezzo de grado 5 en  $\mathbb{P}^5$ . Sin embargo, C. Ciliberto y E. Sernesi descubrieron que su prueba no era correcta y fue F. Russo quien demostró completamente en [33] dicho resultado.

En los últimos años ha sido F. Russo quien ha impulsado el estudio de subvariedades  $X \subset \mathbb{P}^{2n+1}$  con un punto doble aparente clasificando, junto a C. Ciliberto y M. Mella en [12], las 3-variedades de  $\mathbb{P}^7$  con un punto doble aparente que ya fueron consideradas por M.G. Violo en su tesis doctoral [45]. Al contrario de lo que sucede con las variedades proyectables isomórficamente, las variedades con un punto doble aparente  $X \subset \mathbb{P}^{2n+1}$  son linealmente normales y, si bien existen algunos resultados parciales, parece difícil encontrar clasificaciones completas para  $n \geq 4$ .

Actualmente se sigue trabajando en proyecciones lineales y variedades secantes de variedades proyectivas  $X \subset \mathbb{P}^N$  principalmente en términos de variedades  $k$ -defectivas.

Para  $X \subset \mathbb{P}^N$  se tiene la siguiente cadena de contenidos estrictos:

$$X \subset SX = S^1X \subset S^2X \subset \dots \subset S^{k_0-1}X \subset S^{k_0}X = \mathbb{P}^N$$

donde  $S^kX$  es la clausura de  $\{P \mid \exists x_1, \dots, x_{k+1} \in X, P \in \langle x_1, \dots, x_{k+1} \rangle \cong \mathbb{P}^k\} \subset \mathbb{P}^N$ .

Se dice que  $X \subset \mathbb{P}^N$  es  $k$ -defectiva si la dimensión de  $S^kX$  es menor que la dimensión esperada  $\min\{N, (k+1)n+k\}$ . En particular, si  $X \subset \mathbb{P}^N$  es proyectable isomórficamente a  $\mathbb{P}^{2n}$  entonces  $X$  es 1-defectiva. Por otro lado si  $X$  es 1-defectiva y lisa, entonces  $X$  es proyectable isomórficamente a  $\mathbb{P}^{2n}$ .

La teoría de variedades defectivas ha sido desarrollada por varios autores clásicos y modernos.

La clasificación de las superficies 1-defectivas corresponde a F. Severi [37], y F. Palatini comenzó la clasificación de las superficies  $k$ -defectivas, que se debe finalmente a A. Terracini [41]. Este resultado fue redescubierto más recientemente por B. Ådstrandvik [1] y M. Dale [14].

En dimensiones más altas, las variedades 1-defectivas de dimensión 3 fueron estudiadas por G. Scorza [34] y hace pocos años por C. Ciliberto y L. Chiantini [11], quienes también han clasificado las 3-variedades  $k$ -defectivas. Independientemente, la clasificación en el caso de variedades lisas y  $k = 1$  fue obtenida por T. Fujita [16].

En dimensión 4 no existe una clasificación completa y sólo algunos resultados parciales y ejemplos debidos a G. Scorza [35] y T. Fujita–J. Roberts [17].

Sin embargo los resultados más importantes en la materia se deben a F.L. Zak y están recogidos en su libro *Tangents and Secants of Algebraic Varieties* [46]. Entre ellos citamos la clasificación de las variedades de Severi (IV, Theorem 4.7) y Scorza (VI, Theorem 5.6).

La técnica más utilizada en la actualidad para abordar estos problemas consiste en estudiar la proyección tangencial de las variedades en cuestión, es decir, la proyección desde el espacio tangente inmerso a un punto  $x \in X$  general. En el caso de variedades 1-defectivas  $X \subset \mathbb{P}^N$  se sigue fácilmente del *Lema de Terracini* 0.1.7 que la proyección desde  $\mathbb{T}_x X$  hace caer la dimensión de la imagen de  $X$  (véase [11], Proposition 3.1), mientras que en el caso de una  $n$ -variedad  $X \subset \mathbb{P}^{2n+1}$  con un punto doble aparente la proyección en  $X$  desde  $\mathbb{T}_x X$  a  $\mathbb{P}^n$  es birracional (véase [12], Corollary 4.2) y por tanto  $X$  es racional. La otra implicación, que consiste en probar que  $X \subset \mathbb{P}^{2n+1}$  tiene un punto doble aparente si la proyección de  $X$  desde  $\mathbb{T}_x X$  a  $\mathbb{P}^n$  es birracional, fue propuesta por J. Bronowski [9] y aún no ha sido demostrada.

En el caso de las Grassmannianas de rectas hemos sustituido la proyección tangencial de subvariedades  $X \subset \mathbb{G}(1, N)$  por la proyección interna desde una recta  $l \subset X$ . La idea que se esconde es que la proyección desde  $l$  se corresponde después de la inmersión de Plücker con la proyección tangencial desde  $\mathbb{T}_l \mathbb{G}(1, N)$ , que contiene a  $\mathbb{T}_l X$ .

Se demuestra que la proyección interna de las  $n$ -variedades  $X \subset \mathbb{G}(1, N)$  que se pueden proyectar isomórficamente a  $\mathbb{G}(1, n + 1)$  hace caer la dimensión de  $X$  (véase el Teorema 0.3.16), mientras que la proyección interna de las  $n$ -variedades  $X \subset \mathbb{G}(1, n + 3)$  con un punto doble aparente también hace caer la dimensión o da una aplicación birracional sobre una congruencia de  $\mathbb{G}(1, n + 1)$  de orden 1, que es necesariamente racional y por tanto  $X$  también es racional (véanse el Lema 1.4.4 y el Teorema 2.4.10). En ambos resultados se necesita la no compresión de  $X$ , que

significa que la unión de las rectas de  $X$  en  $\mathbb{P}^N$  tenga dimensión  $n + 1$ , lo cual no es una condición demasiado restrictiva.

La memoria se estructura de la siguiente manera:

En los Preliminares se establecen las notaciones empleadas a lo largo de toda la tesis así como algunos aspectos generales de la Grassmanniana como el cálculo de Schubert, la relación entre los fibrados vectoriales y los morfismos, o las proyecciones lineales en  $\mathbb{G}(1, N)$ . Finalmente se recuerdan algunos resultados clásicos en geometría algebraica que serán utilizados más adelante.

El Capítulo 1 está dedicado al estudio de las superficies  $X \subset \mathbb{G}(1, 5)$  con un punto doble aparente. Después de presentar ejemplos y obtener algunas características especiales se llega al primer resultado original de la memoria, el teorema de clasificación 1.5.1:  $X$  es necesariamente un scroll racional inmerso con bigrado  $(3, 1)$  ó  $(3, 2)$  o bien  $X$  es una superficie de Del Pezzo inmersa con bigrado  $(4, 2)$  ó  $(4, 3)$ .

En el Capítulo 2 se obtienen resultados sobre proyectabilidad a  $\mathbb{G}(1, n + 1)$  de  $n$ -variedades no comprimidas  $X \subset \mathbb{G}(1, N)$ , con  $N \geq n + 3$ . Después de obtener el teorema de estructura 2.3.6 que dice que la unión de las rectas de  $X$  en  $\mathbb{P}^N$  es un scroll racional de  $n$ -planos, se tiene como consecuencia que si  $N \geq 2n$  entonces  $X \subset \mathbb{G}(1, 2n + 1)$  es la inmersión doble de Veronese de  $\mathbb{P}^n$  por medio del fibrado vectorial  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$  o bien  $X \subset \mathbb{G}(1, 2n)$  es la explosión de  $\mathbb{P}^n$  en un punto inmersa por el fibrado vectorial  $\mathcal{O}_X(H) \oplus \mathcal{O}_X(H - E)$ . Además si  $n + 3 \leq N < 2n$  se prueba en el Teorema 2.4.5 que  $X$  es racional. Finalmente se obtiene el Teorema 2.4.10, que supone la extensión a dimensión arbitraria de la racionalidad de las superficies con un punto doble aparente conseguida en 1.4.5. La mayor parte de los resultados de este capítulo se consiguieron en colaboración con L. Ugaglia.

En el Capítulo 3 se clasifican todas las inmersiones dobles de Veronese de  $\mathbb{P}^n$  en  $\mathbb{G}(1, N)$  por medio de un fibrado vectorial  $\mathcal{E}$  con  $\bigwedge^2 \mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2)$  y se establece la relación del problema con la Conjetura de Hartshorne sobre intersecciones completas de codimensión 2 y la escisión de fibrados vectoriales de rango 2 sobre  $\mathbb{P}^n$ . También los resultados de este capítulo han sido fruto del trabajo conjunto con L. Ugaglia.

Por último, el Capítulo 4 muestra un ejemplo de cómo utilizar las Grassmannianas y sus proyecciones para tratar problemas clásicos de geometría algebraica proyectiva. En concreto se estudian las superficies lisas  $S \subset \mathbb{P}^4$  que contienen una familia de curvas planas. Si las curvas dan una fibración de  $S$ , la clasificación se debe a P. Ellia-G. Sacchiero en [15] o a R. Braun-K. Ranestad en [10]. Nuestro resultado, Teorema 4.3.1, da una clasificación con dos hipótesis adicionales que no hemos sido capaces de eliminar, aunque confiamos que sin ellas el teorema siga siendo cierto. Buena parte de este capítulo es consecuencia del trabajo llevado a cabo



con A.L. Tironi durante los cuatro meses de nuestra estancia en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Oslo en el curso 2002–2003.



# Capítulo 0

## Preliminares

### 0.1 Convenios y notaciones

A lo largo la memoria utilizaremos el término *variedad algebraica*  $X$  (o simplemente *variedad*) para referirnos a un esquema reducido sobre el cuerpo  $\mathbb{C}$  de los números complejos. Si  $X$  es irreducible se dirá explícitamente. El término *esquema* lo reservamos cuando no especifiquemos si  $X$  es reducido o no.

Por  $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^N$  entenderemos el *espacio proyectivo* de los hiperplanos de un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial  $V$  de dimensión  $N + 1$ . En este contexto  $\mathbb{G}(k, N)$  denotará la *Grassmanniana de  $k$ -planos* de  $\mathbb{P}^N$ .

Para  $X \subset \mathbb{G}(k, N)$  denotaremos por  $\overline{X} \subset \mathbb{P}^N$  a la unión de los  $k$ -planos de  $X$ . Si  $\dim X = n$ , diremos que  $X$  es *comprimida* cuando  $\dim \overline{X} < n + k$ .

Por congruencia de rectas entenderemos una variedad irreducible y  $n$ -dimensional  $X \subset \mathbb{G}(1, n + 1)$ .

Frecuentemente nos referiremos a un punto  $l \in X \subset \mathbb{G}(1, N)$  como *una recta* de  $X$  y usaremos la expresión *haz de rectas por un punto* para la variedad de Schubert  $\Omega(P, \mathbb{P}^2) \subset X$ , que es una recta de  $X$  vía la inmersión de Plücker.

Para  $X \subset \mathbb{G}(1, N)$  diremos que  $P \in \mathbb{P}^N$  es un *punto fundamental de  $X$*  si por él pasan infinitas rectas de  $X$ . Diremos que  $F \subset \mathbb{G}(1, N)$  es un *lugar fundamental de  $X$*  si cada  $P \in F$  es un punto fundamental y toda recta de  $X$  corta a  $F$ .

Dado un fibrado vectorial  $\mathcal{F}$  de rango  $r$  sobre  $X$ , denotaremos de igual forma al correspondiente haz localmente libre  $\mathcal{F}$  de rango  $r$  y nos referiremos a él en uno u otro sentido sin previo aviso.

Si  $\mathcal{F}$  es un fibrado vectorial sobre  $\mathbb{P}^n$  denotaremos por  $\mathcal{F}(m)$ , con  $m \in \mathbb{Z}$ , el producto tensorial  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$ .

Denotaremos por  $H^i(X, \mathcal{F})$  al grupo de cohomología  $i$ -ésima de  $\mathcal{F}$  y por  $h^i(X, \mathcal{F})$  a su dimensión como  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial.

Por  $T_X$  y  $\Omega_X$  entenderemos respectivamente los fibrados vectoriales tangente y cotangente de rango  $n$  de una variedad lisa  $n$ -dimensional  $X$ .

Por  $T_x X$  denotamos el *espacio tangente de Zariski de  $X$  en  $x$*  y por  $TC_x X \subset T_x X$  el *cono tangente de  $X$  en  $x$*  definido por el ideal homogéneo  $I$  de las formas iniciales de los polinomios que definen  $X$  en  $x$ . Se define la *multiplicidad de  $X$  en  $x$* , que escribimos  $m_x(X)$ , como el grado del subesquema asociado a  $I$  en  $\mathbb{P}(T_x X)$  (véase [21], pág. 258).  $X$  es singular en  $x$  si  $m_x(X) > 1$ .

Por otro lado, denotamos por  $\mathbb{T}_x X$  al espacio tangente proyectivo de una subvariedad  $X \subset \mathbb{P}^N$ .

Diremos que una variedad  $X$  es *racional* si existe un isomorfismo birracional  $X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ .

Denotamos por  $v_d : \mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}$  la *aplicación de Veronese* que manda  $(x_0 : \dots : x_n)$  a la colección de monomios de grado  $d$  ordenados lexicográficamente. Es decir,  $v_d(\mathbb{P}^n)$  es la imagen de  $\mathbb{P}^n$  por el sistema lineal completo  $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)|$ . La aplicación de Veronese da una inmersión de  $\mathbb{P}^n$ , cuya imagen  $v_d(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}$  llamaremos *inmersión  $d$ -ésima de Veronese*. El grado de  $v_d(\mathbb{P}^n)$  resulta ser  $d^n$ , puesto que su divisor hiperplano es  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ .

Cuando  $n = 1$  nos referiremos a  $v_d(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^d$  como una *curva racional normal*. Si  $d = 2$  diremos simplemente que la curva es una *cónica*, y si  $d = 3$  diremos que la curva es una *cúbica alabeada*.

Consideremos la *aplicación de Segre*

$$\sigma : \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^{mn+m+n}$$

que asocia a  $((x_0 : \dots : x_m), (y_0 : \dots : y_n))$  la colección de monomios  $x_i y_j$ . La aplicación de Segre da una inmersión de  $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ , cuya imagen  $\sigma(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^{mn+m+n}$  llamaremos *variedad de Segre*.

Si vemos  $\mathbb{P}^{mn+m+n}$  como el espacio proyectivo de las matrices  $(m+1) \times (n+1)$  entonces la variedad de Segre coincide con la variedad determinantal de las matrices de rango menor o igual que 1.

El grado de  $\sigma(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^{mn+m+n}$  es  $\binom{m+n}{m}$  (véase [21], Example 18.15).

Diremos que  $X \subset \mathbb{P}^N$  es un *scroll*  $n$ -dimensional sobre una curva  $C$  si existe una fibración  $f : X \rightarrow C$  de forma que  $f^{-1}(c) = \mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^N$  para cada  $c \in C$ .

Para  $0 \leq a_0 \leq \dots \leq a_n$  denotamos por  $S(a_0, \dots, a_n) \subset \mathbb{P}^{a_0+\dots+a_n+n}$  al scroll racional normal de  $n$ -planos construido de la siguiente forma (véase [21], Example 8.26). Fijamos  $n+1$  subespacios lineales complementarios  $H_i \cong \mathbb{P}^{a_i} \subset \mathbb{P}^{a_0+\dots+a_n+1}$ , curvas racionales normales  $C_i \subset H_i$  e isomorfismos  $\varphi_i : C_0 \rightarrow C_i$ . Definimos entonces

$$S(a_0, \dots, a_n) = \bigcup_{P \in C_0} \langle P, \varphi_1(P), \dots, \varphi_n(P) \rangle.$$

Equivalentemente  $S(a_0, \dots, a_n) \subset \mathbb{P}^{a_0+\dots+a_n+n}$  es el fibrado proyectivo

$$\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_0) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_n))$$

inmerso por su fibrado lineal tautológico  $\mathcal{O}(1)$ .

Siguiendo la notación utilizada en [23] denotaremos por  $X_e = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$  a la superficie reglada racional de invariante  $e \geq 0$ . Se tiene que todo elemento de  $\text{Pic } X_e$  se escribe como  $aC_0 + bf$  con  $a, b \in \mathbb{Z}$ , donde  $C_0$  denota una sección de  $X_e$  con  $C_0^2 = -e$  y  $f$  denota una fibra de la superficie reglada. Recordemos que  $S(a_0, a_1) \subset \mathbb{P}^{a_0+a_1+1}$  es una realización proyectiva de  $X_e$  si  $a_1 - a_0 = e$  y  $0 < a_0$ . Además las fibras de  $X_e$  se sumergen en  $\mathbb{P}^{a_0+a_1+1}$  como rectas.

Para  $3 \leq d \leq 9$ , llamaremos *superficie de Del Pezzo* de grado  $d$  en  $\mathbb{P}^d$  a la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en  $9-d$  puntos  $\{P_1, \dots, P_{9-d}\}$  inmersa en  $\mathbb{P}^d$  por el sistema lineal de cúbicas planas que pasan por  $P_1, \dots, P_{9-d}$ . En particular, para  $d = 0$ , la superficie de Del Pezzo de grado 9 no es más que  $v_3(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^9$ .

En último lugar enunciamos, siempre en característica 0, algunos resultados clásicos que se usarán a lo largo de la memoria.

**Teorema 0.1.1 (Teorema Principal de Zariski [23] III, Corollary 11.4)** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo birracional de esquemas integrales noetherianos, y supongamos que  $Y$  es normal. Entonces para cada  $y \in Y$ ,  $f^{-1}(y)$  es conexo.*

**Teorema 0.1.2 (B. Segre [36])** *Sea  $X \subset \mathbb{P}^N$  una variedad irreducible  $n$ -dimensional. Sea  $\Sigma \subset \mathbb{G}(1, N)$  una componente de dimensión máxima de la familia de rectas contenidas en  $X$ . Entonces*

- (i) si  $\dim \Sigma = 2n - 2$ ,  $X$  es un subespacio lineal de  $\mathbb{P}^N$ ;
- (ii) si  $\dim \Sigma = 2n - 3$ ,  $X$  es un scroll sobre una curva  $C$  o bien  $X$  es una cuádrica  $Q \subset \mathbb{P}^{n+1}$ .

**Teorema 0.1.3 (Cotas de Castelnuovo [3], pg. 116)** *Sea  $C \subset \mathbb{P}^n$ ,  $n \geq 3$ , una curva lisa, irreducible y no degenerada de grado  $d$  y género  $g$ , entonces:*

$$g \leq m(m-1)(n-1)/2 + me$$

donde  $d-1 = m(n-1) + e$  y  $0 \leq e \leq n-2$ .

**Teorema 0.1.4 (Teorema de Severi [37])** *La única superficie de  $\mathbb{P}^5$  que puede proyectarse isomórficamente a  $\mathbb{P}^4$  es la superficie de Veronese  $v_2(\mathbb{P}^2)$ .*

**Teorema 0.1.5 (Lema de las Trisecantes)** *Sea  $X \subset \mathbb{P}^N$  una variedad que no sea una hipersuperficie. Entonces la recta secante general corta exactamente a  $X$  en dos puntos distintos.*

**Teorema 0.1.6 (Dimensión de la fibra [38] I, §6 Theorem 7)** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es un morfismo de variedades quasiproyectivas irreducibles,  $f(X) = Y$ ,  $\dim X = n$ ,  $\dim Y = m$ , entonces  $m \leq n$  y*

- (i)  $\dim f^{-1}(y) \geq n - m$  para todo  $y \in Y$ ;
- (ii) existe un abierto  $U \subset Y$  no vacío tal que  $\dim f^{-1}(y) = n - m$  para todo  $y \in U$ .

**Teorema 0.1.7 (Lema de Terracini [40])** *Sea  $X \subset \mathbb{P}^N$  una subvariedad irreducible de  $\mathbb{P}^N$ . Entonces:*

- (i) para cada  $x_0, \dots, x_k \in X$  y cada  $z \in \langle x_0, \dots, x_k \rangle$ ,

$$\langle \mathbb{T}_{x_0}, \dots, \mathbb{T}_{x_k} \rangle \subseteq \mathbb{T}_z S^k X;$$

- (ii) existe un abierto  $U \subset S^k X$  tal que

$$\langle \mathbb{T}_{x_0}, \dots, \mathbb{T}_{x_k} \rangle = \mathbb{T}_z S^k X$$

para cada  $z \in U$ ,  $x_0, \dots, x_k \in X$ ,  $z \in \langle x_0, \dots, x_k \rangle$ .

## 0.2 Generalidades de la Grassmanniana

Dado un espacio vectorial  $V$  de dimensión  $N + 1$  sobre el cuerpo  $\mathbb{C}$  de los números complejos, denotaremos por  $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^N$  al espacio proyectivo de los hiperplanos de

$V$ , o equivalentemente, al espacio proyectivo de las rectas del espacio vectorial dual  $V^*$ .

Por  $\mathbb{G}(k, N)$  entenderemos la variedad de Grassmann de subespacios lineales  $k$ -dimensionales de  $\mathbb{P}^N$ , que se identifican naturalmente con los cocientes de  $V$  de dimensión  $k+1$ , o equivalentemente, con los subespacios lineales  $k+1$ -dimensionales de  $V^*$ . En particular el espacio proyectivo  $\mathbb{P}^N$  aparece cuando  $k=0$  y su dual, que denotamos por  $\check{\mathbb{P}}^N$ , resulta de considerar  $k=N-1$ .

Los elementos de la Grassmanniana  $\mathbb{G}(k, N)$  los escribiremos con letras minúsculas  $h$  y usaremos la correspondiente letra mayúscula  $H$  para referirnos al subespacio lineal  $k$ -dimensional que define en  $\mathbb{P}^N$ . Por último, la letra caligráfica  $\mathcal{H}$  denotará al subespacio  $k+1$ -dimensional de  $V^*$  asociado en virtud de la identificación citada anteriormente.

La identificación natural que asigna al subespacio lineal  $\mathcal{H} \subset V^*$  el subespacio lineal  $(V^*/\mathcal{H})^* \subset V$  produce la dualidad  $\mathbb{G}(k, \mathbb{P}^N) \cong \mathbb{G}(N-k-1, \check{\mathbb{P}}^N)$ .

La estructura algebraica (o analítica) de  $\mathbb{G}(k, N)$  viene dada de la siguiente forma. Fijemos un sistema de coordenadas  $(x_0 : \dots : x_N)$  de  $\mathbb{P}^N$ , o equivalentemente, una base  $\mathcal{B} = \{e_0, \dots, e_N\}$  de  $V^*$ . Un elemento  $h \in \mathbb{G}(k, N)$  se representa por una matriz  $(k+1) \times (N+1)$  de rango  $k+1$

$$\begin{pmatrix} a_{0,0} & \dots & a_{0,N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,0} & \dots & a_{k,N} \end{pmatrix}$$

que llamaremos *matriz de Plücker* y cuyas columnas representan las coordenadas de una base de  $\mathcal{H}$  respecto de la base  $\mathcal{B}$  de  $V^*$ . Esta representación matricial de  $h \in \mathbb{G}(k, N)$  depende de la base de  $\mathcal{H}$  que escojamos. Como la matriz tiene rango  $k+1$  supongamos que el menor correspondiente a las  $k+1$  primeras columnas es no nulo. Multiplicando por la matriz inversa de

$$\begin{pmatrix} a_{0,0} & \dots & a_{0,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,0} & \dots & a_{k,k} \end{pmatrix}$$

obtenemos que  $h \in \mathbb{G}(k, N)$  se representa de forma única por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & b_{0,k+1} & \dots & b_{0,N} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & b_{k,k+1} & \dots & b_{k,N} \end{pmatrix}.$$

Por tanto,  $\mathbb{G}(k, N)$  contiene abiertos que son espacios afines de dimensión  $(k + 1)(N - k)$  de coordenadas  $(b_{0,k+1}, \dots, b_{k,N})$ . Como al menos uno de los menores de orden  $k + 1$  de la matriz de Plücker es no nulo, digamos el correspondiente a tomar las columnas  $i_0, \dots, i_k$ ,  $\mathbb{G}(k, N)$  se puede cubrir por  $\binom{N+1}{k+1}$  espacios afines que denotamos por  $U_{i_0, \dots, i_k}$ . Comprobando que estos espacios afines *pegan bien*, es decir, que la matriz Jacobiana del cambio de base es invertible, se prueba el siguiente resultado.

**Proposición 0.2.1**  $\mathbb{G}(k, N)$  es una variedad algebraica (abstracta) de dimensión  $(k + 1)(N - k)$ .

También podemos ver  $\mathbb{G}(k, N)$  como variedad proyectiva por medio de la *inmersión de Plücker*

$$\begin{aligned} p: \mathbb{G}(k, \mathbb{P}^V) &\hookrightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V) \\ h &\mapsto [v_0 \wedge \dots \wedge v_k] \end{aligned}$$

donde  $h$  se corresponde con el subespacio lineal  $\mathcal{H} = \langle v_0, \dots, v_k \rangle$  de  $V^*$  y  $[v_0 \wedge \dots \wedge v_k]$  denota el punto de  $\mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V)$  representado por el vector  $v_0 \wedge \dots \wedge v_k$ .

El morfismo  $p$  está bien definido ya que si  $\{v'_0, \dots, v'_k\}$  es otra base de  $\mathcal{H}$  se tiene que  $v'_0 \wedge \dots \wedge v'_k = (\det A)(v_0 \wedge \dots \wedge v_k)$ , donde  $A$  es la matriz de cambio entre ambas bases. Además  $p$  da una inmersión de  $\mathbb{G}(k, N)$  en  $\mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V)$  que llamaremos *inmersión de Plücker*.

Si consideramos la base  $\{e_{i_0} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \mid 0 \leq i_0 < \dots < i_k \leq N\}$  de  $\bigwedge^{k+1} V^*$  obtenida a partir de  $\mathcal{B}$  podemos dar coordenadas homogéneas a  $\mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V)$ .

**Definición 0.2.2** Las coordenadas homogéneas en  $\mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V)$  inducidas por una elección de coordenadas en  $\mathbb{P}(V)$  se llaman *coordenadas de Plücker* y se denotan por  $p_{i_0, \dots, i_k}$ .

Si  $h \in \mathbb{G}(k, N)$  venía representada por la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{0,0} & \dots & a_{0,N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,0} & \dots & a_{k,N} \end{pmatrix}$$



se sigue que  $p(h) \in \mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V)$  tiene coordenadas de Plücker

$$p_{i_0, \dots, i_k} = \begin{vmatrix} a_{0, i_0} & \dots & a_{0, i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k, 0} & \dots & a_{k, i_k} \end{vmatrix}.$$

Si uno se pregunta cómo será el ideal homogéneo  $I$  que define  $\mathbb{G}(k, N)$  en  $\mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V)$  se obtiene el siguiente resultado:

**Proposición 0.2.3** *El ideal homogéneo  $I$  que define  $\mathbb{G}(k, N)$  en  $\mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V)$  está generado por cuádricas.*

*Demostración.* Un estudio completo de las ecuaciones de Plücker que definen  $\mathbb{G}(k, N)$  puede encontrarse en [24] VII, 7 Theorem I.  $\square$

### 0.2.1 Los fibrados universales

Consideremos el diagrama de incidencia

$$\begin{array}{ccc} & \check{\mathcal{Q}} & \\ \bar{p} \swarrow & & \searrow \bar{q} \\ V^* & & \mathbb{G}(k, N) \end{array}$$

donde  $\check{\mathcal{Q}} = \{(v, h) \mid v \in \mathcal{H}\} \subset V^* \times \mathbb{G}(k, N)$ . El morfismo  $\bar{q}$  dota a  $\check{\mathcal{Q}}$  de estructura de fibrado vectorial de rango  $k + 1$  sobre  $\mathbb{G}(k, N)$ . En particular  $\check{\mathcal{Q}}$  es un subfibrado del fibrado trivial  $V^* \times \mathbb{G}(k, N)$ , cuyo cociente denotamos por  $\mathcal{S}$ . Dualizando obtenemos la *sucesión exacta universal* de fibrados sobre  $\mathbb{G}(k, N)$

$$0 \rightarrow \check{\mathcal{S}} \rightarrow V \times \mathbb{G}(k, N) \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow 0.$$

**Definición 0.2.4** Los fibrados vectoriales  $\check{\mathcal{S}}$  y  $\mathcal{Q}$  de rangos  $N - k$  y  $k + 1$  que aparecen en la sucesión exacta universal reciben los nombres de *subfibrado universal* y *fibrado universal cociente* respectivamente.

Otra forma de construir estos fibrados universales es considerar el diagrama de incidencia

$$\begin{array}{ccc}
 & I & \\
 p \swarrow & & \searrow q \\
 \mathbb{P}^N & & \mathbb{G}(k, N)
 \end{array}$$

donde  $I = \{(x, h) \mid x \in H\} \subset \mathbb{P}^N \times \mathbb{G}(k, N)$ , y la sucesión de Euler (véase [23] (II, Theorem 8.3))

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^N} \rightarrow V \times \mathbb{P}^N \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1) \rightarrow 0.$$

Haciendo el *pull-back* por  $p$  y el *push-forward* por  $q$  se obtiene de nuevo la sucesión exacta universal

$$0 \rightarrow \check{\mathcal{S}} \rightarrow V \times \mathbb{G}(k, N) \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow 0$$

con  $\check{\mathcal{S}} = q_*p^*(\Omega_{\mathbb{P}^N})$  y  $\mathcal{Q} = q_*p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$ .

La siguiente proposición nos da más información de los fibrados universales  $\mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{S}$  y sus secciones globales.

**Proposición 0.2.5** *Se tienen identificaciones naturales  $H^0(G, \mathcal{Q}) = V$  y  $H^0(G, \mathcal{S}) = V^*$ . De este modo,  $s$  secciones independientes de  $\mathcal{Q}$  se corresponden con un subespacio lineal  $A \subset \mathbb{P}^N$  de codimensión  $s$ . Si  $s \leq k+1$ , el lugar de dependencia de las secciones es el conjunto de  $k$ -planos que cortan  $A$  en dimensión al menos  $k-s+1$ .*

*Análogamente,  $r+1$  secciones independientes de  $\mathcal{S}$  se corresponden con un subespacio lineal  $B \subset \mathbb{P}^N$  de dimensión  $r$ . Si  $r+1 \leq N-k$ , el lugar de dependencia de estas secciones es el conjunto de  $k$ -planos que cortan a  $B$ .*

*Demostración.* Véase [5], Proposition 0.5.  $\square$

**Observación 0.2.6** La inmersión de Plücker  $p : \mathbb{G}(k, \mathbb{P}^N) \hookrightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V)$  viene dada precisamente por las secciones globales del fibrado lineal  $\bigwedge^{k+1} \mathcal{Q}$ , que denotaremos  $\mathcal{O}_{\mathbb{G}(k, N)}(1)$ .

