

PROBLEMAS DE GEOMETRIA LINEAL (grupo M2)

Curso 2024/25, hoja 4

1) Demostrar que los planos de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ de ecuaciones $\Pi_0 : X_0 = X_1$, $\Pi_1 : X_1 = X_2$, $\Pi_2 : X_2 = X_3$, $\Pi_3 : X_0 = -X_3$, $\Pi_4 : X_0 = 0$ forman una referencia proyectiva de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{3*}$. Calcular en dicha referencia las ecuaciones del haz de planos que contienen a la recta $X_0 - X_2 = X_1 - X_3 = 0$.

2) Identificando cada punto $(a_0 : a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5) \in \mathbb{P}_k^5$ con la cónica de \mathbb{P}_k^2 de ecuación $a_0X_0^2 + a_1X_0X_1 + a_2X_0X_2 + a_3X_1^2 + a_4X_1X_2 + a_5X_2^2 = 0$, comprobar que el hiperplano de \mathbb{P}_K^5 de ecuación $a_1 = 0$ no corresponde al conjunto de cónicas que pasen por un punto fijado de \mathbb{P}_k^2 .

(12)(13) 3) Encontrar la ecuación de una cónica que pase por los puntos $(1 : 0 : 1)$, $(0 : 0 : 1)$, $(1 : -1 : 1)$, $(1 : 1 : 2)$ y $(1 : 2 : -1)$.

(14)(15) 4) Encontrar todas las cónicas degeneradas del haz generado por $X_0X_2 = X_1^2$ y $X_0X_1 + 2X_0X_2 = X_1X_2 + 2X_1^2$.

5) Calcular la intersección de las cónicas $X_0^2 + 2X_0X_1 + 2X_0X_2 + X_1X_2 + X_2^2 = 0$ y $X_0^2 + 2X_0X_1 + 3X_0X_2 + 2X_1X_2 + 2X_2^2 = 0$.

(1)(2)(3) 6) Dada la aplicación proyectiva $f : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ definida por

$$f(x_0 : x_1 : x_2) = (x_1 - x_2 : x_0 + x_1 + x_2 : x_0 - x_2)$$

encontrar las ecuaciones de f respecto del sistema de referencia del ejercicio 10 de la hoja 3.

7) Calcular las ecuaciones de la aplicación proyectiva $f : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{3*}$ que transforma:

$$\begin{aligned} (1 : 1 : 0) &\mapsto \{X_0 = 0\} \\ (1 : -1 : 0) &\mapsto \{X_1 = 0\} \\ (0 : 1 : 1) &\mapsto \{X_2 - X_3 = 0\} \\ (0 : -1 : 1) &\mapsto \{X_0 - X_1 = X_2 - X_3\} \end{aligned}$$

Demostrar que la imagen de f consiste en el conjunto de planos que pasan por un punto de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$, y calcular dicho punto.

8) Demostrar que una proyectividad $f : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ tal que $f(p) = q$ y $f(q) = p$ para dos puntos distintos $p, q \in \mathbb{P}_k^1$ satisface que $f \circ f = id_{\mathbb{P}_k^1}$.

