GEOMETRÍA ALGEBRAICA (Curso 2023/2024)
HOJA DE PROBLEMAS Nº 3

1) Calcular el grado de $\mathbb{G}(1,4)$.

2) Identificando $\mathbb{P}_k^{nm-1}$ con el proyectivizado del espacio de matrices $n \times m$, demostrar que el subconjunto $X_k \subset \mathbb{P}_k^{nm-1}$ correspondiente a las matrices de rango como mucho k es irreducible de codimensión $(n-k)(m-k)$.

3) Identificando $\mathbb{P}_k^{\frac{n(n+3)}{2}}$ con el proyectivizado del espacio de matrices simétricas de orden $(n+1)$, demostrar que el subconjunto $X_k \subset \mathbb{P}_k^{\frac{n(n+3)}{2}}$ correspondiente a las matrices de rango como mucho k es irreducible, y calcular su codimensión.

4) Demostrar que una hipersuperficie general de grado $d \geq 6$ de $\mathbb{P}^4$ no contiene rectas.

5) Demostrar que el esquema de Hilbert de las cónicas en $\mathbb{P}_k^4$ es irreducible de dimensión 11 y concluir que una hipersuperficie general de grado $d \geq 6$ de $\mathbb{P}^4$ no contiene cónicas.

6) Demostrar que el esquema de Hilbert de las cúbicas alabeadas en $\mathbb{P}_k^3$ es irreducible de dimensión 12 y encontrar a partir de qué grado d una superficie general de grado d en $\mathbb{P}_k^3$ no contiene cúbicas alabeadas.

7) Demostrar que el esquema de Hilbert de las cúbicas planas en $\mathbb{P}_k^3$ es irreducible de dimensión 12 y encontrar a partir de qué grado d una superficie general de grado d en $\mathbb{P}_k^3$ no contiene cúbicas planas.

8) Demostrar que el esquema de Hilbert de las cúbicas alabeadas en $\mathbb{P}_k^4$ es irreducible de dimensión 16 y concluir que una hipersuperficie general de grado $d \geq 6$ de $\mathbb{P}^4$ no contiene cúbicas alabeadas.

9) Para cada $k, n \in \mathbb{N}$, demostrar que existe $d(n,k)$ tal que, para todo $d \geq d(n,k)$, existen hipersuperficies de grado d en $\mathbb{P}_k^n$ que no contienen subespacios lineales de dimensión k.

10) Calcular la dimensión del conjunto de espacios lineales de dimensión k de $\mathbb{P}_k^n$ que cortan a un conjunto proyectivo fijo irreducible de dimensión r.

11) Demostrar que el conjunto de espacios lineales de dimensión k de $\mathbb{P}_k^n$ que cortan a un espacio lineal fijo de dimensión r en un subespacio de dimensión al menos s (con $r+k-n \leq s \leq \min\{k,r\}$) es un conjunto proyectivo irreducible de $\mathbb{G}(k,n)$ de codimensión $(s+1)(n-k-r+s)$ en $\mathbb{G}(k,n)$.

12) Demostrar que las variedades de Segre y Veronese son lisas.

13) Demostrar que es lisa la curva del ejercicio 13 de la Hoja 1.

14) Demostrar que el morfismo $\mathbb{A}^1_k \to V(Y^2 - X^3)$ definido por $t \mapsto (t^2, t^3)$ no es un isomorfismo.

15) Sea C la cónica de ecuación $X_1^2 + X_0X_2 = 0$ definida sobre un cuerpo de característica dos. Demostrar que C es lisa, y que existe un punto de $\mathbb{P}^2_k$ por el que pasan todas las rectas tangentes a C.

16) Demostrar que el conjunto de hipersuperficies singulares de $\mathbb{P}^n_k$ de grado d forma una hipersuperficie dentro de $\mathbb{P}_k^{\binom{n+d}{d}-1}$. Calcular la dimensión del conjunto de hipersuperficies reducibles.

17) Sea $X \subset \mathbb{P}^n_k$ una variedad proyectiva lisa de dimensión r. Demostrar que la aplicación $\varphi : X \to \mathbb{G}(r, n)$ que asocia a cada punto de X su espacio tangente es una aplicación regular (llamada *aplicación de Gauss*).

18) Identificando $\mathbb{P}^5_k$ con el conjunto de cónicas de $\mathbb{P}^2_k$, demostrar que el conjunto $X \subset \mathbb{P}^5_k$ de cónicas degeneradas tiene como lugar singular el conjunto de rectas dobles. Dado un par de rectas, describir geométricamente cuál es en $\mathbb{P}^5_k$ el hiperplano tangente a X en el punto correspondiente. Dada una recta doble, describir geométricamente cuál es en $\mathbb{P}^5_k$ el cono tangente a X en el punto correspondiente.

19) Se considera $X' = \{((X_0 : X_1 : X_2), (a_0 : a_1)) \in \mathbb{P}^2_k \times \mathbb{P}^1_k \mid a_0X_1 = a_1X_0\}$ y sean p_1 y p_2 sus respectivas proyecciones a $\mathbb{P}^2_k$ y $\mathbb{P}^1_k$. Sea $\varphi : \mathbb{P}^2_k \times \mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^5_k$ la inmersión de Segre. Sea $X = \varphi(X')$.

a) Demostrar que X es la intersección de la variedad de Segre con un hiperplano $H \subset \mathbb{P}^5_k$.

b) Demostrar que la imagen por φ de $E = p_1^{-1}(0 : 0 : 1)$ es una recta L de $\mathbb{P}^5_k$.

c) Demostrar que $\varphi(p_2^{-1}(a))$ es una recta de $\mathbb{P}^5_k$ para cualquier punto $a \in \mathbb{P}^1_k$.

d) Demostrar que $\varphi(p_1^{-1}(\ell))$ es una cónica de $\mathbb{P}^5_k$ para cualquier recta $\ell \subset \mathbb{P}^2_k$ y que dicha cónica es no degenerada si y sólo si ℓ no contiene al punto $(0 : 0 : 1)$. En este último caso, probar que el plano en que está la cónica genera, junto a la recta L, el hiperplano H de $\mathbb{P}^5_k$.

e) Concluir que X se puede definir de la siguiente forma: Se considera una recta $L \subset H$ y un plano $\Pi \subset H$ de un hiperplano $H \subset \mathbb{P}^5_k$ de forma que $< L, \Pi >= H$. Se considera una cónica $Q \subset \Pi$ no degenerada y un isomorfismo $\alpha : L \to Q$. Entonces X es la unión de las rectas $< P, \alpha(P) >$ cuando P recorre L.

20) Estudiar si la variedad dual de $\mathbb{G}(1, 4) \subset \mathbb{P}^9$ es una hipersuperficie de $\mathbb{P}^{9*}$.