PROBLEMAS DE GEOMETRIA LINEAL (grupo M2)

Curso 2024/25, hoja 2

1) Encontrar una aplicación conforme que mande la circunferencia $X^2 + Y^2 = 1$ en la circunferencia de ecuación $X^2 + Y^2 - 2X - 2Y = 2$.

(10)**2)** Encontrar la ecuación del plano de $\mathbb{P}^3_k$ que pasa por el punto $(0 : 1 : 1 : 0)$ y contiene a la recta $\begin{cases} X_0 = X_2 + X_3 \\ X_1 = 2X_2 - X_3 \end{cases}$

(11)**3)** Parametrizar la recta de $\mathbb{P}^3_k$ obtenida como intersección de los planos

$$\Pi_1 =< (0 : 1 : 1 : 1), (1 : 0 : 1 : 0), (1 : -1 : 0 : 0) >$$

$$\Pi_2 =< (1 : 0 : 0 : 0), (0 : 2 : 1 : 1), (1 : 1 : -1 : 0) >$$

4) Determinar los enunciados duales de:

(12)a) Si dos rectas en $\mathbb{P}^4_k$ están contenidas en un plano, entonces se cortan en un punto.

(13)b) Si dos planos en $\mathbb{P}^4_k$ están contenidos en un hiperplano, entonces se cortan en una recta.

(14)c) Dos rectas cualesquiera de $\mathbb{P}^4_k$ están siempre contenidas en un mismo hiperplano.

d) Si una recta y un plano de $\mathbb{P}^4_k$ están en un mismo hiperplano, entonces se cortan en algún punto.

e) Si una recta y un plano de $\mathbb{P}^4_k$ tienen algún punto en común, entonces están contenidos en algún hiperplano común.

f) Si dos planos en $\mathbb{P}^5_k$ están contenidos en un subespacio de dimensión tres, entonces se cortan en una recta.

g) Si dos planos en $\mathbb{P}^5_k$ están contenidos en un hiperplano, entonces se cortan en un punto.

(15)**5)** Demostrar que, dadas dos rectas disjuntas r y r' de $\mathbb{P}^3_k$ y un punto P que no esté en ninguna de ellas, existe una única recta ℓ que pase por P y corte a las rectas r y r' ¿Es cierto el resultado análogo en el espacio afín? Calcular la recta ℓ anterior cuando $k = \mathbb{R}$, $P = (0 : 1 : -1 : 1)$, y las rectas r y r' tienen ecuaciones

$$r : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = X_0 + X_3 \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} X_2 = 0 \\ X_0 = X_3 \end{cases}$$

(1)(2)**6)** Demostrar que la aplicación proyectiva $f : \mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^3_k$ definida por

$$f(t_0 : t_1) = (t_0 - t_1 : t_1 + 2t_0 : 2t_1 - t_0 : t_0 + t_1)$$

es inyectiva. Calcular las ecuaciones del subespacio lineal $f(\mathbb{P}^1)$.

7) Dado un espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$ y un hiperplano suyo $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$, sea $\mathbb{A} := \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W)$.

(i) Fijado $v_0 \in V \setminus W$, demostrar que cada punto $p \in \mathbb{A}$ es la clase de un único vector de la forma $v_p = v_0 + w_p$.

(ii) Demostrar que la aplicación $\varphi_{v_0} : \mathbb{A} \times W \to \mathbb{A}$ que manda cada (p, w) a la clase de $v_p + w$ dota a $\mathbb{A}$ de estructura de espacio afín con espacio vectorial asociado W.

(iii) Demostrar que la estructura anterior no depende de la elección de v_0, en el sentido de que, elegido otro vector $v_0' \in V \setminus W$, si $\lambda \in k \setminus \{0\}$ es el único elemento tal que $v_0' - \lambda v_0 \in W$, entonces la estructura de espacio afín obtenida con este nuevo v_0' es la que en el Ejercicio 4 de la hoja 1 denotábamos por $\mathbb{A}_\lambda$, y por tanto es un espacio afín isomorfo a $\mathbb{A}$.

8) Sea $k = \mathbb{Z}_p$ el cuerpo finito de p elementos. Calcular el número de puntos de $\mathbb{P}^2_k$. ¿Cuántas rectas hay en $\mathbb{P}^2_k$ y cuántos puntos contiene cada una?

(3)(4)**9)** Sea el haz de planos de $\mathbb{P}^3_\mathbb{R}$ de ecuaciones $U_0 + U_1 + U_2 = U_2 + U_3 = 0$. Calcular la recta de $\mathbb{P}^3_\mathbb{R}$ contenida en todos los planos del haz.

(5)(6)**10)** Dar la ecuación de una recta L_∞ de $\mathbb{P}^2_k$ de forma que los puntos $A = (1 : 0 : 1)$, $B = (1 : -1 : 0)$, $C = (0 : 2 : 1)$ y $D = (0 : 0 : 1)$ sean los vértices de un paralelogramo en el plano afín $\mathbb{P}^2_\mathbb{R} \setminus L_\infty$ (de lados AB, BC, CD, DA). ¿Es única la recta L_∞ en estas condiciones?

(7)(8)**11)** Sean $P = (1 : 0 : 0)$, $Q = (0 : 0 : 1)$ y L la recta $X_0 + X_1 + X_2 = 0$. En el plano afín $\mathbb{P}^2_\mathbb{R} \setminus L$ se considera la traslación g que transforma P en Q. Calcular la imagen por g del punto $(1 : 0 : 1)$.

(9)(10)**12)** Demostrar que no existe ninguna aplicación proyectiva $\mathbb{P}^2_k \dashrightarrow \mathbb{P}^3_k$ que mande respectivamente los puntos $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1), (1 : 1 : 1)$ a los puntos $(1 : 0 : 0 : 0), (0 : 1 : 0 : 0), (0 : 0 : 1 : 0), (0 : 0 : 0 : 1)$, pero que existen infinitas aplicaciones proyectivas $\mathbb{P}^2_k \dashrightarrow \mathbb{P}^1_k$ que mandan respectivamente los puntos $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1), (1 : 1 : 1)$ a los puntos $(1 : 0), (0 : 1), (1 : 1), (1 : -1)$.