

PROBLEMAS DE GEOMETRIA LINEAL (grupo M2)

Curso 2023/24, hoja 1

- 1) Demostrar que son equivalentes las siguientes definiciones de espacio afín \mathbb{A} con espacio vectorial asociado V :
- a) Existe una aplicación $\varphi : \mathbb{A} \times V \rightarrow \mathbb{A}$ (se suele escribir $\varphi(p, v) = p + v$) tal que:
- (i) $(p + v) + v' = p + (v + v')$ para todo $p \in \mathbb{A}$ y $v, v' \in V$.
 - (ii) Para todo $p \in \mathbb{A}$, la aplicación $\varphi_p : V \rightarrow \mathbb{A}$ dada por $\varphi_p(v) = p + v$ es una biyección.
- b) Existe una aplicación $\phi : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow V$ (se suele escribir $\phi(p, q) = \overrightarrow{pq}$) tal que:
- (i) $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}$ para cualesquiera $p, q, r \in \mathbb{A}$.
 - (ii) Para todo $p \in \mathbb{A}$, la aplicación $\phi_p : \mathbb{A} \rightarrow V$ dada por $\phi_p(q) = \overrightarrow{pq}$ es una biyección.
- 2) Demostrar que, dado un espacio vectorial V , la aplicación $\varphi : V \times V \rightarrow V$ definida por $\varphi(v_1, v_2) = v_1 + v_2$ dota a V de estructura de espacio afín.
- 3) Si llamamos aplicación afín entre dos espacios afines a una aplicación $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ tal que existe una aplicación lineal $\vec{f} : V \rightarrow V'$ entre los respectivos espacios vectoriales asociados tales que, para todo $p_1, p_2 \in \mathbb{A}$ se satisface $\overrightarrow{f(p_1)f(p_2)} = \vec{f}(\overrightarrow{p_1p_2})$, demostrar:
- (i) f es biyectiva si y sólo si \vec{f} es biyectiva (en tal caso, se dice que f es una afinidad).
 - (ii) Para cada $v \in V$, la traslación $\tau_v : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ definida por $\tau_v(p) = p + v$ es una afinidad, y se tiene que $\vec{\tau}_v$ es la identidad.
 - (iii) Cualquier afinidad $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ tal que \vec{f} es la identidad es una traslación.
- 4) Sea \mathbb{A} un espacio afín con espacio vectorial asociado V y determinado por $\varphi : \mathbb{A} \times V \rightarrow \mathbb{A}$. Fijado $\lambda \in k \setminus \{0\}$, demostrar:
- (i) Existe un espacio afín \mathbb{A}_λ cuyo conjunto de puntos es el mismo que \mathbb{A} y el espacio vectorial asociado también es V , pero para el que la estructura de espacio afín viene dada por la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda : \mathbb{A}_\lambda \times V &\rightarrow \mathbb{A}_\lambda \\ (p, v) &\mapsto p + \lambda v \end{aligned}$$

(en otras palabras, el vector \overrightarrow{pq} en \mathbb{A}_λ está definido como λ veces el vector \overrightarrow{pq} de \mathbb{A}).

- (ii) La identidad conjuntista $\mathbb{A}_\lambda \rightarrow \mathbb{A}$ es una afinidad, tomando como aplicación lineal asociada la multiplicación por λ en V .

- (1)5) Demostrar que las aplicaciones afines de \mathbb{A}_k^n en sí mismo que mandan los puntos coordenados $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ en sí mismos son las aplicaciones de la forma

$$f : \mathbb{A}_k^n \rightarrow \mathbb{A}_k^n \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto (a_1(1 - x_1 - \dots - x_n) + x_1, \dots, a_n(1 - x_1 - \dots - x_n) + x_n)$$

con $a_1, \dots, a_n \in k$.

- 6) Demostrar que, dada una referencia afín $\mathcal{R} = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ de un espacio afín \mathbb{A} , la aplicación $f_{\mathcal{R}} : \mathbb{A}_k^n \rightarrow \mathbb{A}$ definida por

$$f_{\mathcal{R}}(x_1, \dots, x_n) = p_0 + x_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \dots + x_n \overrightarrow{p_0 p_n}$$

es una afinidad, y su matriz respecto de \mathcal{R}_c (referencia canónica de \mathbb{A}_k^n) y \mathcal{R} es la matriz identidad. Además, p_0 es imagen de $(0, \dots, 0)$, mientras que, si $i = 1, \dots, n$, entonces p_i es la imagen del i -ésimo punto coordenado. También, \vec{f} manda la base canónica de k^n a la base $\{\overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_n}\}$ del espacio vectorial asociado de \mathbb{A} .

- 7) Encontrar los puntos del infinito de las curvas siguientes:

(2)a) $Y = X^2 - X + 2$

(3)b) $X^2 - Y^2 = 1$

(4)c) $X^2 + XY + Y^2 = 1$

(5)d) $Y = X^3$

e) $Y^2 = X^3$

- (6)8) Encontrar la ecuación de la recta proyectiva que pasa por el punto $(2 : 1 : -1)$ y por el punto de intersección de las rectas $X_0 - X_1 - X_2 = 0$ y $2X_0 + X_1 - 2X_2 = 0$.

- (7)9) Encontrar el punto de intersección de la recta $2X_0 + X_1 - X_2 = 0$ y la recta determinada por los puntos $(1 : -1 : -1)$ y $(2 : 1 : -2)$.

- (8)10) Determinar si los puntos $(2 : 0 : 3)$, $(-1 : 1 : 2)$ y $(3 : 1 : 0)$ están alineados.

- (9)11) Calcular la ecuación implícita (en las coordenadas u_0, u_1, u_2 del plano dual) del haz de rectas que pasan por el punto de intersección de las rectas $X_0 - X_1 + 2X_2 = 0$ y $3X_0 + 2X_1 - X_2 = 0$.

- (10)12) Calcular la ecuación implícita de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $X_0 - X_1 + 2X_2 = 0$ y $3X_0 + 2X_1 - X_2 = 0$ y por el punto de intersección de las rectas $3X_0 - 2X_1 - X_2 = 0$ y $2X_0 + 2X_1 + X_2 = 0$.