

GEOMETRÍA ALGEBRAICA (Curso 2026/2027)
HOJA DE PROBLEMAS N^o 2

- 1) Calcular los siguientes polinomios de Hilbert:
 - (i) De la unión de dos rectas disjuntas de $\mathbb{P}_k^3$.
 - (ii) De la unión de dos rectas de $\mathbb{P}_k^3$ que se cortan en un punto.
 - (iii) Del ideal $(X_3^2, X_1X_3, X_2X_3, X_1X_2) \subset k[X_0, X_1, X_2, X_3]$ (ver hoja 1, ejercicio 3).
 - (iv) De la unión de una cónica de $\mathbb{P}^3$ y de un punto fuera de la cónica.
- 2) Calcular el grado de las variedades de Segre y Veronese y buscar una interpretación geométrica.
- 3) Se llama *género aritmético* de una curva proyectiva X a $P_a(X) := 1 - p_X(0)$.
 - (i) Demostrar que una curva plana de grado d tiene género aritmético $(d-1)(d-2)/2$.
 - (ii) Calcular el género aritmético de cualquier curva racional normal (ejercicio 9 de la hoja 1) y de la curva del ejercicio 13 de la hoja 1).
- 4) Encontrar una descomposición primaria del ideal $(X_0X_3 - X_1X_2, X_1X_3 - X_2^2)$ de $k[X_0, X_1, X_2, X_3]$ e interpretarla geoméricamente.
- 5) Sea X el conjunto del ejercicio 13 de la hoja 1. Demostrar que una descomposición primaria de $I(X) + (X_1 - X_2)$ es $(X_0, X_1, X_2) \cap (X_1, X_2, X_3) \cap (X_0 - X_1, X_1 - X_2, X_2 - X_3) \cap (X_0 + X_1, X_1 - X_2, X_2 + X_3) \cap (X_1 - X_2, X_3 - \lambda X_2, X_2 - \lambda X_0, X_0^3)$, para cualquier $\lambda \neq 0, 1, -1$. Encontrar la saturación del ideal.
- 6) Demostrar la igualdad $(X_0X_2, X_0X_3, X_1X_2, X_1X_3) + (X_1 - X_2) = (X_0, X_1, X_2) \cap (X_1, X_2, X_3) \cap (X_1 - X_2, X_0 - \lambda X_1, X_3 - \mu X_1, X_1^2)$ para cualesquiera $\lambda, \mu \in k$.
- 7) Demostrar que existe un monomorfismo natural $k[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{P}} \rightarrow k[[X_1, \dots, X_n]]$, donde $\mathfrak{P} = (X_1, \dots, X_n)$.
- 8) Demostrar que, si $\varphi : A \rightarrow B$ es un homomorfismo de k -álgebras finitamente generadas, entonces la imagen inversa por φ de un ideal maximal es necesariamente maximal.
- 9) Dado el morfismo $\text{Spec}(\mathbb{R}[X, Y]/(Y^2 - X)) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ definido por la inclusión $\mathbb{R}[X] \hookrightarrow \mathbb{R}[X, Y]/(Y^2 - X)$, calcular la fibra de los elementos $(X - a)$ (con $a \in \mathbb{R}$) y $(X^2 + 1)$. Lo mismo para $\text{Spec}(\mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$.
- 10) Dar un morfismo de $D(T) \subset \text{Spec } k[[T]]$ a $\mathbb{A}_k^n$ que no se pueda extender a $\text{Spec } k[[T]]$. Demostrar que, en cambio, todo morfismo de $D(T)$ a $\mathbb{P}_k^n$ sí se puede extender.

- 11) Dar un morfismo $\text{Spec}(k[[T]]) \rightarrow \text{Spec}(k[X, Y]/(XY - X - Y))$ tal que la imagen de (T) sea la clase de (X, Y) .
- 12) Demostrar que la proyección $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m \rightarrow \mathbb{P}_k^m$ es un morfismo (identificando $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m$ con la variedad de Segre).
- 13) Demostrar que las inmersiones de Veronese son isomorfismos sobre su imagen.
- 14) Demostrar que si dos morfismos $\varphi, \psi : X \rightarrow Y$ coinciden en un abierto no vacío de X , Y es separado y X es irreducible, entonces $\varphi = \psi$.
- 15) Demostrar que, si existe un morfismo no constante de $\mathbb{P}_k^n$ a $\mathbb{P}_k^m$, entonces $n \leq m$.
- 16) Identificando $V(P_{01}P_{23} - P_{02}P_{13} + P_{03}P_{12}) \subset \mathbb{P}_k^5$ con $\mathbb{G}(1, 3)$, se pide:
 - a) Demostrar que la recta definida por $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}_k^5$ está contenida en el plano $X_3 = 0$ si y sólo si $p_{03} = p_{13} = p_{23} = 0$.
 - b) Demostrar que la recta definida por $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}_k^5$ pasa por el punto $(1 : 0 : 0 : 0)$ si y sólo si $p_{12} = p_{13} = p_{23} = 0$.
 - c) Demostrar que el conjunto de puntos $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}_k^5$ que corresponden a las rectas de $\mathbb{P}_k^3$ que cortan a la recta $V(X_0 - X_2, X_1 - X_3)$ es un conjunto proyectivo de $\mathbb{P}_k^5$ y dar un conjunto de ecuaciones.
 - d) Demostrar que el conjunto de puntos $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}_k^5$ que corresponden a las rectas de $\mathbb{P}_k^3$ que cortan a la cónica $V(X_3, X_0X_2 - X_1^2)$ es un conjunto proyectivo de $\mathbb{P}_k^5$ y dar un conjunto de ecuaciones.
 - e) Demostrar que el conjunto de puntos $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}_k^5$ que corresponden a las rectas de $\mathbb{P}_k^3$ contenidas en la cuádrica $V(X_0X_3 - X_1X_2)$ es un conjunto proyectivo de $\mathbb{P}_k^5$.
- 17) Demostrar que la aplicación $f : V(X_3) \rightarrow \mathbb{P}_k^5$ que asocia a cada punto del plano $V(X_3) \subset \mathbb{P}_k^3$ la recta generada por él y por el punto $(0 : 0 : 0 : 1)$ (usando la identificación del ejercicio 16) es un morfismo. Encontrar una expresión para la inversa de f allá donde esté definida.
- 18) Demostrar que la aplicación $V(P_{03}, P_{13}, P_{23}) \rightarrow \mathbb{P}_k^{3*}$ que asocia a cada recta contenida en $V(X_3) \subset \mathbb{P}_k^3$ (ver ejercicio 16) el plano generado por ella y el punto $(0 : 0 : 0 : 1)$ es un morfismo. Encontrar su inverso donde esté definido.
- 19) Demostrar que la aplicación $(\mathbb{P}_k^{3*} \times \mathbb{P}_k^{3*}) \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{P}_k^5$ que asocia a cada par de planos distintos su recta intersección es un morfismo.
- 20) Calcular el grado de $\mathbb{G}(1, 4)$.
- 21) Identificando $\mathbb{P}_k^{nm-1}$ con el proyectivizado del espacio de matrices $n \times m$, demostrar que el subconjunto $X_k \subset \mathbb{P}_k^{nm-1}$ correspondiente a las matrices de rango como mucho k es irreducible de codimensión $(n - k)(m - k)$.