PROBLEMAS DE GEOMETRIA LINEAL (grupo M2)
Curso 2023/24, hoja 4

1) Demostrar que los planos de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ de ecuaciones $\Pi_0 : X_0 = X_1$, $\Pi_1 : X_1 = X_2$, $\Pi_2 : X_2 = X_3$, $\Pi_3 : X_0 = -X_3$, $\Pi_4 : X_0 = 0$ forman una referencia proyectiva de $\mathbb{P}^{3^*}_{\mathbb{R}}$. Calcular en dicha referencia las ecuaciones del haz de planos que contienen a la recta $X_0 - X_2 = X_1 - X_3 = 0$.

2) Identificando cada punto $(a_0 : a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5) \in \mathbb{P}^5_k$ con la cónica de $\mathbb{P}^2_k$ de ecuación $a_0X_0^2 + a_1X_0X_1 + a_2X_0X_2 + a_3X_1^2 + a_4X_1X_2 + a_5X_2^2 = 0$, comprobar que el hiperplano de $\mathbb{P}^5_K$ de ecuación $a_1 = 0$ no corresponde al conjunto de cónicas que pasen por un punto fijado de $\mathbb{P}^2_k$.

(9)(10)**3)** Encontrar la ecuación de una cónica que pase por los puntos $(1 : 0 : 1)$, $(0 : 0 : 1)$, $(1 : -1 : 1)$, $(1 : 1 : 2)$ y $(1 : 2 : -1)$.

(1)(4)**4)** Encontrar todas las cónicas degeneradas del haz generado por $X_0X_2 = X_1^2$ y $X_0X_1 + 2X_0X_2 = X_1X_2 + 2X_1^2$.

5) Calcular la intersección de las cónicas $X_0^2 + 2X_0X_1 + 2X_0X_2 + X_1X_2 + X_2^2 = 0$ y $X_0^2 + 2X_0X_1 + 3X_0X_2 + 2X_1X_2 + 2X_2^2{=}0$.

6) Dada la aplicación proyectiva $f : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ definida por

$$f(x_0 : x_1 : x_2) = (x_1 - x_2 : x_0 + x_1 + x_2 : x_0 - x_2)$$

encontrar las ecuaciones de f respecto del sistema de referencia del ejercicio 10 de la hoja 3.

7) Calcular la ecuación de la proyectividad $f : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ que deja fijos los puntos $p = (1 : 0)$ y $q = (1 : -1)$ y tal que $[p, q, a, f(a)] = 2$ para $a = (1 : 1)$.

8) Calcular las ecuaciones de la aplicación proyectiva $f : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^{3^*}_{\mathbb{R}}$ que transforma:

$$\begin{gathered}(1 : 1 : 0) \mapsto \{X_0 = 0\}\\ (1 : -1 : 0) \mapsto \{X_1 = 0\}\\ (0 : 1 : 1) \mapsto \{X_2 - X_3 = 0\}\\ (0 : -1 : 1) \mapsto \{X_0 - X_1 = X_2 - X_3\}\end{gathered}$$

Demostrar que la imagen de f consiste en el conjunto de planos que pasan por un punto de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, y calcular dicho punto.

9) Demostrar que una proyectividad $f : \mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^1_k$ tal que $f(p) = q$ y $f(q) = p$ para dos puntos distintos $p, q \in \mathbb{P}^1_k$ satisface que $f \circ f = id_{\mathbb{P}^1_k}$.

10) Sea f la correlación simétrica que transforma el punto $(0:0:0:1)$ en el plano $X_1+2X_2-4X_3=0$, el punto $(0:1:0:0)$ en el plano $2X_0+X_1-X_3=0$ y la recta $X_1=X_3=0$ en la recta $2X_1-X_2+2X_3=X_0+4X_1+2X_3=0$. Dar las ecuaciones de f respecto de la referencia canónica.

11) Sea f una correlación simétrica que transforma en sí mismas las rectas $X_1=X_2-X_3=0$ y $X_1=X_2+X_3=0$, que transforma los puntos $(0:0:1:1)$ y $(0:0:1:-1)$ en planos que contienen al punto $(0:1:0:0)$, y que transforma el punto $(0:1:1:0)$ en el plano $X_0+X_2=0$. Hallar la exprexión de f respecto de la referencia canónica .

12) Calcular la ecuación de una cónica que pase por los puntos $(1:0:0)$, $(1:1:0)$, $(1:-1:1)$ y sea tangente a la recta $X_0=0$ en el punto $(0:1:1)$. ¿Es única dicha cónica?

(2)(3)**13)** Determinar las rectas tangentes a la cónica de ecuación $X_0^2+X_1X_2+X_2^2=0$ que pasan por el punto $(1:1:0)$.

