

PROBLEMAS DE GEOMETRIA LINEAL (grupo M2)

Curso 2025/26, hoja 2

- (9,10)1) Encontrar la ecuación del plano de  $\mathbb{P}_k^3$  que pasa por el punto  $(0 : 1 : 1 : 0)$  y contiene a la recta  $\begin{cases} X_0 = X_2 + X_3 \\ X_1 = 2X_2 - X_3 \end{cases}$

- (11,12)2) Demostrar que la aplicación proyectiva  $f : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^3$  definida por

$$f(t_0 : t_1) = (t_0 - t_1 : t_1 + 2t_0 : 2t_1 - t_0 : t_0 + t_1)$$

es inyectiva. Calcular las ecuaciones del subespacio lineal  $f(\mathbb{P}^1)$ .

- (1,2)3) Parametrizar la recta de  $\mathbb{P}_k^3$  obtenida como intersección de los planos

$$\Pi_1 = \langle (0 : 1 : 1 : 1), (1 : 0 : 1 : 0), (1 : -1 : 0 : 0) \rangle$$

$$\Pi_2 = \langle (1 : 0 : 0 : 0), (0 : 2 : 1 : 1), (1 : 1 : -1 : 0) \rangle$$

- 4) Determinar los enunciados duales de:

- (3,4)a) Si dos rectas en  $\mathbb{P}_k^4$  están contenidas en un plano, entonces se cortan en un punto.
- (5,6)b) Si dos planos en  $\mathbb{P}_k^4$  están contenidos en un hiperplano, entonces se cortan en una recta.
- (7,8)c) Dos rectas cualesquiera de  $\mathbb{P}_k^4$  están siempre contenidas en un mismo hiperplano.
- d) Si una recta y un plano de  $\mathbb{P}_k^4$  están en un mismo hiperplano, entonces se cortan en algún punto.
- e) Si una recta y un plano de  $\mathbb{P}_k^4$  tienen algún punto en común, entonces están contenidos en algún hiperplano común.
- f) Si dos planos en  $\mathbb{P}_k^5$  están contenidos en un subespacio de dimensión tres, entonces se cortan en una recta.
- g) Si dos planos en  $\mathbb{P}_k^5$  están contenidos en un hiperplano, entonces se cortan en un punto.

- (9,10)5) Demostrar que, dadas dos rectas disjuntas  $r$  y  $r'$  de  $\mathbb{P}_k^3$  y un punto  $P$  que no esté en ninguna de ellas, existe una única recta  $\ell$  que pase por  $P$  y corte a las rectas  $r$  y  $r'$ . ¿Es cierto el resultado análogo en el espacio afín? Calcular la recta  $\ell$  anterior cuando  $k = \mathbb{R}$ ,  $P = (0 : 1 : -1 : 1)$ , y las rectas  $r$  y  $r'$  tienen ecuaciones

$$r : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = X_0 + X_3 \end{cases} \quad r' : \begin{cases} X_2 = 0 \\ X_0 = X_3 \end{cases}$$

- 6) Dado un espacio proyectivo  $\mathbb{P}(V)$  y un hiperplano suyo  $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$ , sea  $\mathbb{A} := \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W)$ .
- (i) Fijado  $v_0 \in V \setminus W$ , demostrar que cada punto  $p \in \mathbb{A}$  es la clase de un único vector de la forma  $v_p = v_0 + w_p$ .
  - (ii) Demostrar que la aplicación  $\varphi_{v_0} : \mathbb{A} \times W \rightarrow \mathbb{A}$  que manda cada  $(p, w)$  a la clase de  $v_p + w$  dota a  $\mathbb{A}$  de estructura de espacio afín con espacio vectorial asociado  $W$ .
  - (iii) Demostrar que la estructura anterior no depende de la elección de  $v_0$ , en el sentido de que, elegido otro vector  $v'_0 \in V \setminus W$ , si  $\lambda \in k \setminus \{0\}$  es el único elemento tal que  $v'_0 - \lambda v_0 \in W$ , entonces la estructura de espacio afín obtenida con este nuevo  $v'_0$  es la que en el Ejercicio 10 de la hoja 1 denotábamos por  $\mathbb{A}_\lambda$ , y por tanto es un espacio afín isomorfo a  $\mathbb{A}$ .
- 7) Sea  $k = \mathbb{Z}_p$  el cuerpo finito de  $p$  elementos. Calcular el número de puntos de  $\mathbb{P}_k^2$ . ¿Cuántas rectas hay en  $\mathbb{P}_k^2$  y cuántos puntos contiene cada una?
- (11,12)8) Sea el haz de planos de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$  de ecuaciones  $U_0 + U_1 + U_2 = U_2 + U_3 = 0$ . Calcular la recta de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$  contenida en todos los planos del haz.
- (1,2)9) Dar la ecuación de una recta  $L_\infty$  de  $\mathbb{P}_k^2$  de forma que los puntos  $A = (1 : 0 : 1)$ ,  $B = (1 : -1 : 0)$ ,  $C = (0 : 2 : 1)$  y  $D = (0 : 0 : 1)$  sean los vértices de un paralelogramo en el plano afín  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \setminus L_\infty$  (de lados  $AB, BC, CD, DA$ ). ¿Es única la recta  $L_\infty$  en estas condiciones?
- (3,4)10) Sean  $P = (1 : 0 : 0)$ ,  $Q = (0 : 0 : 1)$  y  $L$  la recta  $X_0 + X_1 + X_2 = 0$ . En el plano afín  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \setminus L$  se considera la traslación  $g$  que transforma  $P$  en  $Q$ . Calcular la imagen por  $g$  del punto  $(1 : 0 : 1)$ .
- (5,6)11) Demostrar que no existe ninguna aplicación proyectiva  $\mathbb{P}_k^2 \dashrightarrow \mathbb{P}_k^3$  que mande respectivamente los puntos  $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1), (1 : 1 : 1)$  a los puntos  $(1 : 0 : 0 : 0), (0 : 1 : 0 : 0), (0 : 0 : 1 : 0), (0 : 0 : 0 : 1)$ , pero que hay más de una aplicación proyectiva  $\mathbb{P}_k^2 \dashrightarrow \mathbb{P}_k^1$  que manda respectivamente los puntos  $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1), (1 : 1 : 1)$  a los puntos  $(1 : 0), (0 : 1), (1 : 1), (1 : -1)$ .
- (7,8)12) Dar las ecuaciones de la aplicación proyectiva  $\bar{f} : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$  que es la extendida de la aplicación afín  $f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  definida por  $f(1, 0) = (1, 0, 2)$ ,  $f(1, 2) = (0, 1, 1)$  y  $f(2, 0) = (2, 0, 0)$ .
- (9,10)13) Demostrar que, dada una referencia afín  $\mathcal{R}$  de un espacio afín  $\mathbb{A}$  de dimensión  $n$ , la aplicación  $\mathbb{A} \rightarrow \{X_0 + \dots + X_n = 1\} \subset \mathbb{A}_k^{n+1}$  que manda cada punto de  $\mathbb{A}$  a sus coordenadas baricéntricas respecto de  $\mathcal{R}$  es una afinidad.