

*GEOMETRÍA ALGEBRAICA (Curso 2025/2026)*  
*HOJA DE PROBLEMAS N<sup>o</sup> 2*

- 1) Calcular los siguientes polinomios de Hilbert:
  - (3)(i) De la unión de dos rectas disjuntas de  $\mathbb{P}_k^3$ .
  - (4)(ii) De la unión de dos rectas de  $\mathbb{P}_k^3$  que se cortan en un punto.
  - (1)(iii) Del ideal  $(X_3^2, X_1X_3, X_2X_3, X_1X_2) \subset k[X_0, X_1, X_2, X_3]$  (ver hoja 1, ejercicio 3).
  - (2)(iv) De la unión de una cónica de  $\mathbb{P}^3$  y de un punto fuera de la cónica.
- (3)2) Calcular el grado de las variedades de Segre y Veronese y buscar una interpretación geométrica.
- 3) Se llama *género aritmético* de una curva proyectiva  $X$  a  $P_a(X) := 1 - p_X(0)$ .
  - (i) Demostrar que una curva plana de grado  $d$  tiene género aritmético  $(d-1)(d-2)/2$ .
  - (4)(ii) Calcular el género aritmético de cualquier curva racional normal (ejercicio 9 de la hoja 1) y de la curva del ejercicio 13 de la hoja 1).
- (1)4) Encontrar una descomposición primaria del ideal  $(X_0X_3 - X_1X_2, X_1X_3 - X_2^2)$  de  $k[X_0, X_1, X_2, X_3]$  e interpretarla geoméricamente.
- (2)5) Sea  $X$  el conjunto del ejercicio 13 de la hoja 1. Demostrar que una descomposición primaria de  $I(X) + (X_1 - X_2)$  es  $(X_0, X_1, X_2) \cap (X_1, X_2, X_3) \cap (X_0 - X_1, X_1 - X_2, X_2 - X_3) \cap (X_0 + X_1, X_1 - X_2, X_2 + X_3) \cap (X_1 - X_2, X_3 - \lambda X_2, X_2 - \lambda X_0, X_0^3)$ , para cualquier  $\lambda \neq 0, 1, -1$ . Encontrar la saturación del ideal.
- 6) Demostrar la igualdad  $(X_0X_2, X_0X_3, X_1X_2, X_2X_3) + (X_1 - X_2) = (X_0, X_1, X_2) \cap (X_1, X_2, X_3) \cap (X_1 - X_2, X_0 - \lambda X_1, X_3 - \mu X_1, X_1^2)$  para cualesquiera  $\lambda, \mu \in k$ .
- 7) Demostrar que existe un monomorfismo natural  $k[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{P}} \rightarrow k[[X_1, \dots, X_n]]$ , donde  $\mathfrak{P} = (X_1, \dots, X_n)$ .
- (3)8) Demostrar que, si  $\varphi : A \rightarrow B$  es un homomorfismo de  $k$ -álgebras finitamente generadas, entonces la imagen inversa por  $\varphi$  de un ideal maximal es necesariamente maximal.
- (4)9) Dado el morfismo  $\text{Spec}(\mathbb{R}[X, Y]/(Y^2 - X)) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$  definido por la inclusión  $\mathbb{R}[X] \hookrightarrow \mathbb{R}[X, Y]/(Y^2 - X)$ , calcular la fibra de los elementos  $(X - a)$  (con  $a \in \mathbb{R}$ ) y  $(X^2 + 1)$ . Lo mismo para  $\text{Spec}(\mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ .
- (1)10) Dar un morfismo de  $D(T) \subset \text{Spec } k[[T]]$  a  $\mathbb{A}_k^n$  que no se pueda extender a  $\text{Spec } k[[T]]$ . Demostrar que, en cambio, todo morfismo de  $D(T)$  a  $\mathbb{P}_k^n$  sí se puede extender.