14) Calcular las tangentes comunes a las cónicas $X_0^2-2X_0X_1+2X_0X_2+X_1^2=0$ y $X_0X_2-X_1^2=0$.

15) Dar la ecuación de la cónica que es tangente a las rectas $X_2=0$, $X_0-X_1+X_2=0$, $X_0+X_2=0$, $X_0+X_1+2X_2=0$ y $X_0+2X_1-X_2=0$.

16) Encontrar una ecuación en función de a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 que caracterice cuándo la recta $X_2=0$ es tangente a la cónica de ecuación $a_0X_0^2+a_1X_0X_1+a_2X_0X_2+a_3X_1^2+a_4X_1X_2+a_5X_2^2=0$.

17) Calcular los puntos de intersección de la cónica $X_0X_2-X_1^2=0$ y la curva de ecuación $X_0X_2^2-X_1^3=0$.

18) Dar una parametrización de la cónica $X_0X_2=X_1^2$ tal que $(1:0),(0:1),(1:1)$ correspondan respectivamente a los puntos $(1:1:1),(1:-1:1),(1:0:0)$.

19) Calcular la razón doble de los puntos $(1:1:1),(1:-1:1),(1:0:0),(1:2:4)$ de la cónica $X_0X_2=X_1^2$.

20) Clasificar las siguientes cónicas proyectivas reales, calculando las rectas (reales o imaginarias) que contengan y parametrizando las que sean no degeneradas reales:

(5)(8)a) $4X_0^2-4X_0X_1+12X_0X_2+X_1^2-6X_1X_2+9X_2^2=0$.

b) $X_0^2-3X_0X_1+4X_0X_2+2X_1^2-5X_1X_2+3X_2^2=0$

c) $X_0^2+2X_0X_1+2X_0X_2+X_1X_2+X_2^2=0$

d) $2X_0^2 - 2X_0X_1 + 5X_1^2 + 6X_1X_2 + 2X_2^2 = 0$

e) $X_0^2 - 2X_0X_1 - X_1^2 + X_1X_2 - X_2^2 = 0.$

21) Clasificar, según los valores de t, la cónica afín real de ecuación

$$1 - 2X + 2Y + tX^2 + 2XY + tY^2 = 0.$$

22) Clasificar las siguentes cónicas afines reales y determinar, cuando existan, su centro y asíntotas:

a) $X^2 + Y^2 - 6X + 4Y + 12 = 0$

(6)(9)b) $X^2 + 2XY - 3Y^2 - 4Y = 0$

c) $2X^2 - 13XY + 15Y^2 + 5X - 11Y + 7 = 0$

d) $3 - 5X^2 - 3Y^2 - 4X + 4Y - 4XY = 0$

(7)(10)**23)** Encontrar las parábolas que pasan por los puntos $(0,0)$, $(1,0)$, $(-1,1)$ y $(1,1)$.

24) Clasificar, según los valores de t, la cónica euclídea $1-2X+2Y+tX^2+2XY+tY^2 = 0$. Calcular el centro y los ejes para $t = 0$.

25) Clasificar las siguientes cónicas del plano euclídeo, calculando, cuando existan, su centro y ejes:

a) $5 + 5X^2 + 5Y^2 + 4X + 4Y + 4XY = 0$

b) $3 - 5X^2 - 3Y^2 - 4X + 4Y - 4XY = 0$

c) $X - XY + Y = 0$

d) $2 + 4X^2 + Y^2 - 4X - 2Y - 4XY = 0$

26) Calcular los ejes y focos de las cónicas euclídeas:

a) $X - XY + Y = 0$

b) $2 + 4X^2 + Y^2 - 4X - 2Y - 4XY = 0.$

27) Estudiar si son semejantes las cónicas euclídeas $X^2+4XY-Y^2 = 1$ y $X-XY+Y = 0$.

28) Clasificar las siguientes cuádricas del espacio afín real, calculando, cuando exista, su centro:

a) $X^2 + Y^2 + Z^2 + 2XY - 6XZ + 2YZ + 2X - 6Y + 2Z + 1 = 0$

b) $X^2 + Y^2 + Z^2 - 4XZ - 4Y + 2 = 0$

c) $Y^2 + 4XZ + 1 = 0$

d) $7X^2 - 8Y^2 - 8Z^2 + 8XY - 8XZ - 2YZ - 16X + 14Y - 14Z - 5 = 0$

e) $X^2 + 2XY + 2XZ - 2X + 2Y + 2Z - 2 = 0$

29) Clasificar, según el valor de α, la cuádrica afín $X^2+\alpha Y^2+Z^2+2XY+2(2\alpha-1)XZ+2YZ + 2X + 2Y + 2Z + \alpha = 0$.