## 0.2.2 Cálculo de Schubert

Recordemos brevemente los resultados necesarios del cálculo de Schubert que nos permitan estudiar las intersecciones de subvariedades de la Grassmanniana. Pueden encontrarse más detalles en [5] ó [26].

Para  $\mathbb{G}(k, N) = G$  denotemos por  $A(\mathbb{G}) = \bigoplus_{i=0}^{(k+1)(N-k)} A^i(\mathbb{G})$  al *anillo de Chow* de  $G$  graduado por la codimensión, esto es, cada  $A^i(\mathbb{G})$  es el grupo abeliano libre generado por las subvariedades irreducibles de  $G$  de codimensión  $i$  módulo equivalencia algebraica. La estructura multiplicativa de  $A(\mathbb{G})$  viene dada por la intersección de subvariedades, teniendo en cuenta que eligiendo adecuadamente los representantes en la clase de equivalencia algebraica, la intersección de subvariedades equidimensionales de codimensiones  $r$  y  $s$  es equidimensional de codimensión  $r + s$ .

**Definición 0.2.7** Dada una cadena de  $k + 1$  subespacios lineales no vacíos de  $\mathbb{P}^N$ ,  $H_0 \subsetneq H_1 \subsetneq \dots \subsetneq H_k$ , se define la *variedad de Schubert*

$$\Omega(H_0, \dots, H_k) = \{h \in \mathbb{G}(k, N) \mid \dim(H \cap H_i) \geq i, i = 0, \dots, k\}.$$

que resulta ser una subvariedad irreducible de  $\mathbb{G}(k, N)$ .

Una vez introducidas las variedades de Schubert es el momento de enunciar el siguiente resultado.

**Lema 0.2.8** Sea  $X \subset \mathbb{G}(k, N)$ . Supongamos que  $H \cap H' = \mathbb{P}^{k-1}$  para  $h, h' \in X$  generales. Entonces  $X \subset \mathbb{G}(k, k + 1)$  o bien  $X$  está contenida en la variedad de Schubert de los subespacios lineales que contienen a un  $\mathbb{P}^{k-1}$  de  $\mathbb{P}^N$ .

*Demostración.* Fijemos  $h, h' \in X$  generales y sea  $\langle H, H' \rangle = \mathbb{P}^{k+1}$ . Tomemos otro  $h'' \in X$  general. Si  $H'' \subset \langle H, H' \rangle$ ,  $X \subset \mathbb{G}(k, k + 1)$  por ser ésta una condición cerrada. Si por el contrario  $H''$  no está contenido en  $\langle H, H' \rangle$ , necesariamente  $H'' \cap \langle H, H' \rangle = H \cap H'$ , que de nuevo es una condición cerrada y en consecuencia todo elemento de  $X$  contiene a  $H \cap H'$ .  $\square$

**Observación 0.2.9** Las variedades de Schubert introducidas están estratificadas por su lugar singular. En el caso de Grassmannianas de rectas, que son el principal objeto de esta memoria, se tiene el siguiente resultado.

**Lema 0.2.10** Sea  $H \subset \mathbb{P}^N$  un subespacio lineal de dimensión  $k$ . Las rectas  $l \in \mathbb{G}(1, H)$  son puntos singulares de la variedad de Schubert  $\Omega(H, \mathbb{P}^N) \subset \mathbb{G}(1, N)$ . Su multiplicidad es  $m_l(\Omega(H, \mathbb{P}^N)) = N - k$ .

*Demostración.* Consideremos el abierto  $U_{0,1} \subset \mathbb{G}(1, N)$  cuyas rectas vienen parametrizadas por las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{0,2} & \cdots & a_{0,N} \\ 0 & 1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,N} \end{pmatrix}.$$

Supongamos  $H \subset \mathbb{P}^N$  cortado por los hiperplanos  $\{x_{k+1} = 0, \dots, x_N = 0\}$ . Una recta de  $U_{0,1} \cap \Omega(H, \mathbb{P}^N)$  viene determinada por la condición

$$\text{rg} \begin{pmatrix} a_{0,k+1} & \cdots & a_{0,N} \\ a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,N} \end{pmatrix} \leq 1,$$

y se obtiene una recta contenida en  $H$  cuando el rango de dicha matriz es cero. Para calcular la multiplicidad de los puntos del lugar singular de  $\Omega(H, \mathbb{P}^N)$  basta calcular la multiplicidad de la matriz nula en la variedad determinantal de las matrices  $2 \times (N - k)$  de rango menor o igual que 1. Esta multiplicidad coincide con el grado de su cono tangente, esto es, el grado del subesquema definido por el ideal generado por  $\{a_{0,i}a_{1,j} - a_{0,j}a_{1,i}, k + 1 \leq i < j \leq N\}$  en  $k[a_{0,k+1}, \dots, a_{0,N}, a_{1,k+1}, \dots, a_{1,N}]$ , que es el ideal de la inmersión de Segre  $\sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{N-k-1}) \subset \mathbb{P}^{2N-2k-1}$ , cuyo grado es  $N - k$ .  $\square$

**Definición 0.2.11** La clase de equivalencia algebraica de una variedad de Schubert en el anillo de Chow  $A(\mathbb{G})$  se llama *ciclo de Schubert* y se denota por  $\Omega(\alpha_0, \dots, \alpha_k)$ , donde  $\alpha_i = \dim H_i$ . Resulta que  $\dim \Omega(\alpha_0, \dots, \alpha_k) = \sum_{i=0}^k (\alpha_i - i)$ .

**Definición 0.2.12** El *ciclo especial de Schubert*  $\sigma_a$  de codimensión  $a$  es el ciclo de  $k$ -espacios lineales que cortan a un subespacio lineal de  $\mathbb{P}^N$  de dimensión  $N - k - a$ , es decir,

$$\sigma_a = \Omega(N - k - a, N - k + 1, \dots, N).$$

En particular  $\sigma_1$  es la clase de la sección hiperplana de  $\mathbb{G}(k, N)$  después de la inmersión de Plücker.

El siguiente resultado es esencial para conocer el anillo de Chow  $A(\mathbb{G})$  de  $\mathbb{G} = \mathbb{G}(k, N)$ .

**Teorema 0.2.13** Para todo  $i = 0, \dots, (k+1)(N-k)$ , el grupo de Chow  $A^i(\mathbb{G})$  está libremente generado por todos los ciclos de Schubert  $\Omega(\alpha_0, \dots, \alpha_k)$  de codimensión  $i$ , es decir, aquéllos tales que  $\sum_{j=0}^k (\alpha_j - j) = (N - k)(k + 1) - i$ .

Los dos próximos resultados sirven para calcular las clases en  $A(\mathbb{G})$  de las intersecciones de subvariedades de la Grassmanniana.

**Teorema 0.2.14 (Fórmula de Pieri)** *El producto de intersección de un ciclo de Schubert y un ciclo especial de Schubert está dado por*

$$\Omega(\alpha_0, \dots, \alpha_k) \cdot \sigma_a = \sum \Omega(\beta_0, \dots, \beta_k).$$

siendo el sumatorio sobre las  $k + 1$ -tuplas  $(\beta_0, \dots, \beta_k)$  tales que  $\alpha_{i-1} + 1 \leq \beta_i \leq \alpha_i$  y  $\sum \beta_i = \sum \alpha_i - a$ .

**Teorema 0.2.15** *Si dos ciclos de Schubert tienen dimensión complementaria, entonces su intersección  $\Omega(\alpha_0, \dots, \alpha_k) \cdot \Omega(\beta_0, \dots, \beta_k)$  es cero a menos que  $\alpha_i + \beta_{k-i} = N$  para todo  $i = 0, \dots, k$ . En este último caso  $\Omega(\alpha_0, \dots, \alpha_k) \cdot \Omega(\beta_0, \dots, \beta_k) = \Omega(0, 1, \dots, k)$ , es decir, la clase de un punto.*

El Teorema 0.2.13 implica que los ciclos de Schubert de codimensión  $r$  dan una base de  $A^r(\mathbb{G})$ , mientras que el Teorema 0.2.15 prueba la ortogonalidad con respecto al producto de intersección de las bases obtenidas para dos dimensiones complementarias.

En particular, el discurso anterior permite extender la noción de grado a las Grassmannianas.

**Definición 0.2.16** Sea  $Y \subset \mathbb{G}(k, N)$  una variedad equidimensional de codimensión  $r$  y dimensión  $n$ . Se denomina *multigrado* de  $Y$  al conjunto de coeficientes de la clase  $[Y] \in A^r(\mathbb{G})$  con respecto a las bases dadas por los ciclos de Schubert de codimensión  $r$ .

Llamamos *grado total* de  $Y$ , que denotamos por  $d$ , al grado de  $Y$  considerada como variedad proyectiva por medio de la inmersión de Plücker. Lógicamente  $d = \sigma_1^n \cdot [Y]$ .

**Definición 0.2.17** Sea  $X \subset \mathbb{G}(1, N)$  de dimensión  $n$ . Al coeficiente  $a$  de  $[X]$  que acompaña a  $\Omega(0, n + 1)$  lo llamamos *orden* de  $X$ , es decir,  $a = [X] \cdot \Omega(N - n - 1, N)$ .

Nótese que  $a = 0$  justamente cuando  $X$  es comprimida. De lo contrario  $a = \text{gr}(\overline{X}) \cdot \mu(\overline{X})$ , donde  $\mu(\overline{X})$  denota el número de rectas de  $X$  que pasan por el punto general de  $\overline{X}$ .

**Ejemplo 0.2.18** En el caso de superficies irreducibles  $S \subset \mathbb{G}(1, N)$ , la clase de equivalencia algebraica de  $S$  es  $[S] = a\Omega(0, 3) + b\Omega(1, 2)$  donde  $a = [S] \cdot \Omega(N - 3, N)$  y  $b = [S] \cdot \Omega(N - 2, N - 1)$ , es decir,  $a$  es el número de rectas de  $S$  que cortan a

un subespacio lineal general de dimensión  $N - 3$  y  $b$  es el número de rectas de  $S$  contenidas en un hiperplano general  $H$  de  $\mathbb{P}^N$ . En virtud de la Proposición 0.2.5 y la fórmula de Porteus (véase [18] Theorem 14.4) se sigue que  $b = c_2(\mathcal{Q}|_S)$ .

El grado total de  $S$  es  $d = a + b$  ya que  $\sigma_1^2 = \Omega(N - 3, N) + \Omega(N - 2, N - 1)$  en virtud del Teorema 0.2.14.

**Definición 0.2.19** Los coeficientes  $a$  y  $b$  de  $[S]$  en  $A(\mathbb{G}(1, N))$  se llaman *orden* y *clase* de  $S$  respectivamente.

Por otro lado, los representantes de  $\Omega(0, 3)$  y  $\Omega(1, 2)$  se llaman  $\alpha$ -plano y  $\beta$ -plano respectivamente.

**Observación 0.2.20** Es sencillo probar que todo representante del ciclo de Schubert  $\Omega(0, 3)$  (resp.  $\Omega(1, 2)$ ) es en realidad una variedad de Schubert  $\Omega(P, \mathbb{P}^3)$  (resp.  $\Omega(L, \mathbb{P}^2)$ ).

Además para  $\Omega(0, N)$  también se tiene que todo representante suyo es una variedad de Schubert  $\Omega(P, \mathbb{P}^N)$ , es decir, las rectas de  $\mathbb{P}^N$  que pasan por  $P$ , que de ahora en adelante llamaremos *estrella de rectas*. En particular, cuando  $N = 2$  diremos *un haz de rectas* para referirnos a una variedad de Schubert  $\Omega(P, \mathbb{P}^2)$ .

**Lema 0.2.21** *Las estrellas de rectas y los  $\beta$ -planos son los únicos espacios lineales de  $\mathbb{G}(1, N)$ , es decir, son las únicas subvariedades de  $\mathbb{G}(1, N)$  tales que su inmersión de Plücker es un subespacio lineal, de dimensiones  $N - 1$  y  $2$  respectivamente.*

*Demostración.* Este conocido lema es consecuencia del Lema 0.2.8.  $\square$

### 0.2.3 Morfismos a la Grassmanniana

**Proposición 0.2.22** *Sea  $X$  una variedad algebraica (abstracta). Dar un morfismo  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{G}(k, N)$  es equivalente a dar un haz localmente libre  $\mathcal{F}$  sobre  $X$  de rango  $k + 1$  y un epimorfismo de haces  $\phi : V \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{F}$ , donde  $V$  es un espacio vectorial de dimensión  $N + 1$ .*

*Además  $\phi$  es el pull-back por  $\varphi$  del epimorfismo universal  $\pi : V \otimes \mathcal{O}_G \rightarrow \mathcal{Q}$  que aparece en la sucesión exacta universal*

$$0 \rightarrow \check{\mathcal{S}} \rightarrow V \times \mathbb{G}(k, N) \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow 0.$$

*En particular si consideramos  $X \subset \mathbb{G}(k, N)$  se tiene  $\mathcal{F} \cong \mathcal{Q}|_X$ .*

*Demostración.* Véase [5], Proposition 2.1.  $\square$

Sin entrar en detalles diremos que el morfismo  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{G}(k, N)$  se construye de la siguiente forma. Para cada  $x \in X$  el epimorfismo de haces  $\phi : V \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{F}$  induce un epimorfismo en las fibras  $\phi_x : V \rightarrow \mathcal{F}_x$  que determina un cociente de  $V$  de dimensión  $k + 1$ , que es precisamente  $\varphi(x) \in \mathbb{G}(k, V)$ .

Consideremos la aplicación lineal  $\bar{\phi} : V \rightarrow H^0(X, \mathcal{F})$  asociada al epimorfismo  $\phi : V \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{F}$ . Sea  $W = \bar{\phi}(V)$ . Se verifica el siguiente resultado.

**Proposición y Definición 0.2.23** *En las condiciones anteriores:*

(i)  $\bar{\phi} : V \rightarrow W$  es inyectiva si y sólo si  $\varphi(X) \subset \mathbb{G}(k, N)$  no está contenida en una Grassmanniana más pequeña  $\mathbb{G}(k, N - 1)$ . En este caso decimos que  $\varphi$  (o abusando de la notación  $X \subset \mathbb{G}(k, N)$ ) es *no degenerada*;

(ii)  $\bar{\phi} : V \rightarrow H^0(X, \mathcal{F})$  es sobreyectiva si y sólo si  $\varphi(X) \subset \mathbb{G}(k, N)$  no viene proyectada de una Grassmanniana mayor  $\mathbb{G}(k, N + 1)$ . Abusando nuevamente de la notación decimos que  $X \subset \mathbb{G}(k, N)$  es *linealmente normal*.

*Demostración.* Véase [5], Remark 2.3.  $\square$

**Observaciones 0.2.24** Cuando consideremos  $V = H^0(X, \mathcal{F})$ , diremos simplemente que  $X \subset \mathbb{G}(k, N)$  viene dada por el haz localmente libre  $\mathcal{F}$ , donde  $N + 1 = h^0(X, \mathcal{F})$ . En este caso el epimorfismo  $\phi : H^0(X, \mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{F}$  quiere decir simplemente que  $\mathcal{F}$  está generado por sus secciones globales. Además, en virtud de la Proposición 0.2.23,  $X$  será no degenerada y linealmente normal.

Por otro lado, aunque  $X \subset \mathbb{G}(k, N)$  sea no degenerada, puede ser que su inmersión de Plücker en  $\mathbb{P}(\wedge^{k+1} V)$  sí que lo sea.

**Definición 0.2.25** Sea  $X \subset \mathbb{G}(k, N)$ . Denotamos por  $\langle X \rangle \subset \mathbb{P}(\wedge^{k+1} V)$  al mínimo subespacio lineal de  $\mathbb{P}(\wedge^{k+1} V)$  que contiene a  $X$  después de la inmersión de Plücker.

**Ejemplo 0.2.26** En realidad la mayoría de ejemplos que aparecen en la memoria satisfacen esta posibilidad. Por ejemplo, si consideramos una estrella de rectas  $X = \Omega(P, \mathbb{P}^N)$  en  $\mathbb{G}(1, N)$  se tiene que  $\langle X \rangle \cong \mathbb{P}^{N-1}$ , que es muy degenerada en  $\mathbb{P}^{\binom{N+2}{2}-1}$ .

**Observación 0.2.27** El morfismo  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{G}(k, N)$  determinado por un haz localmente libre  $\mathcal{F}$  de rango  $k$  generado por sus secciones globales tiene una interpretación geométrica clara cuando  $\mathcal{F}$  escinde como suma directa de fibrados lineales

$\mathcal{F} = \mathcal{L}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_{k+1}$ . Cada  $\mathcal{L}_i$  también está generado por sus secciones globales, luego  $L_i$  define un morfismo  $\varphi_i : X \rightarrow \mathbb{P}^{N_i}$  a subespacios proyectivos de  $\mathbb{P}^N$  en posición general, donde  $N_i + 1 = h^0(X, \mathcal{L}_i)$  y  $\sum_{i=1}^{k+1} N_i + 1 = N + 1$ . Entonces la imagen de  $x \in X$  por  $\varphi$  es el  $k$ -espacio lineal generado por  $\varphi_i(x)$ , es decir,  $\varphi(x) = \langle \varphi_1(x), \dots, \varphi_{k+1}(x) \rangle$ .

**Ejemplo 0.2.28** Sea  $X = \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$  y consideremos  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(1, 0) \oplus \mathcal{O}_X(0, 1)$ . El fibrado  $\mathcal{F}$  da una inmersión de  $X$  en  $\mathbb{G}(1, m+n+1)$  como las rectas que cortan a dos subespacios lineales complementarios  $H_1$  y  $H_2$  de  $\mathbb{P}^{m+n+1}$ , de dimensiones  $m$  y  $n$  respectivamente.

Como  $\bigwedge^2 \mathcal{F} = \mathcal{O}_X(1, 1)$  la composición con la inmersión de Plücker coincide con la inmersión de Segre  $\sigma(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^{mn+m+n}$ .

Visto en coordenadas, las rectas de  $X \subset \mathbb{G}(1, m+n+1)$  vienen generadas por las filas de la matriz

$$\begin{pmatrix} s_0 & \dots & s_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & t_0 & \dots & t_n \end{pmatrix}$$

donde  $H_1 = (x_0 : \dots : x_m : 0 : \dots : 0)$  y  $H_2 = (0 : \dots : 0 : x_{m+1} : \dots : x_{m+n+1})$ .

Geoméricamente  $X$  se corresponde con la familia de rectas que cortan a los subespacios  $H_1, H_2$  de  $\mathbb{P}^{m+n+1}$ , es decir,  $X = \Omega(H_1, \mathbb{P}^{m+n+1}) \cap \Omega(H_2, \mathbb{P}^{m+n+1})$ .

Además si  $X \subset \mathbb{G}(1, N)$  es una inmersión de  $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$  por medio de un fibrado generado por sus secciones globales  $\mathcal{F}$  de rango 2 tal que  $\bigwedge^2 \mathcal{F} = \mathcal{O}_X(1, 1)$ , no es difícil ver que necesariamente  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(1, 0) \oplus \mathcal{O}_X(0, 1)$  o bien  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(1, 1)$ .

**Ejemplo 0.2.29** Sea  $X \subset \mathbb{P}^N$  una variedad inmersa por el fibrado lineal  $\mathcal{L}$ . Entonces  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{L}$  da una inmersión de  $X$  en  $\mathbb{G}(1, N+1)$  como las generatrices de un cono sobre  $X \subset \mathbb{P}^N$  de vértice un punto  $P \notin \mathbb{P}^N$ . En este caso  $\bigwedge^2 \mathcal{F} = \mathcal{L}$ , luego la composición con la inmersión de Plücker coincide con la inmersión de  $X$  en  $\mathbb{P}^N$  por medio de  $\mathcal{L}$ .

La siguiente proposición nos dice cuándo el epimorfismo  $\phi : V \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{F}$  determina una inmersión. La idea es que  $\varphi$  debe separar puntos y direcciones tangentes. En particular para  $x_1, x_2 \in X$  se tiene que  $\varphi(x_1), \varphi(x_2) \in \mathbb{G}(k, N)$  deben generar un espacio proyectivo de dimensión al menos  $k+1$  en  $\mathbb{P}^N$ .

**Proposición 0.2.30** *El morfismo  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{G}(k, N)$  definido por el epimorfismo  $\phi : V \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{F}$  es una inmersión si y sólo cada subesquema  $Z \subset X$  de longitud 2 impone como mínimo  $N - k - 1$  condiciones a  $V$ .*



*Demostración.* Véase [5], Proposition 2.4.  $\square$

En esta memoria nos centraremos en el caso  $k = 1$  de la situación anterior, es decir, estudiaremos inmersiones de variedades  $X$  con unas determinadas condiciones geométricas en una Grassmanniana de rectas  $\mathbb{G}(1, N)$  definidas por epimorfismos  $\phi : V \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{F}$ , donde  $\mathcal{F}$  es un haz localmente libre de rango 2 sobre  $X$ .

Una vez introducidos los *objetos*  $X \subset \mathbb{G}(1, N)$  que se estudiarán más adelante, fijemos cuales serán los *morfismos* que actuarán sobre ellos.

### 0.3 Proyecciones lineales en la Grassmanniana

**Definición 0.3.1** Sea  $H \cong \mathbb{P}^r$  un subespacio lineal de  $\mathbb{P}^N$ . La proyección lineal  $\pi_H : \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^{N-r-1}$  induce una aplicación racional  $\pi_H : \mathbb{G}(k, N) \dashrightarrow \mathbb{G}(k, N-r-1)$  que llamaremos *proyección lineal en la Grassmanniana* o simplemente *proyección lineal*, cuyo lugar de indeterminación consiste en la variedad especial de Schubert  $\sigma_H = \{K \in \mathbb{G}(k, N) \mid K \cap H \neq \emptyset\}$  de los subespacios lineales  $k$ -dimensionales de  $\mathbb{P}^N$  que cortan a  $H$ .

Según comentamos previamente, los resultados obtenidos en esta memoria corresponden al caso  $k = 1$ , esto es, a proyecciones lineales de Grassmannianas de rectas.

La siguiente proposición justifica el nombre de proyección lineal (en la Grassmanniana) atribuido en la Definición 0.3.1.

**Proposición 0.3.2** La proyección  $\pi_H : \mathbb{G}(1, N) \dashrightarrow \mathbb{G}(1, N-r-1)$  con centro  $H \cong \mathbb{P}^r$  es la restricción a  $\mathbb{G}(1, N)$  de la proyección lineal

$$\pi_{K_H} : \mathbb{P}^{\binom{N+2}{2}-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{\binom{N+1-r}{2}-1}$$

con centro  $K_H = \langle \Omega(H, \mathbb{P}^N) \rangle \cong \mathbb{P}^{\frac{(2N-r)(r+1)}{2}-1}$ .

*Demostración.* La prueba de este resultado puede encontrarse en [42].  $\square$

**Observación 0.3.3** Como  $\Omega(H, \mathbb{P}^N)$  es singular en  $\mathbb{G}(1, H)$  en virtud del Lema 0.2.10,  $K_H = \langle \Omega(H, \mathbb{P}^N) \rangle$  contiene todos los espacios tangentes inmersos a  $\mathbb{G}(1, N)$  en las rectas  $l \in \mathbb{G}(1, H)$ .

**Observación 0.3.4** Anteriormente observamos en 0.2.24 que  $X$  puede ser degenerada en  $\mathbb{P}^{\binom{N+2}{2}-1}$  aunque  $X \subset \mathbb{G}(1, N)$  no lo sea. Además puede ocurrir que la proyección

$$\pi_{K_H} : \mathbb{P}^{\binom{N+2}{2}-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{\binom{N+1-r}{2}-1}$$

restringida a  $\langle X \rangle$  sea la identidad, lo cual puede resultar chocante. De hecho esto es lo que ocurre en las variedades proyectables de los Ejemplos 2.2.3 y 2.2.4 del Capítulo 2.

Los Capítulos 1 y 2, que forman la parte central de la memoria, están dedicados a estudiar algunas propiedades geométricas relacionadas con las proyecciones lineales  $\pi : \mathbb{G}(1, N) \dashrightarrow \mathbb{G}(1, M)$  y la dificultad para sumergir una variedad  $X$  de dimensión  $n$  en la Grassmanniana  $\mathbb{G}(1, n+1)$  de acuerdo con las fórmulas de autointersección (véase [25]).

En el Capítulo 1 se clasifican las superficies lisas e irreducibles  $X$  que pueden sumergirse en  $\mathbb{G}(1, 5)$  con *un punto doble aparente*. Esto quiere decir que la proyección  $\pi_L$  de  $X$  desde una recta general  $L \subset \mathbb{P}^5$  a  $\mathbb{G}(1, 3)$  produce un único punto doble.

Por otro lado, en el Capítulo 2 se clasifican las variedades  $n$ -dimensionales  $X \subset \mathbb{G}(1, N)$  que pueden proyectarse isomórficamente a  $\mathbb{G}(1, n+1)$  cuando  $N$  es suficientemente grande, en concreto,  $N \geq 2n$ .

La estrategia para trabajar estos problemas consiste en estudiar las *variedades secantes* de  $X$ , esto es, los subespacios lineales de  $\mathbb{P}^5$  y  $\mathbb{P}^N$  respectivamente que cortan a  $X$  en un subesquema de longitud al menos 2. Esta noción, con alguna modificación, traslada a la Grassmanniana el concepto de variedad secante  $SX \subset \mathbb{P}^N$  de una variedad proyectiva  $X \subset \mathbb{P}^N$  que aparece en la Introducción.

Precisemos a continuación qué entenderemos por variedades secantes de una variedad  $X \subset \mathbb{G}(1, N)$ . En primer lugar veamos qué sucede cuando las rectas de  $X$  se cortan dos a dos.

**Lema 0.3.5** *Sea  $X \subset \mathbb{G}(1, N)$  una variedad  $n$ -dimensional no degenerada tal que dos rectas generales de  $X$  se cortan. Entonces  $X \subset \mathbb{G}(1, 2)$  o bien  $X \subset \Omega(P, \mathbb{P}^N)$  para cierto  $P \in \mathbb{P}^N$ . En este último caso, si  $N > n+1$ , la proyección  $\pi_H : X \rightarrow \mathbb{G}(1, n+1)$  desde un subespacio lineal general  $H \subset \mathbb{P}^N$  de dimensión  $N - n - 2$  es no reducida.*

*Demostración.* La primera parte es consecuencia del Lema 0.2.8 mientras que la segunda es consecuencia de que, por motivos de dimensión,  $X$  se proyecta en una

estrella de rectas de  $\mathbb{G}(1, n + 1)$ . Como  $N \geq n + 1$ ,  $X$  no es una estrella de rectas. Sea  $d = \text{gr}(\overline{X})$ . Entonces  $\pi_H : X \rightarrow \mathbb{G}(1, n + 1)$  es un morfismo de grado  $d$  sobre una estrella de rectas. Es decir, vía Plücker,  $\pi_H : X \rightarrow \mathbb{G}(1, n + 1)$  es una proyección lineal general de la variedad  $n$ -dimensional  $X$  en un  $\mathbb{P}^n$ .  $\square$

Por tanto, para estudiar proyecciones a  $\mathbb{G}(1, n + 1)$  de variedades  $n$ -dimensionales, podemos suponer que dos rectas generales de  $X$  no se cortan y, en consecuencia, tiene sentido la siguiente definición.

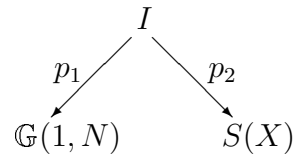
**Definiciones 0.3.6** Sea  $X \subset \mathbb{G}(1, N)$  una variedad irreducible  $n$ -dimensional. Consideremos la aplicación racional

$$\begin{aligned} \psi : X \times X &\dashrightarrow \mathbb{G}(3, N) \\ (l, l') &\mapsto \langle L, L' \rangle. \end{aligned}$$

Se define la *variedad secante de  $X$* , que denotamos por  $S(X) \subset \mathbb{G}(3, N)$ , como el esquema reducido asociado a la clausura de la imagen de  $X \times X$  por  $\psi$ .

Llamaremos *defecto secante de  $X$* , y lo denotamos  $\kappa(X)$ , a la dimensión de  $Y_\Lambda = X \cap \mathbb{G}(1, \Lambda)$  para un  $\lambda \in S(X)$  general.

Consideremos el diagrama de incidencia:



donde  $I = \{(l, \lambda) \in \mathbb{G}(1, N) \times S(X) \mid L \subset \Lambda\}$ .

Denotaremos por  $SX \subset \mathbb{G}(1, N)$  a la proyección  $p_1$  de  $I$ . Obsérvese que entonces  $\dim S(X) = 2n - 2\kappa(X)$  y  $\dim SX \leq \dim S(X) + 4 = 2n - 2\kappa(X) + 4$  de acuerdo con el Teorema 0.1.6.

Consideremos  $\psi : X \times X \dashrightarrow S(X) \subset \mathbb{G}(3, N)$  y denotemos por  $p$  la proyección  $p : X \times X \rightarrow X$  sobre el primer factor.

**Observación 0.3.7** Para  $\lambda \in S(X)$  general  $Y_\Lambda$  es una variedad equidimensional ya que, en virtud del apartado (ii) del Teorema 0.1.6,  $Y_\Lambda = p(\psi^{-1}(\lambda))$ .

A continuación analizamos el comportamiento de  $Y_\Lambda$  para un  $\lambda \in S(X)$  general. Para ello recordamos primero cuál es la situación para subvariedades del espacio proyectivo.

**Observación 0.3.8** Sea  $X \subset \mathbb{P}^N$  una variedad proyectiva y  $l \in \mathbb{G}(1, N)$  una recta secante general. Sea  $Y_L = X \cap L$ . El Lema de las Trisecantes 0.1.5 permite probar que

- (i)  $Y_L = L$  si y sólo si  $X = \mathbb{P}^N$ ;
- (ii)  $Y_L$  consiste en  $d$  puntos de  $X$  si y sólo si  $X \subset \mathbb{P}^N$  es una hipersuperficie de grado  $d$ ;
- (iii)  $Y_L$  consiste en dos puntos si y sólo si  $\text{codim}_{\mathbb{P}^N} X > 1$ .

Sin embargo, no es tan sencillo establecer qué puede ser  $Y_\Lambda$  para variedades  $X \subset \mathbb{G}(1, N)$ , como muestra la siguiente colección de ejemplos.

**Ejemplos 0.3.9** (i) Consideremos  $\mathbb{P}^1$  inmerso en  $\mathbb{G}(1, d+2)$  por medio del fibrado vectorial  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$  que sumerge  $\mathbb{P}^1$  en  $\mathbb{G}(1, d+2)$  como las fibras del scroll racional normal  $S(1, d) \subset \mathbb{P}^{d+2}$ . En coordenadas, las rectas vienen generadas por las rectas de la matriz

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s_0^d & s_0^{d-1}s_1 & \cdots & s_1^d \end{pmatrix}.$$

Para un  $\Lambda$  secante general se sigue que  $Y_\Lambda$  es un par de rectas. Consideremos la proyección lineal de  $\mathbb{P}^{d+2}$  a  $\mathbb{P}^4$  definida por

$$(x_0 : \dots : x_{d+2}) \mapsto (x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_{d+2})$$

que induce una proyección lineal  $\mathbb{G}(1, d+2) \dashrightarrow \mathbb{G}(1, 4)$ .

