GEOMETRÍA ALGEBRAICA (Curso 2024/2025)
HOJA DE PROBLEMAS Nº 1

1) Demostrar las siguientes propiedades de I y V:

(i) $I(\mathbb{A}^n_k) = \{0\}$, $I(\emptyset) = k[X_1, \dots, X_n]$, $V(\{0\}) = \mathbb{A}^n_k$, y $V(\{1\}) = \emptyset$.

(ii) Si $S \subset k[X_1, \dots, X_n]$ y $< S >$ denota al ideal generado por S, entonces $V(S) = V(< S >)$.

(iii) Si $S \subset S' \subset k[X_1, \dots, X_n]$, entonces $V(S') \subset V(S) \subset \mathbb{A}^n_k$.

(iv) Si $\{S_j\}_{j\in J}$ es una colección arbitraria de subconjuntos de $k[X_1, \dots, X_n]$, entonces $V(\bigcup_{j\in J} S_j) = \bigcap_{j\in J} V(S_j)$.

(v) Si $\{I_j\}_{j\in J}$ es una colección de ideales de $k[X_1, \dots, X_n]$, entonces $V(\sum_{j\in J} I_j) = \bigcap_{j\in J} V(I_j)$.

(vi) Si $I \subset k[X_1, \dots, X_n]$ es un ideal, entonces $V(I) = V(\sqrt{I})$.

(vii) Si $I, I' \subset k[X_1, \dots, X_n]$ son dos ideales, entonces $V(I \cap I') = V(II') = V(I) \cup V(I')$.

(viii) Si X es un conjunto afín, entonces $I(X)$ es el mayor ideal que define X.

(ix) Si $X \subset X' \subset \mathbb{A}^n_k$, entonces $I(X') \subset I(X)$.

(x) Si $\{X_j\}_{j\in J}$ es una colección de subconjuntos de $\mathbb{A}^n_k$, entonces $I(\bigcup_{j\in J} X_j) = \bigcap_{j\in J} I(X_j)$.

(xi) Para cada $X \subset \mathbb{A}^n_k$, se tiene $X \subset VI(X)$, y se da la igualdad si y sólo si X es un conjunto afín. En particular, $VI(X)$ es el mínimo conjunto afín que contiene a X.

(xii) Para cada $S \subset k[X_1, \dots, X_n]$, se tiene $S \subset IV(S)$ y $VIV(S) = V(S)$.

(1)**2)** Demostrar que $X = \{(t^3, t^4, t^5) \in \mathbb{A}^3_k \mid t \in k\}$ es un conjunto afín y calcular $I(X)$, demostrando que no se puede generar por sólo dos polinomios.

(2)**3)** Demostrar que $(Y, Z) \cap (X, Z) \cap (X - aZ, Y - bZ, Z^2)$ es una descomposición primaria minimal de (Z^2, XZ, YZ, XY) en $k[X, Y, Z]$, para cualesquiera valores $a, b \in k$.

4) Sea $I \subset k[X_1, \dots, X_n]$ un ideal tal que $V(I)$ es exactamente un punto $p \in \mathbb{A}^n_k$. Demostrar:

(i) El espacio vectorial $k[X_1, \dots, X_n]/I$ tiene dimensión finita.

(ii) Si $I' \supset I$ es otro ideal tal que I'/I es un espacio vectorial de dimensión uno, entonces, para cada hiperplano $V(h)$ que contiene a p y cada $f \in I'$ se tiene $hf \in I$.

(iii) $k[X_1, \dots, X_n]/I$ tiene dimensión uno si y sólo si $I = I(p)$.

(iv) $k[X_1, \dots, X_n]/I$ tiene dimensión dos si y sólo si, tras un cambio de coordenadas, se puede escribir $p = (0, \dots, 0)$ e $I = (X_1, \dots, X_{n-1}, X_n^2)$.

(v) La clase de f es una unidad en $k[X_1, \dots, X_n]/I$ si y sólo si $f(p) \neq 0$.

