*GEOMETRÍA ALGEBRAICA (Curso 2024/2025)*
*HOJA DE PROBLEMAS Nº 2*

**1)** Calcular los siguientes polinomios de Hilbert:

(2)(i) De la unión de dos rectas disjuntas de $\mathbb{P}^3_k$.

(3)(ii) De la unión de dos rectas de $\mathbb{P}^3_k$ que se cortan en un punto.

(4)(iii) Del ideal $(X_3^2, X_1X_3, X_2X_3, X_1X_2) \subset k[X_0, X_1, X_2, X_3]$ (ver hoja 1, ejercicio 3).

(5)(iv) De la unión de una cónica de $\mathbb{P}^3$ y de un punto fuera de la cónica.

(1)**2)** Calcular el grado de las variedades de Segre y Veronese y buscar una interpretación geométrica.

**3)** Se llama *género aritmético* de una curva proyectiva $X$ a $P_a(X) := 1 - p_X(0)$.

(i) Demostrar que una curva plana de grado $d$ tiene género aritmético $(d-1)(d-2)/2$.

(2)(ii) Calcular el género aritmético de cualquier curva racional normal (ejercicio 9 de la hoja 1) y de la curva del ejercicio 13 de la hoja 1).

(3)**4)** Encontrar una descomposición primaria del ideal $(X_0X_3 - X_1X_2, X_1X_3 - X_2^2)$ de $k[X_0, X_1, X_2, X_3]$ e interpretarla geométricamente.

(4)**5)** Sea $X$ el conjunto del ejercicio 13 de la hoja 1. Demostrar que una descomposición primaria de $I(X)+(X_1-X_2)$ es $(X_0, X_1, X_2)\cap(X_1, X_2, X_3)\cap(X_0-X_1, X_1-X_2, X_2-X_3)\cap(X_0+X_1, X_1-X_2, X_2+X_3)\cap(X_1-X_2, X_3-\lambda X_2, X_2-\lambda X_0, X_0^3)$, para cualquier $\lambda \neq 0, 1, -1$. Encontrar la saturación del ideal.

**6)** Demostrar la igualdad $(X_0X_2, X_0X_3, X_1X_2, X_2X_3) + (X_1 - X_2) = (X_0, X_1, X_2) \cap (X_1, X_2, X_3) \cap (X_1 - X_2, X_0 - \lambda X_1, X_3 - \mu X_1, X_1^2)$ para cualesquiera $\lambda, \mu \in k$.

**7)** Demostrar que existe un monomorfismo natural $k[X_1, \ldots, X_n]_{\mathfrak{P}} \to k[[X_1, \ldots, X_n]]$, donde $\mathfrak{P} = (X_1, \ldots, X_n)$.

(5)**8)** Demostrar que, si $\varphi : A \to B$ es un homomorfismo de $k$-álgebras finitamente generadas, entonces la imagen inversa por $\varphi$ de un ideal maximal es necesariamente maximal.

(1)**9)** Dado el morfismo $\operatorname{Spec}(\mathbb{R}[X,Y]/(Y^2 - X)) \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ definido por la inclusión $\mathbb{R}[X] \hookrightarrow \mathbb{R}[X,Y]/(Y^2 - X)$, calcular la fibra de los elementos $(X - a)$ (con $a \in \mathbb{R}$) y $(X^2 + 1)$. Lo mismo para $\operatorname{Spec}(\mathbb{R}[X,Y]/(X^2 + Y^2 - 1)) \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$.

(2)**10)** Dar un morfismo de $D(T) \subset \operatorname{Spec} k[[T]]$ a $\mathbb{A}^n_k$ que no se pueda extender a $\operatorname{Spec} k[[T]]$. Demostrar que, en cambio, todo morfismo de $D(T)$ a $\mathbb{P}^n_k$ sí se puede extender.

(3)**11)** Dar un morfismo $\operatorname{Spec}(k[[T]]) \to \operatorname{Spec}\big(k[X,Y]/(XY-X-Y)\big)$ tal que la imagen de $(T)$ sea la clase de $(X,Y)$.

(4)**12)** Demostrar que la proyección $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m \to \mathbb{P}_k^m$ es un morfismo (identificando $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m$ con la variedad de Segre).

**13)** Demostrar que las inmersiones de Veronese son isomorfismos sobre su imagen.

**14)** Demostrar que si dos morfismos $\varphi, \psi : X \to Y$ coinciden en un abierto no vacío de $X$, $Y$ es separado y $X$ es irreducible, entonces $\varphi = \psi$.

(5)**15)** Demostrar que, si existe un morfismo no constante de $\mathbb{P}_k^n$ a $\mathbb{P}_k^m$, entonces $n \leq m$.

**16)** Identificando $V(P_{01}P_{23} - P_{02}P_{13} + P_{03}P_{12}) \subset \mathbb{P}_k^5$ con $\mathbb{G}(1,3)$, se pide:

(1) a) Demostrar que la recta definida por $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}_k^5$ está contenida en el plano $X_3 = 0$ si y sólo si $p_{03} = p_{13} = p_{23} = 0$.

(2) b) Demostrar que la recta definida por $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}_k^5$ pasa por el punto $(1:0:0:0)$ si y sólo si $p_{12} = p_{13} = p_{23} = 0$.

(3) c) Demostrar que el conjunto de puntos $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}_k^5$ que corresponden a las rectas de $\mathbb{P}_k^3$ que cortan a la recta $V(X_2, X_3)$ es un conjunto proyectivo de $\mathbb{P}_k^5$.

(4) d) Demostrar que el conjunto de puntos $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}_k^5$ que corresponden a las rectas de $\mathbb{P}_k^3$ que cortan a la cónica $V(X_3, X_0X_2 - X_1^2)$ es un conjunto proyectivo de $\mathbb{P}_k^5$.

(5) e) Demostrar que el conjunto de puntos $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}_k^5$ que corresponden a las rectas de $\mathbb{P}_k^3$ contenidas en la cuádrica $V(X_0X_3 - X_1X_2)$ es un conjunto proyectivo de $\mathbb{P}_k^5$.

**17)** Demostrar que la aplicación $f : V(X_3) \to \mathbb{P}_k^5$ que asocia a cada punto del plano $V(X_3) \subset \mathbb{P}_k^3$ la recta generada por él y por el punto $(0:0:0:1)$ (usando la identificación del ejercicio 16) es un morfismo. Encontrar una expresión para la inversa de $f$ allá donde esté definida.

**18)** Demostrar que la aplicación $V(P_{03}, P_{13}, P_{23}) \to \mathbb{P}_k^{3*}$ que asocia a cada recta contenida en $V(X_3) \subset \mathbb{P}_k^3$ (ver ejercicio 16) el plano generado por ella y el punto $(0:0:0:1)$ es un morfismo. Encontrar su inverso donde esté definido.

**19)** Demostrar que la aplicación $(\mathbb{P}_k^{3*} \times \mathbb{P}_k^{3*}) \setminus \Delta \to \mathbb{P}_k^5$ que asocia a cada par de planos distintos su recta intersección es un morfismo.

(1)**20)** Calcular el grado de $\mathbb{G}(1,4)$.

(2)**21)** Identificando $\mathbb{P}_k^{nm-1}$ con el proyectivizado del espacio de matrices $n \times m$, demostrar que el subconjunto $X_k \subset \mathbb{P}_k^{nm-1}$ correspondiente a las matrices de rango como mucho $k$ es irreducible de codimensión $(n-k)(m-k)$.