Entonces podemos ver  $\mathbb{P}^1$  inmerso en  $\mathbb{G}(1, 4)$  de forma que sus rectas vienen generadas por las filas de la matriz

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_0^d & s_0^{d-1}s_1 & s_1^d \end{pmatrix}.$$

En este caso todo  $\lambda$  secante corta al  $\mathbb{P}^2$  de ecuaciones  $x_0 = x_1 = 0$  en una recta, luego  $Y_\Lambda$  consiste en  $d$  rectas.

(ii) Más adelante veremos que la variedad de Veronese del Ejemplo 2.2.3 cumple que  $Y_\Lambda$  es una cónica inmersa como las rectas de una de las dos familias de una cuádrica lisa  $Q \subset \Lambda$ .

(iii) Consideremos una recta  $L$ , una curva racional normal  $C \subset \mathbb{P}^d$  y un isomorfismo  $\phi : L \rightarrow C$ . Sea  $X \subset \mathbb{G}(1, d+2)$  la unión  $\bigcup_{P \in L} \Omega(P, \langle \phi(P), L \rangle)$ . Después de la inmersión de Plücker  $X$  resulta ser el cono  $S(0, d+1)$  de vertice un punto, correspondiente a  $l$ , sobre una curva racional normal de  $\mathbb{P}^{d+1}$ .

$Y_\Lambda$  consiste en dos haces de rectas con centros en la recta  $L$ . Si consideramos la proyección a  $\mathbb{G}(1, 4)$  como en el apartado (i), obtenemos que  $Y_\Lambda$  es la unión de  $d$  haces de rectas  $\Omega(P_i, \langle \phi(P_i), L \rangle)$  con  $P_1, \dots, P_d \in L$ .

(iv) Consideremos  $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  inmerso en  $\mathbb{G}(1, d+2)$  por el fibrado vectorial  $\mathcal{O}_X(1, 0) \oplus \mathcal{O}_X(0, d)$ , es decir,  $X = S(d, d)$  después de la inmersión de Plücker. Geométricamente  $X$  consiste en la familia de rectas que cortan a una recta  $L \subset \mathbb{P}^{d+2}$  y a una curva racional normal  $C$  de un  $\mathbb{P}^d$  complementario. En coordenadas las rectas de  $X$  vienen dadas por las filas de la matriz

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & t_0^d & t_0^{d-1}t_1 & \cdots & t_1^d \end{pmatrix}.$$

En este caso  $Y_\Lambda$  consiste en dos haces de rectas  $\Omega(P_i, \langle P_i, L \rangle)$  con centros  $P_1, P_2 \in C$ . Si consideramos nuevamente la proyección a  $\mathbb{G}(1, 4)$  de (i), obtenemos que  $Y_\Lambda$  es la unión de  $d$  haces de rectas  $\Omega(P_i, \langle P_i, L \rangle)$  con  $P_1, \dots, P_d \in C$ .

(v) Consideremos ahora  $X = \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$  inmerso en  $\mathbb{G}(1, m+n+1)$  como en el Ejemplo 0.2.28, es decir,  $X = \Omega(H_1, \mathbb{P}^{m+n+1}) \cap \Omega(H_2, \mathbb{P}^{m+n+1})$ . En coordenadas las rectas de  $X$  vienen determinadas por las filas de la matriz

$$\begin{pmatrix} s_0 & \cdots & s_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & t_0 & \cdots & t_n \end{pmatrix}.$$

Todo  $\lambda$  secante corta en una recta  $L_1 \subset H_1$  y  $L_2 \subset H_2$  a  $H_1$  y  $H_2$  respectivamente, luego  $Y_\Lambda$  es la cuádrlica  $\Omega(L_1, \Lambda) \cap \Omega(L_2, \Lambda)$ .

(vi) Si tomamos un divisor  $D \subset X = \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$  de clase  $(a, b)$  entonces su  $Y_\Lambda$  es un divisor de clase  $(a, b)$  en la cuádrlica  $\Omega(L_1, \Lambda) \cap \Omega(L_2, \Lambda)$  anterior.

(vii) Por último para una Grassmanniana  $\mathbb{G}(1, N)$  con  $N \geq 3$  se sigue que  $Y_\Lambda = \mathbb{G}(1, \Lambda)$ .

A pesar de todo parece razonable pensar que bajo algunas *condiciones generales* a determinar,  $Y_\Lambda$  debe ser simplemente un par de rectas. Formulamos por tanto el siguiente problema que no tiene respuesta en esta memoria.

**Problema.** Estudiar bajo qué condiciones puede afirmarse que  $Y_\Lambda$  es un par de rectas de  $X$  y tratar de clasificar los casos restantes.

Después de esta digresión retornamos a nuestro estudio de las variedades secantes.

**Observación 0.3.10** Es importante resaltar que  $S(X)$  no parametriza todos los  $\mathbb{P}^3$  de  $\mathbb{P}^N$  que contienen un subesquema de longitud al menos 2 de  $X$ . Por tanto, es necesario introducir el siguiente concepto.

**Definición 0.3.11** Definimos el *subesquema de planos malos* de  $X$  como  $B(X) = \{\pi \in \mathbb{G}(2, N) \mid \text{long}(X \cap \mathbb{G}(1, \Pi)) \geq 2\}$ . Es decir, es la familia de planos de  $\mathbb{P}^N$  que cortan a  $X$  en un subesquema de longitud al menos 2.

**Observación 0.3.12** Nótese que dos rectas de  $X$  contenidas en un plano malo determinan una recta secante (o tangente cuando las dos rectas coinciden) a  $X \subset \mathbb{P}^{\binom{N+2}{2}-1}$  vía la inmersión de Plücker y contenida en la Grassmanniana.

A partir de ahora diremos que  $l \in X$  *corta a una recta infinitamente próxima* cuando existe  $\pi \in B(X)$  que interseca a  $X$  en  $l$  con multiplicidad al menos 2, es decir, cuando alguna recta tangente a  $X$  en  $l$  vía la inmersión de Plücker está contenida en  $\mathbb{G}(1, N)$ .

Veamos algunos resultados sencillos sobre proyecciones de curvas en la Grassmanniana que serán utilizados más adelante.

**Proposición 0.3.13** *Sea  $X \subset \mathbb{G}(1, 3)$  una curva no degenerada que se puede proyectar de forma isomorfa a  $\mathbb{G}(1, 2)$ . Entonces  $X$  es una de las siguientes curvas:*

(i) *una cónica lisa inmersa por el fibrado vectorial  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ . Geométricamente es una de las dos familias de rectas de una cuádrica lisa  $Q \subset \mathbb{P}^3$ ;*

(ii) *una cónica reducible inmersa como dos haces de rectas  $\Omega(P_1, \Pi_1)$  y  $\Omega(P_2, \Pi_2)$  con  $\Pi_1 \cap \Pi_2 = L$  y puntos base  $P_1, P_2 \in L$ .*

*Demostración.* Consideremos  $X \subset \mathbb{P}^5$  vía la inmersión de Plücker, que se proyecta a  $\mathbb{P}^2$  en virtud de la Proposición 0.3.2. Es un resultado conocido que ninguna curva que no sea plana puede proyectarse de forma isomorfa a  $\mathbb{P}^2$ , luego necesariamente  $\langle X \rangle = \mathbb{P}^2$ . Veamos que  $\langle X \rangle$  no es un plano contenido en la  $\mathbb{G}(1, 3)$ . Por una parte  $\langle X \rangle$  no es un  $\beta$ -plano ya que  $X \subset \mathbb{G}(1, 3)$  es no degenerada. Por otro lado, si  $\langle X \rangle$  es un  $\alpha$ -plano se tiene que la proyección  $\pi_P(X) \subset \mathbb{G}(1, 2)$  de  $X$  es un haz de rectas por un punto y de nuevo  $X$  sería degenerada.

En consecuencia  $\langle X \rangle \cap \mathbb{G}(1, 3)$  es una cónica puesto que  $\mathbb{G}(1, 3) \subset \mathbb{P}^5$  es una cuádrica. Como  $X \subset \mathbb{G}(1, 3)$  es no degenerada no puede ser una recta doble. Si  $X$

es una cónica lisa inmersa por un fibrado  $\mathcal{F}$  de rango 2, se sigue del Teorema de Grothendieck 3.2.1 que  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$  o  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$  (véase 3.3.7). La segunda posibilidad no puede darse por el Lema 0.3.5, luego se cumple (i). Si por el contrario  $X$  no es lisa, necesariamente  $X$  es un par de haces de rectas con puntos base contenidos en la recta correspondiente al punto singular de  $X$  y se cumple (ii).  $\square$

**Proposición 0.3.14** *Sea  $X \subset \mathbb{G}(1, 4)$  una curva no degenerada, lisa e irreducible con un punto doble aparente, es decir, tal que su proyección desde una recta general  $l \in \mathbb{G}(1, 4)$  a  $\mathbb{G}(1, 2)$  tiene un único punto doble. Entonces  $X$  es  $\mathbb{P}^1$  inmersa como una cúbica alabeada por el fibrado vectorial  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$ . Geométricamente se corresponde con las fibras del scroll racional normal  $S(1, 2) \subset \mathbb{P}^4$ .*

*Demostración.* Consideremos  $X \subset \mathbb{P}^9$  vía la inmersión de Plücker. La proyección  $\pi_{K_L} : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  desde  $K_L = \langle \Omega(L, \mathbb{P}^4) \rangle$  produce un único punto doble luego es conocido que necesariamente  $\langle X \rangle = \mathbb{P}^3$  y  $X$  es una cúbica alabeada (véase [33]). De nuevo por el Teorema de Grothendieck  $X$  se sumerge por medio del fibrado vectorial  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$  ya que la inmersión por medio de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)$  queda excluida por el Lema 0.3.5.  $\square$

Aunque el objeto de los primeros capítulos de la memoria es estudiar proyecciones lineales cuyo centro de proyección  $H \subset \mathbb{P}^N$  es un subespacio lineal general, en algunas ocasiones será útil estudiar *proyecciones internas* de variedades  $X \subset \mathbb{G}(1, N)$ , esto es, proyecciones lineales cuyo centro de proyección  $H$  corta a  $\overline{X}$ , y por tanto, la proyección inducida  $\pi_H : X \dashrightarrow \mathbb{G}(1, M)$  no está definida en las rectas de  $X$  que cortan a  $L$ .

**Proposición 0.3.15** *Sea  $X \subset \mathbb{G}(1, 4)$  una curva no degenerada, lisa e irreducible tal que su proyección interna desde una recta general  $l \in X$  a  $\mathbb{G}(1, 2)$  sea lisa. Supongamos además que  $l$  no corta a ninguna otra recta de  $X$  (ni siquiera a la infinitamente próxima). Entonces  $X$  es una de las siguientes curvas:*

(i) *una cúbica alabeada inmersa por el fibrado vectorial  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$ . Geométricamente consiste en las fibras del scroll racional normal  $S(1, 2) \subset \mathbb{P}^4$ ;*

(ii) *una cuártica racional normal inmersa por el fibrado vectorial  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$ . Geométricamente consiste en las fibras de la proyección a  $\mathbb{P}^4$  del scroll racional normal  $S(2, 2) \subset \mathbb{P}^5$ ;*

(iii) *la curva elíptica de grado 5 que se obtiene al intersecar  $\mathbb{G}(1, 4)$  con un  $\mathbb{P}^4$  general de  $\mathbb{P}^9 = \langle \mathbb{G}(1, 4) \rangle$ . Geométricamente consiste en la familia de fibras del scroll elíptico  $E_5 \subset \mathbb{P}^4$  que aparece en las clasificaciones de A. Lanteri y A. Aure (véanse [27] y [8]).*

*Demostración.* Sea  $l \in X$  una recta general de  $X$ . Consideremos la proyección interna  $\pi_l : X \dashrightarrow \mathbb{G}(1, 2)$  y sea  $X'$  la imagen de  $X$ . Por hipótesis  $X'$  es lisa. Sean  $d$  y  $d'$  los grados de  $X$  y  $X'$  respectivamente.

Asumiendo que la recta general de  $X$  no es cortada por otra recta de  $X$  veamos que  $d' = d - 2$ .

De hecho  $d'$  es el número de rectas de  $X'$  que pasan por el punto general de  $P \in \mathbb{P}^2$ . Como ninguna recta de  $X$  corta a  $l$ , estas rectas se corresponden con las rectas de  $X$  que cortan al plano  $\Pi = \langle P, L \rangle \subset \mathbb{P}^4$  (salvo la propia  $l$ ). Por tanto debemos comprobar que la multiplicidad de intersección de la variedad de Schubert  $\Omega(\Pi, \mathbb{P}^4)$  con  $X$  es exactamente 2.

En primer lugar,  $\Omega(\Pi, \mathbb{P}^4)$  es singular a lo largo de las rectas de  $\Pi$  con multiplicidad 2 en virtud de la Proposición 0.2.10.

Para demostrar que la multiplicidad de intersección de  $X$  y  $\Omega(\Pi, \mathbb{P}^4)$  en  $l$  es 2, basta comprobar que la recta tangente inmersa a  $X$  en  $l$  no está contenida en el cono tangente a  $\Omega(\Pi, \mathbb{P}^4)$  en  $l$  (véase [18], Corollary 12.4). Pero esto es cierto porque por hipótesis la recta tangente inmersa a  $X$  en  $l$  no está contenida en la Grassmanniana, es decir, la recta infinitamente próxima a  $l$  no corta a  $l$ .

En definitiva, por ser  $X$  isomorfa a una curva plana  $X'$  de grado  $d - 2$ , se sigue que  $\mathbb{G}(X) = \frac{(d-3)(d-4)}{2}$ . Si  $\langle X \rangle = \mathbb{P}^3$  entonces, al estar la Grassmanniana cortada por cuádricas según comentamos en la Proposición 0.2.3,  $X$  es una cúbica alabeada o bien está contenida en una superficie cuádrica en cuyo caso  $X$  está contenida en una  $\mathbb{G}(1, 3)$ . Si  $\dim \langle X \rangle \geq 4$ , comparando  $\mathbb{G}(X)$  con las cotas de Castelnuovo 0.1.3 para curvas en  $\mathbb{P}^4$ , se obtiene que  $d = 4$  ó  $d = 5$ .

En los dos primeros casos  $X$  es racional y por el Teorema 3.2.1 el fibrado que da la inmersión escinde. Si  $d = 3$ ,  $X$  se sumerge mediante  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$  puesto que la proyección de  $X$  inmersa por  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)$  sería no reducida. Si  $d = 4$ ,  $X$  se sumerge considerando cinco secciones globales generales de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$ . En efecto, si tomamos 5 secciones globales generales de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)$  su proyección no sería reducida. Si en cambio  $d = 5$ ,  $\overline{X} \subset \mathbb{P}^4$  es un scroll elíptico de grado 5. Además esta superficie es lisa ya que  $\langle X \rangle \cap \mathbb{G}(1, 4) = X$ , es decir, dos rectas de  $X$  no se cortan nunca luego  $\overline{X} = E_5$ .  $\square$

Por último reformulamos un teorema de E. Arrondo sobre variedades proyectables isomórficamente de modo que también podamos usarlo para el estudio de variedades con un punto doble aparente.

**Teorema 0.3.16** ([6], Theorem 3.1) *Sea  $X \subset \mathbb{G}(1, N)$  una variedad  $n$ -dimensional no comprimida. Supongamos que  $\dim SX < 2n + 4$  y que  $N \geq n + 3$ .*



---

*Entonces  $X$  tiene defecto secante positivo, es decir,  $Y_\Lambda$  es un subesquema de  $X$  de dimensión positiva.*

*Demostración.* Estudiando la prueba de E. Arrondo en [6], Theorem 3.1, se observa que en ningún momento se usa la condición sobre los planos malos y que la hipótesis realmente importante es que  $SX$  no tiene la dimensión esperada  $2n + 4$ .  $\square$

# Capítulo 1

## Superficies en $\mathbb{G}(1, 5)$ con un punto doble aparente

### 1.1 Introducción

Es un resultado conocido que toda subvariedad lisa  $n$ -dimensional  $X \subset \mathbb{P}^N$  puede ser proyectada de forma isomorfa a  $\mathbb{P}^{2n+1}$  desde un  $(N - 2n - 2)$ -subespacio lineal general de  $\mathbb{P}^N$ . La siguiente proyección a  $\mathbb{P}^{2n}$  desde un punto general  $P$  produce un número finito de puntos dobles  $\delta(X)$  correspondientes a las rectas bisecantes a  $X$  por  $P$ .

En el caso de superficies lisas e irreducibles en  $\mathbb{P}^5$ , el teorema de Severi afirma que la única que puede ser proyectada a  $\mathbb{P}^4$ , es decir, con  $\delta(X) = 0$  es la superficie de Veronese  $v_2(\mathbb{P}^2)$  (ver [37]). En el mismo artículo Severi dice que las superficies lisas e irreducibles con *un punto doble aparente*, es decir, con  $\delta(X) = 1$  son los scrolls racionales normales  $S(2, 2)$  y  $S(1, 3)$  de grado 4 y la superficie de Del Pezzo de grado 5. A lo largo de la prueba se asume que las superficies con un punto doble aparente no pueden tener *demasiadas* trisecantes. La demostración de este hecho fue obtenida por F. Russo en [33], completando así el teorema.

A lo largo de este capítulo de la memoria trataremos de transportar este teorema a Grassmannianas de rectas en la línea de los resultados obtenidos en [4], [6], [7] y [42] sobre proyecciones en la Grassmanniana. Para ser más preciso, estudiamos la proyección de una superficie  $X \subset \mathbb{G}(1, 5)$  a  $\mathbb{G}(1, 3)$  inducida de forma obvia por la proyección desde una recta general de  $\mathbb{P}^5$  a  $\mathbb{P}^3$ . Veremos que en condiciones suficientemente generales la proyección de  $X \subset \mathbb{G}(1, 5)$  a  $\mathbb{G}(1, 3)$  produce un número finito de puntos dobles  $\delta(X)$ . Es conocido que la única que puede proyectarse de forma isomorfa ( $\delta(X) = 0$ ) es la superficie de Veronese, esto es,  $\mathbb{P}^2$  sumergido en

$\mathbb{G}(1, 5)$  por el fibrado vectorial  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$  (ver [4], Corollary 5.2) y ahora estudiaremos cuándo la proyección tiene un solo punto doble ( $\delta(X) = 1$ ).

## 1.2 Preliminares

En este capítulo entenderemos por  $X \subset \mathbb{G}(1, 5)$  una superficie no degenerada, lisa e irreducible sobre  $\mathbb{C}$ .

En primer lugar establecemos cuándo la proyección lineal  $\pi_L : X \rightarrow \mathbb{G}(1, 3)$  desde una recta general  $L \subset \mathbb{P}^5$  produce un número finito de puntos dobles.

**Proposición 1.2.1** *La imagen de la proyección general  $\pi_L : X \rightarrow \mathbb{G}(1, 3)$  es:*

- (i) *no reducida si y sólo si  $\overline{X}$  es un cono de vértice un punto;*
- (ii) *singular en un subesquema unidimensional si y sólo si  $\dim B(X) = 3$ , para lo cual es necesario que o bien  $X$  tenga una curva fundamental, o bien sea  $\mu(X) > 1$ .*

*Demostración.* (i) Es consecuencia del Lema 0.3.5.

(ii) La proyección de  $X$  a  $\mathbb{G}(1, 3)$  es singular en un subesquema unidimensional si y sólo si la recta general  $L \subset \mathbb{P}^5$  encuentra una familia unidimensional de planos malos, esto es, si y sólo si  $\dim B(X) = 3$ . Ahora,  $\dim B(X) = 3$  cuando la recta general de  $X$  interseca a una familia unidimensional de rectas de  $X$  que no están contenidas en un mismo plano malo. Si estas rectas se cortan en un mismo punto tenemos una curva fundamental. De lo contrario por cada  $P \in \overline{X}$  pasan al menos dos rectas de  $X$ , luego  $\mu(X) > 1$ .  $\square$

**Observación 1.2.2** La clasificación de superficies  $X \subset \mathbb{G}(1, N)$  con  $\mu(X) > 1$  y  $N \geq 4$  puede encontrarse en [29].

En particular, si la proyección de  $X \subset \mathbb{G}(1, 5)$  a  $\mathbb{G}(1, 3)$  es reducida no todas sus rectas se cortan dos a dos. Por tanto podemos considerar  $S(X) \subset \mathbb{G}(3, 5)$ , la variedad secante de  $X$  definida en 0.3.6.

Tenemos también definido  $Y_\lambda = X \cap \mathbb{G}(1, \lambda)$  para cada  $\lambda \in S(X)$ .

Por último  $B(X)$  denotará el subesquema de planos malos definido en 0.3.11.

**Observación 1.2.3**  $S(X)$  es una variedad de dimensión 2 ó 4 dependiendo de si  $Y_\lambda$  es un subesquema de  $X$  unidimensional o no para  $\lambda \in S(X)$  general.

Sea  $I$  la variedad de incidencia

$$I = \{(l, \lambda) \mid l \in \mathbb{G}(1, \Lambda)\} \subset \mathbb{G}(1, 5) \times S(X)$$

con las proyecciones correspondientes  $p_1 : I \rightarrow \mathbb{G}(1, 5)$  y  $p_2 : I \rightarrow S(X)$

$$\begin{array}{ccc} & I & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ \mathbb{G}(1, 5) & & S(X). \end{array}$$

Recordemos que definíamos  $SX = p_1(I)$  y denotemos por  $\nu(X)$  el grado del morfismo  $p_1$ . Es decir, una recta  $l \in \mathbb{G}(1, 5)$  general está contenida en  $\nu(X)$  espacios secantes de  $S(X)$ .

**Observación 1.2.4** Por tanto, salvo en los casos expuestos en la Proposición 1.2.1, la proyección de  $X$  a  $\mathbb{G}(1, 3)$  desde una recta general  $L$  produce un número finito de puntos singulares  $s(X) = \nu(X) + b(X)$ , donde  $b(X)$  denota el número de planos de  $B(X)$  que cortan a  $L$ .

## La fórmula de puntos dobles

Para una superficie (abstracta) se espera que un morfismo  $X \rightarrow \mathbb{G}(1, 3)$  produzca un número finito de puntos dobles  $\delta(X)$  que, contados adecuadamente, viene dado por la identidad (véase [25])

$$\delta(X) = \frac{1}{2}([X]^2 - c_2(\mathcal{N})), \quad (1.1)$$

donde  $[X]$  denota la clase de  $X$  en  $A(\mathbb{G})$  y  $c_2(\mathcal{N})$  denota la segunda clase de Chern del fibrado normal virtual de  $X$  en  $\mathbb{G}(1, 3)$ . Un sencillo cálculo muestra que de (1.1) se sigue la *fórmula de puntos dobles* para superficies en  $\mathbb{G}(1, 3)$  (ver por ejemplo [4], Proposition 2.1)

$$a^2 + b^2 = 3(a + b) + 4(2g_X - 2) + 2K_X^2 - 12\chi(\mathcal{O}_X) + 2\delta(X), \quad (1.2)$$

donde  $g_X$  es el género seccional de  $X$  considerada como variedad proyectiva vía la inmersión de Plücker en  $\mathbb{P}^5$ ,  $K_X^2$  es el número de autointersección del divisor canónico de  $X$  y  $\chi(\mathcal{O}_X)$  es la característica de Euler del haz estructural de  $X$ .

En el caso particular de la proyección lineal  $\pi_L : X \rightarrow \mathbb{G}(1, 3)$  desde una recta  $L \subset \mathbb{P}^5$  general, excepto en los casos expuestos en la Proposición 1.2.1, se sigue que  $\delta(X)$  está bien definido como la suma de los puntos dobles que aportan los  $s(X)$  puntos singulares de  $\pi_L(X)$ .

Entonces, el objetivo consiste en encontrar superficies inmersas en  $\mathbb{G}(1, 5)$  de forma que la proyección lineal de  $\mathbb{G}(1, 5)$  a  $\mathbb{G}(1, 3)$  defina por restricción un morfismo  $X \rightarrow \mathbb{G}(1, 3)$  cuya imagen tenga un único punto doble. En particular, los invariantes de  $X$  deben satisfacer (1.2) con  $\delta(X) = 1$ .

**Definición 1.2.5** Decimos que una superficie  $X \subset \mathbb{G}(1, 5)$  tiene *un punto doble aparente* cuando la proyección  $\pi_L : X \rightarrow \mathbb{G}(1, 3)$  desde una recta  $L \subset \mathbb{P}^5$  general produce un único punto doble. Para que esto ocurra, la recta general  $l \in \mathbb{G}(1, 5)$  satisface exclusivamente una de las dos condiciones siguientes:

- (\*) Existe un único  $\lambda \in S(X)$  que contiene a  $L$ .
- (\*\*) Existe un único  $\pi \in B(X)$  de forma que  $L \cap \Pi \neq \emptyset$ .

En la siguiente proposición se prueba que el punto doble procede de la variedad secante de  $X$  y no del subesquema de los planos malos, es decir,  $\nu(X) = 1$  y  $b(X) = 0$ .

**Proposición 1.2.6** *Sea  $X \subset \mathbb{G}(1, 5)$  una superficie con un punto doble aparente. Entonces  $p_1 : I \rightarrow \mathbb{G}(1, 5)$  es dominante, es decir,  $SX = \mathbb{G}(1, 5)$ .*

*Demostración.* La dimensión de  $S(X) \subset \mathbb{G}(3, 5)$  es 2 ó 4 como observamos en 0.3.6. Si  $p_1 : I \rightarrow \mathbb{G}(1, 5)$  no es dominante se sigue del Teorema 0.3.16 que  $\dim S(X) = 2$  y un  $\lambda \in S(X)$  general contiene un subesquema  $Y_\Lambda \subset X$  unidimensional. Al proyectar desde una recta  $l \in \mathbb{G}(1, 5)$  a  $\mathbb{G}(1, 3)$ ,  $L$  corta a una familia infinita de  $\Lambda$ 's secantes, luego  $Y_\Lambda$  es una curva que puede ser proyectada isomórficamente a  $\mathbb{G}(1, 2)$ . Entonces se tiene en virtud de la Proposición 0.3.13 que  $Y_\Lambda$  es una cónica lisa o una cónica reducible.

Si  $Y_\Lambda$  es una cónica lisa,  $X$  contiene una familia bidimensional de cónicas lisas, luego  $X$  es una superficie de Veronese  $v_2(\mathbb{P}^2)$ , un scroll racional normal  $S(1, 2)$  o una cuádrica  $Q$ . Veamos que estas superficies no se pueden sumergir como superficies con un punto doble aparente. Si  $X = Q$  entonces  $X \subset \mathbb{G}(1, 3)$  por el Ejemplo 0.2.28. Si  $X = v_2(\mathbb{P}^2)$  entonces  $a + b = 4$ ,  $g_X = 0$ ,  $K_X^2 = 9$ ,  $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$  y la fórmula de puntos dobles se transforma en  $a^2 + b^2 = 12$ , que no tiene solución entera. Por último si  $X = S(1, 2)$  entonces  $a + b = 3$ ,  $g_X = 0$ ,  $K_X^2 = 8$ ,  $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$  y la fórmula de puntos dobles dice  $a^2 + b^2 = 7$ , que tampoco admite solución entera.

Si  $Y_\Lambda$  es una cónica reducible,  $X$  contiene vía la inmersión de Plücker una familia de rectas y dos de ellas siempre se cortan luego  $X$  es un cono, lo cual contradice la lisitud de  $X$ .  $\square$

**Corolario 1.2.7** *Sea  $X \subset \mathbb{G}(1, 5)$  una superficie con un punto doble aparente. Entonces la proyección  $p_1 : I \rightarrow \mathbb{G}(1, 5)$  es birracional,  $Y_\Lambda \subset X$  es un subesquema de longitud 2 para un  $\lambda \in S(X)$  general y  $\dim \overline{B(X)} \leq 3$ .*

*Demostración.* Como  $p_1$  es dominante por la Proposición 1.2.6 y  $X$  tiene un único punto doble se sigue que necesariamente  $\nu(X) = 1$ , es decir,  $p_1$  es birracional. El único punto singular es un punto doble luego se sigue que  $\text{long } Y_\Lambda = 2$ . Finalmente el punto doble no proviene de  $B(X)$ , luego  $b(X) = 0$  y por tanto  $\dim \overline{B(X)} \leq 3$ .  $\square$

### 1.3 Ejemplos

En esta sección presentamos ejemplos de superficies en  $\mathbb{G}(1, 5)$  con un punto doble aparente. En algunos casos (Ejemplos 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3 y 1.3.5) el fibrado vectorial  $\mathcal{F}$  que da la inmersión escinde como suma directa de fibrados lineales mientras que en los restantes casos (Ejemplos 1.3.4 y 1.3.6) simplemente se da una descripción geométrica de  $X$ .

**Ejemplo 1.3.1** Consideremos  $X_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  inmerso en  $\mathbb{G}(1, 5)$  por el fibrado vectorial  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(1, 0) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(1, 1)$ .

El morfismo determinado por  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(1, 0)$  transforma  $X_0$  en una recta  $L$  mientras que  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(1, 1)$  es muy amplio y sumerge  $X_0$  en  $\mathbb{P}^3$  como una cuádrica lisa  $Q$ .

Visto con ecuaciones, sea  $L$  la recta  $(x_0 : x_1 : 0 : 0 : 0 : 0)$  y  $Q$  la cuádrica definida por la ecuación  $\{x_2x_5 - x_3x_4 = 0\}$  en el subespacio complementario  $(0 : 0 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5)$ . Entonces construimos la superficie asociando a cada  $((s_0 : s_1), (t_0 : t_1)) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  la recta generada por las filas de la matriz

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_0t_0 & s_1t_0 & s_0t_1 & s_1t_1 \end{pmatrix}$$

que se convierte a través de la inmersión de Plücker en el scroll racional normal  $S(2, 2)$  inmerso por el fibrado lineal  $\bigwedge^2 \mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(2, 1)$ .

Comprobemos que el bigrado de la inmersión es  $(3, 1)$ . Para ello basta observar que el grado de  $S(2, 2)$  es 4 y que, en virtud del Ejemplo 0.2.18,  $b = c_2(\mathcal{F}) = 1$ .

**Ejemplo 1.3.2** Consideremos la superficie reglada racional  $X_2$  inmersa en  $\mathbb{G}(1, 5)$  por el fibrado vectorial  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{X_2}(f) \oplus \mathcal{O}_{X_2}(C_0 + 2f)$ .