5) Sea $I \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ un ideal. Entonces $V(I)$ es un conjunto finito si y sólo si el espacio vectorial $k[X_1, \ldots, X_n]/I$ tiene dimensión finita. En este caso, hay un isomorfismo de k-álgebras $k[X_1, \ldots, X_n]/I \cong \bigoplus_i k[X_1, \ldots, X_n]/I_i$, donde $I = \bigcap_i I_i$ es la descomposición primaria de I.

(3)**6)** Demostrar que, si A es una k-álgebra que sea dominio de integridad y con dimensión finita como k-espacio vectorial, entonces A es un cuerpo.

(4)**7)** Encontrar ecuaciones homogéneas en $p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23}$ que caractericen cuándo la matriz $\begin{pmatrix} 0 & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ -p_{01} & 0 & p_{12} & p_{13} \\ -p_{02} & -p_{12} & 0 & p_{23} \\ -p_{03} & -p_{13} & -p_{23} & 0 \end{pmatrix}$ tiene rango menor o igual que dos.

(5)**8)** Demostrar que la aplicación (llamada *inmersión de Segre*) $\varphi_{n,m} : \mathbb{P}^n_k \times \mathbb{P}^m_k \to \mathbb{P}^{nm+n+m}_k$ definida por $\varphi_{n,m}((X_0 : \ldots : X_n), (Y_0 : \ldots : Y_m)) = (X_0Y_0 : X_0Y_1 : \ldots : X_nY_m)$ está bien definida y es inyectiva. Demostrar que la imagen de $\varphi_{n,m}$ (llamada *variedad de Segre*) se puede definir por medio de polinomios homogéneos en las variables de $\mathbb{P}^{nm+n+m}_k$.

(1)**9)** Demostrar que la aplicación (llamada *inmersión de Veronese*) $\nu_m : \mathbb{P}^n_k \to \mathbb{P}^{\binom{n+m}{m}-1}_k$ definida por $\nu_m(a_0 : \ldots : a_n) = (a_0^m : a_0^{m-1}a_1 : \ldots : a_n^m)$ está bien definida y es inyectiva. Demostrar que la imagen de ν_m (llamada *variedad de Veronese*) se puede definir mediante polinomios homogéneos en las variables de $\mathbb{P}^{\binom{n+m}{m}-1}_k$. Encontrar ecuaciones sencillas en los casos $n = 1$ (*curva racional normal*) y $m = 2$.

10) Comprobar que, haciendo $n = 1, m = 2$ en el ejercicio 9, la variedad de Veronese es una cónica no degenerada de $\mathbb{P}^2_k$. Concluir que toda cónica no degenerada sobre un cuerpo algebraicamente cerrado se puede parametrizar por polinomios homogéneos de grado dos en dos variables. Encontrar una parametrización de la cónica $X_0^2 + X_1^2 = X_2^2$.

11) Comprobar que, haciendo $n = m = 1$ en el ejercicio 8, la variedad de Segre es una cuádrica no degenerada $Q \subset \mathbb{P}^3_k$. Demostrar que por cada punto $\varphi_{1,1}(p, q)$ de Q pasan exactamente dos rectas contenidas en Q, precisamente las imágenes por $\varphi_{1,1}$ de $\{p\} \times \mathbb{P}^1$ y de $\mathbb{P}^1 \times \{q\}$. Concluir que cualquier cuádrica no degenerada de $\mathbb{P}^3_k$ sobre un cuerpo algebraicamente cerrado satisface que, por cada punto de ella, pasan exactamente dos rectas contenidas en la cuádrica.

12) Calcular $I(X)$ para cada una de las posibilidades en que X es un conjunto finito de a lo más cuatro puntos de $\mathbb{P}^2_k$.

13) Demostrar que $X = \{(t_0^4 : t_0^3t_1 : t_0t_1^3 : t_1^4) \in \mathbb{P}^3_k \mid (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}^1_k\}$ es un conjunto proyectivo y su ideal es $I(X) = (X_0X_3 - X_1X_2, X_1^3 - X_0^2X_2, X_2^3 - X_1X_3^2, X_1^2X_3 - X_0X_2^2)$