PROBLEMAS DE GEOMETRIA LINEAL (grupo M2)
Curso 2024/25, hoja 3

(11)(12)**1)** Dar las ecuaciones de la aplicación proyectiva $f : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ que es la extendida de la aplicación afín $f' : \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ definida por $f'(1,0) = (1,0,2)$, $f'(1,2) = (0,1,1)$ y $f'(2,0) = (2,0,0)$.

2) Sea $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ una aplicación afín y sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ sistemas de referencia de $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ respectivamente. Demostrar que existe una matriz

$$\begin{pmatrix} a_{00} & \dots & a_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m0} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

que satisface $a_{0j} + \dots + a_{mj} = 1$ para todo $j = 0, \dots, n$ y tal que las coordenadas baricéntricas $x'_0, \dots x'_m$ respecto de $\mathcal{R}'$ de la imagen por f de cada punto de coordenadas baricéntricas $x_0, \dots, x_n$ respecto de $\mathcal{R}$ satisfacen

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & \dots & a_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m0} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

3) Demostrar que, dada una referencia afín $\mathcal{R}$ de un espacio afín $\mathbb{A}$ de dimensión n, la aplicación $\mathbb{A} \to \{X_0 + \dots + X_n = 1\} \subset \mathbb{A}^{n+1}_k$ que manda cada punto de $\mathbb{A}$ a sus coordenadas baricéntricas respecto de $\mathcal{R}$ es una afinidad.

(13)(14)**4)** Encontrar la parametrización de la recta $X_0 - X_1 + X_2 = 0$ tal que los valores $(1:0)$, $(0:1)$ y $(1:1)$ de los parámetros se correspondan respectivamente con los puntos $(2:3:1)$, $(3:5:2)$ y $(0:1:1)$.

(15)(1)**5)** Calcular ecuaciones de la proyectividad de la recta $X_0 - X_1 + X_2 = 0$ sobre la recta $X_1 - X_2 = 0$ que transforma los puntos $(1:1:0)$, $(2:3:1)$ y $(1:0:-1)$ respectivamente en $(1:0:0)$, $(1:1:1)$ y $(1:-1:-1)$.

(2)(3)**6)** Sea el plano afín obtenido al quitar a $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ la recta $X_1 = X_2$. Determinar la razón de la homotecia de centro $(1:0:-1)$ que transforma el punto $(1:-1:0)$ en el punto $(0:1:-1)$. Dar las ecuaciones de la extensión proyectiva de dicha homotecia.

7) Una cámara fotográfica aérea toma una fotografía de un coche que va por una carretera recta en un terreno llano en dirección a un cruce. Antes del cruce hay dos señales de tráfico a cuatro y dos kilómetros del cruce. En la foto las señales están a 3cm y 1cm del cruce, y el coche está a $\frac{3}{7}$cm del cruce. ¿A qué distancia está el coche del cruce de la carretera?

8) Sea K un cuerpo y sea $j : K\backslash\{0,1\} \to K$ la función definida por $j(\rho) = \frac{(\rho^2-\rho+1)^3}{\rho^2(\rho-1)^2}$

a) Demostrar que $j(\rho) = j(\frac{1}{\rho}) = j(1-\rho) = j(\frac{1}{1-\rho}) = j(\frac{\rho-1}{\rho}) = j(\frac{\rho}{\rho-1})$.

b) Demostrar que, si $\rho \neq 0, 1$, los números $\rho, \frac{1}{\rho},\ 1-\rho,\ \frac{1}{1-\rho},\ \frac{\rho-1}{\rho},\ \frac{\rho}{\rho-1}$ son todos distintos si y sólo si $\rho \neq -1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

c) Deducir de los apartados anteriores que, si $j(\rho') = j(\rho)$, entonces ρ' es uno de los valores $\rho, \frac{1}{\rho},\ 1-\rho,\ \frac{1}{1-\rho},\ \frac{\rho-1}{\rho},\ \frac{\rho}{\rho-1}$.

d) Concluir que un conjunto no ordenado de cuatro puntos alineados A, B, C, D es proyectivamente equivalente a otro conjunto de puntos alineados A', B', C', D' si y sólo si $j([A,B,C,D]) = j([A',B',C',D'])$.

9) Calcular la razón doble de las cuatro rectas obtenidas al unir el punto $(0:0:1)$ con cada uno de los puntos $(1:0:1)$, $(1:-1:1)$, $(1:1:2)$ y $(1:2:-1)$. Determinar el conjunto de puntos $p \in \mathbb{P}^2$ tales que la razón doble de las rectas obtenidas al unir p con cada uno de los puntos $(1:0:1)$, $(1:-1:1)$, $(1:1:2)$ y $(1:2:-1)$ es la misma que la obtenida para el punto $(0:0:1)$.

(4)(5)**10)** Demostrar que los puntos $(1:1:0)$, $(0:1:0)$, $(0:1:2)$ y $(1:0:-1)$ forman una referencia proyectiva de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Calcular en dicha referencia las coordenadas de los puntos $(1:1:-2)$ y $(-1:1:1)$.

11) Dada una referencia proyectiva $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ de $\mathbb{P}^2_K$, demostrar que $\{p_2, p_3, p_1, p_0\}$ es también una referencia proyectiva, y dar las ecuaciones del cambio de coordenadas de una a otra.

(6)(7)**12)** Dar las ecuaciones del cambio de coordenadas de la referencia de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ determinada por los puntos $(1:-1:0)$, $(0:2:-1)$, $(1:-1:1)$ y $(0:-1:1)$ a la referencia formada por los puntos $(1:0:1)$, $(1:1:1)$, $(0:1:1)$ y $(2:2:3)$. Encontrar en esta segunda referencia la ecuación de la recta cuya ecuación respecto de la primera referencia es $X_2 = 2X_0 + X_1$.

(8)(9)**13)** Encontrar una referencia proyectiva de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ de forma que las rectas cuyas ecuaciones respecto de la referencia canónica son $X_2 = X_0 + X_1$, $X_0 = X_2$ y $X_1 = 2X_0$ tengan respectivamente ecuaciones $X'_0 = 0$, $X'_1 = 0$ y $X'_2 = 0$ respecto de la nueva referencia. ¿Es único dicho sistema de referencia?

(10)(11)**14)** Encontrar las ecuaciones de la aplicación proyectiva $f : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ que satisface

$$
\begin{aligned}
f(1:-1:0) &= (1:0:1)\\
f(0:2:-1) &= (1:1:1)\\
f(1:-1:1) &= (0:1:1)\\
f(0:-1:1) &= (2:2:3)
\end{aligned}
$$