Una mirada a las Matemáticas del siglo XX

Fernando Bombal

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

28 de octubre de 2015

La historia hace ilustrado al hombre; la poesía, ingenioso; las matemáticas, sutil...

(**Francis Bacon,** filósofo y político inglés, 1561-1626)

El estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fértil de descubrimientos matemáticos."
(**Joseph Fourier**, matemático francés, 1768-1830)

El único propósito de la ciencia es honrar el espíritu humano.

(**Carl G. J. Jacobi,** matemático alemán, 1804-1851)

No hay rama de la matemática, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real.
(**Nikolai Lobachevski**, matemático ruso. 1792-1856)

No hay ciencia aplicada si no hay ciencia que aplicar.
(**B. Houssay** (1887-1971), Premio Nobel de Medicina, 1947)

Las matemáticas se dividen en tres partes: Criptografía (pagada por la CIA, KGB y similares), Hidrodinámica (sufragada por los fabricantes de submarinos nucleares) y Mecánica Celeste (financiada por los militares y otras instituciones relacionadas con los misiles, como la NASA)

(**V. I. Arnold,** matemático ruso, 1917-2010)

1.- Introducción.

Excmo Sr. Presidente, Excmas. Señoras Académicas, Excmos. Señores Académicos, Señoras y Señores.

Tras mi designación para cumplir el honroso deber de pronunciar el discurso inaugural del año académico, me asaltó, como supongo que a mis ilustres predecesores, la preocupación por la elección del tema objeto de la lección. Sus características deberían ser obvias: sugerente y atractivo, a la altura de la audiencia, pero no demasiado especializado como para hacerlo tedioso o ininteligible. Con estas directrices como guía, y tras no pocas dudas, he decidido dedicar la lección a dar un rápido y personal vistazo a la evolución de las matemáticas en el siglo pasado.

En una reunión organizada por el Instituto Fields de Toronto en el año 2000, sobre las matemáticas de fin de siglo y las matemáticas del siglo XXI, Sir **Michael Atiyah** (Medalla Fields 1966; Premio Abel 2004) pronunció una conferencia titulada "*Matemáticas en el siglo XX*". Entre las dos opciones que tenía: disertar sobre las matemáticas del siglo recién terminado o tratar de predecir las matemáticas del siglo próximo, eligió lo que consideraba la tarea más difícil, ya que "*Todo el mundo puede predecir; al fin y al cabo, nadie estará allí para saber si nos hemos equivocado. Pero dar tu propia impresión sobre el pasado es algo sobre lo que la mayor parte de tus colegas puede estar en desacuerdo…*"

En su interesante conferencia (véase [AT]), tras constatar que es imposible cubrir todos los aspectos de la matemática a lo largo del siglo XX, Atiyah señala algunos rasgos que considera distintivos de ella: el paso del estudio de lo local a lo global, el aumento del número de dimensiones (geometría diferencial, análisis, análisis funcional, etc.), el paso de la matemática conmutativa a la no conmutativa; el comienzo del estudio de los fenómenos no lineales frente a los lineales, etc.

Mi enfoque será algo distinto, centrándome en aspectos que podríamos llamar más "estructurales". En todo caso, quiero adelantar que se trata de un punto de vista estrictamente personal, necesariamente limitado por mi formación, mis gustos y mis conocimientos.

Para comenzar, quiero comentar uno de los, a mi entender, aspectos más distintivos de las matemáticas (y los matemáticos) del siglo XX, cual es su organización como colectivo a nivel mundial.

2.- La dimensión social de las matemáticas.

2.1 La Comunidad Matemática.

Las primeras Revistas científicas aparecen a mediados del siglo XVII, fundadas por las Academias y sociedades de ilustrados, y recogen artículos con aportaciones de diferentes disciplinas. La subsiguiente especialización y fragmentación de la Ciencia hace que en el primer tercio del siglo XIX aparezcan ya revistas científicas dedicadas solamente a las matemáticas, como el *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Revista de Matemáticas Puras y Aplicadas), fundada por **A. L Crelle** en 1826, y el homólogo francés *Journal de Mathématiques Pures et Appliqués,* fundado por **J. L. Liouville** en 1836 (ambas siguen existiendo hoy en día).

A partir de la Revolución Francesa surge un nuevo modelo de Universidad, encargada de formar a los nuevos profesionales, destinados a transformar y dirigir la sociedad, y de centrar la investigación científica. En particular, aparecen nuevos puestos universitarios dedicados enteramente a la enseñanza e investigación sobre matemáticas. También surge la necesidad de confeccionar textos y bibliotecas especializadas para facilitar el estudio a los alumnos.

El creciente número de matemáticos y el aumento significativo de su productividad propició la creación de sociedades matemáticas nacionales en la segunda mitad del siglo XIX para cubrir las necesidades de comunicación científica y la defensa de los intereses profesionales. Estos objetivos no podían ser cubiertos por las Academias, demasiado elitistas y con un número limitado de miembros. Así aparecen la *Sociedad Matemática de Moscú* (1864), la *London Mathematical Society* (1865), la *Societé Mathématique de France* (1872), la *New York Mathematical Society* (1888) (antecesora de la *American Mathematical Society*), la *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* (1890) y muchas otras, cada una con su correspondiente publicación oficial. La *Real Sociedad Matemática Española* se fundó en 1911.

En fin, puede decirse que a finales del siglo XIX los matemáticos estaban ya muy profesionalizados y especializados. En particular, la investigación matemática pasa a ser una actividad reglada y reconocida profesionalmente. Todo este proceso va a cristalizar en la aparición de una verdadera Comunidad Matemática mundial.

Felix Klein (1849-1925)

La mayor parte de los historiadores aceptan como precedente inmediato la celebración del Congreso Matemático Internacional celebrado durante la Exposición Mundial de Chicago de 1893, para conmemorar los 400 años de la llegada a América de Colón. La conferencia inaugural, titulada *"El estado actual de las Matemáticas"* corrió a cargo de **Felix Klein**, de la Universidad de Gotinga, uno de los centros mundiales de referencia en la investigación matemática. Klein señaló la creciente necesidad de colaboración internacional entre los matemáticos y abogó por la creación de uniones internacionales entre las sociedades nacionales existentes.

En sintonía con las ideas de Klein, **G. Cantor,** primer presidente de la *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* estaba promoviendo la realización de un primer congreso internacional de matemáticos, independiente de condicionamientos nacionales. En este sentido, entró en contacto con muchos de sus colegas internacionales, entre ellos personalidades como **Ch. Hermite** o **H. Poincaré.** En 1894, en la recientemente creada revista *L'Intermédiaire des Mathématiciens* aparece en la página 113 la propuesta de organizar un gran congreso internacional de matemáticas. La idea fue tomando forma y, finalmente, el I Congreso Internacional de Matemáticos (CIM) tuvo lugar en Zurich, del 9 al 11 de agosto de 1897, con 209 participantes. Poincaré fue el encargado de pronunciar la conferencia inaugural (aunque no pudo asistir por razones personales y tuvo que leerla uno de los asistentes), **Jerôme Franel)** y versó sobre las relaciones entre la Física y las Matemáticas.

G. Cantor (1845-1918)

El Congreso resultó un éxito y durante su desarrollo se tomaron los siguientes acuerdos:

"*El Congreso tiene por objeto promover las relaciones personales entre los matemáticos de diferentes países… y dar cuenta del estado actual de las diversas ramas de las matemáticas…*

En el futuro, los Congresos Internacionales de matemáticos tendrán lugar en intervalos de tres a cinco años. Al final de cada congreso se elegirá la sede del congreso siguiente, así como los organismos o asociaciones encargadas de su preparación y desarrollo…" ([Wa; pág. 299])

Hay que decir que, salvo el siguiente Congreso, que se decidió celebrar en París en 1900, el resto (salvo las interrupciones debidas a las dos guerras mundiales: 1912-1920 y 1936-1950) se han celebrado cada cuatro años.

En 1899 se crea la revista *l'Enseignement mathématique*, con sede en Ginebra, y que, además de su contenido de tipo pedagógico, recoge desde entonces la vida matemática de todo el mundo.

Como hemos dicho, el segundo CIM tuvo lugar en París, en agosto de 1900 y contribuyó de manera decisiva a consolidar estos eventos. En efecto, fue aquí donde **David Hilbert** presentó su famosa lista de 23 problemas[1] que, en su opinión, debieran centrar la

SUR LES

PROBLÈMES FUTURS DES MATHÉMATIQUES,

PAR M. DAVID HILBERT (Göttingen).

I. — Problème de M. Cantor relatif à la puissance du continu.

II. — De la non-contradiction des axiomes de l'Arithmétique.

III. — De l'égalité en volume de deux tétraèdres de bases et de hauteurs égales.

IV. — Problème de la ligne droite, plus court chemin d'un point à un autre.

V. — De la notion des groupes continus de transformations de Lie, en faisant abstraction de l'hypothèse que les fonctions définissant les groupes sont susceptibles de différentiation.

VI. — Le traitement mathématique des axiomes de la Physique.

VII. — Irrationalité et transcendance de certains nombres.

VIII. — Problèmes sur les nombres premiers.

IX. — Démonstration de la loi de réciprocité la plus générale dans un corps de nombres quelconque.

X. — De la possibilité de résoudre une équation de Diophante.

XI. — Des formes quadratiques à coefficients algébriques quelconques.

XII. — Extension du théorème de Kronecker sur les corps abéliens à un domaine de rationalité algébrique quelconque.

XIII. — Impossibilité de la résolution de l'équation générale du septième degré au moyen de fonctions de deux arguments seulement.

XIV. — Démontrer que certains systèmes de fonctions sont finis.

XV. — Établissement rigoureux de la Géométrie énumérative de Schubert.

XVI. — Problèmes de topologie des courbes et des surfaces algébriques.

XVII. — Représentation des formes définies par des sommes de carrés.

XVIII. — Partition de l'espace en polyèdres congruents.

XIX. — Les solutions des problèmes réguliers du calcul des variations sont-elles nécessairement analytiques?

XX. — Problème de Dirichlet dans le cas général.

XXI. Démonstration de l'existence d'équations différentielles linéaires ayant un groupe de monodromie assigné.

XXII. — Relations analytiques exprimées d'une manière uniforme au moyen de fonctions automorphes.

XXIII. — Extension des méthodes du Calcul des variations.

The 23 problems of Hilbert. (From the proceedings of the 1900 ICM, Gauthier-Villars 1902.)

