

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE GEOMETRÍA LINEAL, grupo m2

19 de junio de 2024

Pregunta teórica.

Si $\rho = [a, b, c, d]$, ¿cuánto vale, en función de ρ , la razón doble $[a, d, c, b]$? Usa la demostración que prefieras, pero debes definir cada concepto que uses y enunciar cada resultado previo que utilices.

Ejercicio 1) Consideramos las aplicaciones proyectivas $f, g : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ con matrices (en las referencias canónicas), dadas por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Queremos hallar los puntos p y las rectas L tales que $f(p) = g(p)$ y $f(L) = g(L)$. Para ello, se pide:

- (i) Demostrar en general (para f, g proyectividades cualesquiera) que $f(p) = g(p)$ si y sólo si p es un punto fijo de $g^{-1} \circ f$.
- (ii) Determinar la matriz de $g^{-1} \circ f$ respecto de la referencia canónica.
- (iii) Hallar los puntos $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ tales que $f(p) = g(p)$.
- (iv) Usando una variante de las ideas anteriores, calcular las rectas $L \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ tales $f(L) = g(L)$.

Ejercicio 2) Se considera en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ la cuádrica

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \mid z(1 - y) = xy\}$$

y sea $\bar{Q} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ su completado proyectivo. Se pide:

- (i) Demostrar que la cónica del infinito de Q es un par de rectas secantes, y calcular su punto de intersección O .
- (ii) Definir qué es plano tangente a \bar{Q} en un punto y comprobar que el plano tangente a la cuádrica \bar{Q} en O es precisamente $x_0 = 0$. Explicar intuitivamente por qué, apoyándose en la observación de que O es un punto singular de la cónica del apartado anterior.
- (iii) Clasificar \bar{Q} y Q .
- (iv) Clasificar las tres cónicas afines obtenidas al cortar respectivamente con los planos $x = 0$, $y = x$ y $z = 0$.
- (v) Interpretar qué ocurre al cortar con los planos $y = \text{constante}$.
- (vi) Hallar una recta tangente a \bar{Q} desde el punto $(0 : 1 : 1 : 0)$ (que es exterior a la cuádrica).

Véanse las instrucciones al dorso

–El examen durará 3 horas. Durante ese tiempo sólo se puede usar bolígrafo y papel, quedando prohibido el uso de calculadoras o cualquier dispositivo móvil, que deberá permanecer apagado.

–Tanto para la pregunta teórica como para la resolución de los ejercicios se puede usar cualquier cosa vista en clase. También puede darse por bueno cualquier apartado (aunque no se sepa resolver) para resolver otro, siempre que no se entre en bucle.

–La pregunta teórica contará 3 puntos y cada apartado de los ejercicios 0,8 puntos.

–**IMPORTANTE:** Un error realmente grave puede restar de golpe 10 puntos. Por tanto, se recomienda callarse y no disparar al azar en caso de no saber contestar una pregunta. Es mucho más probable aprobar con una nota entre 4 y 5 contestando sólo lo que se sabe que contestar todo a voleo a ver si se suman puntos.

–La calificaciones se comunicarán a través de GEA, y en el momento de la publicación de las mismas se pondrá también en GEA el plazo de revisión. Por tanto, hay que entrar en GEA para ver dicho plazo cuando se reciba el correo con la calificación.