- 9) Calcular la ecuación de una cónica que pase por los puntos $(1 : 0 : 0)$, $(1 : 1 : 0)$, $(1 : -1 : 1)$ y sea tangente a la recta $X_0 = 0$ en el punto $(0 : 1 : 1)$. ¿Es única dicha cónica?
- (4)(5)(6)10) Determinar las rectas tangentes a la cónica de ecuación $X_0^2 + X_1X_2 + X_2^2 = 0$ que pasan por el punto $(1 : 1 : 0)$.
- 11) Calcular las tangentes comunes a las cónicas $X_0^2 - 2X_0X_1 + 2X_0X_2 + X_1^2 = 0$ y $X_0X_2 - X_1^2 = 0$.
- 12) Dar la ecuación de la cónica que es tangente a las rectas $X_2 = 0$, $X_0 - X_1 + X_2 = 0$, $X_0 + X_2 = 0$, $X_0 + X_1 + 2X_2 = 0$ y $X_0 + 2X_1 - X_2 = 0$.
- 13) Encontrar una ecuación en función de $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ que caracterice cuándo la recta $X_2 = 0$ es tangente a la cónica de ecuación $a_0X_0^2 + a_1X_0X_1 + a_2X_0X_2 + a_3X_1^2 + a_4X_1X_2 + a_5X_2^2 = 0$.
- 14) Calcular los puntos de intersección de la cónica $X_0X_2 - X_1^2 = 0$ y la curva de ecuación $X_0X_2^2 - X_1^3 = 0$.
- 15) Dar una parametrización de la cónica $X_0X_2 = X_1^2$ tal que $(1 : 0)$, $(0 : 1)$, $(1 : 1)$ correspondan respectivamente a los puntos $(1 : 1 : 1)$, $(1 : -1 : 1)$, $(1 : 0 : 0)$.
- 16) Calcular la razón doble de los puntos $(1 : 1 : 1)$, $(1 : -1 : 1)$, $(1 : 0 : 0)$, $(1 : 2 : 4)$ de la cónica $X_0X_2 = X_1^2$.
- 17) Clasificar las siguientes cónicas proyectivas reales, calculando las rectas (reales o imaginarias) que contengan y parametrizando las que sean no degeneradas reales:
- (7)(8)(9)a) $4X_0^2 - 4X_0X_1 + 12X_0X_2 + X_1^2 - 6X_1X_2 + 9X_2^2 = 0$.
- b) $X_0^2 - 3X_0X_1 + 4X_0X_2 + 2X_1^2 - 5X_1X_2 + 3X_2^2 = 0$
- c) $X_0^2 + 2X_0X_1 + 2X_0X_2 + X_1X_2 + X_2^2 = 0$
- d) $2X_0^2 - 2X_0X_1 + 5X_1^2 + 6X_1X_2 + 2X_2^2 = 0$
- e) $X_0^2 - 2X_0X_1 - X_1^2 + X_1X_2 - X_2^2 = 0$.
- 18) Clasificar, según los valores de t , la cónica afín real de ecuación
- $$1 - 2X + 2Y + tX^2 + 2XY + tY^2 = 0.$$
- 19) Clasificar las siguientes cónicas afines reales y determinar, cuando existan, su centro y asíntotas:
- a) $X^2 + Y^2 - 6X + 4Y + 12 = 0$

(10)(11)(12)b) $X^2 + 2XY - 3Y^2 - 4Y = 0$

c) $2X^2 - 13XY + 15Y^2 + 5X - 11Y + 7 = 0$

d) $3 - 5X^2 - 3Y^2 - 4X + 4Y - 4XY = 0$

(13)(14)(15)**20)** Encontrar las parábolas que pasan por los puntos $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(-1, 1)$ y $(1, 1)$.

21) Clasificar, según los valores de t , la cónica euclídea $1 - 2X + 2Y + tX^2 + 2XY + tY^2 = 0$. Calcular el centro y los ejes para $t = 0$.

22) Clasificar las siguientes cónicas del plano euclídeo, calculando, cuando existan, su centro y ejes:

a) $5 + 5X^2 + 5Y^2 + 4X + 4Y + 4XY = 0$

b) $3 - 5X^2 - 3Y^2 - 4X + 4Y - 4XY = 0$

c) $X - XY + Y = 0$

d) $2 + 4X^2 + Y^2 - 4X - 2Y - 4XY = 0$

23) Calcular los ejes y focos de las cónicas euclídeas:

a) $X - XY + Y = 0$

b) $2 + 4X^2 + Y^2 - 4X - 2Y - 4XY = 0$.

24) Estudiar si son semejantes las cónicas euclídeas $X^2 + 4XY - Y^2 = 1$ y $X - XY + Y = 0$.

25) Clasificar las siguientes cuádricas del espacio afín real, calculando, cuando exista, su centro:

a) $X^2 + Y^2 + Z^2 + 2XY - 6XZ + 2YZ + 2X - 6Y + 2Z + 1 = 0$

b) $X^2 + Y^2 + Z^2 - 4XZ - 4Y + 2 = 0$

c) $Y^2 + 4XZ + 1 = 0$

d) $7X^2 - 8Y^2 - 8Z^2 + 8XY - 8XZ - 2YZ - 16X + 14Y - 14Z - 5 = 0$

e) $X^2 + 2XY + 2XZ - 2X + 2Y + 2Z - 2 = 0$

26) Clasificar, según el valor de α , la cuádrica afín $X^2 + \alpha Y^2 + Z^2 + 2XY + 2(2\alpha - 1)XZ + 2YZ + 2X + 2Y + 2Z + \alpha = 0$.