[1] Hibert dio su Conferencia el 8 de agosto de 1900, a las 9 de la mañana. Tras una larga introducción, por falta de tiempo, solo presentó 10 de su lista de 23 problemas.

atención de los matemáticos del siglo XX. Probablemente es la lista de problemas más influyente de la historia propuestos por una sola persona,

Los problemas son de muy distinta naturaleza, algunos muy generales, otros con un enunciado poco preciso y otros, por el contrario, muy concretos y específicos. Dos de estos últimos siguen sin resolverse: el 8 (que contiene la *Hipótesis de Riemann* [2] y la *Conjetura de Golbach*) y el 12. Del resto, el 16 y 23 se consideran con un enunciado demasiado general para saber si están completamente resueltos. El 6 (*Axiomatización de la Física*), con el enorme desarrollo de la Física a lo largo del siglo, cae también en esta categoría.

David Hilbert (1862-1943)

La lista de problemas de Hilbert fue muy influyente, y marcó una parte importante de la investigación matemática posterior, sobre todo en la primera mitad del siglo. Sin embargo, no fue un éxito predictivo, pues no consiguió anticipar alguno de los grandes temas de investigación matemática del siglo XX: el gran desarrollo de la Topología, la Teoría de la Medida, el Análisis Funcional, la fundamentación y fulgurante desarrollo de la Teoría de la Probabilidad y sus múltiples aplicaciones, el imparable crecimiento de las ciencias de la Computación, etc.

Los siguientes Congresos fueron afianzando la colaboración internacional y el sentido de pertenencia a una verdadera Comunidad. Sin embargo, la concreción de este sentimiento fue larga y complicada: Ya en el Congreso de Roma de 1908 se propuso la creación de un organismo permanente que asegurase la coordinación entre congreso y congreso, así como un órgano internacional para mejorar y coordinar la enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Aunque estas ideas se reafirmaron en el siguiente Congreso, el estallido de la I Guerra Mundial paralizó este movimiento. En 1920, coincidiendo con el desarrollo del primer CIM tras la guerra, acordó la creación de la *Union Mathématique Internationale* (UMI), excluyendo de la misma a las potencias derrotadas (Alemania, Austria, Hungría y Bulgaria). Esta política discriminatoria pronto dio lugar a críticas generalizadas. El CIM de 1928 tuvo lugar en Bolonia (Italia) y **Salvatore Pincherle** (1853-1936) y el resto de organizadores italianos decidieron volver a la tradición pre-bélica e invitaron a todos los matemáticos a asistir al mismo. En su libro sobre Hilbert, **C. Reid** recrea el momento de la entrada de Hilbert encabezando la delegación alemana

[2] Véase la magnífica exposición [LP], lección inaugural del año académico 2012-2013 de esta Real Academia, pronunciada por el Profesor **M. López Pellicer.**

en el aula del Congreso, con estas palabras: "*Durante unos instantes se produjo un silencio total. Entonces, espontáneamente, todos los presentes en la sala se levantaron y comenzaron a aplaudir.*" ([Re]).

La decisión italiana de abrir los ICM a los matemáticos de todas las naciones, aunque compartida y aplaudida por la mayor parte de la comunidad internacional, violaba los estatutos de la Unión, que quedó irremediablemente afectada. Los estatutos originales de la UMI expiraron a finales de 1931 y la Union se disuelve en 1932. Los intentos por restablecerla en la siguiente década fueron infructuosos. Después de la II Guerra Mundial, gracias a los esfuerzos del Prof. **Marshall Stone** (1903-1989) y la American Mathematical Society, se crea en 1950 la *International Mathematical Union* (IMU)[3] sin ningún tipo de exclusiones. La primera Asamblea General se celebró en Roma en 1952 con 22 países (entre ellos España). Desde entonces, la IMU ha funcionado sin interrupciones hasta hoy, y a ella se han unido la mayor parte de los países. A partir de 1962 la IMU se hizo cargo del control del programa científico de los CIM y la concesión de los distintos Premios.

Durante el siglo XX se han celebrado los siguientes CIM:

1. Zurich (1897)
2. París (1900)
3. Heidelberg (1904)
4. Roma (1908)
5. Cambridge, G.B. (1912)
6. Estrasburgo (1920)
7. Toronto (1924)
8. Bolonia (1928)
9. Zurich (1932)
10. Oslo (1936)
11. Cambridge, EE UU (1950)
12. Amsterdam (1954)
13. Edimburgo (1958)
14. Estocolmo (1962)
15. Moscú (1966)
16. Niza (1970)
17. Vancouver (1974)
18. Helsinki (1978)
19. Varsovia (1982, celebrado en 1983)
20. Berkeley (1986)
21. Kioto (1990)
22. Zurich (1994)
23. Berlín (1998)

Para una mayor información sobre los CIM, sus programas, actividades, premios, etc., así como una abundante colección de documentos e imágenes, animamos al lector interesado a consultar [Cu].

2.2 Los Premios de la IMU.

Desde la aparición de las primeras sociedades de ilustrados en el siglo XVII, continuando con las Academias y las Sociedades Científicas, estas instituciones han establecido una serie de premios y distinciones para fomentar sus actividades. Normalmente,

[3] Véase [Le].

estos premios tenían una serie de limitaciones, bien por la especificidad del tema, por limitaciones territoriales o temporales, etc.

Por ello, la creación de la **Medalla Fields** en el ICM de Zurich de 1932 supuso la consolidación de la IMU como verdadera comunidad internacional. Es el máximo galardón que otorga la comunidad matemática internacional y se ha comparado a veces con el Premio Nobel (que no existe en matemáticas)[4]. Debe su nombre al matemático canadiense **John Charles Fields** (1863-1932), impulsor y defensor de la idea de crear una *"International Medal for outstanding discoveries in Mathematics*", que tal es su nombre oficial. Fields, que había sido el organizador del CIM de Toronto en 1924, iba a presentar su propuesta en el CIM de Zurich en septiembre de 1932, pero desgraciadamente falleció a principios de agosto por un derrame cerebral. Fue su colega y colaborador, **John Lighton Synge** el encargado de presentar la propuesta en su nombre, así como de informar del legado de 47.000 dólares canadienses efectuado por Fields para este propósito. La propuesta fue aceptada y se encargó del diseño de las medallas al escultor canadiense **R. Tait McKenzie**:

Anverso y Reverso de la Medalla Fields

El anverso de la medalla muestra la cabeza del gran matemático griego **Arquímedes** (287-212 a. de C.) con su nombre en griego en vertical a su derecha. Rodeando todo aparece la inscripción en latín *Transire suum pectus mundoque potiri* ("ir más allá de uno mismo y dominar el mundo"). En el reverso figura una esfera inscrita en un cilindro y la inscripción *congregati ex toto orbe mathematici ob scrita insignia tribuere* ("los matemáticos de todo el mundo, se reunieron para dar esta medalla por escritos excelentes").

[4] Hay una amplia literatura sobre la ausencia de un Premio Nobel de matemáticas. La versión más socorrida es que Nobel no creo el premio para evitar que lo recibiera el matemático sueco **G. Mittag-Leffler** (1846-1927) porque éste había tenido un *affair* con la esposa de Nobel (versión franco-americana) o simplemente por una rivalidad manifiesta entre ellos (versión sueca). Ambas versiones parecen claramente falsas: Nobel no se casó nunca (aunque tuvo relaciones con varias mujeres, ninguna de las cuales tuvo que ver con Mittag-Leffler; de hecho, ambos personajes apenas tuvieron relación entre sí). Probablemente Nobel no tenía las matemáticas entre sus prioridades y, además, por entonces existía un premio internacional de matemáticas creado por el rey Oscar II a instancias precisamente de Mittag-Leffler, generosamente dotado económicamente y que ya habían recibido matemáticos como **Poincaré, Appell, Hermite** o **Weierstrass**, entre otros. (Véase [Mo].)

En principio, se otorgaron dos medallas en cada CIM. En el Congreso de Moscú (1966) se acordó aumentar el número hasta un máximo de 4 medallas por Congreso "*en vista del vasto desarrollo de las matemáticas durante los últimos 40 años*" ([Cu; pág. 113]). Cada medalla tiene asignada también una dotación económica que ha ido aumentando con el tiempo, pero que sigue siendo bastante modesta (unos 10.000€).

En la propuesta original de Fields se decía que la medalla no sólo debiera premiar el trabajo ya hecho, sino que también debería servir a los recipiendarios como estímulo para nuevas contribuciones. Esta cláusula fue interpretada por el primer Comité Fields (CIM de Oslo, 1936) en el sentido de que la medalla debería concederse a dos *jóvenes* matemáticos. La tradición se mantuvo, pero no fue hasta el CIM de Moscú de 1966 cuando se especificó claramente la condición. **Georges de Rham**, presidente a la sazón de la IMU y del Comité Fields, en la ceremonia de apertura del CIM expuso que, basándose en la cláusula citada de la propuesta original, el Comité decidió que los premiados deberían tener menos de 40 años el 1 de enero del año de la concesión de la medalla. Y así se ha cumplido desde entonces, no sin algunas controversias.[5]

A lo largo del tiempo, según aumentaba la actividad de la IMU, se han ido creando otros premios y distinciones, que también se entregan en cada CIM. Por orden de antigüedad en su creación, citemos los siguientes:

-El **Premio Rolf Nevalinna** para distinguir las contribuciones destacadas en los aspectos matemáticos de las Ciencias de la Computación. Fue creado en 1981 y consiste en una medalla de oro y un premio en metálico. Las condiciones para su concesión son análogas a las de las Medallas Fields. El primero de estos premios se concedió en 1982.

-El **Premio Gauss** se anunció en 2002, con ocasión del 225 aniversario del nacimiento del llamado *Príncipe de las Matemáticas*, **Carl F. Gauss** (1777-1855) para distinguir a los científicos cuya investigación matemática ha tenido un gran impacto en otras disciplinas científicas. Consiste en una medalla de oro y un premio en metálico (unos 10.000€). El Primer premiado fue el matemático japonés nacido en 1915 **Kiyoshi Ito**, en el CIM de Madrid (2006), por su desarrollo del análisis estocástico. No hay restricciones de edad para los premiados, ya que la aplicabilidad de un resultado matemático puede no haberse comprobado hasta mucho tiempo después de su descubrimiento.

