

EXAMEN FINAL DE GEOMETRÍA LINEAL, grupo M2

15 de enero de 2024

Cuestiones teóricas:

- (i) Sea $\bar{f} : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ una proyectividad dada por un automorfismo $f : V \rightarrow V$. Demuestra que un punto $[v] \in \mathbb{P}(V)$ es un punto fijo de \bar{f} si y sólo si v es un autovector de f , y que un hiperplano $H \subset \mathbb{P}(V)$ satisface $\bar{f}(H) = H$ si y sólo si H es un punto fijo de la aplicación dual $\bar{f}^* : \mathbb{P}(V)^* \rightarrow \mathbb{P}(V)^*$. Define qué es en general la aplicación dual de una aplicación proyectiva $\mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$.
- (ii) Demuestra que dos planos en \mathbb{P}^5 tienen intersección no vacía si y sólo si están contenidos en un mismo hiperplano. Enuncia el resultado dual.
- (iii) Define puntos cíclicos y da una aplicación de los mismos a la hora de estudiar el plano euclídeo.

Ejercicio práctico: Dada la aplicación proyectiva $f : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ definida por

$$f(x_0 : x_1 : x_2) = (4x_0 + 4x_1 + x_2 : 4x_1 + 2x_2 : 4x_2)$$

y dada la cónica $C = \{x_0x_2 - x_1^2 = 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, se pide:

- (i) Demostrar que f tiene un único punto fijo.
- (ii) Demostrar que $x_2 = 0$ es la única recta invariante de f .
- (iii) Encontrar rectas L, L' tales que $f|_L$ defina una perspectividad de L a L' y encontrar el centro de tal perspectividad.
- (iv) Demostrar que $f(C) = C$.
- (v) Definir razón doble de cuatro puntos sobre una cónica no degenerada real, y calcular la razón doble sobre C de los puntos $(1 : 0 : 0)$, $(1 : 2 : 4)$, $(9 : 6 : 4)$ y $(1 : -2 : 4)$.
- (vi) Encontrar una posible recta del infinito L tal que $C \setminus L$ sea una cónica afín en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \setminus L$ de centro $(1 : 0 : 1)$. ¿Es única dicha recta?
- (vii) Dar rectas L tales que $C \setminus L$ sea una hipérbola, una parábola y una elipse.

Véanse las instrucciones al dorso (consérvese este enunciado después del examen para poder llevarse a casa las instrucciones).

–El examen durará 3 horas. Durante ese tiempo sólo se puede usar bolígrafo y papel, quedando prohibido el uso de calculadoras o cualquier dispositivo móvil, que deberá permanecer apagado.

–Tanto para la parte teórica como para la práctica se puede usar cualquier cosa vista en clase. También puede darse por bueno cualquier apartado (aunque no se sepa resolver) para resolver otro, siempre que no se entre en bucle.

–Cada apartado contará un punto. La calificación final será la suma del 80% de la calificación del examen más la calificación obtenida por curso. Quien no haya sido calificado por curso deberá asistir obligatoriamente a la revisión.

–**IMPORTANTE:** Un error realmente grave puede restar de golpe 10 puntos. Por tanto, se recomienda callarse y no disparar al azar en caso de no saber contestar una pregunta. Es mucho más probable aprobar con una nota entre 4 y 5 contestando sólo lo que se sabe que contestar todo a voleo a ver si se suman puntos.

–La calificaciones se comunicarán a través de GEA, y en el momento de la publicación de las mismas se pondrá también en GEA el plazo de revisión. Por tanto, tras recibir la calificación hay que entrar en GEA para ver dicho plazo.

–Las calificaciones que se publicarán en GEA serán las finales para quien tenga calificación por curso. Para quien no tenga calificación por curso (es decir, no haya realizado la entrega ni hecho la entrevista oral), la calificación publicada será la correspondiente al 80% de la calificación del examen final. Para conseguir el 20% restante será obligatorio asistir a la revisión del examen.