TRABAJO FINAL DE GEOMETRÍA ALGEBRAICA

Existirán dos opciones: o bien exponer un tema o bien resolver un problema (en este último caso habrá que entregarlo por escrito, además de la exposición).

Sugerencias de temas

1) Toda superficie cúbica lisa de $\mathbb{P}^3$ contiene exactamente 27 rectas (M. Reid, *Undergraduate Algebraic Geometry*, Cap. III §7).

2) Variedad de subespacios lineales de dimensión k en cuádricas lisas: dimensión, irreducibilidad, lisitud,... (J. Harris, *Algebraic Geometry: A first course*, pp. 293-294).

3) Una curva tiene género aritmético cero si y sólo si es isomorfa a $\mathbb{P}^1$ (D. Mumford, *Algebraic Geometry I: Complex projective varieties*, §7B).

4) Por $n+3$ puntos generales de $\mathbb{P}^n$ pasa una única curva racional normal de grado n (J. Harris, *Algebraic Geometry: A first course*, Ex. 1.22).

5) Si X es una variedad afín y G un grupo finito de automorfismos de X, el cociente $Y = X/G$ tiene de forma natural estructura de variedad afín (J. Harris, *Algebraic Geometry: A first course*, pp. 124-125).

6) Si X es una variedad proyectiva y G un grupo finito de automorfismos de X, el cociente $Y = X/G$ tiene de forma natural estructura de variedad proyectiva (J. Harris, *Algebraic Geometry: A first course*, pp. 126-127).

7) Teorema de bidualidad ($(X^*)^* = X$) en característica cero (J. Harris, *Algebraic Geometry: A first course*, Theor. 15.24).

8) Fibrados universales en grassmannianas. Sus secciones y lugares de anulación y dependencia.

9) Morfismos a grassmannianas a partir de fibrados vectoriales.

10) Cálculo de Schubert (Kleiman, S.L. – Laksov, D., *Schubert calculus*, Amer. Math. Monthly **79** (1972), 1061-1082).

11) Teoría abstracta de curvas (Hartshorne, Cap. I-6).

12) Teorema de Hurwitz (Hartshorne, Cap. IV-2).

13) Alguna propiedad de las curvas elípticas (Hartshorne, Cap. IV-4).

14) Automorfismos de curvas de género $g \geq 2$ (Hartshorne, Cap. IV. Ejercicio 5.2).

15) Acotación de Clifford (Hartshorne, Cap. IV, Theorem 5.4).

16) Algún aspecto de geometría algebraica real (J. Bochnak, M. Coste, M.F. Roy, *Géométrie algébrique réelle*, Springer, 1987; existe edición en inglés de 1998).

17) Teorema de Grothendieck: Todo fibrado vectorial de $\mathbb{P}^1_k$ descompone como suma directa de fibrados lineales (Hartshorne, Cap. V, Corollary 2.14 y Ejercicio 2.6).

18) Demostrar que, tomando cohomología en la sucesión exacta $0 \to \mathcal{O}^*_X \to \mathcal{M}^*_X \to \mathcal{M}^*_X/\mathcal{O}^*_X \to 0$, se obtiene $1 \to k^* \to K(X)^* \xrightarrow{div} Div(X) \to \mathrm{Pic}(X)$

19) Relacionar el functor Ext con las extensiones (en módulos y/o haces).

20) Inmersión canónica de curvas y curvas hiperelípticas.

21) Polinomio de Hilbert en $\mathbb{P}^n_k \times \mathbb{P}^m_k$ y aplicaciones.

22) Demostración del teorema de los ceros de Hilbert.

Lista de problemas

1) Demostrar que, en la Grassmanniana de rectas en $\mathbb{P}^3$ (vista como subconjunto de $\mathbb{P}^5$):

a) El conjunto de rectas contenidas en un plano $\Pi \subset \mathbb{P}^3$ y que pasan por un punto p de Π forman una recta de $\mathbb{P}^5$, y todas las rectas de $\mathbb{P}^5$ contenidas $\mathbb{G}(1,3)$ son de esa forma.

b) El conjunto de rectas que pasan por un punto dado de $\mathbb{P}^3$ forman un plano de $\mathbb{P}^5$ (llamado *α-plano*).

c) El conjunto de rectas contenidas en un plano de $\mathbb{P}^3$ forman un plano de $\mathbb{P}^5$ (llamado *β-plano*).

d) Cualquier plano de $\mathbb{P}^5$ contenido en $\mathbb{G}(1,3)$ es un α-plano o un β-plano.

e) Ningún espacio lineal de $\mathbb{P}^5$ de dimensión tres está contenido en $\mathbb{G}(1,3)$.