-La **Medalla Chern** es el premio más recientemente creado y el mejor dotado económicamente. Otorgado conjuntamente por la IMU y la *Fundación Medalla Chern* premia los logros de toda una vida dedicada a la investigación matemática. Consiste en

[5] El matemático británico **Andrew Wiles** dio una conferencia sobre sus avances en la prueba del Último Teorema de Fermat (que afirma que la ecuación $x^n+y^n = z^n$ no tiene soluciones enteras no triviales para n mayor que 2) en el CIM de Zurich de 1994. Pocas semanas después, logró completar la demostración de un resultado que había resistido el esfuerzo de los matemáticos más importantes durante más de 350 años. Wiles tenía entonces 41 años. En el siguiente CIM (Berlín, 1998), Wiles tenía 45 años y, por tanto, no pudo recibir la Medalla Fields (sin embargo, la IMU decidió conceder a Wiles una placa conmemorativa en reconocimiento de su sensacional logro.) Previamente, en 1995, le había sido concedido el Premio Wolf de matemáticas (Véase la siguiente sección). Remitimos al lector interesado en conocer más detalles de la historia de la conjetura y la apasionada búsqueda para encontrar su solución a [Si].

una medalla de oro y una dotación económica de 250.000 dólares USA, más otra cantidad igual que el premiado puede decidir su distribución para el desarrollo de programas educativos o de investigación en matemáticas. La primera medalla Chern se otorgó en el CIM de Hyderabad (India), en 2010.

2.3 Otros premios internacionales de Matemáticas.

Se han creado una gran cantidad de distinciones y premios internacionales en matemáticas. Muchos de ellos están destinados a premiar las contribuciones en un área concreta o a los miembros de un país o de determinadas asociaciones profesionales. Citaremos sólo los tres generalistas más prestigiosos:

-El **Premio Abel** fue creado por el gobierno noruego en 2002, para conmemorar el bicentenario del matemático noruego **Niels Henrik Abel** (1802-1829). El premio fue propuesto por primera vez por **Sophus Lie** (1842-1899) en 1897, al enterarse de que **Alfred Nobel** no iba a instituir un Premio de Matemáticas en su fundación. Al parecer, el rey Oscar II accedió a financiar el premio, pero la disolución de la unión entre Suecia y Noruega en 1905 acabó con el proyecto. El premio, financiado por el gobierno noruego, está dotado con 770.000€ (similar al Premio Nobel) y se concede cada año a propuesta de un Comité de cinco matemáticos de prestigio internacional que deciden entre las propuestas formuladas por Academias, Universidades, Instituciones o personalidades científicas de renombre. El primer premiado fue el matemático francés **Jean-Pierre Serre**, en 2003 y el más reciente (2014) el ruso-americano **Yákov Grigórievich Sinai**.

-El **Premio Wolf,** creado en 1978, se entrega anualmente en Israel y está sufragado por la Fundación Wolf. Se concede en seis campos: Agricultura, Física, Química, Medicina, Artes y Matemáticas, y consiste en un diploma y 100.000 dólares USA. El último galardonada (2014) ha sido el matemático estadounidense **Peter C. Sarnak**, profesor del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton y editor de la prestigiosa Revista *Annals of Mathematics.*

-El **Premio Crafoord** se entregó por primera vez en 1982, en honor del industrial sueco **Holger Crafoord.** Es concedido anualmente por la Real Academia Sueca de Ciencias a destacados científicos cuyos campos de estudio no se correspondan con los de los Premios Nobel (por lo que se considera el "Nobel flotante"), entre los que se encuentran, como hemos dicho, las matemáticas. Está dotado con unos 500.000 dólares USA. El primer galardonado fue precisamente un matemático, el ruso **Vladímir Arnold** (1937-2010). Se ha otorgado a matemáticos los años 1982, 1988, 1994, 2001, 2008 y 2012.

2.4 La fragmentación del conocimiento matemático.

La segunda mitad del siglo XIX contempló un desarrollo espectacular de la ciencia y la tecnología, que se ha convertido en un crecimiento explosivo de todas las ramas de la ciencia a lo largo del siglo XX. Desde luego, las matemáticas no han sido una excepción.

El continuo incremento de artículos de investigación tuvo como consecuencia la aparición de Revistas de recopilación, donde se recogieran todos los resultados publicados, ordenados por temas, de modo que cada especialista pudiera conocer los resultados relevantes obtenidos en su área de trabajo Así, en 1868 se crea el *Jahrburg über die Fortschritt der Mathematik* (Anuario sobre el progreso de las Matemáticas), la primera publicación dedicada a recoger y reseñar los trabajos aparecidos en otras revistas de matemáticas; dividía esta ciencia en 12 disciplinas y 30 subdisciplinas. Su sucesora *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete* (Revista central de Matemáticas y temas relacionados) fue fundada en 1931 por el matemático **Otto Neugebauer** (1899-1990) y contemplaba en origen 68 disciplinas y 197 subdisciplinas. Con la llegada al poder de los nazis se intentó prohibir la reseña de artículos realizados por autores judíos. Neugebauer dimitió de su puesto de editor y emigró a Estados Unidos, donde en 1939 fundó la revista alternativa *Mathematical Reviews*[6]. Tanto Zentralbatt como *Mathematical Reviews* han unificado la clasificación de los distintos campos. La última *Mathematical Subject Classification* (MSC-2010) contiene 63 campos distintos, con más de ¡5.000! subdivisiones. En la mayoría de estas áreas se están creando nuevos resultados a ritmo creciente.

Hace 200 años los matemáticos más relevantes podían comprender y conocían la mayor parte de las matemáticas que se producían en su época, y tenían una perspectiva global de los resultados más importantes en los distintos campos. Hoy en día esto es imposible. Ya en 1976, fecha de publicación de su autobiografía *Adventures of a Mathematician* el matemático polaco **Stanislaw Ulam** (1909-1984) estimaba en unos 200.000 el número de nuevos resultados publicados cada año, y concluía:

> *En realidad, es imposible mantenerse al tanto ni siquiera de los resultados más destacados y apasionantes. En matemáticas uno llega a casarse con la minúscula parcela que es la propia especialidad. Por este motivo está resultando cada vez más difícil enjuiciar el valor de la investigación matemática, y casi todos nosotros nos estamos convirtiendo básicamente en técnicos.* (Citado en [DH; pág. 33].)

Este enorme desarrollo y fragmentación del conocimiento tiene importantes consecuencias. Una de ellas, como apunta Ulam, es la dificultad en determinar cuáles son los problemas más importantes y las líneas de trabajo más relevantes. Probablemente los especialistas en un campo suficientemente restringido (por ejemplo la subcategoría 46B22 de la MSC-2010: *Radon-Nikodým*, *Krein-Milman and related properties*) podrían ponerse más o menos de acuerdo en contestar esas preguntas dentro de su campo de interés. Pero difícilmente un investigador domina las técnicas y conoce los trabajos más recientes de más de dos o tres áreas de investigación en matemáticas. Una respuesta general a las preguntas anteriormente enunciadas debería englobar las opiniones cualificadas de muchos especialistas distintos, con la dificultad añadida de la carencia de criterios claros y objetivos para comparar resultados en áreas de trabajo muy distantes

[6] Puede consultarse la historia de la fundación de *Mathematical Reviews en* http://www.ams.org/publications/math-reviews/GBaleyPrice.pdf

entre sí. De ahí la diversidad de políticas de financiación de la investigación en matemáticas. Finalmente, hay que dejar las decisiones en manos de "comités de expertos" que, en muchos casos, obedecen al principio político de "no agresión" e indiferencia mutua en lo relativo a sus respectivas especialidades. Y probablemente el mejor criterio de .excelencia es que "*los problemas importantes son los que estudian los investigadores importantes".*

Otra de las consecuencias de esta tremenda proliferación de resultados es la imposibilidad del matemático profesional para comprobar todos y cada uno de los resultados previos en los que debe apoyarse para realizar sus investigaciones. Por ejemplo, la clasificación de los grupos finitos simples se completó en 1985. El resultado final es consecuencia de más de 500 artículos debidos a cerca de un centenar de autores y su demostración ocupa unas 15.000 páginas (*Cfr.* [Go]). Es evidente que aceptar por parte de la comunidad matemática que el resultado es correcto implica una confianza en la competencia e integridad de los autores. Así pues, la noción de *demostración correcta* ha ido tomando a lo largo del siglo XX una dimensión colectiva y se establece por *consenso entre los cualificados*. Como señalan Davis y Hersh:

> *Los matemáticos de todos los campos se apoyan unos en el trabajo de otros; la confianza mutua que les permite hacerlo reside en el sistema social del que forman parte. No se limitan a utilizar resultados que sean capaces de demostrar por sí mismos a partir de primeros principios. Cuando un teorema ha sido publicado en una revista seria, cuando el nombre del autor es conocido, cuando el teorema ha sido citado y utilizado por otros matemáticos, se considera que el teorema está debidamente establecido. Quienquiera considere que tal teorema puede serle útil, se sentirá del todo libre para usarlo. Esta confianza mutua es plenamente razonable y adecuada. Pero no hay duda de que infringe la noción de verdad matemática como verdad indubitable.* ([DH; pág. 278-279]).

Un claro ejemplo de lo dicho anteriormente se produjo durante los tensos momentos en los que se estaba verificando la demostración de A. Wiles del último teorema de Fermat, a la que ya hemos aludido. En distintas ocasiones se reconoció explícitamente por la comunidad matemática (incluso antes de que apareciera publicada la prueba en un largo y difícil artículo de 108 págs. en la prestigiosa Revista *Annals of Mathematics*) que la confianza depositada en las opiniones de los revisores era al menos tan importante como el rigor empleado en sus comprobaciones.

