

EXAMEN FINAL DE GEOMETRÍA LINEAL, dobles grados Mat-Fís, IngInf-Mat
9 de junio de 2023

Pregunta teórica.

Si $\rho = [a, b, c, d]$, ¿cuánto vale, en función de ρ , la razón doble $[a, d, c, b]$? Usa la demostración que prefieras, pero debes definir cada concepto que uses y enunciar cada resultado previo que utilices.

Ejercicio 1) Sean

$$L_1 : 2X_0 - X_1 - X_2 = 0$$

$$L_2 : 3X_0 - 3X_1 - 2X_2 = 0$$

rectas de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Consideremos $f : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ la aplicación proyectiva inducida por la aplicación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

- Obtener el centro y la imagen de f .
- Di si $g_1 := f|_{L_1} : L_1 \dashrightarrow \text{Im}(f)$ es una proyectividad.
- Demuestra que $g_2 := f|_{L_2} : L_2 \dashrightarrow \text{Im}(f)$ preserva la razón doble.
- Di si g_2 es una perspectividad. Si es así, di su centro. Si no, describe g_2 como composición del mínimo número posible de perspectividades.

Ejercicio 2) Se considera la cónica proyectiva real \tilde{C} de ecuación

$$(X_0 \ X_1 \ X_2) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Se pide:

- Clasifícala proyectivamente y demuestra que contiene infinitos puntos.
- Para $i = 0, 1, 2$, clasifica la cónica afín C_i que resulta de intersecar \tilde{C} con la carta afín $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \setminus \{X_i = 0\}$.
- Encuentra las rectas verticales tangentes a C_0 (vista en las coordenadas X, Y del plano afín $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \setminus \{X_0 = 0\}$).
- ¿Cuántas rectas paralelas a $X + Y = 0$ hay tangentes a C_0 ? ¿Y cuántas paralelas a $15 - 29X + 73Y = 0$?

Véanse las instrucciones al dorso

–El examen durará 3 horas. Durante ese tiempo sólo se puede usar bolígrafo y papel, quedando prohibido el uso de calculadoras o cualquier dispositivo móvil, que deberá permanecer apagado.

–Tanto para la pregunta teórica como para la resolución de los ejercicios se puede usar cualquier cosa vista en clase. También puede darse por bueno cualquier apartado (aunque no se sepa resolver) para resolver otro, siempre que no se entre en bucle.

–La pregunta teórica contará 3 puntos y cada apartado de los ejercicios 1 punto. Es decir, la suma total de puntos posibles es 11, aprobando a partir de 5.

–**IMPORTANTE:** Un error realmente grave puede restar de golpe 10 puntos. Por tanto, se recomienda callarse y no disparar al azar en caso de no saber contestar una pregunta. Es mucho más probable aprobar con una nota entre 4 y 5 contestando sólo lo que se sabe que contestar todo a voleo a ver si se suman puntos.

–La calificaciones se comunicarán a través de GEA, y en el momento de la publicación de las mismas se pondrá también en GEA el plazo de revisión. Por tanto, hay que entrar en GEA para ver dicho plazo cuando se reciba el correo con la calificación.