EXAMEN FINAL DE GEOMETRÍA LINEAL, dobles grados Mat-Fís, IngInf-Mat

16 de enero de 2023

Ejercicio 1) En $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ se tiene una aplicación proyectiva f con las siguientes propiedades (todos los datos están expresados en la referencia canónica):

(i) Deja fijos **todos** los puntos de la recta $r : x_0 = x_2 = 0$.

(ii) Deja fijos los puntos $B_1 = (1 : 0 : 0 : 0)$ y $B_2 = (0 : 0 : 1 : 0)$.

(iii) Manda el punto $C = (1 : 1 : 1 : -1)$ en $f(C) = (-1 : 2 : 1 : -2)$.

Se pide:

a) Encontrar una referencia de $\mathbb{P}^3$ que tenga la estructura $\mathcal{R} = \{A_1, A_2, B_1, B_2; C\}$ donde $A_i \in r$.

b) Escribir $f(C)$ en la referencia $\mathcal{R}$.

c) Escribir la matriz de f en la referencia $\mathcal{R}$ y comprobar que es diagonal.

d) Escribir la matriz de f en la referencia canónica y comprobar que es diagonal.

Ejercicio 2) Se considera la cónica afín real C de ecuación

$$-x^2 + 2xy + 2x + 2y + 2 = 0.$$

Vemos el plano afín $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ canónicamente inmerso en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ y llamaremos $\bar{C}$ a la completada proyectiva de C.

a) Clasifica C afínmente.

b) Halla su centro y asíntotas, si tiene, definiendo previamente lo que significan esos conceptos.

c) Demuestra que existen dos rectas horizontales que son tangentes a C.

d) Demuestra que existen rectas $L_i, i = 1, 2, 3$ en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ tales que la restricción de $\bar{C}$ al plano afín $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \setminus L_i$ sea, respectivamente, una hipérbola, elipse y parábola.

Pregunta teórica.

–Demuestra que, si $p = (1 : 0 \ldots : 0)$ es un punto de una cuádrica no degenerada $Q \subset \mathbb{P}^n_k$, entonces el hiperplano $H = \{x_n = 0\}$ es tangente a Q en p si y sólo si p es un punto singular de $Q \cap H$ como cuádrica en el espacio proyectivo H.

–Justifica que de aquí se deduce que, dado cualquier punto de una cuádrica no degenerada de un espacio proyectivo, entonces un hiperplano que pase por p es tangente a Q en p si y sólo si $Q \cap H$ es degenerada con vértice p como cuádrica en el espacio proyectivo H.

Véanse las instrucciones al dorso

–El examen durará 3 horas. Durante ese tiempo sólo se puede usar bolígrafo y papel, quedando prohibido el uso de calculadoras o cualquier dispositivo móvil, que deberá permanecer apagado.

–Tanto para la pregunta teórica como para la resolución de los ejercicios se puede usar cualquier cosa vista en clase. También puede darse por bueno cualquier apartado (aunque no se sepa resolver) para resolver otro, siempre que no se entre en bucle.

–La pregunta teórica contará 3 puntos y cada apartado de los ejercicios 1 punto. Es decir, la suma total de puntos posibles es 11, aprobando a partir de 5.

–**IMPORTANTE:** Un error realmente grave puede restar de golpe 10 puntos. Por tanto, se recomienda callarse y no disparar al azar en caso de no saber contestar una pregunta. Es mucho más probable aprobar con una nota entre 4 y 5 contestando sólo lo que se sabe que contestar todo a voleo a ver si se suman puntos.

–La calificaciones se comunicarán a través de GEA, y en el momento de la publicación de las mismas se pondrá también en GEA el plazo de revisión. Por tanto, hay que entrar en GEA para ver dicho plazo cuando se reciba el correo con la calificación.