3. Una rápida panorámica de las matemáticas del siglo XX.

Como ya se ha comentado, el siglo XX ha asistido a un desarrollo explosivo de toda la Ciencia y de la Matemática en particular[7]. Sería por tanto inútil y pretencioso intentar siquiera exponer un resumen de los desarrollos más importantes que han tenido lugar a lo

[7] En la introducción de [Di], **Jean Dieudonné** (1906-1992) dice *"creo que puede afirmarse que nunca se han encontrado tantos resultados nuevos e importantes como en la actualidad; y que, sin exagerar, se han producido más matemáticas fundamentales a partir de 1940 que las producidas desde Tales hasta dicha fecha".*

largo de este tiempo. Por ello me limitaré a presentar una rápida panorámica de lo que yo considero algunos aspectos generales de este desarrollo.

La historia de las matemáticas ha contemplado sucesivos periodos de construcción de conceptos, métodos y técnicas, y derribo y sustitución por otros cuando la evolución del rigor o la aparición de paradojas los ha mostrado inadecuados. Por ejemplo, en el siglo VI a. de C. los Pitagóricos basaron sus matemáticas en los enteros naturales y sus razones. El descubrimiento de segmentos *inconmensurables*, como el lado y la diagonal de un cuadrado, cuya razón no puede expresarse por la razón de dos números naturales, dio al traste con esa formulación e hizo que las matemáticas griegas pasaran a basarse en el estudio de las magnitudes geométricas y sus relaciones.

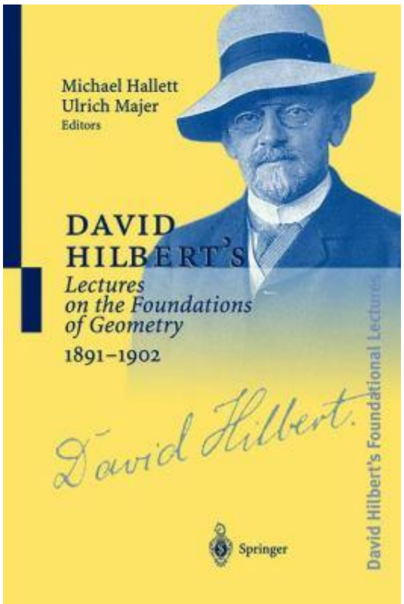
La invención del *cálculo* fue esencial para el desarrollo de la Revolución Científica a partir del siglo XVII y la consiguiente matematización de la Naturaleza. Pero su fundamentación estaba basada en el concepto lógicamente inconsistente de *infinitésimo* y la cantidad de paradojas y aparentes contradicciones por el uso de los *"abominables pequeños ceros"*, en palabras del historiador **C. Boyer** (véase [By]), fue acelerando la incomodidad y la sensación de inseguridad, lo que condujo a una nueva crisis de fundamentos del Análisis que se resolvió a lo largo del siglo XIX, con la adopción del concepto de *límite* como noción básica para el desarrollo de la teoría, y la consideración de la noción de *función* como objeto central del cálculo. El círculo se cierra a finales de siglo con las construcciones rigurosas de los números reales por parte de **G. Cantor** y **R. Dedekind** (1831-1916) como conjuntos infinitos de números racionales y la aritmetización del Análisis. Así mismo, la aparición de las Geometrías no Euclídeas contribuyó decisivamente a la idea de considerar cada rama de las matemáticas como un conjunto abstracto de *teorema*s deducidos de un conjunto de *postulados* o *axiomas*. Es decir, extender el *método axiomático* descubierto por los griegos para el desarrollo de la Geometría, a toda la matemática.

A lo largo de este proceso se va gestando también otro de los instrumentos característicos de la matemática del siglo XX: la noción de *estructura*, es decir, la idea de estudiar y agrupar los objetos matemáticos no tanto por su *naturaleza*, sino por las *relaciones* existentes entre ellos. Así van surgiendo, no sin dificultad, las primeras *estructuras algebraicas* (grupos, anillos, espacios vectoriales), que permiten agrupar bajo una misma denominación conjuntos formados por elementos de naturaleza muy distinta, pero que gozan de una serie de relaciones y propiedades comunes. Estas nociones permiten también explicar las grandes semejanzas existentes entre teorías aparentemente muy distintas.

Uno de los principales representantes de esta nueva visión de la Matemática fue el matemático alemán **David Hilbert**[8] (1862-1943), del que ya hemos hablado. A lo largo de toda su vida, Hilbert mostró siempre una firme e inquebrantable fe en la fiabilidad de la inferencia matemática y todo problema planteado en matemáticas admite una respuesta, bien mediante una prueba rigurosa de su solución o bien con la demostración de la impo-

[8] Remitimos al lector interesado a [B2].

sibilidad de la misma porque, como dijo en la presentación de la famosa lista de 23 problemas en el CIM de París de 1900, *"en matemáticas no existe el ignorabimus"*[9]. Al mismo tiempo, Hilbert defendió siempre la unidad de las matemáticas, frente a lo que sucede en otras ciencias[10]. Es esta convicción la que condiciona su actividad investigadora. La búsqueda del rigor y de principios generales de razonamiento, el descubrimiento de los axiomas mínimos de los que se deducen los resultados de una teoría y la utilización, en fin, del método axiomático en sentido moderno, es el hilo conductor de toda su ingente actividad investigadora.



En 1899, un año antes del Congreso de París, apareció una de las obras que influyeron más en el devenir de las matemáticas de la primera mitad del siglo XX: *Grundlagen der Geometrie* ("Los Fundamentos de la Geometría"). Inmediatamente se convirtió en un *best seller*, traducido rápidamente al francés, inglés, etc. En ella, Hilbert propone un conjunto de 20 axiomas para probar *todos* los teoremas de la geometría euclídea.

Pero ya 300 años a. de C. **Euclides** (~325.~265 a. de C.) había recopilado los conocimientos geométricos de su tiempo en un tratado conocido como *Los Elementos,* en el que, a partir de unas pocas aseveraciones *evidentes* (23 *definiciones* casi intuitivas, 5 *postulados* o *axiomas* y 5 *nociones comunes,* afirmaciones generales del tipo "el todo es mayor que la parte", etc.) y utilizando exclusivamente las leyes de la lógica deductiva (algunas recogidas en las *nociones comunes*, aunque la mayoría están implícitas en *Los Elementos*)[11] se obtienen hasta 465 Proposiciones que recopilan todo el conocimiento geométrico de la época. Durante más de 2.000 años se consideró a *Los Elementos* el paradigma del rigor. Sin embargo, poco a poco se empezaron a notar algunas grietas en el majestuoso edificio: los presupuestos de Euclides no eran suficientes para deducir todos los teoremas incluidos[12]. A lo largo del siglo XIX se fueron encontrando nuevos defectos en el majestuoso edificio de Euclides lo que, junto con el descubrimiento de las Geometrías no Euclídeas, motivó la aparición de nuevas propuestas axiomáticas para fundamentar la geometría.

---

[9] Se refiere Hilbert a la expresión latina *ignoramus et ignorabimus* ("desconocemos y desconoceremos") acuñada en 1872 por el fisiólogo alemán **Emil du Bois-Reymond** (su hermano **Paul** fue un famoso matemático), para describir la limitación esencial de la razón humana para conocer la Naturaleza, señalando que hay ciertas cuestiones que quedarán siempre más allá de nuestro conocimiento.

[10] "*La ciencia de las matemáticas, tal como yo lo veo, es un todo indivisible, un organismo cuya habilidad para sobrevivir reside en la conexión entre sus partes"* (Citado por H. Weyl en [We; pág. 617]).

[11] La primera recopilación de las leyes lógicas se encuentra en la obra de **Aristóteles** *El Organon* ("El útil").

[12] De hecho, la primera proposición del tratado afirma la posibilidad de construir un triángulo equilátero sobre cualquier segmento **AB**, trazando circunferencias de centros en **A** y en **B** y de radio la longitud del segmento, lo que está permitido por los axiomas, y tomando como otro vértice **C** uno cualquiera de los dps de la intersección. Pero la existencia de **C** (es decir, el que las dos circunferencias se corten) ¡no se puede deducir de ninguno de los axiomas, o nociones comunes enunciadas!

Lo que Hilbert propuso fue un sistema simple y completo de 20 axiomas para probar todos los resultados de la geometría euclídea, pero con un enfoque totalmente original respecto a sus predecesores. En primer lugar, Hilbert renuncia a tratar de definir las nociones primitivas. Las definiciones de Euclides de *punto, recta* y *plano,* basadas en la evidencia e intuición física, no tienen relevancia matemática. Lo importante es la relación que establecen los axiomas entre esos objetos (que, como dice Hilbert en otro lugar, podrían llamarse *mesas, sillas* y *jarras de cerveza*). Los axiomas constituyen una especie de *definición camuflada* (*"définition déguisée"* en palabras de Poincaré) de esas nociones. El sistema de axiomas no determina de manera única, en general, los objetos considerados. Cada conjunto concreto de objetos matemáticos que verifican los axiomas considerados, constituye un *modelo* del sistema axiomático.

Volviendo a Hilbert, tras enunciar los 20 axiomas que propone y exponer distintas consecuencias, emprende una tarea totalmente original: el estudio de la *independencia* de los axiomas y su *consistencia* o ausencia de contradicción. Y para ello, Hilbert utiliza sistemáticamente el método de *construcción de modelos*: Para probar que el axioma X es independiente del sistema de axiomas $\mathfrak{S}$ es equivalente a probar que el sistema de axiomas $\mathfrak{T}$ obtenido añadiendo a $\mathfrak{S}$ la negación de X, es consistente. Y para ello basta construir un modelo (en una teoría más simple y segura) de $\mathfrak{T}$, pues la existencia de una contradicción en $\mathfrak{T}$ implicaría la existencia de una contradicción en la teoría con la que se ha construido el modelo. Hilbert consigue probar la independencia de los axiomas propuestos y su consistencia (relativa), construyendo diversos modelos formados por números reales o algebraicos.

Las ideas de Hilbert se convirtieron en paradigma para el estudio de los sistemas axiomáticos que iba a ser característico de gran parte de la matemática del siglo XX. En palabras de su discípulo y colega **Hermann Weyl** (1885-1955):

> *Las ideas generales* (sobre consistencia e independencia) *nos parecen hoy casi triviales, tanta ha sido su influencia en nuestro pensamiento matemático. Hilbert las estableció en un lenguaje claro e inconfundible y las incluyó en un trabajo que es como un cristal, un todo irrompible con muchas facetas.* ([We: pág. 636]).

