

EXAMEN DE GEOMETRÍA ALGEBRAICA (Curso 2023/2024)

13 de diciembre de 2023

- 1) Sea  $I \subset k[X_0, X_1, X_2]$  el ideal generado por un polinomio homogéneo de grado cuatro. Demostrar que la dimensión de la parte homogénea de grado  $d$  de  $k[X_0, X_1, X_2]/I$  es  $4d - 2$  si  $d \geq 2$ .
- 2) Demostrar que la función de Hilbert de una cuártica plana  $C \subset \mathbb{P}_k^n$  es

$$h_C(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } d = 0 \\ 3 & \text{si } d = 1 \\ 4d - 2 & \text{si } d \geq 2 \end{cases}$$

- 3) Demostrar que el esquema de Hilbert de las cuárticas planas en  $\mathbb{P}_k^3$  es irreducible de dimensión 17.
- 4) Calcular el máximo grado  $d$  tal que toda superficie de grado  $d$  de  $\mathbb{P}_k^3$  contiene cuárticas planas.

**Observación.** Mientras no se entre en bucle, se puede utilizar el resultado de cualquiera de los apartados (se haya resuelto o no) para resolver otro apartado.