Obsérvese que  $\mathcal{O}_{X_2}(f)$  contrae las fibras  $f$  de  $X_2$  y que la imagen de  $C_0$  es una recta  $L$  mientras que  $\mathcal{O}_{X_2}(C_0 + 2f)$  convierte  $X_2$  en un cono cuádrico  $R$  cuyas generatrices son imagen de las fibras  $f$  y cuyo vértice es la contracción de  $C_0$ .

Geoméricamente, la superficie se construye uniendo los puntos de  $L$  con los puntos de la generatriz de  $R$  correspondiente según el discurso anterior.

Después de la inmersión de Plücker  $X_2$  se sumerge como el scroll racional normal  $S(1, 3)$  por medio del fibrado lineal  $\bigwedge^2 \mathcal{F} = \mathcal{O}_{X_2}(C_0 + 3f)$ .

El bigrado de la inmersión es de nuevo  $(3, 1)$  puesto que  $c_2(\mathcal{F}) = 1$ .

**Ejemplo 1.3.3** Ahora sumergimos la superficie reglada racional  $X_1$  en  $\mathbb{G}(1, 5)$  por medio del fibrado vectorial  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{X_1}(2f) \oplus \mathcal{O}_{X_1}(C_0 + f)$ . A través de la inmersión de Plücker obtenemos el scroll racional normal  $S(2, 3)$ , esto es,  $X_1$  inmerso por  $\bigwedge^2 \mathcal{F} = \mathcal{O}_{X_1}(C_0 + 3f)$ . El bigrado de la inmersión es  $(3, 2)$  dado que  $c_2(\mathcal{F}) = 2$ .

Geoméricamente, la imagen de  $X_1$  por el morfismo asociado al fibrado lineal  $\mathcal{O}_{X_1}(2f)$  es la cónica  $C \subset \Pi_1$  imagen de  $C_0$  puesto que las fibras  $f$  de  $X_1$  se contraen a puntos de  $C$ , mientras que  $\mathcal{O}_{X_1}(C_0 + f)$  induce un morfismo birracional de  $X_1$  sobre un plano  $\Pi_2$  que manda  $C_0$  en un punto  $P \in \Pi_2$  y las fibras  $f$  en el haz de rectas  $\Omega(P, \Pi_2)$ . Por tanto, las rectas de la superficie se obtienen uniendo cada punto de  $C$  con los puntos de la recta por  $P$  correspondiente.

**Ejemplo 1.3.4** Consideremos la superficie reglada racional  $X_3$  e intentemos sumergirla en  $\mathbb{G}(1, 5)$  por medio de un fibrado  $\mathcal{F}$  de rango 2 de forma que  $\bigwedge^2 \mathcal{F} = \mathcal{O}_{X_3}(C_0 + 4f)$ , esto es, como el scroll racional normal  $S(1, 4)$ . En este caso  $\mathcal{F}$  podría ser a priori  $\mathcal{O}_{X_3}(f) \oplus \mathcal{O}_{X_3}(C_0 + 3f)$ . Como

$$h^0(X_3, \mathcal{F}) = h^0(X_3, \mathcal{O}_{X_3}(f)) + h^0(X_3, \mathcal{O}_{X_3}(C_0 + 3f)) = 2 + 5 = 7$$

$\mathcal{F}$  da una inmersión de  $X_3$  en  $\mathbb{G}(1, 6)$  de bigrado  $(4, 1)$ , al ser  $c_2(\mathcal{F}) = 1$ . El problema es que estos invariantes no satisfacen la fórmula de puntos dobles.

En este caso el fibrado  $\mathcal{F}$  que sumerge  $X_3$  en  $\mathbb{G}(1, 5)$  con un punto doble aparente no es descomponible, pero todavía es posible encontrar una construcción geométrica satisfactoria. Consideremos dos cónicas  $C_1 \subset \Pi_1$  y  $C_2 \subset \Pi_2$  contenidas en dos planos  $\Pi_1, \Pi_2 \subset \mathbb{P}^5$  complementarios. Fijemos un isomorfismo entre  $C_1$  y  $C_2$ . Consideremos un punto  $P_1 \in C_1$  y el cono cuádrico  $R_{P_1}$  con base  $C_2$  y vértice  $P_1$ . Entonces obtenemos la superficie uniendo puntos de  $C_1$  con los puntos de la correspondiente generatriz del cono  $R_{P_1}$ .

Veamos que en efecto hemos construido el scroll racional normal  $S(1, 4)$ . Parametricemos  $C_1$  por  $(s_0^2 : s_0s_1 : s_1^2 : 0 : 0 : 0)$  y  $C_2$  por  $(0 : 0 : 0 : s_0^2 : s_0s_1 : s_1^2)$ . Sea  $P = (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0)$ . El isomorfismo entre  $C_1$  y  $C_2$  determina la curva racional en  $\mathbb{G}(1, 5)$

$$\begin{pmatrix} s_0^2 & s_0s_1 & s_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_0^2 & s_0s_1 & s_1^2 \end{pmatrix}$$

que después de la inmersión de Plücker se convierte en una cuártica racional normal de  $\mathbb{P}^4$ .

Por otro lado el haz por  $P$  en  $\Pi_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_0 & s_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es la recta  $\{p_{ij} = 0 : i > 0, j > 2\}$  después de la inmersión de Plücker, que no corta al  $\mathbb{P}^4$  de la cuártica anterior. El isomorfismo entre la recta y la cuártica determina la construcción del scroll racional normal  $S(1, 4) \subset \mathbb{P}^6$ .

El bigrado de la inmersión es  $(3, 2)$ . En efecto, un hiperplano general  $H \subset \mathbb{P}^5$  corta a la cónica  $C_1$  en dos puntos y por cada uno de ellos hay una recta del haz correspondiente dentro de  $H$ , luego  $b = 2$  y en consecuencia  $a = 3$ .

El fibrado  $\mathcal{F}$  que da la inmersión de  $X_3$  en  $\mathbb{G}(1, 5)$  es una extensión

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{X_3}(C_0 + 2f) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{O}_{X_3}(2f) \rightarrow 0$$

de fibrados lineales. En efecto la cónica fundamental  $C_1$  produce un cociente  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{O}_{X_3}(2f) \rightarrow 0$  cuyo núcleo es  $\mathcal{O}_{X_3}(C_0 + 2f)$ .

**Ejemplo 1.3.5** Consideremos ahora  $X$  la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en tres puntos  $\{P_1, P_2, P_3\}$  y su inmersión en  $\mathbb{G}(1, 5)$  dada por el fibrado vectorial  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(2L - E_1 - E_2 - E_3) \oplus \mathcal{O}_X(L)$ . Geométricamente estamos fijando una transformación de Cremona de  $\mathbb{P}^2$  y las rectas de  $X$  vienen dadas uniendo los puntos correspondientes de dos planos disjuntos por dicha transformación.

En coordenadas, sea la transformación de Cremona  $\varphi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  definida por  $\varphi(x_0 : x_1 : x_2) = (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1)$ . Entonces, las rectas de la superficie  $X$  vienen dadas por las filas de la matriz

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1x_2 & x_0x_2 & x_0x_1 \end{pmatrix}.$$



La inmersión de Plücker produce un conjunto de generadores del sistema lineal completo de cúbicas planas por los puntos  $\{P_1 = (1 : 0 : 0), P_2 = (0 : 1 : 0), P_3 = (0 : 0 : 1)\}$ , que da una inmersión de la superficie de Del Pezzo de grado 6 en  $\mathbb{P}^6$ .

Como  $c_2(\mathcal{F}) = 2$ , el bigrado de la inmersión es  $(4, 2)$ .

**Ejemplo 1.3.6** Finalmente, tratemos de sumergir en  $\mathbb{G}(1, 5)$  la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en dos puntos como una superficie de Del Pezzo de grado 7 con bigrado  $(4, 3)$ .

El fibrado escindido  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(2L - E_1 - E_2) \oplus \mathcal{O}_X(L)$  produce una inmersión en  $\mathbb{G}(1, 6)$  con bigrado  $(5, 2)$ , que no satisface la fórmula de puntos dobles (1.2).

Para conseguir la superficie de Del Pezzo  $X \subset \mathbb{G}(1, 5)$  comencemos considerando el fibrado vectorial  $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^2}$  que sumerge  $\mathbb{P}^2$  como una superficie  $Y \subset \mathbb{G}(1, 7)$  con bigrado  $(6, 3)$ .

Geoméricamente este  $\mathbb{P}^2$  es una de las familias de rectas de la 3-variedad  $\overline{Y} = \mathbb{P}(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^2})$  inmersa en  $\mathbb{P}^7$  por su fibrado lineal tautológico  $\mathcal{O}(1)$ . O lo que es lo mismo,  $\overline{Y}$  es una sección hiperplana genérica de la inmersión de Segre  $\sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^8$  e  $Y$  es una de las dos familias de rectas contenidas. Como el grado de  $\sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2)$  es 6 y  $c_2(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^2}) = 3$ , se sigue que el bigrado de  $Y$  es  $(6, 3)$  e  $Y$  es la inmersión triple de Veronese  $v_3(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^9$  después de Plücker.

Entonces obtenemos  $X$ , la superficie de Del Pezzo de grado 7 y bigrado  $(4, 3)$ , como la proyección interna de  $Y$  desde una recta secante general a  $\overline{Y}$  en  $P_1$  y  $P_2$ . Esta proyección  $Y \dashrightarrow X$  no está definida en las dos únicas rectas de  $Y$  que pasan por  $P_1$  y  $P_2$ . Como la superficie de Del Pezzo de grado 7 en  $\mathbb{P}^7$  puede obtenerse como proyección interna desde dos puntos de la superficie de Del Pezzo  $v_3(\mathbb{P}^2)$  de grado 9, sólo falta comprobar que  $X$  es lisa.

Para ello, es suficiente probar que la recta secante general a  $\overline{Y}$  está contenida en un único  $\Lambda \cong \mathbb{P}^3$  generado por dos rectas de  $Y$ . De hecho,  $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^2}$  es un fibrado uniforme de tipo de escisión  $(2, 1)$  (véase [30]) luego restringido a cualquier recta  $L \subset \mathbb{P}^2$  da una inmersión de  $L$  en  $\mathbb{G}(1, 4)$  como las fibras de un scroll racional normal  $S(1, 2)$  contenido en un cierto  $\mathbb{P}_L^4$  (esto es, una cúbica alabeada después de la inmersión de Plücker). Si consideramos otra recta  $L' \subset \mathbb{P}^2$ , obtenemos el scroll  $S(1, 2) \subset \mathbb{P}_{L'}^4$ , y  $\mathbb{P}_L^4 \cap \mathbb{P}_{L'}^4$  es una fibra de los scrolls, correspondiente al punto  $P = L \cap L'$  de  $\mathbb{P}^2$ . Se deduce que una recta secante general a  $\overline{Y}$  está contenida en un único  $\mathbb{P}^4$  como antes y por la Proposición 0.3.14 sólo puede estar contenida en un  $\Lambda$  secante generado por dos rectas de  $Y$ .

## 1.4 Algunas propiedades interesantes

En esta sección probamos algunas propiedades de las superficies con un punto doble aparente en  $\mathbb{G}(1, 5)$  que recuerdan a las propiedades de las variedades  $n$ -dimensionales  $X \subset \mathbb{P}^{2n+1}$  con un punto doble aparente (véase [12], Corollary 4.2 y Proposition 1.1). En concreto demostramos que las superficies con un punto doble aparente en  $\mathbb{G}(1, 5)$  son racionales y linealmente normales.

En primer lugar analizaremos, usando el Teorema Principal de Zariski 0.1.1, la ramificación del morfismo de proyección  $p_1$  del diagrama de incidencia

$$\begin{array}{ccc} & I & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ \mathbb{G}(1, 5) & & S(X) \end{array}$$

**Definición 1.4.1** Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo finito de variedades proyectivas irreducibles. Denotamos por  $R \subset X$  al *divisor de ramificación de  $f$* ,  $B \subset Y$  su imagen y por  $F \subset Y$  al *lugar fundamental de  $f$* , esto es, los puntos de  $Y$  cuya fibra tiene dimensión positiva.

**Lema 1.4.2** Para todo morfismo finito  $f : X \rightarrow Y$  de variedades proyectivas irreducibles, se tiene  $F \subset B$  y  $\text{codim}_Y F > 1$ . Si además  $f$  es birracional e  $Y$  es normal,  $B = F$ .

*Demostración.* En efecto para cada  $y \in F$  existe en particular una curva  $C \subset f^{-1}(y)$ . Ahora para cada  $c \in C$  se sigue que  $d_c f : T_c X \rightarrow T_y Y$  no es inyectiva ya que para  $v \in T_c C$  es  $d_c f(v) = 0$ , luego  $f(c) = y \in B$ . Obviamente  $\text{codim}_Y F > 1$  ya que de lo contrario sería  $f(X) = F$ .

Por otro lado si  $f : X \rightarrow Y$  es birracional e  $Y$  es normal, para cada  $y \in B$  se sigue que  $f$  no es un isomorfismo en  $f^{-1}(y)$ , es decir,  $\text{long } f^{-1}(y) \geq 2$ . Entonces  $y \in B$  es un punto fundamental de  $f$  por el Teorema Principal de Zariski, luego  $B \subset F$ .  $\square$

Volvamos al caso de una superficie  $X \subset \mathbb{G}(1, 5)$  con un punto doble aparente. Consideremos la variedad de incidencia

$$I = \{(l, \lambda) \mid l \in \mathbb{G}(1, \Lambda)\} \subset \mathbb{G}(1, 5) \times S(X)$$

con las proyecciones correspondientes  $p_1 : I \rightarrow \mathbb{G}(1, 5)$  y  $p_2 : I \rightarrow S(X)$ .

Sea  $\lambda \in S(X)$  y  $R_\lambda = \{(r, \lambda) \mid (r, \lambda) \in R\} \subset I$  la restricción a  $\mathbb{G}(1, \Lambda) \times \lambda$  del divisor de ramificación  $R$ . Lógicamente  $R_\lambda$  es un divisor de  $\mathbb{G}(1, \Lambda) \times \lambda$  para  $\lambda \in S(X)$  general. Además  $p_1(R) = F$  por ser  $p_1$  birracional (Corolario 1.2.7).

Denotemos por  $\Gamma_X \subset \mathbb{G}(1, 5)$  la variedad de rectas que cortan a  $\overline{X} \subset \mathbb{P}^5$  y  $\Sigma_X \subset \Gamma_X$  la variedad de rectas secantes a  $\overline{X}$ . Ambas son irreducibles de dimensiones 7 y 6 respectivamente.

**Lema 1.4.3** *Ni  $\Gamma_X$  ni  $\Sigma_X$  están contenidos en  $F$ .*

*Demostración.* La codimensión de  $\Gamma_X$  en  $\mathbb{G}(1, 5)$  es 1, luego  $\Gamma_X$  no está contenido en  $F$  por el Lema 1.4.2. Por otro lado si  $\Sigma_X$  fuera una componente irreducible maximal de  $F$ , para un  $\lambda \in S(X)$  general  $R_\lambda$  contendría un subesquema  $\Sigma_{X, \Lambda}$  de dimensión 3 de  $\Sigma_X$ , lo cual es absurdo ya que  $\Sigma_{X, \Lambda}$  es precisamente la variedad de rectas secantes a  $\Lambda \cap \overline{X}$ , que tiene dimensión par.  $\square$

Después de probar el siguiente lema, estaremos en condiciones de justificar la racionalidad de las superficies en  $\mathbb{G}(1, 5)$  con un punto doble aparente, que es la primera propiedad importante que demostraremos en esta sección.

**Lema 1.4.4** *Las congruencias  $Y \subset \mathbb{G}(1, n+1)$  de orden  $a = 1$  son racionales y toda variedad irreducible  $n$ -dimensional  $Y \subset \mathbb{G}(1, N)$  de orden  $a = 1$  es una congruencia en  $\mathbb{G}(1, n+1)$ .*

*Demostración.* Sea  $H \cong \mathbb{P}^n$  un hiperplano general de  $\mathbb{P}^{n+1}$ . La aplicación racional

$$\begin{aligned} \varphi : Y &\dashrightarrow H \\ l &\mapsto L \cap H, \end{aligned}$$

es birracional por ser  $Y$  de orden 1. La aplicación inversa  $H \dashrightarrow Y$  asocia al punto general de  $P \in H$  la única recta de  $Y$  que pasa por  $P$ .

Por otro lado, si la variedad irreducible  $n$ -dimensional  $Y \subset \mathbb{G}(1, N)$  es de orden 1 se sigue que  $\text{gr}(\overline{Y}) = 1$ , es decir,  $\overline{Y} = \mathbb{P}^{n+1} \subset \mathbb{P}^N$ .  $\square$

**Proposición 1.4.5** *Las superficies  $X \subset \mathbb{G}(1, 5)$  con un punto doble aparente son racionales.*

*Demostración.* Sea  $l \in X$  una recta general de  $X$ . Consideremos la proyección interna  $\pi_l : X \dashrightarrow \mathbb{G}(1, 3)$  y denotemos por  $X' \subset \mathbb{G}(1, 3)$  a la imagen de  $X$  por esta proyección. Veamos que  $X'$  es una superficie de orden 1. Supongamos que por un punto general  $P \in \mathbb{P}^3$  pasan al menos dos rectas de  $X'$ . Entonces el plano  $\langle P, L \rangle \subset \mathbb{P}^5$  es cortado por al menos dos rectas de  $X$  fuera de  $L$  y por tanto toda recta  $r$  de  $\langle P, L \rangle$  está contenida en un subesquema de longitud al menos 2 de  $S(X)$ , luego por el Teorema Principal de Zariski  $r \in F$ , el lugar fundamental de  $p_1 : I \rightarrow \mathbb{G}(1, 5)$ . Pero precisamente  $r$  es una recta general de  $\Gamma_X$ , lo cual contradice el Lema 1.4.3.

Si el orden de  $X'$  fuera 0 sería un  $\beta$ -plano y  $X$  sería degenerada, luego  $X'$  es de orden 1 y se sigue del Lema 1.4.4 que  $X'$  es racional y por tanto  $X$  es racional ya que  $\pi_l$  es una aplicación birracional por ser exactamente bisecante el  $\lambda \in S(X)$  general según vimos en el Corolario 1.2.7.  $\square$

Enunciamos de forma independiente una parte del resultado anterior.

**Corolario 1.4.6** Sea  $X \subset \mathbb{G}(1, 5)$  una superficie con un punto doble aparente. Sea  $l \in X$  una recta general y sea  $X' = \pi_l(X)$ . Entonces  $X'$  es una congruencia de orden 1.

**Observación 1.4.7** Las variedades lisas  $n$ -dimensionales  $X \subset \mathbb{P}^{2n+1}$  con un punto doble aparente son racionales. De hecho  $X \subset \mathbb{P}^{2n+1}$  se proyecta a  $\mathbb{P}^n$  desde el espacio tangente a un punto general  $P \in X$  y esta proyección resulta ser birracional (véase [12] Corollary 4.2). La Proposición 1.4.5 prueba el resultado análogo en la Grassmanniana de rectas para  $n = 2$ . En nuestro caso, según la Proposición 0.3.2 estamos proyectando  $X \subset \mathbb{P}^{14}$  desde  $K_L = \langle \Omega(L, \mathbb{P}^5) \rangle \cong \mathbb{P}^8$  que no es más que el espacio tangente a  $l \in \mathbb{G}(1, 5)$  según observamos en 0.3.3.

La misma demostración funciona para probar la racionalidad de las variedades lisas  $n$ -dimensionales  $X \subset \mathbb{G}(1, n+3)$  con un punto doble aparente siempre que se cumpla el análogo al Corolario 1.2.7, esto es, siempre que el punto doble venga de la variedad secante  $S(X)$  y no de los planos malos. Obtendremos algún resultado parcial en el capítulo siguiente.

Aprovechando el Corolario 1.4.6 probamos a continuación el siguiente resultado.

**Proposición 1.4.8** *Las superficies  $X \subset \mathbb{G}(1, 5)$  con un punto doble aparente son linealmente normales.*

*Demostración.* Supongamos que  $X \subset \mathbb{G}(1, 5)$  no es linealmente normal. Entonces existe un cierto  $NGe6$  de forma que  $X \subset \mathbb{G}(1, N)$  es no degenerada y la proyección

$\pi_H : X \rightarrow \mathbb{G}(1, 5)$  de centro  $H \cong \mathbb{P}^{N-6}$  es un isomorfismo sobre la imagen. La posterior proyección  $\pi_L : X \dashrightarrow \mathbb{G}(1, 3)$  de centro  $L$ , con  $l \in X$ , produce una congruencia  $X'$  de orden 1 en virtud del Corolario 1.4.6.

Como  $\pi_H \cdot \pi_L = \pi_L \cdot \pi_H = \pi_{\langle L, H \rangle}$ ,  $X'$  es la imagen de  $\pi_L : X \dashrightarrow \mathbb{G}(1, N-2)$ . Entonces  $X' \subset \mathbb{G}(1, N-2)$  es una superficie de orden 1 no degenerada con  $N-2Ge4$ , lo cual contradice el Lema 1.4.4.  $\square$

## 1.5 El teorema de clasificación

En esta sección se prueba el teorema de clasificación sobre superficies con un punto doble aparente en  $\mathbb{G}(1, 5)$ .

**Teorema 1.5.1** *Sea  $X \subset \mathbb{G}(1, 5)$  una superficie con un punto doble aparente. Entonces  $X$  es un scroll racional inmerso con bigrado  $(3, 1)$  ó  $(3, 2)$  o bien  $X$  es una superficie de Del Pezzo inmersa con bigrado  $(4, 2)$  ó  $(4, 3)$ .*

La demostración de este resultado será consecuencia inmediata de las Proposiciones 1.5.2 y 1.5.4. En la primera se estudia el caso en que la recta general de  $X$  corta a otra recta de  $X$  mientras que en la segunda se procede con el caso en que la recta general de  $X$  no corta a ninguna otra recta de  $X$ .

**Proposición 1.5.2** *Sea  $X \subset \mathbb{G}(1, 5)$  una superficie con un punto doble aparente. Supongamos que la recta general de  $X$  interseca a otra recta  $X$  (quizá infinitamente próxima). Entonces  $X$  es un scroll racional inmerso con bigrado  $(3, 1)$  ó  $(3, 2)$ .*

*Demostración.* Si una recta general de  $X$  interseca a otra recta entonces  $\overline{X} \subset \overline{B(X)}$ . Sea  $B$  una componente irreducible de  $B(X)$ . Si  $\dim B \geq 2$ , como  $\dim \overline{B} \leq 3$  por el Lema 1.2.7, se tiene que  $\overline{B} = \mathbb{P}^3$  y entonces  $\overline{X} \not\subset \overline{B}$ , ya que  $X$  es no degenerada. Por tanto, una recta general  $l \in X$  no está contenida en un plano de  $B$ . Como  $\overline{X} \subset \overline{B(X)}$ , existe una componente  $B' \subset B(X)$  unidimensional tal que  $\overline{X} = \overline{B'}$ . En este caso,  $\overline{X}$  es un scroll de planos sobre una curva que necesariamente es racional por 1.4.5 y cada plano  $\Pi$  de la familia contiene un subesquema unidimensional  $Y_\Pi \subset X$ .

Veamos que  $Y_\Pi \subset \Pi$  es un haz de rectas por un punto. De otro modo por  $P \in \Pi$  general pasa más de una recta de  $X$  y en consecuencia la recta general  $r \in \Sigma_X$  está contenida en un subesquema de  $S(X)$  de longitud al menos 2. Por el Lema 1.4.2 se deduce que  $\Sigma_X \subset F$ , el lugar fundamental de  $p_1 : I \rightarrow \mathbb{G}(1, 5)$ , lo cual no es posible por el Lema 1.4.3.

Entonces  $Y_\Pi$  es una recta después de la inmersión de Plücker y  $X$  será un scroll racional, con invariantes  $g_X = 0$ ,  $K_X^2 = 8$  y  $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$ . La fórmula de puntos dobles

$$a^2 + b^2 = 3(a + b) + 4(2g_X - 2) + 2K_X^2 - 12\chi(\mathcal{O}_X) + 2\delta(X)$$

se reduce a

$$a^2 + b^2 = 3(a + b) - 2.$$

Como  $a \geq 3$  por ser  $X$  no degenerada, se sigue que  $(a, b) = (3, 1)$  ó  $(a, b) = (3, 2)$ .  
□

El próximo lema es esencial para obtener la Proposición 1.5.4.

**Lema 1.5.3** *Sea  $X \subset \mathbb{G}(1, 5)$  una superficie de bigrado  $(a, b)$  tal que la recta general  $l \in X$  no corta a otra recta de  $X$  (ni siquiera infinitamente próxima). Entonces su proyección interna  $X' = \pi_l(X)$  tiene bigrado  $(a', b') = (a - 3, b - 1)$  en  $\mathbb{G}(1, 3)$ .*

*Demostración.* Veamos primero que  $b' = b - 1$ . Los  $\Lambda \in S(X)$  generados por  $L$  y una recta infinitamente próxima forman una familia unidimensional, luego los hiperplanos de  $\mathbb{P}^5$  que contienen un tal  $\Lambda$  forman una familia de dimensión 2. Entonces podemos elegir un plano  $\Pi \subset \mathbb{P}^3$  tal que  $K = \langle L, \Pi \rangle$  es un hiperplano que no contiene ninguno de estos  $\Lambda$ . Ahora, las rectas de  $X'$  en  $\Pi$  se corresponden con las rectas de  $X$  en  $K$ , excepto  $l$ . Pero  $\mathbb{G}(1, K)$  y  $X$  se cortan transversalmente en  $l$ , luego debe ser contada con multiplicidad 1 y en consecuencia  $b' = b - 1$ .

Sea  $P \in \mathbb{P}^3$  general. En este caso,  $a'$  es el número de rectas de  $X'$  por  $P$ , que se corresponden con las rectas de  $X$  que cortan  $\Pi = \langle p, L \rangle$  salvo la propia  $l$ . Por el Lema 0.2.10,  $\Omega(\Pi, \mathbb{P}^5)$  es singular a lo largo de  $\mathbb{G}(1, \Pi)$  con multiplicidad 3 y para probar que la multiplicidad de intersección de  $X$  y  $\Omega(\Pi, \mathbb{P}^5)$  en  $l$  es exactamente 3, hay que comprobar que ninguna recta del cono tangente a  $\Omega(\Pi, \mathbb{P}^5)$  en  $l$  es también tangente a  $X$  (véase [18], Corollary 12.4). Las rectas del cono tangente a  $\Omega(\Pi, \mathbb{P}^5)$  en  $l$  se corresponden con haces de rectas por puntos de  $l$  y contenidas en planos que contienen a  $L$ , pero ninguno de estos haces puede cortar a  $X$  en dos rectas por hipótesis, luego  $l$  debe ser contada con multiplicidad 3. □

**Proposición 1.5.4** *Sea  $X \subset \mathbb{G}(1, 5)$  una superficie con un punto doble aparente. Supongamos que la recta general de  $X$  no interseca a otra recta de  $X$  (ni siquiera infinitamente próxima). Entonces  $X$  es una superficie de Del Pezzo inmersa con bigrado  $(4, 2)$  ó  $(4, 3)$ .*

*Demostración.* Como el orden de  $X'$  es 1 por el Corolario 1.4.6, se sigue del Lema 1.5.3 que el orden de  $X$  es 4. En particular,  $\overline{X} \subset \mathbb{P}^5$  es una 3-variedad de grado 4. Como  $\overline{X}$  no puede ser un cono puesto que la recta general de  $X$  no corta a otra recta de  $X$ , se sigue que  $\overline{X}$  es la intersección completa de dos cuádricas de  $\mathbb{P}^5$ . Ahora  $g_X$  es el género aritmético de la curva que se obtiene intersecando  $\overline{X}$  con un  $\mathbb{P}^3$  de  $\mathbb{P}^5$  luego  $g_X = 1$  y  $X$  es necesariamente una superficie de Del Pezzo. Entonces  $K_X = 4 + b$  y  $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$ . En esta situación la fórmula de puntos dobles

$$a^2 + b^2 = 3(a + b) + 4(2g_X - 2) + 2K_X^2 - 12\chi(\mathcal{O}_X) + 2\delta(X)$$

se reduce a  $b^2 = 5b - 6$ , cuyas soluciones son  $b = 2$  ó  $b = 3$ . En definitiva  $X$  es una superficie de Del Pezzo de grado 6 ó 7 inmersa con bigrado  $(4, 2)$  ó  $(4, 3)$ .  $\square$

Recordemos para finalizar el capítulo que en cualquier caso el punto doble procede de los  $\Lambda$ 's secantes y no de los planos malos como ya probamos en la Proposición 1.2.6.

# Capítulo 2

## Variedades proyectables a $\mathbb{G}(1, n + 1)$

### 2.1 Introducción

Un resultado de F.L. Zak (véase [46] VI, Theorem 2.1) caracteriza la inmersión doble de Veronese  $v_2(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^N$  con  $N = \binom{n+2}{2} - 1$  como la única variedad lisa  $n$ -dimensional que puede proyectarse de forma isomorfa a  $\mathbb{P}^{2n}$  desde un espacio proyectivo de dimensión al menos  $N$ , generalizando a dimensión arbitraria el clásico Teorema de Severi 0.1.4 sobre la superficie de Veronese.

Recientemente E. Arrondo probó en [6] el resultado análogo para Grassmannianas de rectas. En concreto, se demuestra que la única variedad lisa  $n$ -dimensional y *no comprimida* que puede proyectarse isomórficamente a  $\mathbb{G}(1, n + 1)$  desde  $\mathbb{G}(1, N)$  con  $N \geq 2n + 1$  es la inmersión doble de Veronese de  $\mathbb{P}^n$  mediante el fibrado vectorial  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ . La hipótesis adicional de no compresión significa simplemente que  $\dim \bar{X} = n + 1$ , lo cual es una condición bastante general.

Un problema natural sería estudiar el siguiente paso, es decir, caracterizar las variedades que sean proyectables a  $\mathbb{P}^{2n}$  ó  $\mathbb{G}(1, n + 1)$  desde  $\mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-2}$  ó  $\mathbb{G}(1, 2n)$  respectivamente. En el espacio proyectivo se conoce un ejemplo de variedad proyectable: la proyección interna de  $v_2(\mathbb{P}^n)$  desde un punto  $P$  de la variedad, es decir, la explosión de  $\mathbb{P}^n$  en  $P$  inmersa por el sistema lineal de cuádricas de  $\mathbb{P}^n$  que pasan por  $P$ . Este ejemplo tiene su análogo en  $\mathbb{G}(1, 2n)$ , que también es proyectable a  $\mathbb{G}(1, n + 1)$  (véase Ejemplo 2.2.4).

El teorema que proponemos afirma, siempre bajo la hipótesis de no compresión, que la inmersión doble de Veronese de  $\mathbb{P}^n$  anterior y su proyección interna son las



únicas variedades lisas  $n$ -dimensionales e inmersas en  $\mathbb{G}(1, 2n)$  que pueden proyectarse isomórficamente a  $\mathbb{G}(1, n+1)$  (Teorema 2.4.2).

