

EXAMEN FINAL DE GEOMETRÍA LINEAL, grupo m2

18 de junio de 2025

Preguntas teóricas.

(i) Dualiza la siguiente afirmación y determina su veracidad:

Tres rectas de \mathbb{P}_k^3 que se intersecan dos a dos pero no las tres a la vez son coplanarias.

Razona si son ciertos los siguientes enunciados:

- (ii) Dados tres puntos A_0, A_1, A_2 no alineados de \mathbb{P}_k^2 y una recta r que no pasa por ninguno de ellos, existe un único punto A_3 tal que $A_0A_1A_2A_3$ es un paralelogramo en el plano afín $\mathbb{P}_k^2 \setminus r$.
- (iii) Una cónica proyectiva compleja corta a cualquier recta.

Ejercicios prácticos:

1) Se considera la cónica proyectiva real

$$C : x_0^2 + 4x_0x_2 - 2x_1x_2 = 0$$

y el haz de cónicas (al que pertenece C):

$$t_0x_0^2 + 4t_1x_0x_2 - 2t_1x_1x_2 = 0, \quad (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1.$$

- a) Halla las rectas tangentes a la cónica C que pasan por $(1 : 2 : 0)$.
- b) Dadas las rectas $r : x_1 = 0$ y $s : 2x_0 - x_1 = 0$, clasifica las cónicas afines inducidas por C en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \setminus r$ y $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \setminus s$, respectivamente.
- c) Decide si el haz contiene cónicas singulares y, en caso afirmativo, halla sus ecuaciones y clasifícalas.
- d) Encuentra los puntos comunes a todas las cónicas del haz.
- e) Razona si existe una cónica del haz y una recta ℓ tal que la cónica inducida en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \setminus \ell$ son dos rectas paralelas.
- 2) Sean $f : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ una proyectividad y $r \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ una recta tales que f induce en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \setminus r$ una homotecia de razón 3 que transforma los puntos $A_1 = (-1 : 2 : 1)$ y $A_2 = (1 : -3 : 0)$ en $f(A_1) = (-1 : 6 : 5)$ y $f(A_2) = (1 : 3 : 2)$, respectivamente.
- a) Demuestra que el centro de la homotecia es $(1 : 0 : 1)$.
- (b) Demuestra que la recta r es $x_1 = x_2$ (puede ayudar un cálculo de razón doble).
- c) Halla una matriz de f respecto de la referencia proyectiva canónica.

Véanse las instrucciones al dorso

–El examen durará 3 horas. Durante ese tiempo sólo se puede usar bolígrafo y papel, quedando prohibido el uso de calculadoras o cualquier dispositivo móvil, que deberá permanecer apagado.

–Tanto para la parte teórica como para la práctica se puede usar cualquier cosa vista en clase. También puede darse por bueno cualquier apartado (aunque no se sepa resolver) para resolver otro, siempre que no se entre en bucle.

–Cada apartado vale un punto; aunque la suma de puntos sea 11, la nota final será la suma de los puntos obtenidos, aprobando por tanto a partir de 5).

–**IMPORTANTE:** Un error realmente grave puede restar de golpe 10 puntos. Por tanto, se recomienda callarse y no disparar al azar en caso de no saber contestar una pregunta. Es mucho más probable aprobar con una nota entre 4 y 5 contestando sólo lo que se sabe que contestar todo a voleo a ver si se suman puntos.

–La calificaciones se comunicarán a través de GEA, y en el momento de la publicación de las mismas se pondrá también en GEA el plazo de revisión. Por tanto, hay que entrar en GEA para ver dicho plazo cuando se reciba el correo con la calificación.