Durante algún tiempo, es probable que Hilbert pensara que la consistencia de la aritmética (segundo de su listas de problemas) pudiera probarse construyendo modelos a partir de la teoría de conjuntos iniciada por Cantor. Desgraciadamente, entre 1895 y 1905 aparecieron una serie de paradojas[13] que hicieron surgir las dudas sobre la conveniencia de fundamentar las matemáticas en la Teoría de Conjuntos. Es probable que esto hiciera

[13] En particular, la bien conocida *Paradoja de Russell*, basada en la convicción de que cualquier predicado P(x) en el sistema con una variable libre x determina un conjunto (el de los objetos que satisfacen P(x)), iba a echar por tierra el monumental sistema lógico creado por **F.L.G. Frege** (1848-1918), uno de los fundadores de la lógica simbólica que trataba de reducir la construcción de la aritmética a la lógica.

que Hilbert dedicara su atención a otra serie de problemas en Análisis y Física Matemática, en los que, una vez más, creó nuevos métodos y abrió nuevas y fecundas líneas de investigación.

L. E. J. Brouwer (1881-1966)

La vuelta de Hilbert al estudio de los fundamentos de la matemática fue en parte motivada por la creciente aceptación de las ideas del matemático **L. E. J. Brouwer**[14] (1881-1966). Éste, creador de la llamada *escuela intuicionista,* defendía que los objetos matemáticos se engendran por construcciones *efectivas* en un número *finito* (aunque arbitrariamente grande) de etapas a partir de los números enteros. En particular, rechazaba el principio lógico del *tertio excluso*, que establece que, dada una proposición $\mathfrak{P}$ o bien $\mathfrak{P}$ es verdadera o su negación lo es. En particular, esta postura se oponía a la tesis hilbertiana de que todo problema matemático tiene solución, y eso era demasiado para que Hilbert asistiera inpertérrito a la tremenda mutilación que, a su juicio, suponían estas ideas[15]. Así que Hilbert se embarca en un ambicioso programa ara crear lo que llama una "Teoría de la Demostración" (*Beweistheorie*) cuyo objeto de estudio fuera la demostración matemática en sí[16]. Para ello, propone la *formalización* completa del sistema a estudiar, explicitando el listado o *vocabulario completo* de signos a emplear, las *reglas de formación* de las expresiones válidas en el sistema y las *reglas de transformación* para pasar de una fórmula válida a otra. Unas cuantas expresiones válidas se seleccionan como *axiomas* y a partir de aquí se trata de establecer afirmaciones sobre los signos del sistema formar por medio de propiedades combinatorias del lenguaje formal (*metamatemática*) que permitiera hacer afirmaciones sobre una expresión determinada del sis-

---

[14] Brouwer es responsable de una importante obra en la matemática tradicional. Por ejemplo, su famoso *teorema del punto fijo* o su prueba de que la dimensión del espacio euclídeo es un invariante topológico son verdaderos hitos en el desarrollo de la topología.

[15] En una Conferencia pronunciada en 1927 en la Universidad de Hamburgo, Hilbert dijo: *expulsar el principio de tertio excluso de las matemáticas es como si se quisiera prohibir al astrónomo utilizar el telescopio o al boxeador emplear sus puños.*

[16] En palabras del propio Hilbert, el objetivo de su Teoría es "*dar una base firme y segura de las matemáticas* [...] *que se convierten así en una especie de tribunal de suprema instancia para la evaluación y resolución de cuestiones de principio."*

tema. La prueba de la consistencia de un sistema formal consistiría en probar, por enunciados metamatemáticos finitistas, que nunca se puede obtener en el mismo una fórmula válida y su negación.

Hacia 1930 el Programa de Hilbert parecía bien encaminado. En particular, se había podido demostrar la consistencia absoluta del sistema de la aritmética de los números naturales con la adición (aunque no con la multiplicación.

Sin embargo, el año siguiente, un joven docente en la Universidad de Viena, **Kurt Gödel** (1906-1978) acaba con la esperanza de Hilbert, al probar que todo sistema formal consistente y que contenga a la aritmética es necesariamente *incompleto*, es decir, con

K. Gödel (1906-1978)

tiene enunciados legítimos del sistema que son *indecidibles,* esto es, ni su afirmación ni su negación son demostrables en el sistema. ¡Y uno de esos enunciados es, precisamente, el que afirma la *consistencia* del sistema!

Está claro que los resultados de Gödel supusieron un golpe demoledor para el programa de Hilbert en su versión original: La matemática clásica podía ser consistente (y probablemente lo era), pero su consistencia no podía establecerse por los métodos finitarios propuestos por Hilbert[17].

Hilbert mantuvo siempre su optimismo en la fiabilidad de las matemáticas. A este respecto, es ilustrativo la inscripción que figura en su lápida (tomada de la conferencia que pronunció en Königsberg con motivo de sj nombramiento como hijo predilecto de su ciudad natal):

Wir Müssen wissen. Wir werden wissen ("Debemos saber. ¡Sabremos!")

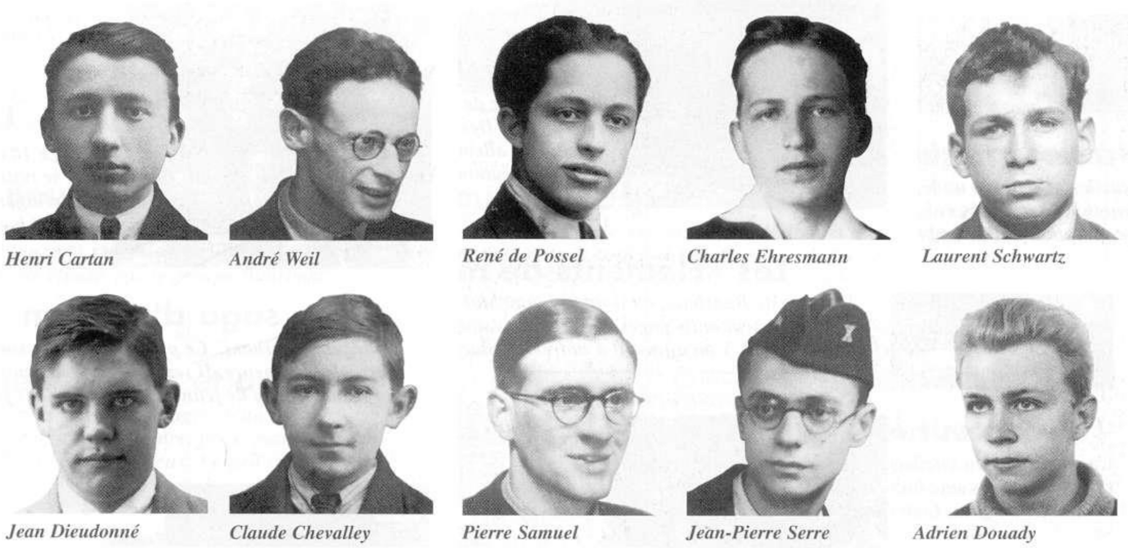
La obra de Hilbert tuvo gran influencia en el devenir del modo de hacer matemáticas durante gran parte del siglo XX. El método axiomático y la utilización como instrumento básico unificador de la matemática de la noción de *estructura* va a ser el modelo que se va a imponer para el desarrollo de las matemáticas (al menos, de las llamadas *matemáticas puras*).,

Dos de los textos redactados con esa visión de las matemáticas resultaron enormemente influyentes. El primero de ellos fue *Moderne Algebra* del holandés **Bartel L. van der Waerden** (1903-1996), aparecido en 1930, tuvo un enorme impacto y contribuyó decisivamente a la adopción casi universal del punto de vista estructural en la organización y desarrollo del álgebra. El otro fue *Théorie des Opérations Linéaires*, publicado en

[17] En 1936, **G. Gentzen** (1909-1945), un discípulo de Hilbert, probó la consistencia de la aritmética y distintas partes del análisis utilizando un proceso de inducción transfinita sobre cierta clase de ordinales. Éste y otros resultados indican que quizá se pudiera conseguir el objetivo propuesto por Hilbert debilitando adecuadamente las restrictivas hipótesis impuestas.

1932 por el polaco **Stefan Banach** (1892-1945) [18], en el que se recogen los desarrollos fundamentales de la teoría de espacios normados en la década de 1920-1930 y fue decisivo para el rápido desarrollo que experimentó el Análisis Funcional en los años siguientes.

La idea de editar un texto claro y moderno, "a lo Hilbert" de Análisis, que contuviera los contenidos de los cursos de cálculo diferencial e integral impartidos en las universidades francesas fue la que, en principio, motivó a un grupo de jóvenes matemáticos, la mayoría antiguos alumnos de *L'Ecole Normale Superier* de París a reunirse el 10 de diciembre de 1934 en el "Café Grill-room A. Capoulade" del bulevar Saint Michael de París para establecer las bases de la redacción *colectiva* de este tratado. Los integrantes del grupo eran **Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, René de Possel y André Weil**, y aunque entonces ellos no lo sabían, iban a ser los "padres fundadores" de uno de los grupos más influyentes en la matemática del siglo XX: El grupo **Bourbaki.**



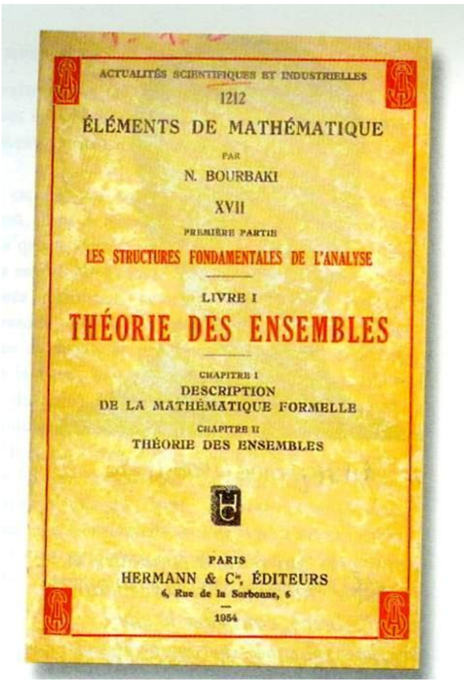
Algunos integrantes del grupo Bourbaki

El grupo siguió reuniéndose para discutir los contenidos del *Tratado de Análisis* y se fueron añadiendo nuevos miembros. Entre diciembre de 1934 y mayo de 1935 tuvieron 10 reuniones y, poco a poco, la idea original se fue transformando en una tarea más amplia: se decide aumentar el ámbito de los lectores potenciales, suministrándoles una colección de herramientas matemáticas "*tan universales como sea posible".* Y para fijar un plan global de actuación, el grupo acuerda reunirse del 10 al 17 de julio de1935 en unos locales de la Universidad de Clermont-Ferrand. Tras múltiples discusiones, se decidió ampliar el objetivo inicial para incluir unos cuantos capítulos más abstractos y novedosos, donde se realizara una exposición axiomática de los prerrequisitos necesarios de álgebra,

