

GEOMETRÍA ALGEBRAICA (Curso 2024/2025)
HOJA DE PROBLEMAS N° 3

- (3)1) Identificando $\mathbb{P}_k^{\frac{n(n+3)}{2}}$ con el proyectivizado del espacio de matrices simétricas de orden $(n+1)$, demostrar que el subconjunto $X_k \subset \mathbb{P}_k^{\frac{n(n+3)}{2}}$ correspondiente a las matrices de rango como mucho k es irreducible, y calcular su codimensión.
- (4)2) Demostrar que una hipersuperficie general de grado $d \geq 6$ de \mathbb{P}^4 no contiene rectas.
- (5)3) Demostrar que el esquema de Hilbert de las cónicas en \mathbb{P}_k^4 es irreducible de dimensión 11 y concluir que una hipersuperficie general de grado $d \geq 6$ de \mathbb{P}^4 no contiene cónicas.
- (1)4) Demostrar que el esquema de Hilbert de las cúbicas alabeadas en \mathbb{P}_k^3 es irreducible de dimensión 12 y encontrar a partir de qué grado d una superficie general de grado d en \mathbb{P}_k^3 no contiene cúbicas alabeadas.
- (2)5) Demostrar que el esquema de Hilbert de las cúbicas planas en \mathbb{P}_k^3 es irreducible de dimensión 12 y encontrar a partir de qué grado d una superficie general de grado d en \mathbb{P}_k^3 no contiene cúbicas planas.
- (3)6) Demostrar que el esquema de Hilbert de las cúbicas alabeadas en \mathbb{P}_k^4 es irreducible de dimensión 16 y concluir que una hipersuperficie general de grado $d \geq 6$ de \mathbb{P}^4 no contiene cúbicas alabeadas.
- (4)7) Para cada $k, n \in \mathbb{N}$, demostrar que existe $d(n, k)$ tal que, para todo $d \geq d(n, k)$, existen hipersuperficies de grado d en \mathbb{P}_k^n que no contienen subespacios lineales de dimensión k .
- (5)8) Calcular la dimensión del conjunto de espacios lineales de dimensión k de \mathbb{P}_k^n que cortan a un conjunto proyectivo fijo irreducible de dimensión r .
- 9) Demostrar que el conjunto de espacios lineales de dimensión k de \mathbb{P}_k^n que cortan a un espacio lineal fijo de dimensión r en un subespacio de dimensión al menos s (con $r + k - n \leq s \leq \min\{k, r\}$) es un conjunto proyectivo irreducible de $\mathbb{G}(k, n)$ de codimensión $(s+1)(n-k-r+s)$ en $\mathbb{G}(k, n)$.
- 10) Demostrar que las variedades de Segre y Veronese son lisas.
- 11) Demostrar que es lisa la curva del ejercicio 13 de la Hoja 1.

- 12) Demostrar que el morfismo $\mathbb{A}_k^1 \rightarrow V(Y^2 - X^3)$ definido por $t \mapsto (t^2, t^3)$ no es un isomorfismo.
- 13) Sea C la cónica de ecuación $X_1^2 + X_0X_2 = 0$ definida sobre un cuerpo de característica dos. Demostrar que C es lisa, y que existe un punto de \mathbb{P}_k^2 por el que pasan todas las rectas tangentes a C .
- 14) Demostrar que el conjunto de hipersuperficies singulares de \mathbb{P}_k^n de grado d forma una hipersuperficie dentro de $\mathbb{P}_k^{\binom{n+d}{d}-1}$. Calcular la dimensión del conjunto de hipersuperficies reducibles.
- 15) Sea $X \subset \mathbb{P}_k^n$ una variedad proyectiva lisa de dimensión r . Demostrar que la aplicación $\varphi : X \rightarrow \mathbb{G}(r, n)$ que asocia a cada punto de X su espacio tangente es una aplicación regular (llamada *aplicación de Gauss*).
- 16) Identificando \mathbb{P}_k^5 con el conjunto de cónicas de \mathbb{P}_k^2 , demostrar que el conjunto $X \subset \mathbb{P}_k^5$ de cónicas degeneradas tiene como lugar singular el conjunto de rectas dobles. Dado un par de rectas, describir geoméricamente cuál es en \mathbb{P}_k^5 el hiperplano tangente a X en el punto correspondiente. Dada una recta doble, describir geoméricamente cuál es en \mathbb{P}_k^5 el cono tangente a X en el punto correspondiente.
- 17) Se considera $X' = \{(X_0 : X_1 : X_2), (a_0 : a_1)\} \in \mathbb{P}_k^2 \times \mathbb{P}_k^1 \mid a_0X_1 = a_1X_0\}$ y sean p_1 y p_2 sus respectivas proyecciones a \mathbb{P}_k^2 y \mathbb{P}_k^1 . Sea $\varphi : \mathbb{P}_k^2 \times \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^5$ la inmersión de Segre. Sea $X = \varphi(X')$.
- Demostrar que X es la intersección de la variedad de Segre con un hiperplano $H \subset \mathbb{P}_k^5$.
 - Demostrar que la imagen por φ de $E = p_1^{-1}(0 : 0 : 1)$ es una recta L de \mathbb{P}_k^5 .
 - Demostrar que $\varphi(p_2^{-1}(a))$ es una recta de \mathbb{P}_k^5 para cualquier punto $a \in \mathbb{P}_k^1$.
 - Demostrar que $\varphi(p_1^{-1}(\ell))$ es una cónica de \mathbb{P}_k^5 para cualquier recta $\ell \subset \mathbb{P}_k^2$ y que dicha cónica es no degenerada si y sólo si ℓ no contiene al punto $(0 : 0 : 1)$. En este último caso, probar que el plano en que está la cónica genera, junto a la recta L , el hiperplano H de \mathbb{P}_k^5 .
 - Concluir que X se puede definir de la siguiente forma: Se considera una recta $L \subset H$ y un plano $\Pi \subset H$ de un hiperplano $H \subset \mathbb{P}_k^5$ de forma que $\langle L, \Pi \rangle = H$. Se considera una cónica $Q \subset \Pi$ no degenerada y un isomorfismo $\alpha : L \rightarrow Q$. Entonces X es la unión de las rectas $\langle P, \alpha(P) \rangle$ cuando P recorre L .
- 18) Estudiar si la variedad dual de $\mathbb{G}(1, 4) \subset \mathbb{P}^9$ es una hipersuperficie de \mathbb{P}^{9*} .