- (2)**11)** Dar un morfismo  $\text{Spec}(k[[T]]) \rightarrow \text{Spec}(k[X, Y]/(XY - X - Y))$  tal que la imagen de  $(T)$  sea la clase de  $(X, Y)$ .
- (3)**12)** Demostrar que la proyección  $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m \rightarrow \mathbb{P}_k^m$  es un morfismo (identificando  $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m$  con la variedad de Segre).
- 13)** Demostrar que las inmersiones de Veronese son isomorfismos sobre su imagen.
- 14)** Demostrar que si dos morfismos  $\varphi, \psi : X \rightarrow Y$  coinciden en un abierto no vacío de  $X$ ,  $Y$  es separado y  $X$  es irreducible, entonces  $\varphi = \psi$ .
- (4)**15)** Demostrar que, si existe un morfismo no constante de  $\mathbb{P}_k^n$  a  $\mathbb{P}_k^m$ , entonces  $n \leq m$ .
- 16)** Identificando  $V(P_{01}P_{23} - P_{02}P_{13} + P_{03}P_{12}) \subset \mathbb{P}_k^5$  con  $\mathbb{G}(1, 3)$ , se pide:
- (1) a) Demostrar que la recta definida por  $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}_k^5$  está contenida en el plano  $X_3 = 0$  si y sólo si  $p_{03} = p_{13} = p_{23} = 0$ .
  - (2) b) Demostrar que la recta definida por  $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}_k^5$  pasa por el punto  $(1 : 0 : 0 : 0)$  si y sólo si  $p_{12} = p_{13} = p_{23} = 0$ .
  - (3) c) Demostrar que el conjunto de puntos  $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}_k^5$  que corresponden a las rectas de  $\mathbb{P}_k^3$  que cortan a la recta  $V(X_2, X_3)$  es un conjunto proyectivo de  $\mathbb{P}_k^5$ .
  - (4) d) Demostrar que el conjunto de puntos  $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}_k^5$  que corresponden a las rectas de  $\mathbb{P}_k^3$  que cortan a la cónica  $V(X_3, X_0X_2 - X_1^2)$  es un conjunto proyectivo de  $\mathbb{P}_k^5$ .
  - (1) e) Demostrar que el conjunto de puntos  $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}_k^5$  que corresponden a las rectas de  $\mathbb{P}_k^3$  contenidas en la cuádrica  $V(X_0X_3 - X_1X_2)$  es un conjunto proyectivo de  $\mathbb{P}_k^5$ .
- 17)** Demostrar que la aplicación  $f : V(X_3) \rightarrow \mathbb{P}_k^5$  que asocia a cada punto del plano  $V(X_3) \subset \mathbb{P}_k^3$  la recta generada por él y por el punto  $(0 : 0 : 0 : 1)$  (usando la identificación del ejercicio 16) es un morfismo. Encontrar una expresión para la inversa de  $f$  allá donde esté definida.
- 18)** Demostrar que la aplicación  $V(P_{03}, P_{13}, P_{23}) \rightarrow \mathbb{P}_k^{3*}$  que asocia a cada recta contenida en  $V(X_3) \subset \mathbb{P}_k^3$  (ver ejercicio 16) el plano generado por ella y el punto  $(0 : 0 : 0 : 1)$  es un morfismo. Encontrar su inverso donde esté definido.
- 19)** Demostrar que la aplicación  $(\mathbb{P}_k^{3*} \times \mathbb{P}_k^{3*}) \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{P}_k^5$  que asocia a cada par de planos distintos su recta intersección es un morfismo.
- (1)**20)** Calcular el grado de  $\mathbb{G}(1, 4)$ .
- (2)**21)** Identificando  $\mathbb{P}_k^{nm-1}$  con el proyectivizado del espacio de matrices  $n \times m$ , demostrar que el subconjunto  $X_k \subset \mathbb{P}_k^{nm-1}$  correspondiente a las matrices de rango como mucho  $k$  es irreducible de codimensión  $(n - k)(m - k)$ .