2) Sea $\mathbb{P}^5$ el conjunto de todas las cónicas de $\mathbb{P}^2$ y $S \subset \mathbb{P}^5$ el conjunto de rectas dobles. Sea Q_i la hipersuperficie cuádrica de $\mathbb{P}^5$ formada por las cónicas tangentes a la recta $V(X_i) \subset \mathbb{P}^2$.

a) Demostrar que la intersección $Q_0 \cap Q_1 \cap Q_2$ consiste en una unión $S \cup S'$, donde S' es el conjunto de cónicas representadas por matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} -t_0^2 & t_0t_1 & t_0t_2 \\ t_0t_1 & -t_1^2 & t_1t_2 \\ t_0t_2 & t_1t_2 & -t_2^2 \end{pmatrix}$$

b) Comprobar que $S \cap S' = Y_{01} \cup Y_{02} \cup Y_{12}$, donde Y_{ij} es el conjunto de rectas dobles que pasan por el punto $X_i = X_j = 0$. Comprobar que, como subconjunto del espacio proyectivo $\mathbb{P}^5$, cada Y_{ij} es una cónica lisa.

c) Concluir, sin utilizar dualidad, que dadas cinco rectas generales en $\mathbb{P}^2$, existe una única cónica tangente a esas cinco rectas.

3) Dado un conjunto proyectivo $X \subset \mathbb{P}^n$, se llama *variedad secante* de X a la unión de las rectas de $\mathbb{P}^n$ que cortan a X en al menos dos puntos.

a) Demostrar que, si X no es una variedad lineal, su variedad de secantes tiene dimensión como mucho $2\dim X + 1$.

b) Se llama *deficiencia* de X a la dimensión $\delta(X)$ del conjunto de rectas bisecantes a X que pasan por un punto general de la variedad de secantes. Demostrar que la variedad de secantes de X tiene dimensión $2\dim X + 1 - \delta(X)$.

c) Demostrar que las inmersiones dobles de Veronese tienen deficiencia 1, que las variedades de Segre tienen deficiencia 2 y que las grassmannianas de rectas tienen deficiencia 4.

4) Dado un conjunto proyectivo $X \subset \mathbb{P}^N$, se llama *defecto de* X a $N-1-\dim(X^*)$. Demostrar que $\mathbb{G}(1,n)$ (vista como variedad proyectiva a través de la inmersión de Plücker) tiene defecto cero si n es impar y defecto dos si n es par.

5) Sea $S \subset \mathbb{P}^5$ la superficie de Veronese.

a) Demostrar que el plano tangente en un punto de S corta a S sólo en el punto de tangencia.

b) Calcular la dimensión de la variedad dual de S.

c) Demostrar que S no contiene ninguna recta.

d) Demostrar que, dados dos puntos cualesquiera de la superficie de S, sus planos tangentes se cortan en un punto.

6) Demostrar que la imagen por la inmersión de Segre de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ en $\mathbb{P}^5$ no está contenida en ninguna cuádrica lisa. Calcular su variedad dual.

7) Sea $X \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ la imagen de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ por la aplicación de Segre. Identifíquese $\mathbb{P}^{2n+1}$ como el conjunto de homomorfismos (considerados siempre salvo multiplicación por constante) $k^2 \to k^{n+1}$ y X como el subconjunto de aquéllos de rango uno.

a) Sea $f \in X$ y sean $A = \ker(f)$, $B = \mathrm{Im}(f)$. Demostrar que el espacio tangente a X en f es $T_f X = \{g : k^2 \to k^{n+1} \mid f(A) \subset B\}$.

b) Demostrar que la variedad dual X^* consiste en el conjunto de los hiperplanos de $\mathbb{P}^{2n+1}$ de la forma $H_{A,C} = \{f : k^2 \to k^{n+1} \mid f(A) \subset C\}$, donde A y C son hiperplanos respectivamente de k^2 y k^{n+1}.

c) Concluir que $\dim(X^*) = \dim(X)$.

8) Demostrar que existe un fibrado de rango dos sobre la cuádrica $Q = V(X_0X_1+X_2X_3+X_4^2) \subset \mathbb{P}^4_k$ con una sección que se anula en la recta $L = V(X_0, X_2, X_4)$.

9) Demostrar que, si $F_1, F_2, F_3, F_4 \in k[X_0, X_1, X_2, X_3]$ son polinomios homogéneos de grados respectivos $1, 2, 2, 3$ suficientemente generales, entonces $V(F_1F_4 - F_2F_3)$ es una superficie lisa de $\mathbb{P}^3$. Comprobar que el resultado análogo en $\mathbb{P}^n$ no es cierto si $n \geq 4$.