[18] En el prólogo, dice Banach: "*Es interesante ver como ciertos teoremas dan resultados en disciplinas muy alejadas entre sí. Así, por ejemplo, el teorema de extensión de un funcional aditivo resuelve simultáneamente el problema general de la medida, el problema de los momentos y el de la existencia de solución de un sistema de infinitas ecuaciones lineales con infinitas incógnitas."*

topología, etc. (el “paquete abstracto”, como se llamó a esta parte). También se decidió adoptar como nombre colectivo del grupo el de **Bourbaki**, que tenía sus raíces en la historia colectiva del grupo[19], y al que posteriormente se le añadió el nombre de **Nicolás**. Para el segundo Congreso del grupo (1936), el objetivo inicial se había quedado pequeño. El “paquete abstracto” no dejaba de crecer, transformándose en la parte principal del tratado. Así que los integrantes del grupo se fijaron un objetivo mucho más ambicioso que el original: elaborar un tratado que contuviera de forma clara, precisa y sistemática los resultados básicos para *todas* las teorías existentes en matemática pura, un *equipo de herramientas* para el matemático profesional. Se acordó adoptar el título de *Eléments de Mathematique* (sin “s”, para indicar que la obra abarcaba a la matemática como un todo y por analogía con los otros célebres *Elementos*, los de Euclides, que en su época suponían el compendio de todo el saber de los griegos en geometría.) Se fijaron a grandes rasgos las normas de redacción de la obra y de funcionamiento del grupo, la adopción de nuevos miembros, etc. La vocación de mantener siempre un carácter innovador se manifestó en fijar una edad límite para permanecer en el grupo (los 50 años).

Otra característica del grupo es su secretismo. Al crecer en influencia e importancia, fue adoptando un comportamiento propio de una sociedad secreta. Ninguna persona de fuera del grupo conoce la composición exacta del mismo, ni sus actividades, ni las fechas o lugar de sus Congresos. Casi todos los miembros han sido franceses o de origen francés, con la notable excepción de **Samuel Eilenberg.** Y junto al secretismo, el grupo mantuvo durante bastante tiempo un carácter bromista e incluso irreverente a veces. Con frecuencia han difundido historias sobre sí mismo muchas veces falsas y a menudo contradictorias entre sí, comenzando con una biografía apócrifa del mismo Nicolás Bourbaki, “*antiguo miembro de la Real Academia de Poldavia”* (país completamente inexistente). En fin, entre bromas y veras fueron apareciendo los volúmenes de los *Eléments* y su éxito fue arrollador, sorprendiendo a sus mismos autores. El grupo fue pionero en la obra de sistematizar y ordenar una gran cantidad de información aparecida a lo largo de muchos años, en muchas revistas y en idiomas diferentes. También publicó el primer tratamiento sistemático de algunos temas, como el *álgebra multilineal y exterior, los espacios uniformes, la teoría de filtros, los grupos topológicos,* etc., en los que se incluían muchos resultados de los integrantes del grupo. El volumen sobre *espacios vectoriales topológicos*, por ejemplo, fue el primer texto publicado sobre espacios localmente convexos, e incluye gran parte de las nociones y notaciones usuales de la teoría. En edición francesa han aparecido hasta el momento unos 25 volúmenes, con


ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES
1212
ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE
PAR
N. BOURBAKI
XVII
PREMIÈRE PARTIE
LES STRUCTURES FONDAMENTALES DE L'ANALYSE
LIVRE I
THÉORIE DES ENSEMBLES
CHAPITRE I
DESCRIPTION DE LA MATHÉMATIQUE FORMELLE
CHAPITRE II
THÉORIE DES ENSEMBLES
PARIS
HERMANN & Cie, ÉDITEURS
6, Rue de la Sorbonne, 6
1954

[19] El lector interesado puede consultar [B1] sobre éste y otros aspectos del grupo.

más de 7.000 páginas[20] y muchos de ellos se convirtieron en clásicos en distintas áreas de la matemática pura[21]. Los conceptos, nomenclatura y el peculiar estilo de Bourbaki se convirtieron en estándares universalmente aceptados. Su influencia durante los 40 años siguientes a su fundación fue enormemente significativa y su obra ampliamente citada en la literatura científica. Es claro que el éxito de Bourbaki está ligado también a la calidad científica de sus miembros, la mayoría excelentes matemáticos, con una producción científica propia muy destacada. (cinco de ellos han obtenido una Medalla Fields).

A mediados los años 70 del pasado siglo se produce, sin embargo, un rápido declive en la influencia y popularidad de Bourbaki. Las razones son múltiples y variadas. Por un lado, en gran parte los bourbakistas cumplieron su objetivo, ya que su estilo y forma de presentar y organizar las matemáticas calaron profundamente en la comunidad matemática. Pero hay motivos más profundos: la analogía que tanto gustaba a Bourbaki de comparar la matemática a un robusto árbol, con sus raíces bien establecidas en la teoría de conjuntos, ha dejado de ser verosímil[22]. Las nuevas exigencias de la tecnología, la economía y la transmisión de información han favorecido enormemente los procesos de interconexión entre ramas muy distintas. La frontera entre las distintas áreas o "ramas" de la matemática se ha hecho más y más difusa: campos como la geometría, los fractales, las ondículas o la topología tienen fuertes interrelaciones con la física teórica, el tratamiento de imágenes, la teoría de códigos o la inteligencia artificial. Incluso campos tan abstractos y *puros* como la teoría de números o la geometría algebraica hemos visto que tienen importantes aplicaciones en criptografía y en transmisión de la información. En fin, si a esto se une la gran explosión en la producción matemática que tiene lugar por estas fechas, se puede concluir que el paisaje matemático ha cambiado mucho desde la fundación de grupo. Las matemáticas se parecen más a un bosque de manglares o a una población de setas con un amplio y variado micelio y no es fácil establecer un desarrollo sistemático de todas las herramientas necesarias para su desarrollo. Incluso varios ilustres antiguos miembros del grupo refrendan esta opinión, como por ejemplo:

> *"Lo novedoso de la obra* [de Bourbaki] *es la precisión con la que se define la estructura, que aparece como el hilo conductor que da coherencia a todo el tratado. Pero* […] *después de la década de 1950 la idea de estructura pasó de moda, superada por el influjo de los nuevos métodos categoriales en alguna de las áreas más activas de la matemática, como la topología o la geometría algebraica. Así, la noción de* topos *se resiste a formar parte de la bolsa*

[20] Puede verse la lista completa en [B1; pág. 92]

[21] La influencia de Bourbaki va mucho más allá de las matemáticas, ya que jugó el papel de intermediario cultural entre los distintos aspectos de la corriente de pensamiento llamada *estructuralismo,* que abarca desde la lingüística y la antropología hasta la economía y la psicología. Remitimos al lector interesado a [B1] y a las referencias allí incluidas.

[22] *"La vieja esperanza de los bourbakistas de ver surgir las estructuras matemáticas de la jerarquía de los conjuntos y de su combinatoria, es sin duda alguna una quimera."* **(René Thom,** Medalla Fields 1958). Y también *"La unidad de las matemáticas no están fundamentada sobre una sola raíz, la teoría de conjuntos, como propugnaban los bourbakistas, sino sobre el hecho de que las diferentes ramas comunican entre sí."* (**Jean Pierre Kahane**).

de estructuras de Bourbaki.” (**Alexander Grothendieck,** medalla Fields 1966, en “Memorias: “*Promenade a traver una oeuvre ou l’enfant et la mère*”.)

En palabras de Sir M. Atiyah, en su ya citado artículo [AT], la primera mitad (larga) del siglo XX puede llamarse la *era de la especialización*, en la que se sigue la aproximación a las matemáticas de Hilbert, tratando de formalizar y definir cuidadosamente los conceptos. La segunda parte la llama Atiyah la *era de la unificación* donde las fronteras entre las distintas áreas se debilitan y se cruzan constantemente, y las técnicas se transfieren de un campo a otro. En su interesante artículo [Da], el autor contrapone el término *estructura*, omnipresente en la primera época, con el de *modelo*, utilizado sistemáticamente en una parte importante de la matemática actual. Hasta tal punto esto es así que en el CIM celebrado en Berlín en 1998, **David Munford** (Medalla Fields en 1974) formuló la vieja polémica entre matemática pura y aplicada en términos de *matemáticos que demuestran teoremas versus los que construyen modelos* ([Mu]). Junto a estos cambios de óptica, otra de las características de esta segunda época es el creciente uso del *ordenador*, no sólo como herramienta de cálculo masivo y rápido, sino como instrumento *esencial* para obtener nuevos resultados. A este fascinante aspecto de la matemática del siglo XX dedicaremos la siguiente Sección.

4. Matemáticas y ordenadores.

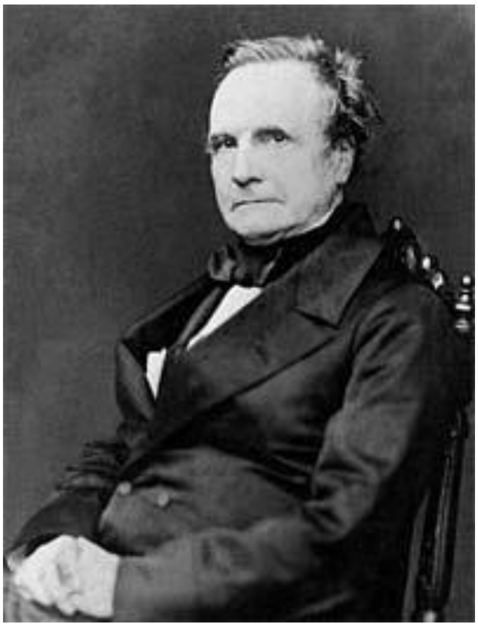
La aparición y desarrollo de los ordenadores digitales durante el siglo XX es probablemente uno de los hechos más revolucionarios de la historia. Su impacto en el desarrollo de la ciencia y la tecnología ha sido y sigue siendo enorme. La posibilidad de disponer de una gran potencia de cálculo, rápido y eficaz, revolucionó los ingeniosos métodos desarrollados por los matemáticos para resolver problemas prácticos de cálculo cuya solución por la mera “fuerza bruta” sería impracticable.