Por último, en 2.4.7 se conjetura que el mismo resultado es cierto en el espacio proyectivo. Por primera vez el teorema en la Grassmanniana llega antes que su análogo proyectivo lo cual parece indicar que algunas variedades especiales son más sencillas de tratar en la Grassmanniana.

## 2.2 Preliminares y ejemplos

A lo largo de este capítulo  $X \subset \mathbb{G}(1, N)$  denotará una variedad  $n$ -dimensional, irreducible y no degenerada.

Además supondremos que  $X$  es no comprimida, es decir,  $\dim \overline{X} = n+1$ .

$S(X) \subset \mathbb{G}(3, N)$  denotará la variedad secante de  $X$  definida en 0.3.6.

Como ya es habitual, para  $\lambda \in S(X)$ , se define  $Y_\lambda = \mathbb{G}(1, \Lambda) \cap X$ . El defecto secante de  $X$ ,  $\kappa(X)$ , es la dimensión de  $Y_\lambda$  para un  $\lambda \in S(X)$  general.

Obsérvese que entonces se sigue que  $\dim S(X) = 2n - 2\kappa(X)$ . Consideremos el diagrama de incidencia:

$$\begin{array}{ccc} & I & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ \mathbb{G}(1, N) & & S(X) \end{array}$$

donde  $I = \{(l, \Lambda) \in \mathbb{G}(1, N) \times S(X) \mid L \subset \Lambda\}$ . Recordemos que habíamos definido  $SX \subset \mathbb{G}(1, N)$  como  $p_1(I)$ .

Por otro lado  $B(X) \subset \mathbb{G}(2, N)$  denota al subesquema de planos malos definido en 0.3.11.

**Definición 2.2.1** Decimos que  $X \subset \mathbb{G}(1, N)$  se proyecta de forma isomorfa a  $\mathbb{G}(1, n+1)$  si la proyección  $\pi_H : X \rightarrow \mathbb{G}(1, n+1)$  desde un subespacio lineal general  $H \cong \mathbb{P}^{N-n-2}$  es un isomorfismo sobre la imagen. En esta situación a veces diremos simplemente que  $X$  es *proyectable*.

Nótese que  $\pi_H : X \rightarrow \mathbb{G}(1, n+1)$  deja de ser un isomorfismo cuando un subesquema de  $X$  de longitud al menos 2 está en la misma fibra de  $\pi_H$ . Entonces, se tiene la siguiente observación.

**Observación 2.2.2** Una variedad  $X \subset \mathbb{G}(1, N)$  se puede proyectar isomórficamente a  $\mathbb{G}(1, n+1)$  desde un subespacio general  $H \cong \mathbb{P}^{2N-2}$  si y sólo si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- (i)  $SX \cap \mathbb{G}(1, H) = \emptyset$ . Es decir,  $\dim(H \cap \Lambda) \leq 0$  para todo  $\lambda \in S(X)$ ;
- (ii)  $\overline{B(X)} \cap H = \emptyset$ .

## Ejemplos

Presentamos a continuación ejemplos de variedades  $n$ -dimensionales  $X \subset \mathbb{G}(1, N)$  con  $N \geq 2n$  que pueden proyectarse isomórficamente a  $\mathbb{G}(1, n+1)$  desde un subespacio lineal general  $H \cong \mathbb{P}^{N-n-2}$ .

**Ejemplo 2.2.3** Consideramos la inmersión doble de Veronese de  $\mathbb{P}^n$  en  $\mathbb{G}(1, 2n+1)$  dada por el fibrado vectorial  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$  (véase [5]). Visto en coordenadas, estamos asociando a cada  $(t_0 : \dots : t_n) \in \mathbb{P}^n$  la recta generada por las filas de la matriz

$$\begin{pmatrix} t_0 & \cdots & t_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & t_0 & \cdots & t_n \end{pmatrix}.$$

Consideramos ahora la proyección lineal de  $\mathbb{P}^{2n+1}$  a  $\mathbb{P}^{n+1}$  definida por

$$(x_0 : \dots : x_{2n+1}) \mapsto (x_0 : x_1 + x_{n+1} : \dots : x_n + x_{2n} : x_{2n+1}).$$

Esta proyección induce otra proyección desde  $\mathbb{G}(1, 2n+1)$  a  $\mathbb{G}(1, n+1)$  y la imagen de  $X$  se corresponde con las rectas generadas por las filas de la matriz

$$\begin{pmatrix} t_0 & t_1 & \cdots & t_n & 0 \\ 0 & t_0 & \cdots & t_{n-1} & t_n \end{pmatrix}.$$

Esta descripción sigue dando una inmersión de  $X$  en  $\mathbb{G}(1, n+1)$ , ya que los menores  $2 \times 2$  de esta matriz son una base del sistema lineal de cuádricas de  $\mathbb{P}^n$ .

Geoméricamente  $X$  consiste en la familia de rectas transversales de la variedad de Segre  $\sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ , o simplemente una de las dos familias de rectas de una cuádrica lisa  $Q \subset \mathbb{P}^3$  en el caso  $n = 1$ .

**Ejemplo 2.2.4** Para  $n \geq 2$ , sea  $X$  la explosión de  $\mathbb{P}^n$  en un punto inmersa en  $\mathbb{G}(1, 2n)$  por el fibrado vectorial  $\mathcal{O}_X(H) \oplus \mathcal{O}_X(H - E)$  donde  $E$  es el divisor excepcional de la explosión y  $H$  es el pull-back de la sección hiperplana de  $\mathbb{P}^n$ . En coordenadas, las rectas de  $X$  vienen dadas por las filas de la matriz

$$\begin{pmatrix} t_0 & t_1 & \cdots & t_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t_1 & \cdots & t_n \end{pmatrix}.$$

Consideramos ahora la proyección lineal de  $\mathbb{P}^{2n}$  a  $\mathbb{P}^{n+1}$  definida por

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_{2n}) \mapsto (x_0 : x_1 : x_2 + x_{n+1} : \dots : x_n + x_{2n-1} : x_{2n}).$$

Esta proyección induce otra proyección desde  $\mathbb{G}(1, 2n)$  a  $\mathbb{G}(1, n+1)$  y la imagen de  $X$  se corresponde con las rectas generadas por las filas de la matriz:

$$\begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & t_n & 0 \\ 0 & 0 & t_1 & \cdots & t_{n-1} & t_n \end{pmatrix}.$$

Esta descripción sigue dando una inmersión de  $X$  en  $\mathbb{G}(1, n+1)$ , ya que los menores  $2 \times 2$  de esta matriz son una base del sistema lineal de cuádricas de  $\mathbb{P}^n$  que pasan por el punto  $(1 : 0 : \dots : 0)$ .

Veamos otra forma de reconocer geoméricamente  $X$  en  $\mathbb{G}(1, 2n)$ . Consideremos en  $\mathbb{P}^{2n}$  el cono sobre la variedad de Segre  $\sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1}) \subset \mathbb{P}^{2n-1}$  y vértice  $P$ . Consideremos la familia  $(n-1)$ -dimensional de planos generados por el vértice  $P$  y las rectas transversales de  $\sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1})$ , que denotamos de la forma  $\mathbb{P}^1 \times \{Q\}$ . Fijemos un espacio lineal  $\{R\} \times \mathbb{P}^{n-1}$  de dimensión  $n-1$  de  $\sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1})$ . Entonces  $X$  consiste en la unión de los haces de rectas en dichos planos, cuyos centros  $(R, Q)$  pertenecen a  $\{R\} \times \mathbb{P}^{n-1}$ .

## 2.3 Teorema de estructura para variedades proyectables

En esta sección reobtenemos de forma más geométrica el teorema de estructura sobre variedades proyectables establecido por L. Uğaglia en [43]. En concreto probaremos que si  $X \subset \mathbb{G}(1, N)$  es una variedad lisa no comprimida, proyectable a  $\mathbb{G}(1, n+1)$  y  $N \geq n+3$ , entonces  $\overline{X} \subset \mathbb{P}^N$  es un scroll racional de  $\mathbb{P}^n$ 's, es decir, una proyección general de  $S(a_0, \dots, a_n) \subset \mathbb{P}^{a_0 + \dots + a_n + n}$  y las rectas de  $X$  son transversales a los  $\mathbb{P}^n$ 's del scroll.

La hipótesis de no compresión es esencial en este capítulo. Recordemos el Teorema 0.3.16 de E. Arrondo en [6] que ya apareció anteriormente.

**Teorema 2.3.1** *Sea  $X \subset \mathbb{G}(1, N)$  una variedad  $n$ -dimensional no comprimida. Supongamos que  $\dim SX < 2n+4$  y que  $N \geq n+3$ . Entonces  $X$  tiene defecto secante positivo, es decir,  $\kappa(X) \geq 1$ .*

**Observación 2.3.2** La no compresión de  $X$  es necesaria para la veracidad del teorema, como muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.3.3** Consideremos la variedad  $X = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$  inmersa en  $\mathbb{G}(1, 8)$  por el fibrado vectorial  $p_1^*(T_{\mathbb{P}^2}(-1)) \otimes p_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$  de rango 2, donde  $p_i$  denota la proyección de  $X$  en sus factores. Desde el punto de vista geométrico, estamos considerando la familia  $\mathcal{P}$  bidimensional de planos obtenida uniendo los puntos correspondientes mediante un isomorfismo de tres planos generales de  $\mathbb{P}^8$  y tomando como  $X$  la familia de rectas contenidas en estos planos. La variedad  $X$  es comprimida ya que  $\dim \overline{X} = 4$ .

Veamos que  $X$  se proyecta de forma isomorfa a  $\mathbb{G}(1, 5)$ . Para ello debemos comprobar que un plano general de  $\mathbb{P}^8$  no corta a ningún plano malo de  $X$  y no interseca a ningún  $\lambda \in S(X)$  en una recta.

La familia de planos malos de  $X$  es precisamente  $\mathcal{P}$ , luego el plano general de  $\mathbb{P}^8$  no corta a ninguno de ellos.

Además las rectas de  $SX \subset \mathbb{G}(1, 8)$  se corresponden con las rectas contenidas en la familia de  $\mathbb{P}^5$ 's generados por pares de planos de  $\mathcal{P}$ . Cada  $\mathbb{P}^5$  contiene infinitos planos de  $\mathcal{P}$  luego se sigue que tenemos una familia bidimensional de tales  $\mathbb{P}^5$ 's y en consecuencia  $\dim SX = 10$ . Como  $\dim \mathbb{G}(1, 8) = 14$ , el plano general de  $\mathbb{P}^8$  no contiene ninguna recta de  $SX$  y  $X$  se puede proyectar isomórficamente a  $\mathbb{G}(1, 5)$ .

Veamos por último que  $X$  no tiene defecto secante positivo.

Fijemos dos rectas generales  $l_1, l_2 \in X$  contenidas en los planos  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  de  $\mathcal{P}$  respectivamente. La familia de planos de  $\mathcal{P}$  contenidos en  $\langle \Pi_1, \Pi_2 \rangle \cong \mathbb{P}^5$  se corresponde con la familia unidimensional de planos de  $\sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$ . Ahora  $\langle l_1, l_2 \rangle$  corta al plano general de dicha familia unidimensional en un punto, luego no puede contener una curva de  $X$ , es decir  $\kappa(X) = 0$ .

Una vez que hemos visto que si  $SX$  no tiene la dimensión esperada  $2n+4$  entonces  $Y_\Lambda$  tiene dimensión positiva, veamos qué más se puede decir sobre  $Y_\Lambda$ . Los siguientes resultados mejoran aquéllos de E. Arrondo en [6], donde el caso (ii) no fue considerado.

**Lema 2.3.4** *Sea  $X \subset \mathbb{G}(1, N)$  una variedad de  $n$ -dimensional no comprimida que puede proyectarse isomórficamente a  $\mathbb{G}(1, n+1)$  con  $N \geq n+3$ . Entonces, para un  $\Lambda \in S(X)$  general,  $Y_\Lambda$  es una de las siguientes curvas en  $\mathbb{G}(1, \Lambda)$ :*

(i) *una cónica lisa inmersa por el fibrado vectorial  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ . Geométricamente es una de las dos familias de rectas de una cuádrica lisa  $Q \subset \Lambda$ ;*

(ii) *una cónica reducible inmersa como dos haces de rectas  $\Omega(P_1, \Pi_1)$  y  $\Omega(P_2, \Pi_2)$  con  $\Pi_1, \Pi_2 \subset \Lambda$ ,  $\Pi_1 \cap \Pi_2 = L$  y puntos base  $P_1, P_2 \in L$ .*

*Además la recta  $l \in X$  general está contenida en una familia de dimensión  $n-1$  de curvas  $Y_\Lambda$ .*

*Demostración.* Consideremos la unión  $Z \subset \mathbb{P}^N$  de todos los  $\Lambda$  secantes de  $X$ . Veamos en primer lugar que  $\dim Z \geq n + 2$ . De hecho, si  $\dim Z \leq n + 1$ , como  $X$  es no comprimida, sería  $Z = \overline{X}$ .

Probemos por inducción sobre  $k$  que la unión de los espacios lineales generados por  $k + 1$  rectas de  $X$  es de nuevo  $Z$  para todo  $k$  (lo cual es una contradicción, ya que existe un  $k_0$  tal que el *span* de  $k_0$  rectas generales de  $X$  debe ser  $\mathbb{P}^N$ ).

Para  $k = 1$  se sigue de la igualdad  $Z = \overline{X}$ . Sea  $P \in \mathbb{P}^N$  un punto contenido en  $\langle L_1, L_2, \dots, L_{k+1} \rangle$  de  $X$  para  $k > 1$ . Entonces  $P \in \langle P', L_{k+1} \rangle$  con  $P' \in \langle L_1, \dots, L_k \rangle$ . Por la hipótesis de inducción  $P' \in Z$ , esto es, existe una recta  $l \in X$  que pasa por  $P'$ . Pero esto significa que  $P \in \langle l, L_{k+1} \rangle$  y por consiguiente  $P \in Z$  como queríamos probar. Por tanto,  $\dim Z \geq n + 2$ .

En consecuencia el centro de proyección  $H$ , que es un subespacio lineal de dimensión  $N - n - 2$  de  $\mathbb{P}^N$ , corta a  $Z$  y en particular corta a algún  $\Lambda$  secante general. Como  $X$  se puede proyectar isomórficamente, se sigue del Teorema 0.3.16 que  $Y_\Lambda$  tiene dimensión positiva y se proyecta isomórficamente a  $\mathbb{G}(1, 2)$ .

Si  $\dim Y_\Lambda > 1$ , se sigue que  $Y_\Lambda$  debería ser un  $\beta$ -plano, lo cual es absurdo ya que dos rectas generales de  $X$  no se cortan.

Por tanto,  $Y_\Lambda$  es una curva no degenerada que se puede proyectar isomórficamente a  $\mathbb{G}(1, 2)$ .

Según hemos visto en la Proposición 0.3.13,  $Y_\Lambda$  es una cónica lisa o una cónica reducible.

La última afirmación es consecuencia inmediata de que  $\dim Y_\Lambda = 1$  y el Teorema 0.1.6.  $\square$

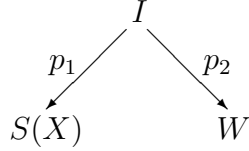
En la siguiente proposición se prueba que, en el caso en que  $X$  es una variedad proyectable y lisa,  $Y_\Lambda$  es necesariamente una cónica lisa.

**Proposición 2.3.5** *Sea  $X \subset \mathbb{G}(1, N)$  una variedad lisa  $n$ -dimensional no comprimida y que se puede proyectar isomórficamente a  $\mathbb{G}(1, n+1)$ . Supongamos además que  $N \geq n + 3$ . Entonces  $\kappa(X) = 1$  y para un  $\Lambda \in S(X)$  general  $Y_\Lambda$  es una cónica inmersa por  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ .*

*Demostración.* Hemos visto en el Lema 2.3.4 que bajo estas hipótesis  $Y_\Lambda$  es una cónica posiblemente degenerada. Veamos ahora que  $Y_\Lambda$  es una cónica lisa.

Supongamos que  $Y_\Lambda$  es una cónica degenerada correspondiente a un par de haces de rectas que se cortan, esto es, existe una recta  $l_\Lambda \in Y_\Lambda$  que contiene los dos puntos base de los haces.

Consideremos la colección de tales rectas  $W = \{l_\Lambda \mid \Lambda \in S(X)\} \subset X$  y el siguiente diagrama de incidencia:



donde  $I = \{(\Lambda, l_\Lambda) \mid \Lambda \in S(X)\}$ . Entonces  $\dim I = \dim S(X) = 2n - 2$  y la dimensión de  $W$  es  $2n - 2$  menos la dimensión de la fibra general de  $p_2$  en virtud del Teorema 0.1.6.

Distingamos dos casos, dependiendo de la dimensión de  $W$ :

(i)  $\dim W \leq n - 1$ .

En este caso vamos a probar que  $X$  es singular en  $W$ . Tomemos una recta general  $l_{\Lambda_0} \in W$ . Se tiene que  $\dim p_2^{-1}(l_{\Lambda_0}) \geq n - 1$  y cada  $\Lambda \in p_1(p_2^{-1}(l_{\Lambda_0}))$  da lugar, después de la inmersión de Plücker, a un par de rectas contenidas en  $X$  que pasan por el punto correspondiente a  $l_{\Lambda_0}$ . Estas rectas generan un plano  $\Pi_\Lambda$  que debe estar contenido en el espacio tangente inmerso a  $X$  en  $l_{\Lambda_0}$ ,  $\mathbb{T}_{l_{\Lambda_0}}X$ . Nótese que  $\Pi_\Lambda$  no es un  $\alpha$ -plano ni un  $\beta$ -plano, luego corta a  $\mathbb{G}(1, N)$  exactamente en el par de rectas puesto que la Grassmanniana está cortada por cuádricas.

De este modo encontramos una familia de dimensión al menos  $n - 1$  de planos que pasan por  $l_{\Lambda_0}$  y están contenidos en  $\mathbb{T}_{l_{\Lambda_0}}X$ . Veamos que la dimensión de

$$\bigcup_{\Lambda \in p_1(p_2^{-1}(l_{\Lambda_0}))} \Pi_\Lambda \subset \mathbb{P}^{\binom{N+2}{2}-1}$$

es al menos  $n + 1$ , lo que prueba que  $X$  es singular en  $l_{\Lambda_0}$ . Para ello basta observar que dos planos generales  $\Pi_\Lambda, \Pi_{\Lambda'}$  se intersecan, bien en el punto correspondiente a  $l_{\Lambda_0}$ , o bien en una recta de  $X$  correspondiente a un haz de rectas con base en  $l_{\Lambda_0}$ . En cualquier caso  $\Pi_\Lambda$  y  $\Pi_{\Lambda'}$  se cortan dentro de  $X$ , luego por el punto general de  $\Pi_\Lambda$  pasa un único plano y en consecuencia  $\dim \mathbb{T}_{l_{\Lambda_0}}X \geq n + 1$ .

(ii)  $\dim W = n$ .

En este caso  $W = X$  y la fibra general de  $p_2$  tiene dimensión  $n - 2$ , luego no podemos repetir el argumento anterior ya que sólo podemos encontrar una familia de dimensión  $n - 2$  de planos  $\Pi_\Lambda$  en  $\mathbb{T}_{l_{\Lambda_0}}X$ . La idea de la demostración es usar el lugar fundamental de  $X$  para probar que  $X$  es singular o degenerada, lo cual es una contradicción.

Sea  $l \in X$  general. Esta recta está contenida en una familia de dimensión  $n - 2$  de curvas  $Y_\Lambda$ , correspondientes a pares de haces por puntos de  $l$ . En particular, como  $X$  es no comprimida, podemos encontrar dos puntos  $P_l$  y  $P'_l$  en  $l$  que son los centros de dos familias de haces contenidos en  $X$ . Estas familias tienen dimensiones  $\eta$  y  $\eta'$  respectivamente, con  $\eta + \eta' = n - 2$ , que dan lugar después de la inmersión de Plücker a conos  $C_l, C'_l \subset \mathbb{P}^{\binom{N+2}{2}-1}$  de dimensiones  $\eta + 1$  y  $\eta' + 1$  con vértice el punto correspondiente a  $l$ . Como  $C_l$  y  $C'_l$  se cortan sólo en  $l$  y están contenidos en  $\mathbb{T}_l X$  deben ser espacios lineales ya que de lo contrario  $\dim \mathbb{T}_l X > n$ . Por tanto  $C_l$  es la estrella de rectas que pasan por  $P_l$  y contenidas en un  $\mathbb{P}^{\eta+2}$ , y  $C'_l$  es la estrella de rectas que pasan por  $P'_l$  y contenidas en un  $\mathbb{P}^{\eta'+2}$ .

Considerando la unión de tales puntos  $P_l$  y  $P'_l$  obtenemos dos lugares fundamentales  $F = \bigcup_{l \in X} P_l$  y  $F' = \bigcup_{l \in X} P'_l$  de dimensiones  $\eta' + 1$  y  $\eta + 1$  respectivamente.

Como la familia de rectas que unen puntos de  $F$  con puntos de  $F'$  contiene a  $X$  y tiene dimensión  $\eta + 1 + \eta' + 1 = n$ , ambas coinciden.

Veamos que en este caso  $X$  es degenerada.

Supongamos en primer lugar que  $F \subset F'$ . Fijamos un punto  $x \in F$  y consideramos la familia de rectas que unen  $x$  con  $F'$ . Sabemos que esta familia debe ser una estrella de rectas en un  $\mathbb{P}^{\eta+2}$ , lo cual es posible sólo si  $F'$  es una hipersuperficie en un  $\mathbb{P}^{\eta+2}$ . Por tanto,  $X$  está contenida en un  $\mathbb{P}^{\eta+2}$  lo cual es absurdo ya que  $\eta \leq n < N$  y  $X$  es degenerada. Lo mismo ocurre si  $F' \subset F$ .

Supongamos ahora que el punto general  $x \in F$  no pertenece a  $F'$ . Consideramos de nuevo la familia de rectas que unen  $x$  con  $F'$ , que es nuevamente una estrella de rectas en un  $\mathbb{P}^{\eta+2}$ . Se sigue entonces que  $F'$  es lineal, o es una hipersuperficie en un  $\mathbb{P}^{\eta+2}$  que contiene también a  $x$ . Como  $x$  es general en  $F$ , podemos excluir esta segunda posibilidad ya que otra vez  $X$  sería degenerada por estar contenida en un  $\mathbb{P}^{\eta+2}$ .

Por tanto  $F'$  es lineal, y de la misma forma se prueba que  $F$  también lo es. Pero en este caso  $X \subset \langle F, F' \rangle$ , que tiene dimensión menor o igual que  $(\eta+1) + (\eta'+1) + 1 = n + 1 < N$  y entonces  $X$  es degenerada.  $\square$

Estamos en condiciones de demostrar el teorema de estructura de las variedades proyectables. Para ello consideraremos la familia de rectas transversales a las cónicas  $Y_\Lambda$  contenidas en  $X$  y usaremos el Teorema 0.1.2.

**Teorema 2.3.6** *Sea  $X \subset \mathbb{G}(1, N)$  una variedad lisa  $n$ -dimensional no comprimida y proyectable forma isomorfa a  $\mathbb{G}(1, n + 1)$ . Supongamos además que  $N \geq n + 3$ . Entonces  $\overline{X}$  es un scroll racional de  $\mathbb{P}^n$ 's.*

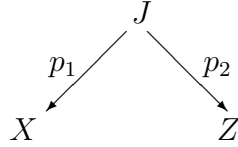
*Demostración.* En virtud de la Proposición 2.3.5, se tiene que  $Y_\Lambda$  es una cónica lisa

correspondiente a una de las dos familias de rectas de una cuádrica lisa en  $\Lambda$ . La idea de la demostración es tomar las rectas de la cuádrica de la otra familia para ver que  $\overline{X}$  contiene una familia grande de rectas, lo cual obliga a  $\overline{X}$  a ser un scroll de  $\mathbb{P}^n$ 's por el Teorema 0.1.2, que además será necesariamente racional.

Sea  $Y_\Lambda$  las rectas de una de las dos familias de una cuádrica lisa  $Q_\Lambda \subset \Lambda$ . Consideremos  $Y'_\Lambda$  las rectas de la otra familia de rectas de  $Q_\Lambda$ , que no están contenidas en  $X$ . Sea

$$Z = \bigcup_{\Lambda \in S(X)} Y'_\Lambda \subset \mathbb{G}(1, N).$$

Consideramos el diagrama de incidencia



donde  $J = \{(l, m) \mid l \cap m \neq \emptyset\} \subset X \times Z$ . La recta  $l \in X$  general está contenida en una familia  $(n-1)$ -dimensional de cónicas  $Y_\Lambda$  por el Lema 2.3.4, luego existe una familia  $n$ -dimensional de rectas de  $Z$  que la cortan. Por tanto,  $\dim J = 2n$ . Además, como  $X$  es no comprimida, la fibra general de  $p_2$  es unidimensional. En definitiva  $Z$  es una familia  $(2n-1)$ -dimensional de rectas que cubren  $\overline{X}$ , que tiene dimensión  $n+1$ . Entonces  $\overline{X}$  debe ser un scroll de  $\mathbb{P}^n$ 's sobre una curva  $C$  en virtud del Teorema 0.1.2.

Además, las rectas de  $X$  son transversales a los  $\mathbb{P}^n$ 's, luego el scroll es racional. En efecto, al punto general de una recta general de  $X$  se le asocia el único  $\mathbb{P}^n$  que pasa por él. Esto da un morfismo no constante de  $\mathbb{P}^1$  a  $C$ , luego  $C$  es racional.  $\square$ .

Como consecuencia de la proposición anterior se tiene que  $\overline{X} \subset \mathbb{P}^N$  es la proyección general de un scroll racional normal  $S(a_0, \dots, a_n)$ , y por tanto  $X$  viene proyectada realmente desde  $\mathbb{G}(1, a_0 + \dots + a_n + n)$ . O lo que es lo mismo  $\overline{X}$  es la imagen de  $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_0) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_n))$  por su fibrado lineal tautológico  $\mathcal{O}(1)$ .

El siguiente lema prueba que además  $a_i \leq 1$  para todo  $i$ .

**Lema 2.3.7** *En la situación anterior,  $a_i \leq 1$  para todo  $i$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_0) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_n)$ . Escribamos  $\mathcal{E} = \mathcal{E}' \oplus \mathcal{E}''$ , donde  $\mathcal{E}' = \bigoplus_{i=0}^s \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$  con  $a_s \leq 1$  y  $\mathcal{E}'' = \bigoplus_{i=s+1}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$  con  $a_{s+1} \geq 2$ .



Como la recta general  $l \in X$  es transversal a las fibras del scroll, da lugar a una sección

$$i_l : L \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$$

o equivalentemente, un morfismo sobreyectivo de haces

$$\psi_l : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1).$$

El morfismo  $\psi_l$  restringido a  $\mathcal{E}''$  debe ser nulo puesto que los morfismos  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$  son nulos si  $a \geq 2$ . Por tanto la imagen de  $i_l$  está contenida en  $\mathbb{P}(\mathcal{E}')$ , que tiene dimensión  $n+1-s$ . Como  $X$  es no comprimida debe ser  $s = 0$ , como queríamos probar.  $\square$

## 2.4 Variedades proyectables de $\mathbb{G}(1, 2n)$ a $\mathbb{G}(1, n+1)$

Gracias al teorema de estructura 2.3.6 obtenemos una demostración más sencilla del resultado de E. Arrondo en [6] que comentábamos en la introducción del capítulo.

**Corolario 2.4.1** *Sea  $X \subset \mathbb{G}(1, N)$  una variedad lisa  $n$ -dimensional no comprimida y proyectable a  $\mathbb{G}(1, n+1)$  de forma isomorfa. Supongamos además que  $N \geq 2n+1$ . Entonces  $X$  es la inmersión doble de Veronese  $\mathbb{P}^n$  por el fibrado vectorial  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ .*

*Demostración.* El caso  $n = 1$  fue probado en la Proposición 0.3.13. Si  $n \geq 2$  y  $N \geq 2n+1$ , se sigue del Teorema 2.3.6 que  $\overline{X}$  es un scroll racional de  $\mathbb{P}^n$ 's. Del Lema 2.3.7 se deduce que la única posibilidad es  $N = 2n + 1$  y  $\overline{X} = S(\underbrace{1, \dots, 1}_{n+1}) \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ .

La familia de rectas transversales a los  $\mathbb{P}^n$ 's de  $\overline{X}$  es precisamente la inmersión doble de Veronese de  $\mathbb{P}^n$  inmersa en  $\mathbb{G}(1, 2n + 1)$  por el fibrado vectorial  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$  según vimos en el Ejemplo 2.2.3.  $\square$

**Teorema 2.4.2** *Sea  $X \subset \mathbb{G}(1, N)$  una variedad lisa  $n$ -dimensional no comprimida y proyectable a  $\mathbb{G}(1, n + 1)$  de forma isomorfa. Supongamos además que  $N \geq 2n$  y  $n \geq 3$ . Entonces  $X$  es una de las siguientes variedades:*

- (i) *la inmersión doble de Veronese de  $\mathbb{P}^n$  por el fibrado vectorial  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ ;*
- (ii) *la explosión de  $\mathbb{P}^n$  en un punto inmersa por el fibrado vectorial  $\mathcal{O}_X(H) \oplus \mathcal{O}_X(H - E)$ , donde  $E$  es el divisor excepcional de la explosión y  $H$  es el pull-back de la sección hiperplana de  $\mathbb{P}^n$ .*

*Demostración.* En estas condiciones, se sigue nuevamente del Teorema 2.3.6 que  $\overline{X}$  es un scroll racional de  $\mathbb{P}^n$ 's. Como  $N \geq 2n$  se sigue del Lema 2.3.7 que  $\overline{X} = S(\underbrace{1, \dots, 1}_{n+1})$  o bien  $\overline{X} = S(0, \underbrace{1, \dots, 1}_n)$  y en ambos casos las rectas de  $X$  son transversales a los  $\mathbb{P}^n$ 's del scroll.

Si  $\overline{X} = S(1, \dots, 1) \subset \mathbb{P}^{2n}$ , entonces  $\overline{X}$  viene proyectado de  $\mathbb{P}^{2n+1}$  y por tanto  $X$  viene proyectada desde  $\mathbb{G}(1, 2n+1)$ . Se sigue del Corolario 2.4.1 que  $X$  es la inmersión doble de Veronese de  $\mathbb{P}^n$  por medio de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ .

Por tanto, nos centramos a partir de ahora en el caso en que  $\overline{X} = S(0, 1, \dots, 1) \subset \mathbb{P}^{2n}$ , o lo que es lo mismo,  $\overline{X}$  es el cono sobre la variedad de Segre  $\Sigma_{1, n-1} = \sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1})$  con vértice  $P$  y los  $\mathbb{P}^n$ 's del scroll están generados por los  $\mathbb{P}^{n-1}$ 's de  $\Sigma_{1, n-1}$  y el vértice  $P$  del cono.

