GEOMETRÍA ALGEBRAICA (Curso 2023/2024)
HOJA DE PROBLEMAS Nº 2

1) Calcular los siguientes polinomios de Hilbert:

(i) De la unión de dos rectas disjuntas de $\mathbb{P}^3_k$.

(ii) De la unión de dos rectas de $\mathbb{P}^3_k$ que se cortan en un punto.

(iii) Del ideal $(X_3^2, X_1X_3, X_2X_3, X_1X_2) \subset k[X_0, X_1, X_2, X_3]$ (ver hoja 1, ejercicio 3).

(iv) De la unión de una cónica de $\mathbb{P}^3$ y de un punto fuera de la cónica.

2) Calcular el grado de las variedades de Segre y Veronese.

3) Se llama *género aritmético* de una curva proyectiva X a $P_a(X) := 1 - p_X(0)$.

(i) Demostrar que una curva plana de grado d tiene género aritmético $(d-1)(d-2)/2$.

(ii) Calcular el género aritmético de cualquier curva racional normal (ejercicio 9 de la hoja 1) y de la curva del ejercicio 13 de la hoja 1).

4) Encontrar una descomposición primaria del ideal $(X_0X_3 - X_1X_2, X_1X_3 - X_2^2)$ de $k[X_0, X_1, X_2, X_3]$.

5) Sea X el conjunto del ejercicio 13 de la hoja 1. Demostrar que una descomposición primaria de $I(X)+(X_1-X_2)$ es $(X_0, X_1, X_2)\cap(X_1, X_2, X_3)\cap(X_0-X_1, X_1-X_2, X_2-X_3)\cap(X_0+X_1, X_1-X_2, X_2+X_3)\cap(X_1-X_2, X_3-\lambda X_2, X_2-\lambda X_0, X_0^3)$, para cualquier $\lambda \neq 0, 1, -1$. Encontrar la saturación del ideal.

6) Demostrar la igualdad $(X_0X_2, X_0X_3, X_1X_2, X_2X_3) + (X_1 - X_2) = (X_0, X_1, X_2) \cap (X_1, X_2, X_3) \cap (X_1 - X_2, X_0 - \lambda X_1, X_3 - \mu X_1, X_1^2)$ para cualesquiera $\lambda, \mu \in k$.

7) Demostrar que existe un monomorfismo natural $k[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{P}} \to k[[X_1, \dots, X_n]]$, donde $\mathfrak{P} = (X_1, \dots, X_n)$.

8) Demostrar que, si $\varphi : A \to B$ es un homomorfismo de k-álgebras finitamente generadas, entonces la imagen inversa por φ de un ideal maximal es necesariamente maximal.

9) Dado el morfismo $\operatorname{Spec}(\mathbb{R}[X, Y]/(Y^2 - X)) \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ definido por la inclusión $\mathbb{R}[X] \hookrightarrow \mathbb{R}[X, Y]/(Y^2 - X)$, calcular la fibra de los elementos $(X - a)$ (con $a \in \mathbb{R}$) y $(X^2 + 1)$. Lo mismo para $\operatorname{Spec}(\mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)) \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$.

10) Dar un morfismo de $D(T) \subset \operatorname{Spec} k[[T]]$ a $\mathbb{A}^n_k$ que no se pueda extender a $\operatorname{Spec} k[[T]]$. Demostrar que, en cambio, todo morfismo de $D(T)$ a $\mathbb{P}^n_k$ sí se puede extender.

11) Dar un morfismo $\operatorname{Spec}(k[[T]]) \to \operatorname{Spec}\big(k[X, Y]/(XY - X - Y)\big)$ tal que la imagen de (T) sea la clase de (X, Y).

12) Demostrar que la proyección $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m \to \mathbb{P}_k^m$ es un morfismo (identificando $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m$ con la variedad de Segre).

13) Demostrar que las inmersiones de Veronese son isomorfismos sobre su imagen.

14) Demostrar que si dos morfismos $\varphi, \psi : X \to Y$ coinciden en un abierto no vacío de X, Y es separado y X es irreducible, entonces $\varphi = \psi$.

15) Demostrar que, si existe un morfismo no constante de $\mathbb{P}_k^n$ a $\mathbb{P}_k^m$, entonces $n \leq m$.

16) Identificando $V(P_{01}P_{23} - P_{02}P_{13} + P_{03}P_{12}) \subset \mathbb{P}_k^5$ con $\mathbb{G}(1,3)$, se pide:

a) Demostrar que la recta definida por $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}_k^5$ está contenida en el plano $X_3 = 0$ si y sólo si $p_{03} = p_{13} = p_{23} = 0$.

b) Demostrar que la recta definida por $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}_k^5$ pasa por el punto $(1 : 0 : 0 : 0)$ si y sólo si $p_{12} = p_{13} = p_{23} = 0$.

c) Demostrar que el conjunto de puntos $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}_k^5$ que corresponden a las rectas de $\mathbb{P}_k^3$ que cortan a la recta $V(X_2, X_3)$ es un conjunto proyectivo de $\mathbb{P}_k^5$.

d) Demostrar que el conjunto de puntos $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}_k^5$ que corresponden a las rectas de $\mathbb{P}_k^3$ que cortan a la cónica $V(X_3, X_0X_2 - X_1^2)$ es un conjunto proyectivo de $\mathbb{P}_k^5$.

e) Demostrar que el conjunto de puntos $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}_k^5$ que corresponden a las rectas de $\mathbb{P}_k^3$ contenidas en la cuádrica $V(X_0X_3 - X_1X_2)$ es un conjunto proyectivo de $\mathbb{P}_k^5$.

17) Demostrar que la aplicación $f : V(X_3) \to \mathbb{P}_k^5$ que asocia a cada punto del plano $V(X_3) \subset \mathbb{P}_k^3$ la recta generada por él y por el punto $(0 : 0 : 0 : 1)$ (usando la identificación del ejercicio 16) es un morfismo. Encontrar una expresión para la inversa de f allá donde esté definida.

18) Demostrar que la aplicación $V(P_{03}, P_{13}, P_{23}) \to \mathbb{P}_k^{3^*}$ que asocia a cada recta contenida en $V(X_3) \subset \mathbb{P}_k^3$ (ver ejercicio 16) el plano generado por ella y el punto $(0 : 0 : 0 : 1)$ es un morfismo. Encontrar su inverso donde esté definido.

19) Identificando $\mathbb{P}_k^{\binom{d+3}{3}-1}$ con el conjunto de superficies de grado d en $\mathbb{P}_k^3$ e identificando $V(P_{01}P_{23} - P_{02}P_{13} + P_{03}P_{12}) \subset \mathbb{P}_k^5$ con el conjunto de rectas de $\mathbb{P}_k^3$, demostrar que el subconjunto de $\mathbb{P}_k^{\binom{d+3}{3}-1} \times \mathbb{P}_k^5$ dado por los pares (X, L) para los que L está contenida en X es un conjunto proyectivo. Concluir que el conjunto de superficies de grado d que contienen alguna recta es un conjunto proyectivo.

20) Demostrar que la aplicación $(\mathbb{P}_k^{3^*} \times \mathbb{P}_k^{3^*}) \setminus \Delta \to \mathbb{P}_k^5$ que asocia a cada par de planos distintos su recta intersección es un morfismo.