4.1 Breve historia de los ordenadores.

Aparte del ábaco, utilizado desde tiempos inmemoriales para realizar cálculos (sumas y restas, esencialmente), se atribuye la construcción de la primera “máquina de calcular” a **Blaise Pascal** (1623-1662), filósofo y matemático francés que construyó en 1642 una máquina de sumar (*Pascalina*) para ayudar a su padre, a la sazón Jefe de la recaudación de impuestos de la región de Normandía, en sus cuentas. Pascal llegó a construir 50 de estas máquinas, de las que se conservan 9.

Pascalina del año 1652

Posteriormente, **W. G Leibniz** en Alemania (1671) y Sir. **Samuel Morland** en Inglaterra (1673) inventaron máquinas que también multiplicaban. En 1875 el americano **Frank S. Baldwin** patentó la primera máquina de calcular que podía realizar las cuatro operaciones aritméticas fundamentales y sirvió de modelo para la mayor parte de las calculadoras mecánicas de mesa para uso comercial que se emplearon posteriormente.



Charles Babbage (1791-1871)

Las crecientes necesidades de la tecnología demandaban métodos para resolver y calcular distintos problemas numéricos: cálculo de valores de una función, tablas de funciones especiales, resolución de ecuaciones lineales y no lineales con muchas incógnitas, aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales, etc. Se desarrollaron ingeniosos métodos de análisis numérico para disminuir el volumen de cálculos y los errores cometidos, lo que a su vez demandaba nuevas máquinas de cálculo más rápidas y complejas. A estas demandas respondían los intentos del inglés **Charles Babbage** (1791-1871) al diseñar las primeras calculadoras para usos matemáticos: La *Máquina de Diferencias* (1822) y la *Máquina Analítica* (1837)[23]. El diseño de esta última contenía conceptos como una unidad aritmética lógica independiente, una memoria integrada, control de flujo de datos y el uso de tarjetas perforadas para codificar información. Por ello se considera a Babbage como uno de los "padres" de la computación moderna.

La utilización sistemática de la electricidad a lo largo del siglo XX dio origen en los años 1930 a la aparición de los primeros computadores electro-mecánicos. Uno de los primeros fue construido por el ingeniero aeronáutico alemán **Konrad Zuse** (1910-1995) con el nombre de **Z1** en 1936. Se trataba de una calculadora mecánica que utilizaba relés eléctricos para automatizar los procesos. Los cálculos estaban realizados en el sistema binario y la entrada de datos y salida de resultados se realizaba a través de una cinta perforada. Admitía posibilidades de programación, pero el prototipo nunca funcionó del todo bien. Posteriormente, Zuse creó otros diseños para subsanar los problemas del original, y así surgieron la **Z2** y la **Z3**. Esta última, fabricada en 1941, se considera la primera máquina programable y completamente automática, con casi todas las características de los computadores modernos. De hecho, se podían construir bucles lógicos en ella, aunque no poseía ninguna instrucción de salto condicional. Era una máquina realmente avanzada

[23] Babbage abandonó su puesto de Profesor en Cambridge para dedicarse totalmente a la construcción de su máquina. Invirtió (y perdió) su fortuna personal en el intento y, aunque obtuvo financiación del gobierno británico, la falta de resultados efectivos hizo abandonar el proyecto y las máquinas no se construyeron en vida de Babbage. En 1991 el *London Science Museum* completó una versión operativa de la *Máquina Analítica*, iniciada por el hijo de Babbage en 1910.

para la época. Por ejemplo, el ENIAC (*Electronic Numerical Integrator and Calculator*), de mucha mayor potencia de cálculo y del que hablaremos después, fue completado cuatro años más tarde que el Z3 y usaba válvulas de vacío (que consumían mucha energía y se estropeaban con frecuencia), en lugar de relés como el Z3. Además, ENIAC era decimal y el Z3 binario. Hasta 1948, para programar el ENIAC había que volver a soldar una nueva configuración de los cables, mientras que el Z3 leía los programas en una cinta perforada. En fin, la arquitectura de los computadores modernos es más parecida a la del Z3 que a la del ENIAC. Ninguna de las máquinas de Zuse sobrevivió a la Guerra Mundial, aunque existen réplicas en los museos de Berlín y Munich[24].

Por la misma época que Zuse creaba la Z1, al otro lado del Atlántico, el ingeniero estadounidense **John Atanasoff** (1903-1995) construyó algunas calculadoras para ayudarle en sus cálculos. La tolerancia mecánica requerida para conseguir una buena exactitud le llevó a considerar el uso de la electricidad y así, durante el invierno de 1937 diseñó un computador digital electrónico que utilizaba válvulas de vacío, cálculos en binario e implementaba una unidad que permitía cálculos lógicos booleanos. Para el desarrollo de la idea, contó con la ayuda de un alumno graduado, **Clifford Berry** (1918-1963), y así nació la *Atanasoff-Berry Company* (ABC). En noviembre de 1939 la ABC contaba con un prototipo operativo, que podía resolver sistemas de hasta 29 ecuaciones lineales.

Todas estas máquinas suponían un importante avance de conceptos, pero tenían una limitada capacidad de cálculo. Y fue precisamente la II Guerra Mundial la que propició la aparición de máquinas mucho más potentes, para resolver problemas originados por necesidades bélicas, tanto en Gran Bretaña como en Estados Unidos:

-A principios de 1939 el servicio secreto británico estableció en Bletchley Park, cerca de Londres, unas instalaciones para el descifrado de los mensajes enemigos, en caso de guerra. Matemáticos y criptógrafos, junto con jugadores de bridge y ajedrez, formaron un variopinto grupo, dirigido por el matemático **Alan Turing** (1912-1954), del que hablaremos más adelante, para quebrar el cifrado de las distintas variaciones de la famosa máquina *Enigma* usada por los alemanes,. Bajo sus directrices se construyó la primera "*bomba"*, versión muy evolucionada de una máquina diseñada por los servicios secretos polacos que habían estado trabajando desde 1929 en el descifrado de las primeras versiones de la *Enigma.* Tras la invasión alemana, gran parte de la sección de criptografía polaca huyó a Francia y Gran Bretaña, donde sus informaciones fueron extremadamente valiosas. La bomba emulaba el funcionamiento de 36 máquinas *Enigma* para tratar de descubrir la configuración de la misma en tiempo real (variaba cada día). En 1940 se consiguieron descifrar 178 mensajes alemanes. Llegaron a funcionar unas 70 "bombas" a la vez. La introducción en 1942 de un cuarto rotor en la máquina Enigma, obligó a aumentar

[24] En 1998 el matemático mejicano-alemán **Raúl Rojas** demostró que la Z3 era equivalente a una máquina universal de Turing (si tuviera almacenamiento infinito), y por tanto, podría emular *cualquier* cálculo que pueda hacer cualquier otra computadora.

el número de “bombas”[25]. Pero, además de Enigma, los alemanes empleaban una máquina aún más sofisticada para sus comunicaciones de alto nivel entre el Alto Mando y los oficiales superiores, llamada *Lorenz SZ40/42*. Para ello los británicos desarrollaron una nueva máquina, considerada el primer computador electrónico digital y programable. El prototipo *“Colossus Mark 1”,* diseñado como sus sucesores por el ingeniero **Tommy Flowers** (1905-1998) (y en el que colaboró también Alan Turing), estuvo operativo en Bletchley Park en febrero de 1944. Una versión mejorada, la *Mark 2* entró en funcionamiento en junio de 1944. Se llegaron a construir 10 *“Colossus”*, pero como en el caso de las “bombas” de Turing, su existencia se mantuvo en secreto hasta los 1970.

Réplica del *Colossus II* (2006)

Cuando terminó la guerra, Turing continuó colaborando para la construcción de máquinas cada vez más sofisticadas, como la ACE (*Automatic Computing Machine*). En 1948 fue contratado por la Universidad de Manchester, y allí construyó el primer ordenador del mundo que dispuso de un programa almacenado electrónicamente.

Al otro lado del Atlántico, la *Moore School of Engineering* era un centro dependiente de la Universidad de Pennsylvania que estaba especializado en el cálculo de tablas de tiro para las nuevas armas desarrolladas por la Armada. En 1941 se incorporó como Profesor el físico **John W. Mauchly** (1907-1980) y estableció una perdurable amistad con **John P. Eckert,** un recién egresado de la *School*, que le sugirió el uso de tubos de vacío para realizar cálculos. En 1942 Mauchly propuso a la Marina la construcción de un calculador electrónico de uso general, utilizando tecnología digital sin partes móviles, con una gran capacidad de cálculo. La Armada aceptó la propuesta; Mauchly se encargó del diseño y Eckert de su implementación, y así surgió el ENIAC[26], del que ya hemos hablado. Era una máquina 1.000 veces más potente que las existentes hasta entonces. Podía

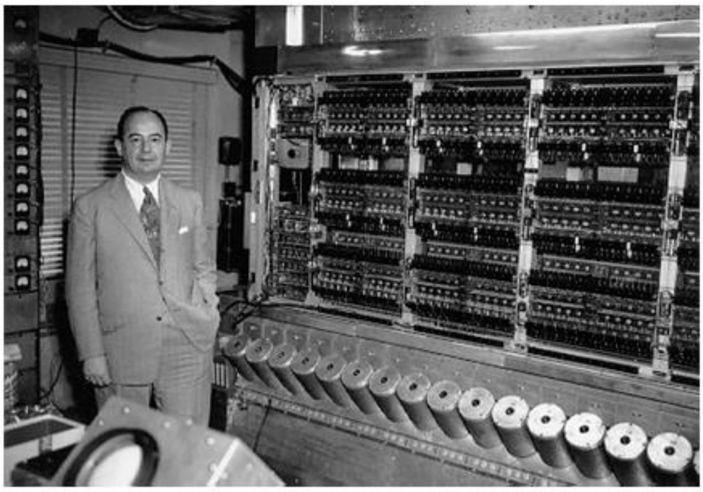
[25] La mayoría fueron destruidas al finalizar la guerra. El descifrado de la máquina Enigma fue mantenido en secreto hasta los años 1960, así como los nombres de los principales artífices de la hazaña que probablemente acortó considerablemente la guerra. Recientemente se ha rodado una película, *The Imitation Game*, centrada en la figura de Alan Turing y sus actividades en Bletchley Park.