Consideremos el divisor  $X'$  de  $X$  que consiste en las rectas de  $X$  que pasan por  $P$ . Veamos que  $X'$  es la estrella de rectas de dimensión  $n-1$  que une los puntos de un  $\mathbb{P}^{n-1}$  de  $\Sigma_{1, n-1}$  con  $P$ .

En efecto,  $X'$  se proyecta isomórficamente a  $\mathbb{G}(1, n+1)$  y todas sus rectas pasan por la imagen de  $P$  en  $\mathbb{P}^{n+1}$ . Teniendo en cuenta la identificación entre las rectas en un  $\mathbb{P}^N$  que pasan por un punto y  $\mathbb{P}^{N-1}$ , podemos considerar  $X' \subset \Sigma_{1, n-1}$  como un subesquema  $(n-1)$ -dimensional de  $\mathbb{P}^{2n-1}$  que se proyecta de forma isomorfa a  $\mathbb{P}^n$ , por lo que debe ser necesariamente un  $\mathbb{P}^{n-1}$  de  $\Sigma_{1, n-1}$ , posiblemente no reducido.

Por otro lado,  $X$  corta a un  $\beta$ -plano general  $\Pi$  generado por una recta transversal a  $\Sigma_{1, n-1}$  y  $P$  en un subesquema unidimensional  $C_\Pi$ . Veamos que  $C_\Pi$  es un haz de rectas en  $\Pi$ .

Supongamos por reducción al absurdo que  $\text{gr}(C_\Pi) = d \geq 2$ . Entonces por cada punto de  $\Pi$  pasan  $d$  rectas de  $C_\Pi$ .

Como  $X'$  es una estrella  $(n-1)$ -dimensional que une los puntos de un  $\mathbb{P}^{n-1}$  de  $\Sigma$  con  $P$ , se sigue que  $X' \cap C_\Pi$  es una sola recta, que denotamos  $l_P$ , y que debe ser contada con multiplicidad  $d$ .

Veamos que  $l_P$  es un punto singular de  $X$ . Después de la inmersión de Plücker,  $X' \cong \mathbb{P}^{n-1}$  está contenido en el espacio tangente de  $X$  en  $l_P$ . Por otro lado,  $l_P$  es un punto singular de multiplicidad  $d$  de  $C_\Pi$  y el espacio tangente inmerso de  $C_\Pi$  en  $l_P$  se corresponde con el  $\beta$ -plano determinado por  $\Pi$ .

En definitiva, el espacio tangente inmerso  $\mathbb{T}_{l_P} X$  a  $X$  en  $l_P$  contiene a  $X' \cong \mathbb{P}^{n-1}$  y a  $\text{gr}(1, \Pi) \cong \mathbb{P}^2$  y ambos se cortan exclusivamente en el punto  $l_P$ , luego  $\dim \mathbb{T}_{l_P} X \geq n+1$  y entonces  $X$  es singular en  $l_P$ . Hemos llegado a una contradicción al suponer que  $\text{gr}(C_\Pi) = d \geq 2$ , luego  $C_\Pi$  es un haz de rectas en  $\Pi$ .

Los centros de los haces  $C_{\Pi}$  se mueven necesariamente en un hiperplano de  $\overline{X}' \cong \mathbb{P}^n$ , luego podemos suponer que se trata de un  $\mathbb{P}^{n-1}$  de  $\Sigma$ . Hemos visto en el Ejemplo 2.2.4 que en este caso  $X$  es la explosión de  $\mathbb{P}^n$  en un punto inmerso en  $\mathbb{G}(1, 2n)$  por el fibrado vectorial  $\mathcal{O}_X(H) \oplus \mathcal{O}_X(H - E)$ .  $\square$

**Observación 2.4.3** La hipótesis  $n \geq 3$  es necesaria para que sea  $N \geq n + 3$  y podamos aplicar el Teorema 0.3.16 del que se deduce el teorema de estructura 2.3.6. De hecho, para  $n = 2$ , las superficies lisas  $X \subset \mathbb{G}(1, 4)$  que pueden proyectarse isomórficamente a  $\mathbb{G}(1, 3)$  fueron clasificadas por E. Arrondo e I. Sols. El resultado es el siguiente.

**Teorema 2.4.4** ([4], **Theorem 5.1**) *Una congruencia lisa  $X \subset \mathbb{G}(1, 3)$  es proyección de una superficie de  $\mathbb{G}(1, 4)$  si y sólo si  $X$  es una de las siguientes superficies:*

- (i) *un scroll racional inmerso con bigrado  $(2, 1)$ ;*
- (ii) *un scroll racional inmerso con bigrado  $(2, 2)$ ;*
- (iii) *la superficie de Veronese inmersa por  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ ;*
- (iv) *una superficie de Del Pezzo inmersa con bigrado  $(3, 2)$ ;*
- (v) *una superficie de Del Pezzo inmersa con bigrado  $(3, 3)$ .*

Desde luego sería deseable estudiar los siguientes casos, en los que  $n + 3 \leq N \leq 2n - 1$ . El problema es que, a medida que  $N$  es menor,  $\overline{X}$  contiene más rectas transversales a los  $\mathbb{P}^n$ 's, lo cual complica las cosas.

Sin embargo, todavía se puede llegar al siguiente resultado.

**Teorema 2.4.5** *Sea  $X \subset \mathbb{G}(1, N)$  una variedad lisa  $n$ -dimensional no comprimida y proyectable a  $\mathbb{G}(1, n + 1)$  de forma isomorfa. Supongamos además que  $N \geq n + 3$ . Entonces  $X$  es racional.*

*Demostración.* Fijemos  $l \in X$  general y consideremos  $\mathbb{P}(T_l X^*) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ , el espacio proyectivo de las direcciones tangentes a  $X$  en  $l$ . Definimos la aplicación racional

$$\begin{aligned} \varphi : X &\dashrightarrow \mathbb{P}(T_l X^*) \\ l' &\mapsto [T_l Y_{\langle L, L' \rangle}]. \end{aligned}$$

Es decir,  $\varphi(l')$  es la clase del vector tangente a la cónica  $Y_{\langle L, L' \rangle}$  en el punto  $l$ .

Veamos que la fibra general de  $\varphi$  es precisamente la cónica  $Y_{\langle L, L' \rangle}$  y, por tanto,  $X$  es racional.

Sea  $l'' \in X$  un punto de una fibra general de  $\varphi$ . Entonces  $T_l Y_{\langle L, L' \rangle} = T_l Y_{\langle L, L'' \rangle}$ , es decir, las cónicas  $Y_{\langle L, L' \rangle} \subset \mathbb{G}(1, \langle L, L' \rangle)$  e  $Y_{\langle L, L'' \rangle} \subset \mathbb{G}(1, \langle L, L'' \rangle)$  tienen la misma recta tangente inmersa después de la inmersión de Plücker.

(i) Si  $\langle L, L' \rangle \cap \langle L, L'' \rangle = L$  entonces  $\mathbb{G}(1, \langle L, L' \rangle) \cap \mathbb{G}(1, \langle L, L'' \rangle) = l$ , luego la recta tangente inmersa a  $Y_{\langle L, L' \rangle} \subset \mathbb{G}(1, \langle L, L' \rangle)$  e  $Y_{\langle L, L'' \rangle} \subset \mathbb{G}(1, \langle L, L'' \rangle)$  no puede coincidir.

(ii) Si  $\langle L, L' \rangle \cap \langle L, L'' \rangle$  es un plano  $\Pi \subset \mathbb{P}^N$  entonces  $\mathbb{G}(1, \langle L, L' \rangle) \cap \mathbb{G}(1, \langle L, L'' \rangle)$  es el  $\beta$ -plano  $\mathbb{G}(1, \Pi)$ , pero las rectas tangentes inmersas a  $Y_{\langle L, L' \rangle} \subset \mathbb{G}(1, \langle L, L' \rangle)$  e  $Y_{\langle L, L'' \rangle} \subset \mathbb{G}(1, \langle L, L'' \rangle)$  no están contenidas en el  $\beta$ -plano  $\mathbb{G}(1, \Pi)$ . Por tanto, de nuevo  $\varphi(l') \neq \varphi(l'')$ .

En definitiva la única posibilidad es que sea  $\langle L, L' \rangle = \langle L, L'' \rangle$ , en cuyo caso es  $Y_{\langle L, L' \rangle} = Y_{\langle L, L'' \rangle}$ .  $\square$

**Observación 2.4.6** Un teorema de F.L. Zak (véase [46] VI, Theorem 2.1) afirma que la única variedad lisa de dimensión  $n$  en  $\mathbb{P}^N$  con  $N \geq \binom{n+2}{2} - 1$  que se puede proyectar isomórficamente a  $\mathbb{P}^{2n}$  es la inmersión doble de Veronese  $v_2(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-1}$ .

El resultado análogo en la Grassmanniana de rectas con la hipótesis adicional de la no compresión es el Corolario 2.4.1, que fue obtenido por E. Arrondo en [6] siguiendo la idea de Zak de considerar variedades de secantes superiores  $S^k X$ .

El resultado principal de este capítulo es el Teorema 2.4.2, que supone un ligero avance en el estudio de variedades proyectables en la Grassmanniana. Este resultado análogo en el espacio proyectivo no ha sido aún estudiado, por tanto, es razonable establecer la siguiente conjetura (véase [7]), de la cual sólo se sabe que es cierta en el caso  $n = 3$  (véase [16]).

**Conjetura 2.4.7** *Las únicas variedades lisas  $n$ -dimensionales que pueden ser proyectadas isomórficamente desde  $\mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-2}$  a  $\mathbb{P}^{2n}$  son la inmersión doble de Veronese  $v_2(\mathbb{P}^n)$  y la explosión de  $\mathbb{P}^n$  en un punto inmersa por el sistema lineal de cuádricas que pasan por él.*

Detengámonos ahora en el Teorema 2.4.5. A la vista de este resultado nos preguntamos si será cierto que las variedades  $X \subset \mathbb{P}^N$  proyectables a  $\mathbb{P}^{2n}$  son necesariamente racionales. El siguiente ejemplo da la respuesta.

**Ejemplo 2.4.8 (T. Fujita–J. Roberts [17])** Consideremos el cono  $C_P \subset \mathbb{P}^9$  sobre  $\sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^8$  y vértice el punto  $P$  exterior al  $\mathbb{P}^8$ . Sea  $X_d \subset \mathbb{P}^9$  la intersección completa de  $C_P$  y una hipersuperficie  $F_d \subset \mathbb{P}^9$  de grado  $d > 1$ . La variedad  $X_d \subset \mathbb{P}^9$  de dimensión 4 se proyecta a  $\mathbb{P}^8$  y no es racional.

Igualmente en la Grassmanniana existen ejemplos de variedades  $X \subset \mathbb{G}(1, n + 2)$  proyectables a  $\mathbb{G}(1, n + 1)$  y que no son racionales. Pero si la codimensión de  $X$  es mayor, sí que tenemos la racionalidad. En esta situación nos animamos a hacer la siguiente conjetura.

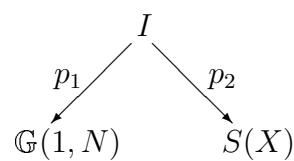
**Conjetura 2.4.9** *Sea  $X \subset \mathbb{P}^N$  una variedad lisa  $n$ -dimensional y proyectable a  $\mathbb{P}^{2n}$ . Existe una función  $f(n) < \binom{n+2}{2} - 1$ , si  $n > 2$ , de forma que si  $N \geq f(n)$  entonces  $X$  es racional.*

El Teorema de Severi nos dice que  $f(2) = 5$ . Por otro lado  $f(3) = 7$  en virtud de [16], mientras que el Ejemplo 2.4.8 nos dice que  $f(4) > 9$ . En este contexto la Conjetura 2.4.7 implicaría que  $f(n) \leq \binom{n+2}{2} - 2$ .

Finalmente establecemos un resultado acerca de las variedades  $n$ -dimensionales con un punto doble aparente.

**Teorema 2.4.10** *Sea  $X \subset \mathbb{G}(1, n + 3)$  una variedad con un punto doble aparente. Supongamos que  $X$  es no comprimida. Entonces  $X$  es racional.*

*Demostración.* Consideremos el diagrama de incidencia:



donde  $I = \{(l, \Lambda) \in \mathbb{G}(1, N) \times S(X) \mid L \subset \Lambda\}$ . Si  $X$  tiene un punto doble aparente se observa que, o bien  $p_1$  es birracional e  $Y_\Lambda$  es un par de rectas para  $\lambda \in X$  general, o bien  $SX = p_1(I)$  está contenido estrictamente en  $\mathbb{G}(1, n + 3)$ ,  $\overline{B(X)} = \mathbb{P}^{n+2}$  y por el punto general  $P \in \overline{B(X)}$  pasa un único plano malo que corta a  $X$  en un subesquema de longitud 2.

Supongamos en primer lugar que  $p_1$  es birracional. Sea  $\Gamma_X \subset \mathbb{G}(1, n + 3)$  el conjunto de rectas que cortan a  $\overline{X}$ . Por ser  $X$  no comprimida  $\Gamma_X$  tiene codimensión 1 en  $\mathbb{G}(1, n + 3)$ . Razonando de igual forma que en la Proposición 1.4.5, se sigue que

la imagen de la proyección  $\pi_L : X \dashrightarrow \mathbb{G}(1, n+1)$  desde una recta  $l \in X$  general es una congruencia  $X' \subset \mathbb{G}(1, n+1)$  de orden 1 y por tanto  $X$  es racional en virtud del Lema 1.4.4. Como  $Y_\Lambda$  es un par de rectas para  $\lambda \in X$  general se sigue que  $\pi_L : X \dashrightarrow X'$  es birracional y en consecuencia  $X$  es racional. Además en este caso  $X \subset \mathbb{G}(1, n+3)$  es linealmente normal de la misma forma que en la Proposición 1.4.8.

Supongamos ahora que  $\dim SX < 2n+4$ . En este caso  $X$  tiene defecto secante positivo en virtud del Teorema 0.3.16. Veamos que de nuevo  $Y_\Lambda$  es una cónica lisa. Consideremos la unión  $Z \subset \mathbb{P}^N$  de todos los  $\Lambda$  secantes de  $X$  como en el Lema 2.3.4. Allí se vio que  $\dim Z \geq n+2$ . Como  $X$  es no degenerada una recta general de  $\mathbb{P}^{n+3}$  corta a  $Z$  en más de un punto, luego  $Y_\Lambda$  es una curva que se puede proyectar de forma isomorfa a  $\mathbb{G}(1, 2)$ . Entonces  $Y_\Lambda$  es una cónica por la Proposición 0.3.13, que será lisa por el mismo motivo que en 2.3.5, y se tiene también el teorema de estructura 2.3.6 luego  $\overline{X} = S(a_0, \dots, a_n)$  con  $0 \leq a_i \leq 1$ . Finalmente  $X$  es racional en virtud del Teorema 2.4.5, en cuya demostración sólo se usa que  $Y_\Lambda$  sea una cónica lisa.  $\square$

Como ya se comentó en el capítulo anterior, la racionalidad de las  $n$ -variedades  $X \subset \mathbb{P}^{2n+1}$  con un punto doble aparente se probó en [12] proyectando  $X$  a  $\mathbb{P}^n$  desde un espacio tangente general, mientras que en el caso de las variedades proyectables a  $\mathbb{P}^{2n}$  dicha proyección tangencial hace caer la dimensión de  $X$  en virtud del Lema de Terracini 0.1.7.

Para  $n$ -variedades  $X \subset \mathbb{G}(1, n+3)$  con un punto doble aparente, siempre bajo la hipótesis de no compresión, ocurre algo parecido. Si  $X$  es proyectable, la proyección desde una recta interna hace caer la dimensión de  $X$  gracias al Teorema 0.3.16, mientras que si  $X$  tiene un punto doble aparente la proyección desde la recta interna es una congruencia  $X' \subset \mathbb{G}(1, n+1)$  de orden 1 o también hace caer la dimensión como hemos visto en el Teorema 2.4.10. Sin embargo no conocemos ningún ejemplo de  $n$ -variedad  $X$  con un punto doble aparente que satisfaga esta última condición, lo cual nos induce pensar que realmente no puede darse.

# Capítulo 3

## Inmersiones dobles de Veronese de $\mathbb{P}^n$ en $\mathbb{G}(1, N)$

### 3.1 Introducción

En este capítulo clasificamos las inmersiones dobles de Veronese de  $\mathbb{P}^n$  en una Grassmanniana de rectas  $\mathbb{G}(1, N)$ , es decir, aquéllas que al componer con la inmersión de Plücker nos dan  $\mathbb{P}^n$  sumergido en el espacio proyectivo por el fibrado lineal  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2)$ . Existen dos inmersiones evidentes cuando el fibrado  $\mathcal{E}$  que determina la inmersión  $\varphi : \mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{G}(1, N)$  escinde como  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$  o bien  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ . Por otro lado también existen dos inmersiones de  $\mathbb{P}^2$  y  $\mathbb{P}^3$  como las rectas bisecantes a una cúbica alabeada de  $\mathbb{P}^3$  (véase [4]) y las rectas contenidas en una cuádrica lisa de  $\mathbb{P}^4$  (véase [39]) respectivamente.

En la escuela internacional PRAGMATIC 2002 celebrada en la Universidad de Catania, el profesor F.L. Zak propuso estudiar estas inmersiones dobles de Veronese en Grassmannianas de rectas viendo si a partir de cierto  $n$  el fibrado  $\mathcal{E}$  escinde, como predice la Conjetura de Hartshorne. )

**Conjetura 3.1.1 (R. Hartshorne [22])** *Las subvariedades lisas  $Y \subset \mathbb{P}^n$  de dimensión  $r$  son intersecciones completas si  $n < \frac{3}{2}r$ .*

En particular, la conjetura dice que  $Y \subset \mathbb{P}^n$  es una intersección completa de codimensión 2 si  $n \geq 7$ . De hecho en este caso la conjetura se amplía al caso  $n \geq 6$ .

De acuerdo con la *Correspondencia de Hartshorne–Serre*, toda subvariedad lisa  $Y \subset \mathbb{P}^n$  de codimensión 2 y *subcanónica* (es decir, tal que  $K_Y = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a)|_Y$  para cierto  $a \in \mathbb{Z}$ ) puede obtenerse como lugar de degeneración de una sección de un fibrado

$\mathcal{E}$  de rango 2 sobre  $\mathbb{P}^n$ , siempre que  $n \geq 3$ . En este contexto  $Y$  será intersección completa si y sólo si  $\mathcal{E}$  escinde como suma directa de fibrados lineales.

Ahora bien, según el Teorema de Larsen (véase [28]), si  $Y \subset \mathbb{P}^n$  es una variedad lisa de dimensión  $r$  con  $r \geq \frac{n+2}{2}$  se tiene que  $Pic(Y) = \mathbb{Z}$  está generado por la sección hiperplana y, por tanto,  $Y$  es subcanónica. En particular toda variedad lisa  $Y \subset \mathbb{P}^n$  de codimensión 2 es subcanónica si  $n \geq 6$ .

Por tanto, probar la Conjetura de Hartshorne para subvariedades de codimensión 2 es equivalente a probar que todo fibrado de rango 2 sobre  $\mathbb{P}^n$  escinde si  $n \geq 6$ .

**Reformulación de 3.1.1 en codimensión 2:** Todo fibrado vectorial  $\mathcal{E}$  de rango 2 sobre  $\mathbb{P}^n$  se descompone como  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(b)$  con  $a, b \in \mathbb{Z}$  si  $n \geq 6$ .

De hecho, la falta de ejemplos de fibrados de rango 2 no escindidos permite conjeturar que todo fibrado de rango 2 sobre  $\mathbb{P}^n$  escinde si  $n \geq 5$ .

Sea  $\mathcal{E}$  un fibrado vectorial de rango 2 sobre  $\mathbb{P}^n$ . En principio  $\mathcal{E}$  no define una inmersión de Veronese de  $\mathbb{P}^n$  en una Grassmanniana de rectas. Sin embargo, tensorializando  $\mathcal{E}$  por  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$  con  $m \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, se sigue que  $\mathcal{E}(m)$  sí que da una  $d$ -inmersión de Veronese de  $\mathbb{P}^n$  en  $G(1, \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{E}(m))))$  con  $\Lambda^2 \mathcal{E}(m) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$  (véase[20]).

Por tanto, si se pudieran clasificar las inmersiones  $d$ -ésimas de Veronese de  $\mathbb{P}^n$  definidas por un fibrado vectorial  $\mathcal{E}$  de rango 2 y fuese cierto que  $\mathcal{E}$  escinde si  $n \geq 5$ , se tendría probada la Conjetura de Hartshorne para subvariedades de codimensión 2.

De este modo nuestro resultado podría considerarse un primer paso en esta dirección. Si  $\mathcal{E}$  sumerge  $\mathbb{P}^n$  en una Grassmanniana de rectas como un espacio lineal, es decir  $\Lambda^2 \mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ , vimos en el Lema 0.2.8 que  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$  o bien  $n = 2$  y  $\mathcal{E} = \mathcal{T}_{\mathbb{P}^2}(-1)$ .

Por tanto el primer caso realmente novedoso es estudiar cuando  $\mathcal{E}$  sumerge  $\mathbb{P}^n$  en una Grassmanniana de rectas como una inmersión doble de Veronese, es decir,  $\Lambda^2 \mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2)$ .

## 3.2 Preliminares

Recordamos a continuación algunas definiciones y resultados conocidos acerca de fibrados vectoriales sobre  $\mathbb{P}^n$ . Una magnífica referencia es el libro de C. Okonek [30].



**Teorema 3.2.1 (A. Grothendieck)** *Sea  $\mathcal{E}$  un fibrado vectorial de rango  $r$  sobre  $\mathbb{P}^1$ . Entonces  $\mathcal{E} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$  con  $a_i \in \mathbb{Z}$  y  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_r$ .*

*Demostración.* Véase [30] I, 2.1.1.  $\square$

Una idea para estudiar fibrados vectoriales  $\mathcal{E}$  sobre  $\mathbb{P}^n$  es estudiar las posibles restricciones de  $\mathcal{E}$  a rectas de  $\mathbb{P}^n$ , como se detalla en lo que sigue.

Sea  $\mathcal{E}$  un fibrado vectorial de rango  $r$  sobre  $\mathbb{P}^n$ . De acuerdo con el teorema de Grothendieck, para cada  $l \in \mathbb{G}(1, n)$  existe una  $r$ -tupla

$$a_{\mathcal{E}}(l) = (a_1(l), \dots, a_r(l)) \in \mathbb{Z}^r,$$

con  $a_1(l) \geq a_2(l) \geq \dots \geq a_r(l)$ , tal que la restricción

$$\mathcal{E}|_L = \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_L = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_L(a_i(l)).$$

De este modo podemos definir una aplicación

$$\begin{aligned} a_{\mathcal{E}} : \mathbb{G}(1, n) &\rightarrow \mathbb{Z}^r \\ l &\mapsto (a_1(l), \dots, a_r(l)). \end{aligned}$$

Dotemos a  $\mathbb{Z}^r$  del orden lexicográfico  $(a_1, \dots, a_r) \leq (b_1, \dots, b_r)$  si la primera diferencia no nula  $b_i - a_i$  es positiva.

**Definiciones 3.2.2** Llamamos *tipo de escisión de  $\mathcal{E}$  en  $L$*  a la  $r$ -tupla  $a_{\mathcal{E}}(l)$ .

Llamamos *tipo de escisión de  $\mathcal{E}$*  a la  $r$ -tupla  $\mathbf{a}_{\mathcal{E}} = \inf_{l \in \mathbb{G}(1, n)} a_{\mathcal{E}}(l)$ .

Definimos  $\mathcal{J}$  el conjunto de las *rectas de salto de  $\mathcal{E}$*  como  $\mathcal{J} = \{l \in \mathbb{G}(1, n) \mid a_{\mathcal{E}}(l) > \mathbf{a}_{\mathcal{E}}\}$ . Sucede que  $\mathcal{J}$  es un cerrado propio de Zariski en  $\mathbb{G}(1, n)$ .

Decimos que el fibrado  $\mathcal{E}$  es *uniforme* si  $a_{\mathcal{E}}$  es constante para toda  $l \in \mathbb{G}(1, n)$ , es decir, si  $\mathcal{J} = \emptyset$ .

Decimos que un fibrado vectorial de rango  $r$  *escinde* cuando se puede representar como una suma directa de  $r$  fibrados lineales.

**Teorema 3.2.3** *Sea  $\mathcal{E}$  un fibrado vectorial uniforme de rango 2 sobre  $\mathbb{P}^n$ . Entonces  $\mathcal{E}$  escinde o bien  $n = 2$  y  $\mathcal{E} = \mathcal{T}_{\mathbb{P}^2}(m)$  para cierto  $m \in \mathbb{Z}$ .*

*Demostración.* Véase [44].  $\square$

**Teorema 3.2.4** Sea  $\mathcal{E}$  un fibrado vectorial de rango  $r$  sobre  $\mathbb{P}^n$  y  $x \in \mathbb{P}^n$  un punto tal que  $\mathcal{E}|_L = \mathcal{O}_L(a)^{\oplus r}$  para toda recta  $L$  que pase por  $x$ . Entonces  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a)^{\oplus r}$ .

*Demostración.* Basta aplicar [30] I, Theorem 3.2.1 al fibrado vectorial  $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-a)$ .  $\square$

**Teorema 3.2.5** Un fibrado vectorial  $\mathcal{E}$  sobre  $\mathbb{P}^n$  escinde si y sólo si la restricción a algún plano  $\Pi \subset \mathbb{P}^n$  escinde.

*Demostración.* Véase [30] I, Theorem 2.3.2.  $\square$

### 3.3 Ejemplos

Veamos a continuación algunos ejemplos de inmersiones dobles de Veronese  $\mathbb{P}^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{G}(1, N)$  linealmente normales, es decir,  $V$  es siempre  $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{E})$  o, en sentido más geométrico,  $\mathbb{P}^n \subset \mathbb{G}(1, N)$  no puede ser proyectada isomórficamente desde  $\mathbb{G}(1, N+1)$ .

**Ejemplo 3.3.1** El fibrado vectorial  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$  da una inmersión doble  $X$  de  $\mathbb{P}^n$  en  $\mathbb{G}(1, \binom{n+2}{2})$  ya que  $\bigwedge^2 \mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2)$ . Geométricamente  $X$  es la familia de generatrices de un cono  $\overline{X}$  sobre la inmersión doble de Veronese  $v_2(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-1}$  con vértice un punto.

**Ejemplo 3.3.2** El fibrado vectorial  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$  da una inmersión doble de  $\mathbb{P}^n$  en  $\mathbb{G}(1, 2n+1)$  como vimos en el Ejemplo 2.2.3.

**Ejemplo 3.3.3** La familia de rectas bisecantes a una cúbica alabeada  $C \subset \mathbb{P}^3$  es una superficie  $X \subset \mathbb{G}(1, 3)$  que resulta ser una inmersión doble de Veronese de  $\mathbb{P}^2$  (véase [4]). En este caso el fibrado vectorial  $\mathcal{E}$  es un *fibrado de Steiner*, es decir, es el dual del núcleo de la aplicación  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{\oplus 4} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ , correspondiente a la elección de cuatro secciones generales del fibrado  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ .

De la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{\oplus 4} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow 0$$

se sigue que  $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{E}) = 4$  y, por tanto,  $X \subset \mathbb{G}(1, 3)$  es linealmente normal. Esto mismo puede obtenerse observando que  $X \subset \mathbb{G}(1, 3)$  es una congruencia de orden 1 y aplicando la Proposición 1.4.8.

**Ejemplo 3.3.4** La familia de rectas contenidas en una cuádrica lisa  $Q \subset \mathbb{P}^4$  es una inmersión doble de Veronese de  $\mathbb{P}^3$  en  $\mathbb{G}(1, 4)$  (véase [39]). El fibrado vectorial  $\mathcal{E}$  que da la inmersión es el conúcleo de la aplicación  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^3}(2)$  correspondiente a la elección de una sección del fibrado vectorial cotangente  $\Omega_{\mathbb{P}^3}$  tensorializado por  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)$ . Obsérvese que  $\Omega_{\mathbb{P}^3}(2)$  es globalmente generado y que  $c_3(\Omega_{\mathbb{P}^3}(2)) = 0$ . Por tanto, el cociente de una sección general es un haz localmente libre.

De la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^3}(2) \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow 0$$

y la sucesión de Euler de  $\mathbb{P}^3$  se sigue que  $h^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{E}) = 5$ , luego  $X \subset \mathbb{G}(1, 4)$  es linealmente normal. Equivalentemente basta observar que una cuádrica  $Q \subset \mathbb{P}^4$  es linealmente normal en sentido proyectivo, luego  $X \subset \mathbb{G}(1, 4)$  lo es en sentido de la Grassmanniana.

**Ejemplo 3.3.5** Considerando la restricción a un plano  $\Pi \subset \mathbb{P}^3$  en el Ejemplo 3.3.4 obtenemos una inmersión doble de Veronese  $X \subset \mathbb{G}(1, 4)$  de  $\mathbb{P}^2$  por medio del fibrado  $\mathcal{E}|_X$ , donde  $\mathcal{E}$  es en este caso el fibrado del Ejemplo 3.3.4. Geométricamente  $X$  es el conjunto de rectas contenidas en  $Q$  y que cortan a una recta  $L$  de  $Q$  fijada. La superficie  $X$  es linealmente normal por el mismo motivo que en el Ejemplo 3.3.4.

**Observación 3.3.6** Recordamos que, según vimos en el Capítulo 2, la inmersión doble de Veronese de  $\mathbb{P}^n$  por el fibrado vectorial  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$  puede proyectarse de forma isomorfa desde  $\mathbb{G}(1, 2n + 1)$  hasta  $\mathbb{G}(1, n + 1)$  (véase 2.2.3). De igual forma la inmersión doble de Veronese dada por  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$  puede proyectarse desde  $\mathbb{G}(1, \binom{n+2}{2})$  hasta  $\mathbb{G}(1, 2n + 1)$ , ya que la variedad de Veronese  $v_2(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-1}$  se puede proyectar hasta  $\mathbb{P}^{2n}$ .

Por otro lado las variedades de los Ejemplos 3.3.3, 3.3.4 y 3.3.5 no se pueden proyectar isomórficamente a una Grassmanniana más pequeña. Esta afirmación es evidente para el Ejemplo 3.3.3, mientras que para el Ejemplo 3.3.4 basta observar que por un punto general  $P$  de  $\mathbb{P}^4$  pasa una familia bidimensional de planos malos de  $X$ , que producen un lugar singular de dimensión 2 al proyectar. Como el Ejemplo 3.3.5 se construye restringiendo el Ejemplo 3.3.4 a un plano, en este caso la proyección desde  $P$  produce un lugar singular unidimensional.

