

EXAMEN FINAL DE GEOMETRÍA LINEAL, grupo m2

14 de enero de 2025

Preguntas teóricas.

(i) Decide si es cierto el enunciado:

En todo espacio proyectivo de dimensión 3, si a, b, c, d son puntos distintos dos a dos y tales que las rectas $\langle a, b \rangle$ y $\langle c, d \rangle$ se cortan, entonces los cuatro puntos son coplanarios

y enuncia el resultado dual.

(ii) Demuestra que todas las cónicas afines con asíntotas $x = 0$ e $y = 0$ son las cónicas de ecuación $xy = \lambda$ con $\lambda \neq 0$.

(iii) Concluye que, si C es una cónica de asíntotas $ax + by + c = 0$ y $a'x + b'y + c' = 0$, entonces tiene ecuación $(ax + by + c)(a'x + b'y + c') = \lambda$, con $\lambda \neq 0$.

Ejercicio práctico: Identificando plano afín real $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ con $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \setminus \{X_0 = 0\}$, se pide:

a) Determinar las asíntotas de cualquier cónica no degenerada $C \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ que tiene puntos del infinito $P = (0 : 1 : 3)$, $Q = (0 : 1 : 0)$ y centro $C = (2, 1)$ y decir qué tipo de cónica es.

b) Si además imponemos la condición de que la cónica C anterior pase por $O = (0, 0)$, demostrar que la completada proyectiva de C es

$$\bar{C} : 3x_0x_1 + 4x_0x_2 - 3x_1x_2 + x_2^2 = 0.$$

c) Dar una parametrización $\varphi : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow \Omega(O)$ del haz de rectas que pasan por O de forma que

$$\varphi(1 : 0) = \langle O, P \rangle$$

$$\varphi(0 : 1) = \langle O, Q \rangle$$

$$\varphi(1 : 1) = T_O\bar{C}$$

donde $T_O\bar{C}$ quiere decir la recta tangente a \bar{C} en el punto O .

d) Si B es el otro punto de C en la recta $x = 0$, definir qué quiere decir la razón doble $[P, Q, O, B]$ como puntos de \bar{C} , y calcularla.

e) Dar la ecuación de \bar{C} en la referencia dada por los puntos $\{O, P, Q; B\}$.

f) Encontrar rectas $L, L' \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ tales que $\bar{C} \setminus L$ y $\bar{C} \setminus L'$ sean respectivamente una parábola y una elipse en los planos afines $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \setminus L$ y $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \setminus L'$.

g) ¿Qué recta $L'' \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ habría que tomar para que $\bar{C} \setminus L''$ sea una cónica de centro $(0 : 0 : 1)$ en el plano afín $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \setminus L''$?

Véanse las instrucciones al dorso

–El examen durará 3 horas. Durante ese tiempo sólo se puede usar bolígrafo y papel, quedando prohibido el uso de calculadoras o cualquier dispositivo móvil, que deberá permanecer apagado.

–Tanto para la parte teórica como para la práctica se puede usar cualquier cosa vista en clase. También puede darse por bueno cualquier apartado (aunque no se sepa resolver) para resolver otro, siempre que no se entre en bucle.

–Cada pregunta vale un punto.

–**IMPORTANTE:** Un error realmente grave puede restar de golpe 10 puntos. Por tanto, se recomienda callarse y no disparar al azar en caso de no saber contestar una pregunta. Es mucho más probable aprobar con una nota entre 4 y 5 contestando sólo lo que se sabe que contestar todo a voleo a ver si se suman puntos.

–La calificaciones se comunicarán a través de GEA, y en el momento de la publicación de las mismas se pondrá también en GEA el plazo de revisión. Por tanto, hay que entrar en GEA para ver dicho plazo cuando se reciba el correo con la calificación.