A continuación establecemos la clasificación de las inmersiones dobles de Veronese de  $\mathbb{P}^1$  y  $\mathbb{P}^2$  en una Grassmanniana de rectas. Probablemente esta clasificación podría hacerse por métodos más elementales pero nuestra prueba ilustra cómo proceder en dimensiones más altas. A partir de este momento siempre consideraremos  $X \subset \mathbb{G}(1, N)$  linealmente normal.

**Lema 3.3.7** *Las únicas inmersiones dobles de Veronese de  $\mathbb{P}^1$  en una Grassmanniana de rectas vienen dadas por los fibrados vectoriales escindidos  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$  o bien  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ .*

*Demostración.* Denotemos por  $X$  la imagen de  $\mathbb{P}^1$  vía la inmersión doble de Veronese  $\varphi : \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{G}(1, N)$  correspondiente a tomar todas las secciones del fibrado vectorial  $\mathcal{E}$ . De acuerdo al teorema de Grothendieck  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b)$  y para que  $E$  sea generado por sus secciones globales necesariamente  $a, b \geq 0$ . Como debe ser  $\bigwedge^2 \mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$ , se tiene  $a + b = 2$ .

Por tanto, las dos únicas posibilidades son  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$  (correspondiente al Ejemplo 3.3.1) o bien  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$  (correspondiente al Ejemplo 3.3.2).  $\square$

**Proposición 3.3.8** *Las inmersiones dobles de Veronese de  $\mathbb{P}^2$  en una Grassmanniana de rectas vienen dadas por:*

- (i) *el fibrado vectorial  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ ;*
- (ii) *el fibrado vectorial  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ ;*
- (iii) *las rectas bisecantes a una cúbica alabeada  $C \subset \mathbb{P}^3$ , es decir,  $\mathcal{E}$  es el conúcleo de una aplicación  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{\oplus 4}$ ; o*
- (iv) *las rectas de una cuádrica lisa  $Q \subset \mathbb{P}^4$  que cortan a una recta  $L \subset Q$ , es decir,  $\mathcal{E}$  es la restricción a un plano de  $\mathbb{P}^3$  del conúcleo de una aplicación  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^3}(2)$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{E}$  el fibrado vectorial de rango 2 que da la inmersión de  $X = \mathbb{P}^2$  en una Grassmanniana de rectas  $\mathbb{G}(1, N)$ . Consideremos la restricción  $\mathcal{E}|_L = \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_L$  a una recta  $L \subset \mathbb{P}^2$ .  $\mathcal{E}|_L$  da una inmersión doble de Veronese de  $L$  luego por el Lema 3.3.7 se tiene que  $\mathcal{E}|_L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$  o bien  $\mathcal{E}|_L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ . En particular el tipo de escisión de  $\mathcal{E}$  es  $\mathbf{a}_{\mathcal{E}} = (2, 0)$  ó  $(1, 1)$ .

Si el tipo de escisión  $\mathbf{a}_{\mathcal{E}}$  es  $(2, 0)$  entonces  $\mathcal{E}$  no puede tener rectas de salto puesto que la restricción  $\mathcal{E}|_L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_2)$  con  $a_2 < 0$  a una recta  $L \subset \mathbb{P}^2$  no da una inmersión en virtud del Lema 3.3.7. Por tanto el fibrado  $\mathcal{E}$  es uniforme. Se sigue del Teorema 3.2.3 que  $\mathcal{E}$  escinde o bien  $\mathcal{E} = \mathcal{T}_{\mathbb{P}^2}(m)$ . Como  $c_1(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^2}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)$ , en el segundo caso  $\bigwedge^2 \mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3 + 2m)$  tiene grado impar para cualquier  $m \in \mathbb{Z}$  luego no puede dar una inmersión doble de Veronese de  $\mathbb{P}^2$ . Por consiguiente  $\mathcal{E}$  escinde y  $\mathbf{a}_{\mathcal{E}} = (2, 0)$ , luego necesariamente  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$  y  $X$  corresponde al Ejemplo 3.3.1 con  $n = 2$ , es decir, el caso (i).

Si por el contrario es  $\mathbf{a}_{\mathcal{E}} = (1, 1)$ , para una recta de  $L \in \mathcal{J}$  se tiene  $\mathcal{E}|_L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$  y  $L$  está inmersa en  $\mathbb{G}(1, N)$  como las generatrices de un cono cuádrico de  $\mathbb{P}^3$ . Distingamos dos casos dependiendo de la codimensión de  $\mathcal{J}$  en  $\mathbb{G}(1, 2)$ .

(a)  $\text{codim}_{\mathbb{G}(1,2)} \mathcal{J} > 1$ .

En este caso  $\mathcal{E}$  tiene un número finito de rectas de salto, luego por un punto general  $x \in \mathbb{P}^2$  no pasan rectas de salto, lo cual significa que  $\mathcal{E}|_L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$  para cada recta  $L$  que pase por  $x$ . Por el Teorema 3.2.4 obtenemos  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$  y concluimos que  $\mathcal{E}$ , da la inmersión doble de Veronese del Ejemplo 3.3.2 cuando  $n = 2l$ , es decir, el caso (ii).

(b)  $\text{codim}_{\mathbb{G}(1,2)} \mathcal{J} = 1$ .

Nuevamente  $\mathcal{E}$  da una inmersión de  $\mathbb{P}^2$  en  $\mathbb{G}(1, N)$ , y cada  $l \in \mathcal{J}$  se sumerge en  $\mathbb{G}(1, 3)$  como las generatrices de un cono cuádrico.

Por tanto para cada componente de unidimensional de  $\mathcal{J} \subset \mathbb{G}(1, 2)$ , existe una curva fundamental  $C \subset \mathbb{P}^N$ , es decir, una curva cortada por todas las rectas de la superficie, correspondiente a los vértices de los conos.

El número de puntos fundamentales de  $C$  contenidos en una recta general de  $X$  no puede ser mayor que 2 por el Lema de las Trisecantes 0.1.5, luego se satisface exclusivamente una de las siguientes posibilidades:

1.  $\mathbb{P}^2$  se sumerge en  $\mathbb{G}(1, N)$  como la familia de rectas bisecantes a la curva  $C \subset \mathbb{P}^N$ .
2.  $C$  es una recta de  $X$  contenida en todos los conos cuádricos correspondientes a la citada componente de  $\mathcal{J}$ .

En el primer caso las rectas bisecantes que pasan por un punto general  $c \in C$  dan lugar a un cono cuádrico correspondiente a una  $l \in \mathcal{J}$ . En particular  $\langle C \rangle = \mathbb{P}^3$  y su proyección interna desde un punto general es una cónica lisa, luego  $C$  es una cúbica alabeada de  $\mathbb{P}^3$  y  $X$  resulta ser la superficie de Veronese del Ejemplo 3.3.3. Nótese que  $\mathcal{J} \subset \mathbb{G}(1, 2)$  es una cónica inmersa como la familia de rectas tangentes a una cónica lisa de  $\mathbb{P}^2$ , es decir, la proyección general del Ejemplo 3.3.2 con  $n = 1$ . Esta cónica de  $\mathbb{P}^2$  se sumerge en  $\mathbb{G}(1, 3)$  como la desarrollable tangencial de la cúbica alabeada  $C \subset \mathbb{P}^3$  y estamos en el caso (iii).

Si por el contrario  $C$  es una recta, que además pertenece a  $X$ , veamos que el bigrado  $(a, b)$  de la superficie inmersa debe ser  $(2, 2)$ . Para calcular la clase  $b$  de  $X$  debemos intersecar  $[X]$  con el ciclo de Schubert  $\Omega(N - 2, N - 1)$ , es decir, tenemos que encontrar el número de rectas de  $X$  contenidas en un hiperplano general  $H$  de  $\mathbb{P}^N$ . Ahora bien,  $H$  contiene exactamente dos rectas de  $X$  por cada cono cuádrico que pasa por  $H \cap C$  correspondiente a una  $l \in \mathcal{J}$ , luego necesariamente  $b = 2$ . Como  $X$  es una superficie de Veronese su grado es 4, lo cual equivale a decir  $a + b = 4$ , y en consecuencia  $a = 2$ . Por tanto  $\overline{X}$  es una cuádrlica  $Q \subset \mathbb{P}^4$  si  $\mu(X) = 1$  o bien un  $\mathbb{P}^3$  si  $\mu(X) = 2$ . El segundo caso no puede darse ya que no existe una superficie de Veronese en  $\mathbb{G}(1, 3)$  de bigrado  $(2, 2)$  puesto que no satisface la fórmula de puntos

dobles  $a^2 + b^2 = 3(a + b) + 4(2g_X - 2) + 2K_X^2 - 12\chi(\mathcal{O}_X)$  de superficies lisas en  $\mathbb{G}(1, 3)$ .

Comprobemos que  $Q$  es lisa en el primer caso. De lo contrario  $Q$  es una cuádrica de rango 2 ó 3 y en particular contiene una familia de planos. Como  $\mu(X) = 1$  por el punto general de  $Q$  pasa una única recta de  $X$ , luego para un plano  $\Pi$  de la familia se tiene que  $X \cap \mathbb{G}(1, \Pi) = \Omega(P, \Pi)$ , lo cual es absurdo ya que la superficie de Veronese no contiene rectas.

De los razonamientos anteriores se concluye que  $X$  es el conjunto de rectas de una cuádrica lisa  $Q \subset \mathbb{P}^4$  que cortan a una recta de  $Q$ . Esta es la superficie de Veronese del Ejemplo 3.3.5 y se cumple el caso (iv). Observamos que  $\mathcal{J} \subset \mathbb{G}(1, 2)$  es un haz  $\Omega(P, \mathbb{P}^2)$ , cuyo punto base  $P$  se corresponde con la recta  $l_p \in X$  a la que todas cortan.  $\square$

### 3.4 Teorema de clasificación

En esta sección clasificamos todas las inmersiones dobles de Veronese  $X$  de  $\mathbb{P}^n$  en una Grassmanniana de rectas  $\mathbb{G}(1, N)$ . El resultado es que los ejemplos presentados hasta ahora dan todas las posibles inmersiones. Al igual que en la sección anterior supondremos siempre  $X \subset \mathbb{G}(1, N)$  linealmente normal.

**Teorema 3.4.1** *Sea  $X$  una inmersión doble de Veronese de  $\mathbb{P}^n$  en  $\mathbb{G}(1, N)$ . Se verifica una de las siguientes posibilidades:*

- (i)  $X \hookrightarrow \mathbb{G}(1, \binom{n+2}{2})$  por medio del fibrado vectorial  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ ;
- (ii)  $X \hookrightarrow \mathbb{G}(1, 2n + 1)$  por medio del fibrado vectorial  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ ;
- (iii)  $n = 2$  y  $X \subset \mathbb{G}(1, 3)$  es la familia de rectas bisecantes a una cúbica alabeada  $C \subset \mathbb{P}^3$  y el fibrado  $\mathcal{E}$  que da la inmersión es el conúcleo de una aplicación  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{\oplus 4}$ ;
- (iv)  $n = 3$  y  $X \subset \mathbb{G}(1, 4)$  es la familia de rectas contenidas en una cuádrica lisa  $Q \subset \mathbb{P}^4$  y el fibrado  $\mathcal{E}$  que da la inmersión es el conúcleo de la aplicación  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^3}(2)$  correspondiente a la elección de una sección de  $\Omega_{\mathbb{P}^3}(2)$ ;
- (v)  $n = 2$  y  $X \subset \mathbb{G}(1, 4)$  es la restricción de (iv) a un plano  $\Pi$  de  $\mathbb{P}^3$ . Geométricamente es el conjunto de rectas de  $Q$  que cortan a una recta de  $Q$ .

*Demostración.* Denotamos por  $\mathcal{E}$  al fibrado vectorial de rango 2 que da la inmersión doble de Veronese de  $\mathbb{P}^n$  en  $\mathbb{G}(1, N)$ . Recordemos que  $\mathcal{E} \cong \mathcal{Q}_{|\mathcal{X}}$ . La restricción

$\mathcal{E}|_L = \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_L$  a una recta  $L \subset \mathbb{P}^n$  sumerge  $L \cong \mathbb{P}^1$  de alguna de las dos formas que vimos en el Lema 3.3.7. Sea  $\mathcal{J} \subset \mathbb{G}(1, n)$  el conjunto de las rectas de salto de  $\mathcal{E}$ .

Supongamos que el tipo de escisión de  $\mathcal{E}$  es  $\mathbf{a}_{\mathcal{E}} = (2, 0)$ . Entonces  $\mathcal{J} = \emptyset$  y  $\mathcal{E}$  debe ser necesariamente uniforme. Por el Teorema 3.2.3,  $\mathcal{E}$  escinde o bien  $n = 2$  y  $\mathcal{E} = \mathcal{T}_{\mathbb{P}^2}(m)$  para un cierto  $m \in \mathbb{Z}$ .

La segunda posibilidad no puede darse por la Proposición 3.3.8, luego  $\mathcal{E}$  escinde,  $\mathbf{a}_{\mathcal{E}} = (2, 0)$  y entonces  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$  verificándose (i).

Si  $\mathbf{a}_{\mathcal{E}} = (1, 1)$ , para cada  $l \in \mathcal{J}$  debe ser  $\mathcal{E}|_l = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ , es decir,  $L \cong \mathbb{P}^1$  se sumerge en  $\mathbb{G}(1, 3)$  como las generatrices de un cono cuádrico.

Al igual que en la prueba de la Proposición 3.3.8 distingamos dos casos dependiendo de la codimensión de  $\mathcal{J}$  en  $\mathbb{G}(1, n)$ :

(a)  $\text{codim}_{\mathbb{G}(1, n)} \mathcal{J} > 1$ .

Tomemos un plano  $\Pi \subset \mathbb{P}^n$  y consideremos la restricción  $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{\Pi}$ .  $\mathcal{E}'$  da una inmersión doble de Veronese de  $\mathbb{P}^2$  con un número finito de rectas de salto  $\mathcal{J}' = \mathcal{J} \cap \mathbb{G}(1, \Pi)$ .

Atendiendo a la Proposición 3.3.8 se sigue que  $\mathcal{J}' = \emptyset$  y que  $\mathcal{E}'$  escinde. Por el Teorema 3.2.5 se tiene que  $\mathcal{E}$  también escinde, luego se concluye que  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$  cumpliéndose (ii).

(b)  $\text{codim}_{\mathbb{G}(1, n)} \mathcal{J} = 1$ . Es decir  $\dim \mathcal{J} = 2n - 3$ , luego por el punto general  $P \in \mathbb{P}^n$  pasa una familia  $(n - 2)$ -dimensional de rectas de  $\mathcal{J}$ .

Esto es equivalente a decir que la recta general  $l_P \in X$  está contenida en una familia  $(n - 2)$ -dimensional de conos cuádricos, donde  $l_P \in X$  denota la recta correspondiente al punto  $P$  por la inmersión. En particular la recta general  $l_P$  corta a una familia  $(n - 1)$ -dimensional de rectas de  $X$ .

Por consiguiente, o bien existe un punto en  $l_P$  por el que pasa dicha familia  $(n - 1)$ -dimensional, o bien por el punto general de  $l_P$  pasa una familia  $(n - 2)$ -dimensional de rectas de  $X$ .

En el primer caso existe una curva fundamental  $C \subset \mathbb{P}^N$  tal que por el punto general  $c \in C$  pasa una familia  $(n - 1)$ -dimensional de rectas de  $X$ , es decir, un divisor de  $X \cong \mathbb{P}^n$ .

Por dos puntos  $c_1, c_2 \in C$  pasan dos divisores de  $\mathbb{P}^n$  que se cortan exclusivamente en el punto de  $\mathbb{P}^n$  correspondiente a la recta  $\langle c_1, c_2 \rangle$  de  $X$ , luego necesariamente  $n = 2$  y la clasificación se sigue de la Proposición 3.3.8, obteniendo (iii) y (v).

En el segundo caso, por el punto general de  $\overline{X} \subset \mathbb{P}^N$  pasa una familia  $(n - 2)$ -dimensional de rectas de  $X$ , luego  $\dim \overline{X} = n + 1 - (n - 2) = 3$ . En particular

$\overline{X} \subset \mathbb{P}^N$  es una variedad de dimensión 3 que contiene una familia de dimensión al menos 3 de rectas. Por el Teorema 0.1.2,  $\overline{X}$  es un  $\mathbb{P}^3$ , una cuádrica lisa de  $\mathbb{P}^4$  o un scroll de planos. Como  $v_2(\mathbb{P}^3)$  no se puede proyectar isomórficamente a  $\mathbb{P}^5$ , no puede ser  $\overline{X} = \mathbb{P}^3$ . Por otro lado  $\overline{X}$  no puede ser un scroll de planos ya que entonces  $X$  sería un scroll de  $\beta$ -planos, lo cual es absurdo. En definitiva  $\overline{X}$  es necesariamente una cuádrica lisa  $Q \subset \mathbb{P}^4$  y se cumple (iv). En este caso  $\mathcal{J} \subset \mathbb{G}(1, 3)$  es una sección hiperplana de  $\mathbb{G}(1, 3)$ . Además cada  $L \in \mathcal{J}$  se corresponde con un  $\mathbb{P}^3$  tangente a  $Q$ , que corta a  $Q$  a lo largo de un cono cuádrico cuyas generatrices dan la inmersión de  $L$ .  $\square$

**Observación 3.4.2** Los fibrados vectoriales  $\mathcal{E}$  que dan la inmersión de  $\mathbb{P}^2$  y  $\mathbb{P}^3$  como congruencias de  $\mathbb{G}(1, 3)$  y  $\mathbb{G}(1, 4)$  en los Ejemplos 3.3.3 y 3.3.4 respectivamente no escinden como suma directa de fibrados lineales.

La clasificación completa de congruencias lisas en  $X \subset \mathbb{G}(1, n+1)$  con fibrado universal cociente  $\mathcal{Q}_{|X}$  escindido puede consultarse en [4] y [19] para  $n=2$  y  $n=3$  respectivamente.

**Observación 3.4.3** En [39], H. Tango clasificó las congruencias  $X \subset \mathbb{G}(1, n+1)$  con  $X \cong \mathbb{P}^n$ . Hay exactamente cuatro posibilidades: las *estrellas de rectas* (que se sumergen como espacios proyectivos después de la inmersión de Plücker), los Ejemplos 3.3.3 y 3.3.4, y la proyección a  $\mathbb{G}(1, n+1)$  del Ejemplo 3.3.2 (que son inmersiones dobles de Veronese vía Plücker). Como corolario de nuestra clasificación resulta que *todas* las inmersiones dobles de Veronese excepto aquéllas de los Ejemplos 3.3.1 y 3.3.5 caben en una  $\mathbb{G}(1, n+1)$ .

Finalmente establecemos el resultado en conexión con la Conjetura de Hartshorne citado en la Introducción.

**Corolario 3.4.4** *Los fibrados vectoriales de rango 2 sobre  $\mathbb{P}^n$  que dan una inmersión doble de Veronese de  $\mathbb{P}^n$  escinden si  $n \geq 4$ .*



# Capítulo 4

## Superficies en $\mathbb{P}^4$ con una familia de curvas planas

### 4.1 Introducción

Un teorema de C. Segre afirma que las únicas superficies no degeneradas en  $\mathbb{P}^N$ , con  $N \geq 4$ , que contienen una familia bidimensional de curvas planas son la superficie de Veronese  $v_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$ , el scroll racional normal  $S(1, 2) \subset \mathbb{P}^4$  y los conos (véase [13]).

En [27] y [8] A. Lanteri y A. Aure estudiaron scrolls en  $\mathbb{P}^4$ , es decir, superficies lisas con una familia de rectas. El resultado es que hay exactamente dos scrolls, el scroll racional normal  $S(1, 2)$  y el scroll elíptico de grado 5, que denotaremos  $E_5$ .

Posteriormente, P. Ellia y G. Sacchiero mostraron en [15] que si  $S$  es una superficie lisa en  $\mathbb{P}^4$  fibrada en cónicas, entonces  $S$  es la superficie de Del Pezzo de grado 4, la superficie de Castelnuovo de grado 5 o la fibración en cónicas sobre una curva elíptica de grado 8 descubierta por H. Abo, W. Decker y N. Sasakura en [2]. El mismo resultado fue obtenido independientemente en [10] por R. Braun y K. Ranestad de forma más geométrica.

Finalmente, K. Ranestad probó en [31] que si  $S$  es una fibración por curvas planas de grado mayor que 2, entonces  $S$  es bielíptica o abeliana de grado 10 o bien  $S$  está contenida en un cono cuádrico de rango 4.

En este capítulo estudiamos superficies lisas  $S \subset \mathbb{P}^4$  que contengan una familia unidimensional de curvas planas que no formen una fibración, es decir, tales que dos curvas generales de la familia se corten. Nuestro resultado, bajo dos hipótesis adicionales, es que  $S$  es el scroll elíptico  $E_5$  de grado 5, la superficie de Veronese

$v_2(\mathbb{P}^2)$  proyectada, el scroll racional normal  $S(1, 2)$  o bien  $S$  está contenida en un cono cuádrico de rango 3 ó 4 y ligada a un plano por una intersección completa.

Al igual que en el capítulo anterior, este problema fue propuesto durante la escuela internacional PRAGMATIC 2002 por el profesor F.L. Zak. A pesar de que se trata de un problema de geometría algebraica proyectiva clásica, sorprendentemente está estrechamente relacionado con proyecciones lineales y variedades secantes en una Grassmanniana de rectas, como quedará de manifiesto más adelante.

## Notación

Denotamos por  $S$  una superficie no degenerada, lisa e irreducible de  $\mathbb{P}^4$  y equipada con una familia algebraica de curvas planas, que no necesariamente son irreducibles. Denotamos por  $C$  a una curva de la familia.

Sea  $\Sigma \subset \mathbb{G}(2, 4)$  la curva en la Grassmanniana que parametriza las curvas planas  $C$  y sea  $V_\Sigma \subset \mathbb{P}^4$  la hipersuperficie envuelta por los planos de  $\Sigma$ .

Dos curvas planas de la familia son algebraicamente equivalentes, en particular numéricamente equivalentes (véase [23] V, Ex. 1.7), luego podemos definir el número  $C^2$  para expresar la intersección de dos curvas planas de la familia.

El caso  $C^2 = 0$  en que las curvas forman una fibración fue estudiado por los autores citados en la introducción, así que sólo consideraremos el caso  $C^2 \geq 1$ .

Sea  $\check{\Sigma} \subset \mathbb{G}(1, 4)$  la curva dual de  $\Sigma$  en la Grassmanniana de rectas en  $\mathbb{P}^4$ .  $S_{\check{\Sigma}} \subset \check{\mathbb{P}}^4$  denotará la superficie cubierta por las rectas de  $\check{\Sigma}$ .

Con  $\Sigma^{(2)}$  denotaremos el segundo producto simétrico de  $\Sigma$ .

Como de costumbre, para  $a_i \geq 0$ , denotamos por  $S(a_0, \dots, a_n) \subset \mathbb{P}^{a_0 + \dots + a_n + n}$  el scroll racional normal de  $n$ -planos.

## 4.2 Ejemplos

En esta sección se presentan los ejemplos conocidos de superficies en  $\mathbb{P}^4$  que contienen una familia de curvas planas.

**Ejemplo 4.2.1** Consideremos  $\mathbb{P}^2$  y una curva  $\Sigma \subset \check{\mathbb{P}}^2$  de grado  $d$ , es decir, una familia de rectas de  $\mathbb{P}^2$  tal que por el punto general de  $\mathbb{P}^2$  pasan  $d$  rectas. Sea  $v_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$  la superficie de Veronese. Esta superficie puede ser isomórficamente proyectada a  $\mathbb{P}^4$  desde un punto general  $P \in \mathbb{P}^5$ . La familia  $\Sigma$  da en  $\mathbb{P}^5$  una familia de cónicas en  $v_2(\mathbb{P}^2)$  y, considerando los planos que contienen a las cónicas, podemos ver  $\Sigma$  como una curva en  $\mathbb{G}(2, 5)$ . Entonces  $v_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$ , o su proyección a  $\mathbb{P}^4$ , es

una superficie con una familia de cónicas correspondiente a  $\Sigma$ ,  $C^2 = 1$  y por el punto general de  $v_2(\mathbb{P}^2)$  pasan  $d$  cónicas de la familia.

En particular, cuando  $d = 1$  (correspondiente al caso en que  $\Sigma \subset \check{\mathbb{P}}^2$  es un haz de rectas por un punto) la curva  $\Sigma \subset \mathbb{G}(2, 5)$  es una cúbica alabeada vía la inmersión de Plücker y  $V_\Sigma \subset \mathbb{P}^5$  es el scroll racional normal  $S(0, 1, 2)$ . En este caso todas las cónicas se cortan en el mismo punto.

Si  $d = 2$  (correspondiente al caso en que  $\Sigma \subset \check{\mathbb{P}}^2$  es la curva dual de una cónica), por el punto general  $P \in \mathbb{P}^5$  pasa una familia unidimensional  $\mathbb{P}^4$ 's generados por dos planos de  $\Sigma \subset \mathbb{G}(2, 5)$ . Por tanto, cuando proyectamos  $v_2(\mathbb{P}^2)$  desde  $P$  obtenemos que el plano general de  $\Sigma \subset \mathbb{G}(2, 4)$  es intersecado por otro plano de  $\Sigma$  en una recta.

**Ejemplo 4.2.2** Consideremos  $\mathbb{P}^2$  y una curva  $\Sigma \subset \check{\mathbb{P}}^2$  de grado  $d$ . Fijemos un punto  $P \in \mathbb{P}^2$  y consideremos el sistema lineal completo de cónicas que pasan por  $P$ . Su imagen en  $\mathbb{P}^4$  resulta ser el scroll racional normal  $S(1, 2) \subset \mathbb{P}^4$ . Las rectas  $l \in \Sigma$  que no pasan por  $P$  se transforman en cónicas  $C = v_2(L)$ , mientras que las  $d$  rectas de  $\Sigma$  que pasan por  $P$  se transforman en cónicas degeneradas, o más precisamente, en un par de rectas que se cortan. Nuevamente podemos pensar en  $\Sigma \subset \mathbb{G}(2, 4)$  como la familia de planos que contienen dichas cónicas. En definitiva  $S(1, 2) \subset \mathbb{P}^4$  es una superficie con una familia de cónicas correspondiente a  $\Sigma$ ,  $C^2 = 1$  y por el punto general de  $S(1, 2)$  pasan  $d$  cónicas de la familia.

Cuando  $d = 1$  (correspondiente al caso en que  $\Sigma \subset \check{\mathbb{P}}^2$  es un haz de rectas por un punto),  $\Sigma \subset \mathbb{G}(2, 4)$  es una cónica vía la inmersión de Plücker y  $V_\Sigma \subset \mathbb{P}^4$  es un cono cuádrico. Todas las cónicas se cortan en el vértice de dicho cono.

Si  $d = 2$  (correspondiente al caso en que  $\Sigma \subset \check{\mathbb{P}}^2$  es la curva dual de una cónica),  $\Sigma \subset \mathbb{G}(2, 4)$  es una cuártica racional normal vía la inmersión de Plücker. En este caso  $S_\Sigma \subset \check{\mathbb{P}}^4$  es la proyección de  $S(2, 2) \subset \mathbb{P}^5$ , cuyo punto doble se corresponde por dualidad con el par de rectas de  $\Sigma \subset \check{\mathbb{P}}^2$  que pasan por el punto que estamos explotando. Estas dos rectas dan lugar a dos planos de  $\Sigma$  que se cortan en la recta excepcional de la explosión.

**Ejemplo 4.2.3** Denotemos por  $E_5$  el scroll elíptico de grado 5 en  $\mathbb{P}^4$ . Recordemos brevemente una forma sencilla de describirlo. Sea  $p : \mathbb{G}(1, 4) \hookrightarrow \mathbb{P}^9$  la inmersión de Plücker. La intersección de  $\mathbb{G}(1, 4)$  con un  $\mathbb{P}^4$  general de  $\mathbb{P}^9$  es una curva elíptica de grado 5 que denotamos  $C_5$  y consideremos la superficie reglada  $E_5 \subset \mathbb{P}^4$  correspondiente a la curva  $p^{-1}(C_5) \subset \mathbb{G}(1, 4)$ . Esta superficie es precisamente el scroll elíptico que aparece en las clasificaciones de [27] y [8].

Dos rectas  $L_1, L_2 \subset E_5$  generan un  $\mathbb{P}^3$  cuya intersección residual con  $E_5$  es una curva elíptica plana  $C$  de grado 3. De este modo se obtiene una familia unidimensional de curvas planas en  $E_5$  y, como la sección hiperplana de  $E_5$  es  $H = C + 2L$

y  $H^2 = C^2 + 4C \cdot L = 5$ , se tiene que  $C^2 = 1$ . Además la curva  $\Sigma \subset \mathbb{G}(2, 4)$  que parametriza estas curvas planas es precisamente la curva quíntica elíptica  $C_5 \subset \mathbb{P}^4$  vía la inmersión de Plücker (véase [10]). Por tanto,  $S_\Sigma \subset \mathbb{P}^4$  es de nuevo  $E_5$ .

**Ejemplo 4.2.4** Sea  $V_\Sigma = S(0, 1, 1) \subset \mathbb{P}^4$  un cono cuádrico de rango 4 y  $\Sigma \subset \mathbb{G}(2, 4)$  la correspondiente cónica que parametriza una de las dos familias de planos contenidas en  $V_\Sigma$ . Sea  $Q \in \mathbb{P}^4$  el vértice del cono. Consideremos  $S \subset \mathbb{P}^4$  la superficie lisa ligada a un plano de  $V_\Sigma$  de la otra familia por la intersección completa con una hipersuperficie de  $\mathbb{P}^4$  de grado  $e$ . Entonces los planos de  $\Sigma$  contienen una curva  $C$  de grado  $e$  y todas pasan por  $Q$ , luego  $C^2 = 1$ .

Para ilustrar esta construcción centrémonos en los casos  $e = 2$  y  $e = 3$ . Cuando  $e = 2$  lo que obtenemos es precisamente el scroll racional normal  $S(1, 2) \subset \mathbb{P}^4$  del Ejemplo 4.2.2 con  $d = 1$ .

Si por el contrario  $e = 3$ , lo que obtenemos es la superficie de Castelnuovo de  $\mathbb{P}^4$ , es decir, la explosión de  $\mathbb{P}^4$  en 8 puntos  $P_0, \dots, P_7$  inmersa por el sistema lineal completo  $|4L - 2E_0 - E_1 \dots - E_7|$ . Las cúbicas planas por los 8 puntos se transforman en curvas  $C = 3L - E_0 - E_1 \dots - E_7$ , que son cúbicas planas de la superficie de Castelnuovo y todas ellas se intersecan precisamente en el vértice  $Q$ , que se corresponde con el punto base extra del sistema lineal de cúbicas por 8 puntos (véase [23] V, Corollary 4.5).

**Ejemplo 4.2.5** Sea  $V_\Sigma = S(0, 0, 2) \subset \mathbb{P}^4$  un cono cuádrico de rango 3 y  $\Sigma \subset \mathbb{G}(2, 4)$  la correspondiente cónica que parametriza la familia de planos de  $V_\Sigma$ . Sea  $L \subset \mathbb{P}^4$  el vértice del cono. Consideremos  $S \subset \mathbb{P}^4$  la superficie lisa ligada a un plano de  $\Sigma$  por la intersección completa con una hipersuperficie de  $\mathbb{P}^4$  de grado  $e$ . Los planos de  $\Sigma$  contienen una curva  $C$  de grado  $e$  y veamos que  $C^2 = 1$ .

En primer lugar se tiene  $L \subset S$  (véase Proposición 4.4.2). Entonces  $C_i = L + D_i$  donde  $D_i$  es una curva plana de grado  $e - 1$ . Sea  $H$  una sección hiperplana de  $S$  que contiene a  $L$ . Claramente  $H^2 = 2e - 1$  y un cálculo elemental, teniendo en cuenta que necesariamente  $D_i \cdot D_j = 0$ , muestra que  $L^2 = 3 - 2e$  y  $C^2 = 1$ .

Nuevamente analicemos los casos  $e = 2$  y  $e = 3$ . Cuando  $e = 2$  simplemente estamos considerando el Ejemplo 4.2.2 en el caso  $d = 1$  siendo  $\Sigma \subset \check{\mathbb{P}}^2$  el haz de rectas por el punto que estamos explotando.

Si  $e = 3$  obtenemos otra vez la superficie de Castelnuovo  $\mathbb{P}^4$  en el caso particular en que  $P_1, \dots, P_7$  están contenidos en una cónica. Esta cónica se transforma en la recta  $L$ , que es el vértice del cono  $V_\Sigma$ .

**Observación 4.2.6** En el Ejemplo 4.2.5 obtenemos dos familias de curvas planas en  $S$ , digamos  $C$ 's y  $D$ 's dependiendo de si  $L$  se considera contenida o no en la

curva. Entonces,  $C^2 = 1$  pero  $D^2 = 0$ , luego en este último caso las curvas  $D$  dan una fibración de  $S$ . Quisiéramos reseñar que esta construcción en el cono cuádrico de rango 3 no fue considerada por K. Ranestad en [31].

### 4.3 El resultado principal

Sea  $S \subset \mathbb{P}^4$  una superficie lisa con una familia de curvas planas parametrizada por  $\Sigma \subset \mathbb{G}(2, 4)$ . Comencemos analizando la curva  $\Sigma$ .

**Caso 1.** Si dos planos generales de  $\Sigma$  se cortan a lo largo de una recta, entonces se sigue del Lema 0.2.8 que, o bien todos los planos de  $\Sigma$  están contenidos en un  $\mathbb{P}^3$  (en cuyo caso  $S$  sería degenerada) o bien todos los planos contienen una recta  $L \subset \mathbb{P}^4$  y en consecuencia  $V_\Sigma \subset \mathbb{P}^4$  es un cono de vértice  $L$ . A priori, debemos distinguir dos casos:

- 1.1.  $L$  está contenida en  $S$ .
- 1.2.  $L$  no está contenida en  $S$ .

**Caso 2.** Si por el contrario dos planos generales de  $\Sigma$  se cortan en un punto, entonces dicho punto necesariamente debe estar contenido en  $S$ . Además en este caso  $C^2 = 1$ . Distingamos de nuevo dos posibilidades:

2.1. Si dos planos generales de  $\Sigma$  se cortan en un punto fijo  $Q$ , entonces  $V_\Sigma \subset \mathbb{P}^4$  es un cono de vértice  $Q$ .

2.2. Si la intersección de dos planos de  $\Sigma$  no es fija, entonces  $S$  se obtiene considerando la clausura de los puntos de intersección de los pares de planos que se cortan en un punto. En particular, esto implica que por el punto general de  $S$  pasan al menos dos planos de  $\Sigma$ .

Otra vez debemos considerar dos casos separadamente:

- 2.2.1. Por el punto general  $P \in S$  pasan exactamente dos planos de  $\Sigma$ .
- 2.2.2. Por el punto general  $P \in S$  pasan más de dos planos de  $\Sigma$ .

Antes de continuar con nuestro resultado, señalemos claramente las dos hipótesis adicionales que necesitaremos para actuar en el Caso 2.2.

#### Hipótesis adicionales en el Caso 2.2:

- (1) Supondremos que por el punto general de  $S$  pasan exactamente dos curvas planas de la familia, es decir, no consideraremos el Caso 2.2.2 anterior.
- (2) Supondremos también que el plano general de  $\Sigma$  no sólo no es cortado a lo

largo de una recta por otro plano de  $\Sigma$  distinto, sino que tampoco es cortado a lo largo de una recta por el plano infinitamente próximo.

Explicuemos con más precisión la segunda condición. Decimos que un plano  $\pi \in \Sigma$  es cortado por el plano infinitamente próximo a lo largo de una recta cuando la recta tangente a  $\Sigma$  en  $\pi$  vía la inmersión de Plücker está contenida en la Grassmanniana.

Bajo estas condiciones, el resultado central que obtendremos en este capítulo será el siguiente:

**Teorema 4.3.1** *Sea  $S \subset \mathbb{P}^4$  una superficie lisa cubierta por una familia algebraica  $\Sigma$  de curvas planas  $C$ . Supongamos que  $C^2 \geq 1$  y que las condiciones adicionales (1) y (2) se satisfacen. Entonces ocurre alguna de las siguientes posibilidades:*

(i)  *$S$  está contenida en un cono cuádrico de rango 3 y ligada a un plano por una intersección completa;*

(ii)  *$S$  está contenida en un cono cuádrico de rango 4 y ligada a un plano por una intersección completa;*

(iii)  *$S$  es la proyección a  $\mathbb{P}^4$  de la superficie de Veronese  $v_2(\mathbb{P}^2)$ , el scroll racional normal  $S(1, 2)$  o el scroll elíptico  $E_5$  de grado 5.*

*En particular siempre se cumple que  $C^2 = 1$ .*

Antes de pasar a la demostración de este resultado veamos en qué casos se dan las superficies que aparecen en él.

Las superficies obtenidas en (i) proceden de considerar el Caso 1 en que dos planos generales de  $\Sigma$  se cortan en una recta.

Por otro lado, las superficies que aparecen en (ii) proceden de considerar el Caso 2.1 en que dos planos generales de  $\Sigma$  se cortan en un punto fijo.

La superficie de Veronese proyectada que aparece en (iii) y cumple las condiciones (1) y (2) procede de considerar  $d = 1$  en el Ejemplo 4.2.1 y, por tanto, estamos en el Caso 2.1. El scroll racional que cumple las condiciones (1) y (2) procede de considerar  $d = 1$  ó  $d = 2$  en el Ejemplo 4.2.2. Si  $d = 1$  estamos en el Caso 2.1, mientras que si  $d = 2$  estamos en el Caso 2.2.1. Finalmente el scroll elíptico aparece también en el Caso 2.2.1.

Hasta ahora no hemos sido capaces de suprimir las condiciones (1) y (2), aunque pensamos que realmente son superfluas. Por supuesto, como ya señalamos en el Ejemplo 4.2.1, la proyección a  $\mathbb{P}^4$  de la superficie de Veronese  $v_2(\mathbb{P}^2)$  del Ejemplo 4.2.1 con  $d = 2$  satisface que el plano general de  $\Sigma$  es cortado por otro plano a lo largo de una recta, luego (2) no se cumple.

Por otro lado los Ejemplos 4.2.1 y 4.2.2 no satisfacen (1) cuando consideramos  $d \geq 3$  ya que por el punto general de  $v_2(\mathbb{P}^2)$  y  $S(1, 2)$  pasan  $d$  cónicas de la familia  $\Sigma$ . En estos casos en realidad tenemos una familia de dimensión 2 de cónicas cubriendo la superficie. Por tanto, parece razonable hacer la siguiente conjetura:

**Conjetura 4.3.2** *Si  $S \subset \mathbb{P}^4$  es una superficie lisa cubierta por una familia algebraica  $\Sigma$  de curvas planas  $C$  tal que por el punto general de  $S$  pasan más de dos curvas planas de la familia, entonces  $S$  es la proyección a  $\mathbb{P}^4$  de la superficie de Veronese  $v_2(\mathbb{P}^2)$  o el scroll racional normal  $S(1, 2)$ .*

El resto del capítulo está dedicado a la demostración del Teorema 4.3.1, para lo cual haremos la división en dos casos dependiendo de si  $V_\Sigma$  es un cono o no.

## 4.4 $V_\Sigma$ es un cono

Esta sección esté dedicada a los Casos 1 y 2.1 citados anteriormente en los que  $V_\Sigma \subset \mathbb{P}^4$  es un cono de vértice una recta o un punto respectivamente.

Comenzamos estudiando la curva  $\Sigma \subset \mathbb{G}(2, 4)$ . En el lema siguiente probamos que si  $V_\Sigma$  es un cono entonces  $\Sigma$  es racional.

**Lema 4.4.1** *Si  $V_\Sigma \subset \mathbb{P}^4$  es un cono, entonces  $\Sigma \subset \mathbb{G}(2, 4)$  es una curva racional.*

*Demostración.* Sea  $\Sigma \subset \mathbb{G}(2, 4)$  la curva que parametriza las curvas planas  $C$  y  $V_\Sigma \subset \mathbb{P}^4$  la hipersuperficie cubierta por los planos de  $\Sigma$ . En la variedad de incidencia en  $\mathbb{P}^4 \times \mathbb{G}(2, 4)$  entre puntos y planos, existe una fibración de  $\mathbb{P}^2$ 's, que denotamos  $U_\Sigma$ , sobre  $\Sigma$  cuya proyección a  $\mathbb{P}^4$  es  $V_\Sigma$ . Tenemos entonces el siguiente diagrama de incidencia:

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{S} \subset U_\Sigma & \\ & \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow & \\ p & & \\ S \subset V_\Sigma & & \Sigma \end{array}$$

donde  $U_\Sigma = \{(P, \pi) \mid P \in \pi\} \subset \mathbb{P}^4 \times \Sigma$  y  $\tilde{S}$  es la transformada estricta de  $S$  en  $U_\Sigma$ .

Observamos que  $\tilde{S}$  es lisa, ya que el morfismo  $p : \tilde{S} \rightarrow S$  es birracional y  $S$  es lisa. Hagamos un análisis detallado de  $\Sigma$  en cada caso.

Caso 2.1. Como todos los planos de  $V_\Sigma$  se cortan en un punto fijo  $Q$ , la transformada estricta de  $Q$  en  $\tilde{S}$  es, en virtud del Teorema Principal de Zariski 0.1.1, una curva conexa  $\gamma_Q$  tal que una de sus componentes corta a todos los  $\mathbb{P}^2$ 's de  $U_\Sigma$ . Como  $\gamma_Q$  se transforma en  $Q$  por el morfismo  $p$ , se deduce que dicha componente de  $\gamma$  es una  $(-1)$ -curva que domina a  $\Sigma$  y en particular  $\Sigma$  es racional.

Caso 1.1. Consideramos la transformada estricta de  $L \subset S$  por  $p$ . Esta es una curva  $\gamma_L$  tal que existe al menos una componente irreducible de  $\gamma_L$  que corta a todos los  $\mathbb{P}^2$ 's de  $U_\Sigma$ . Como el morfismo  $p$  es birracional, tenemos que dicha componente es birracional a  $L$  y como domina a  $\Sigma$ , concluimos de nuevo que  $\Sigma$  es racional.

Caso 1.2. Si  $L \not\subset S$ , se sigue que  $L \cap S$  consiste en un número finito de puntos. En particular tenemos que todas las curvas planas  $C$  pasan por al menos un punto  $Q \in L$ . Como en el Caso 2.1, si consideramos la transformada estricta de  $Q$  obtenemos una curva  $\gamma_Q$  tal que una de sus componentes irreducibles corta a todos los  $\mathbb{P}^2$ 's de  $U_\Sigma$ . En consecuencia, por el mismo motivo,  $\Sigma$  es racional.  $\square$

Finalmente, como consecuencia del Lema 4.4.1, podemos dar una descripción más precisa de la superficie  $S \subset \mathbb{P}^4$  cuando  $V_\Sigma$  es un cono.

**Proposición 4.4.2** *Si  $S$  no es la superficie de Veronese del Ejemplo 4.2.1 con  $d = 1$ , entonces  $V_\Sigma \subset \mathbb{P}^4$  es un cono cuádrico de rango 3 ó 4.*

*Además,  $S$  está ligada a un plano de  $V_\Sigma$  por la intersección completa de  $V_\Sigma$  y una hipersuperficie  $F$  de  $\mathbb{P}^4$ .*

*Finalmente si  $V_\Sigma$  es un cono cuádrico de rango 3, el vértice  $L$  está contenido en  $S$  (es decir, el Caso 1.2 no es posible) y  $C^2 = 1$ .*

*Demostración.* Por el Teorema de Severi,  $S$  es linealmente normal o bien la superficie de Veronese. Por tanto se deduce del Lema 4.4.1 que, excepto en el caso de la superficie de Veronese,  $V_\Sigma \subset \mathbb{P}^4$  es un cono cuádrico de rango 3 ó 4. De lo contrario,  $V_\Sigma$  sería la proyección a  $\mathbb{P}^4$  de un scroll racional normal de planos  $S(0, a, b)$  con  $a + b \geq 3$ . Como  $\langle S \rangle = \langle S(0, a, b) \rangle = \mathbb{P}^{a+b+2}$ ,  $S$  vendría proyectada de  $\mathbb{P}^{a+b+2}$ , lo cual es absurdo. Es un resultado conocido (véase [8], Proposition 1.3.1) que una superficie lisa  $S$  contenida en un cono cuádrico de  $\mathbb{P}^4$  satisface una de las dos posibilidades siguientes:

- (a)  $S$  es intersección completa de  $V_\Sigma$  y otra hipersuperficie  $F$  de  $\mathbb{P}^4$ .
- (b)  $S$  está ligada a un plano de  $V_\Sigma$  por la intersección completa de  $V_\Sigma$  y otra hipersuperficie  $F$  de  $\mathbb{P}^4$ .

En nuestra situación (a) no puede darse, ya que  $S$  sería singular en los puntos  $Q \in S$  contenidos en el vértice de  $V_\Sigma$ . Esto es consecuencia de que, por ser  $S$



una intersección completa, el espacio tangente a  $S$  en  $Q$  es la intersección de los espacios tangentes a  $V_\Sigma$  y  $F$  en  $Q$ . Pero como  $V_\Sigma$  es un cono,  $\mathbb{T}_Q V_\Sigma = \mathbb{P}^4$  y entonces  $\mathbb{T}_Q S = \mathbb{T}_Q F$  y  $S$  sería singular en  $Q$ .

Sólamamente queda probar que si  $V_\Sigma$  es un cono cuádrico de rango 3 el vértice  $L$  está contenido en  $S$  y  $C^2 = 1$ . Como necesariamente se cumple (b),  $S$  tiene grado impar  $2d - 1$  donde  $d$  denota el grado de  $F$ . Si  $L \notin S$ , la sección  $H$  de  $S$  con un hiperplano general que contenga a  $L$  sería una curva reducible con  $\text{gr}(H) = 2 \text{gr}(C)$ , lo cual es absurdo. Además, ya probamos en el Ejemplo 4.2.5 que  $C^2 = 1$  cuando  $V_\Sigma$  es un cono cuádrico de rango 3.  $\square$

## 4.5 $V_\Sigma$ no es un cono

Comenzamos esta sección considerando el caso general en que el punto de intersección de dos planos generales de  $\Sigma$  se mueve en  $S$ . Recordemos las dos hipótesis adicionales que usaremos de aquí en adelante:

(1) Por el punto general de  $S$  pasan exactamente dos curvas planas de la familia, es decir, no estamos considerando el Caso 2.2.2.

(2) El plano general de  $\Sigma$  no es cortado por otro plano de  $\Sigma$  a lo largo de una recta y tampoco por el infinitamente próximo.

Consideramos la aplicación racional  $\alpha : \Sigma^{(2)} \dashrightarrow S \subset \mathbb{P}^4$  que asocia a cada par de planos generales  $(\pi_1, \pi_2)$  de  $\Sigma$  su punto de intersección  $P = \Pi_1 \cap \Pi_2$ .

**Lema 4.5.1** *La aplicación racional  $\alpha$  es birracional y por cada punto de  $S$  pasan como máximo dos curvas de la familia.*

*Demostración.* En primer lugar  $\alpha$  es birracional por la condición adicional (1). Nótese que la curva plana general  $C$  se obtiene tomando la clausura de los puntos de intersección de un plano  $\pi \in \Sigma$  fijo con el resto de planos de  $\Sigma$  que cortan a  $\pi$  en un solo punto. Denotamos por  $G(\Sigma) \subset \Sigma^{(2)} \times S$  la clausura del grafo de  $\alpha$  y por  $p_1$  y  $p_2$  sus proyecciones a  $\Sigma^{(2)}$  y  $S$  respectivamente. Si  $P \in S$  está en un subesquema de  $\Sigma$  de longitud al menos 3, aplicamos el Teorema Principal de Zariski 0.1.1 a  $p_2 : G(\Sigma) \rightarrow S$  y obtenemos que todos los planos de  $\Sigma$  pasan por  $P$ , lo cual es una contradicción.  $\square$

**Lema 4.5.2**  $\Sigma$  es una curva lisa.

*Demostración.* Supongamos que  $\Sigma$  es singular en un punto, digamos  $x$ , y sea  $\tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$  el morfismo de normalización de  $\Sigma$ . Entonces  $\Sigma^{(2)}$  es singular a lo largo de la

curva  $\sigma_x = \{(x, y) \mid y \in \Sigma\} \subset \Sigma^{(2)}$  y  $\tilde{\Sigma}^{(2)} \rightarrow \Sigma^{(2)}$  es un morfismo birracional. Ahora tomemos un punto  $(x, y) \in \sigma_x$  donde  $\alpha$  esté realmente definida (el lugar de indeterminación de  $\alpha$  tiene codimensión 2).

Vamos a probar que  $\alpha(x, y)$  es un punto singular de  $S$ , llegando a una contradicción. De hecho, su preimagen  $\alpha^{-1}(\alpha(x, y))$  en  $\tilde{\Sigma}^{(2)}$  es el conjunto finito de puntos  $\{(\tilde{x}_1, y) \dots (\tilde{x}_n, y)\}$  donde  $\tilde{x}_i \in \tilde{\Sigma}$  es el conjunto de puntos de  $\tilde{\Sigma}$  sobre  $x$  por el morfismo de normalización.

Por tanto  $S$  debe ser singular aplicando nuevamente el Teorema Principal de Zariski, contradiciendo la lisitud de  $S$ .  $\square$

En lo que sigue trabajaremos con la curva dual  $\check{\Sigma} \subset \mathbb{G}(1, 4)$ . Como  $V_{\Sigma} \subset \mathbb{P}^4$  no es un cono,  $\check{\Sigma}$  es no degenerada, es decir, no está contenida en una  $\mathbb{G}(1, 3)$ .

Además  $S_{\check{\Sigma}} \subset \check{\mathbb{P}}^4$  no es un cono de vértice un punto ya que en ese caso  $V_{\Sigma}$ , y por tanto  $S$ , estaría contenida en un  $\mathbb{P}^3$ .

En consecuencia podemos considerar la aplicación racional  $\varphi : \check{\Sigma}^{(2)} \dashrightarrow \check{\mathbb{P}}^4$  que asocia a cada par de rectas disjuntas  $(l, l')$  el espacio lineal  $\Lambda = \langle L, L' \rangle$  que generan. Por tanto, la clausura de la imagen de  $\varphi$  no es más que la variedad secante  $S(\check{\Sigma})$  definida en 0.3.6.

Por dualidad es evidente que  $S$  es precisamente  $S(\check{\Sigma}) \subset \check{\mathbb{P}}^4$  y a consecuencia del Lema 4.5.1 ningún  $\lambda \in S(\check{\Sigma})$  corta a  $\check{\Sigma}$  en un subesquema de longitud al menos 3.

En resumen, hemos transformado el problema en estudiar curvas lisas  $\check{\Sigma}$  en  $\mathbb{G}(1, 4)$  sin espacios *trisecantes*  $\Lambda$ .

Veamos por dualidad qué significan las dos hipótesis adicionales en este contexto.

La condición (1) significa que el espacio secante general  $\lambda \in S(\check{\Sigma})$  corta a  $\check{\Sigma}$  en un subesquema de longitud 2, mientras que la condición (2) significa que la recta general de  $\check{\Sigma} \subset \mathbb{G}(1, 4)$  no es cortada por otra de  $\check{\Sigma}$  y tampoco por la infinitamente próxima.

Señalamos que, en esta situación, una curva plana  $C \subset \Pi$  de la familia es precisamente la dual de la curva de  $\Lambda$ 's que contienen la recta  $L = \check{\Pi}$  de  $\check{\Sigma}$ .

Por tanto, ahora se ve claramente para qué son necesarias las dos hipótesis adicionales que pedimos a lo largo de esta sección. El objetivo es usar la Proposición 0.3.15 de los Preliminares.

**Proposición 4.5.3** *Sea  $\check{\Sigma} \subset \mathbb{G}(1, 4)$  una curva lisa no degenerada que cumpla las condiciones anteriores (1) y (2). Entonces  $\check{\Sigma}$  es racional de grado 3 ó 4 o bien es elíptica de grado 5.*

*Demostración.* En las condiciones anteriores observamos que  $\check{\Sigma} \subset \mathbb{G}(1, 4)$  es una curva que cumple las hipótesis de la Proposición 0.3.15. Se sigue entonces que  $\check{\Sigma}$  es racional de grado 3 ó 4 o bien es elíptica de grado 5.  $\square$

Para finalizar la prueba del Teorema 4.3.1, veamos qué superficies producen las curvas  $\check{\Sigma}$  obtenidas.

El caso racional de grado  $d = 3$  no produce ningún ejemplo nuevo. De hecho,  $S_{\check{\Sigma}} \subset \check{\mathbb{P}}^4$  es necesariamente  $S(1, 2)$  y por tanto  $\check{S} \subset \check{\mathbb{P}}^4$  es el conjunto de hiperplanos que contienen la recta excepcional del scroll, luego  $S = \mathbb{P}^2$ .

Por otro lado si  $\check{\Sigma} \subset \mathbb{G}(1, 4)$  es racional de grado 4, entonces  $S_{\check{\Sigma}} \subset \check{\mathbb{P}}^4$  es el scroll proyectado  $S(2, 2)$  y  $S \subset \mathbb{P}^4$  es el scroll  $S(1, 2)$  del Ejemplo 4.2.2.

Si por último  $\check{\Sigma} \subset \mathbb{G}(1, 4)$  es elíptica de grado 5, entonces  $S_{\check{\Sigma}} \subset \check{\mathbb{P}}^4$  es  $E_5$  y  $S \subset \mathbb{P}^4$  es  $E_5$  como en el Ejemplo 4.2.3.

**Observación 4.5.4** Recordemos para concluir que la superficie de Veronese proyectada del Caso 2.2.1 se corresponde con el Ejemplo 4.2.1 con  $d = 2$ , luego la condición (2) no se satisface. Por tanto, la superficie de Veronese que aparece en el apartado (iii) del Teorema 4.3.1 no procede del Caso 2.2.1 sino del Caso 2.1 en que  $V_{\Sigma}$  es un cono de vértice un punto. Es decir, se toma  $d = 1$  en el Ejemplo 4.2.1.

# Bibliografía

- [1] B. Ådstrandvik, Varieties with an extremal number of degenerate higher secant varieties, *Journal reine angew. Math.* **392** (1987), 213–222.
- [2] H. Abo, W. Decker y N. Sasakura, An elliptic conic bundle in  $\mathbb{P}^4$  arising from a stable rank-3 vector bundle, *Math. Z.* **229** (1998), no. 4, 725–741.
- [3] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths y J. Harris, *Geometry of algebraic curves*, Vol. I, Grund. math. Wiss. **267**, Springer (1985).
- [4] E. Arrondo e I. Sols, On congruences of lines in the projective space, *Mém. Soc. Math. France (N.S)* **50** (1992).
- [5] E. Arrondo, *Subvarieties of Grassmannians*, Lecture Notes Series Dipartimento di Matematica Univ. Trento **10** (1996).
- [6] E. Arrondo, Projections of Grassmannians of lines and characterization of Veronese varieties, *J. Algebraic Geom.* **8**, no. 1 (1999), 85–101.
- [7] E. Arrondo, J.C. Sierra y L. Ugaglia, *Classification of  $n$ -dimensional subvarieties of  $\mathbb{G}(1, 2n)$  that can be projected to  $\mathbb{G}(1, n + 1)$* , preprint (2003).
- [8] A. Aure, *On surfaces in projective 4-space*. Tesis doctoral, Universitetet i Oslo, Matematisk Institutt (1987).
- [9] J. Bronowski, The sum of powers as canonical expressions, *Proc. Cam. Phil. Soc.* **29** (1932) 69–82.
- [10] R. Braun y K. Ranestad, *Conic bundles in projective fourspace*, Algebraic geometry (Catania, 1993/Barcelona, 1994), 331–339, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **200**, Dekker, New York, 1998.
- [11] L. Chiantini y C. Ciliberto, *Threefolds with degenerate secant variety: on a theorem of G. Scorza*, M. Dekker Lect. Notes Pure Appl. Math. **217** (2001) 111–124.

- [12] C. Ciliberto, M. Mella y F. Russo, Varieties with one apparent double point, por aparecer en *J. Algebraic Geom.*
- [13] C. Ciliberto y E. Sernesi, Singularities of the theta divisor and congruences of planes, *J. Algebraic Geom.* **1**, no. 2 (1992), 231–250.
- [14] M. Dale, *On the secant variety of an algebraic surface*, University of Bergen, Dept. of Math. preprint no. 33 (1984).
- [15] P. Ellia y G. Sacchiero, *Smooth surfaces of  $\mathbb{P}^4$  ruled in conics*, Algebraic geometry (Catania, 1993/Barcelona, 1994), 49–62, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 200, Dekker, New York, 1998.
- [16] T. Fujita, Projective threefolds with small secant varieties, *Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokio* **32** (1982), no. 1, 33–46.
- [17] T. Fujita y J. Roberts, Varieties with small secant varieties: The extremal case, *Amer. J. Math.* **103** (1981), no. 5, 953–976.
- [18] W. Fulton, *Intersection theory*, Erg. Math. Grenzgeb. (3) **2**, Springer (1984).
- [19] B. Graña, *Escisión de fibrados en  $\mathbb{G}(1, 4)$  y sus variedades*. Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid, Departamento de Álgebra (2003).
- [20] P. Griffiths y J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley, New York, 1978.
- [21] J. Harris, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York, Graduate Texts in Mathematics, no. 133 (1992).
- [22] R. Hartshorne, Varieties of small codimension in projective space, *Bull. A.M.S.* **80** (1974), 1017–1032.
- [23] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York, Graduate Texts in Mathematics, no. 52 (1977).
- [24] W.V.D. Hodge y D. Pedoe, *Methods of Algebraic Geometry*, Vol. I. Cambridge, at the University Press; New York, The Macmillan Company, 1947.
- [25] S.L. Kleiman, The enumerative theory of singularities, *Real and complex singularities* (Proc. Ninth Nordic School /NAVF Sympos. Math., Oslo, 1976), Sijhoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn 1977, pp 297–396.
- [26] S.L. Kleiman y D. Laksov, Schubert calculus, *Amer. Math. Monthly* **79** (1972), 1061–1082.

- [27] A. Lanteri, On the existence of scrolls in  $\mathbb{P}^4$ , *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* (8) **69** (1980), no. 5, 223–227 (1981).
- [28] M.E. Larsen, On the topology of projective manifolds, *Invent. Math.* **19**, 251–260 (1973).
- [29] E. Mezzetti y D. Portelli, On threefolds covered by lines, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **70** (2000), 211–238.
- [30] C. Okonek, M. Schneider y H. Spindler, *Vector bundles on complex projective spaces*, Progress in Mathematics, vol. 3, Birkhäuser Boston, Mass., 1980.
- [31] K. Ranestad, *On smooth plane curve fibrations in  $\mathbb{P}^4$* , Geometry of complex projective varieties (Cetraro, 1990), 243–255, Sem. Conf., 9, Mediterranean, Rende, 1993.
- [32] E. Rogora, Varieties with many lines, *Manuscripta Math.* **82** (1994), no.2, 207–226.
- [33] F. Russo, On a theorem of Severi, *Math. Ann.* **316** (2000), 1–17.
- [34] G. Scorza, Determinazione delle varietà a tre dimensioni di  $S_r$ ,  $r \geq 7$ , i cui  $S_3$  tangenti si tagliano a due a due, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **25** (1908), 193–204.
- [35] G. Scorza, Sulle varietà a quattro dimensioni di  $S_r$  ( $r \geq 9$ ) i cui  $S_4$  tangenti si tagliano a due a due, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **27** (1909), 148–178.
- [36] B. Segre, Sulle  $V_n$  contenenti  $\infty^{n-k}$  I, II, *Atti Accad. Lincei* **5** (1948), 193–197, 275–280.
- [37] F. Severi, Intorno ai punti doppi impropri di una superficie generale dello spazio a quattro dimensioni, e ai suoi punti tripli apparenti, *Rend. Circ. Mat. Palermo* II **15** (1901), 33–51.
- [38] I.R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry*, Springer–Verlag, New York, 1977.
- [39] H. Tango, On  $(n-1)$ –dimensional projective spaces contained in the Grassmann variety  $\mathbb{G}(n, 1)$ , *J. Math. Kyoto Univ.* **14** (1974), 415–460.
- [40] A. Terracini, Sulle  $V_k$  per cui la varietà degli  $S_h$  ( $h+1$ )–secanti ha dimensione minore dell’ ordinario, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **31** (1911), 392–396.
- [41] A. Terracini, Su due problemi, concernenti la determinazione di alcune classi di superficie, considerati da G. Scorza e F. Palatini, *Atti Soc. Natur. e Matem. Modena* (V) **6** (1921–1922), 3–16.

- 
- [42] L. Ugaglia, *Projection of subvarieties of grassmannians of lines*. Tesis doctoral, Dipartimento di Matematica dell'Università degli studi di Milano (2001).
- [43] L. Ugaglia, Subvarieties of the Grassmannian  $\mathbb{G}(1, N)$  with small secant variety, *Comm. Algebra* **30** (2002) no.8, 4059–4083.
- [44] A. Van de Ven, On uniform vector bundles, *Math. Ann.* **195** (1972), 245–248.
- [45] M.G. Violo, *Varietà con un punto doppio apparente*. Tesis doctoral, Università di Torino (1997).
- [46] F.L. Zak, *Tangents and Secants of Algebraic Varieties*, Transl. Math. Monographs, vol. 127, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.