[26] La patente del ENIAC, registrada por Mauchly y Eckert en 1946, fue invalidada por decisión del Juez **Larson** de la Corte Federal en 1973 al declarar que el ENIAC había “heredado” demasiadas ideas claves de la máquina ABC de Atanasoff. En efecto, Mauchly visitó a Atanasoff en junio de 1941 para ver el ABC y estudiar su diseño y tuvieron varias reuniones posteriores para hablar de temas de computación. Mauchly nunca dijo a Atanasoff que estaba trabajando en la construcción de un computador (adujo en el juicio que estaba bajo restricciones de seguridad militar). La decisión judicial provocó una gran controversia.

realizar 5.000 sumas o realizar 14 multiplicaciones de 10 dígitos en un segundo. Ocupaba 167 m^2 y pesaba 27 toneladas. Requería la operación manual de unos 6.000 interruptores y, como hemos dicho, su programación se realizaba por *hardware*, realizando una nueva configuración del mismo. Pero su capacidad de cálculo era asombrosa. Posteriormente, **John von Neumann** (1903-1957) que a la sazón trabajaba en el *Proyecto Manhattan,* se unió al programa en 1944. Había llegado a la conclusión de que los métodos analíticos eran inadecuados para resolver las ecuaciones que surgían en el diseño de la bomba atómica (ondas de choque, difusión de neutrones, etc.) Así que optó por técnicas de discretización y resolución numérica. Pero para ello necesitaba mecanismos efectivos y rápidos de cálculo y una variedad de algoritmos para resolver rápidamente las ecuaciones discretizadas. Al tener conocimiento de la existencia del ENIAC, se dio cuenta de que era precisamente lo que necesitaba. De hecho, dedicó gran parte de sus esfuerzos posteriores a la teoría de la computación y al diseño de la estructura lógica de ordenadores.

En una conferencia que pronunció en Montreal en 1945 concluyó que

> *Los instrumentos realmente eficientes de alta velocidad de cálculo son los que nos proporcionarán en el campo de las ecuaciones no lineales en derivadas parciales y en muchos otros a los que ahora tenemos difícil o completamente imposible acceso, las herramientas necesarias para un progreso genuino.*



John Von Neumann con ENIAC

Von Neumann conoció a **Alan Turing** durante la estancia de éste en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, el curso 1936-37 y probablemente tuvo noticia de la idea de máquina de Turing incluida en el artículo de 1936. Como hemos dicho, en 1944 se unió al grupo encargado de construir una nueva calculadora analítica (la EDVAC: *Electronic Discrete Variable Automatic Computer*), que remediara los defectos conceptuales e imperfecciones del ENIAC. Después de muchas sesiones de trabajo, surgió poco a poco la idea de *programa grabado,* que evitaría tener que modificar la calculadora para cada problema, y dotaría al sistema de programación de la posibilidad de automodificarse. Estas ideas fueron expuestas en el famoso artículo *First draft of a report on the EDVAC*, publicado el 30 de junio de 1945 con la firma de Von Neumann[27]. En él se describe con precisión el diseño de lo que debería ser un computador digital

[27] En palabras del matemático y teórico de la computación **Herman H. Goldstine** (1913-2004), este informe es "*un análisis y una síntesis magistral de todas las reflexiones realizadas entre el otoño de 1944 y la primavera de 1945*" y constituye *"el más importante documento escrito hasta entonces sobre el cálculo y las calculadoras"*

electrónico, con una *unidad aritmético-lógica*, una *unidad de control*, y una *memoria* para almacenar tanto datos como instrucciones. Era el inicio de lo que se llamó la *arquitectura de Von Neumann* que ha inspirado el desarrollo físico de los ordenadores modernos.

Una vez establecida la arquitectura básica de lo que debe ser un computador, los avances en la electricidad y la electrónica[28] propiciaron un desarrollo vertiginoso en la creación de máquinas más potentes, más pequeñas y más baratas. Su impacto en la ingeniería y la tecnología ha sido impresionante y el mundo en que vivimos sería distinto sin estos dispositivos.

4.2 La contribución de Alan Turing.

Alan Turing (1912-1954)

Además del desarrollo de la electrónica, una de las mayores contribuciones al diseño de ordenadores se originó en un importante y abstruso problema de lógica matemática, planteado por **Hilbert** en el CIM de Bolonia (1928): el llamado *Entscheidungsproblem* o "problema de decisión", que consiste en saber si existe un algoritmo que permita probar si una proposición bien formulada en el cálculo de predicados (lógica de primer orden) es o no un teorema, es decir, se puede deducir de los axiomas. La pregunta tiene un claro antecedente en los intentos de **G. Leibniz** (1646-1716) de construir una "máquina lógica universal", que permitiera determinar si una frase matemática era o no un teorema. Obviamente, para responder a la pregunta es preciso dar un sentido claro y preciso a lo que es un teorema (es decir, establecer claramente las leyes lógicas) y también a lo que es un *algoritmo*[29]. La idea general de lo que es un algoritmo, como conjunto finito de instrucciones que permite, a partir de unos datos iniciales, obtener una respuesta, es suficiente para dar una respuesta positiva a la pregunta de Hilbert (basta exhibir el algoritmo). Pero no lo es si la respuesta es negativa, ya que ello exige probar que *ningún* algoritmo resuelve el problema, y por tanto es preciso caracterizar completamente el concepto de algoritmo. Esto se consiguió en 1936, de manera independiente por el estadounidense **Alonzo Church**[30] (1903-1995) y el británico **Alan Turing**, del que ya hemos hablado.

---

[28] El *Massachusetts Institute of Technology* (MIT) presentó en 1956 el primer computador transistorizado. El primer microprocesador fue desarrollado por *Intel* en 1971.

[29] El Diccionario de la Real Academia Española define algoritmo como *"Conjunto ordenado y finito de operaciones que permite hallar la solución de un problema".* Hay muchos ejemplos en matemáticas de algoritmos: el algoritmo de multiplicación o división de enteros, el algoritmo de Euclides para el cálculo del m.c.d. de dos números, etc.

[30] Church utilizó en sus trabajos el llamado *cálculo lambda*, un sistema formal que permite definir claramente lo que es una "función computable" y que ha tenido gran influencia en el desarrollo de lenguajes de programación como el **Lisp** o el **Haskell.** Church probó que no existe un algoritmo (función computable) que decida si dos expresiones del cálculo lambda son lógicamente equivalentes o no.

Los dos enfoques se probaron más adelante que son equivalentes, pero el argumento de Turing ha tenido más influencia que el de Church. La definición de Turing de algoritmo es hoy casi trivial: es cualquier procedimiento que pueda programarse en alguno de los lenguajes universales de programación para ser ejecutados en un ordenador actual. Esta definición tiene un grave problema, y es que en 1936 aún no existían los ordenadores como los conocemos hoy, ni los lenguajes de programación. Lo que hizo Turing en su trabajo [Tu] fue describir con precisión lo que *debería* ser una máquina universal que pueda ejecutar *toda* función computable ($\equiv$ algoritmo) ejecutando un *programa*. Es decir, lo que hoy se conoce como *máquina universal de Turing*[31]. Muchos consideran esta descripción como el origen de los ordenadores con programa almacenado. Así en un artículo aparecido en la revista *Time* del 29 de marzo de 1999 se dice:

> *Todo el que teclea en un teclado de un ordenador actual está trabajando en una encarnación de una Máquina de Turing, que John von Neumann construyó a partir del trabajo de Alan Turing.*

Ya hemos visto que Turing contribuyó también decisivamente en la construcción de los ordenadores más avanzados del mundo hasta 1950, probablemente pensando en crear modelos cada vez más próximos a su imaginaria máquina de calcular esbozada en su trabajo de 1936.

Tras la guerra, Turing estuvo sometido a vigilancia por los servicios secretos británicos. Les preocupaba que el hombre que más sabía de códigos de seguridad fuera vulnerable al chantaje por su condición de homosexual. En 1952 Turing fue arrestado por "indecencia grave", como estaba considerada entonces la homosexualidad en Gran Bretaña, a raíz del juicio por un robo en su domicilio. Turing aceptó un tratamiento hormonal de castración química durante un año para librarse de la cárcel y ello, junto con la continua vigilancia por parte de la inteligencia británica, alteró profundamente su estado de ánimo. El 7 de junio de 1954, Turing fue encontrado muerto en su domicilio. El forense determinó que había muerto por envenenamiento por cianuro y la investigación judicial dictaminó que había sido un suicidio. En la casa había un frasco de cianuro potásico y junto a la cama hallaron media manzana con varios mordiscos.[32]

En su famoso artículo de 1936, Turing prueba primero que el llamado *problema de la parada* ("halting problema") es indecidible, es decir, que no existe un programa P que permita saber si *cualquier* programa concreto q va a terminar tras un número finito de pasos o no[33]. Después, Turing muestra que el *Entscheidungsproblem* se puede reformular como el problema de la parada, lo que da una respuesta negativa a la pregunta de Hilbert.

---

[31] Es decir, una máquina de Turing que puede emular a *cualquier* máquina de Turing concreta. Hay una abundantísima literatura al respecto. Una buena descripción de las máquinas de Turing y del *problema de la parada* puede verse, por ejemplo, en [Ru].

[32] Según el biógrafo de Turing, **Andrew Hodges**, la manzana no fue analizada y jamás se probó debidamente que hubiera sido bañada en cianuro, como todas la apariencias indicaban.

[33] Por supuesto, para muchos programas concretos pueden encontrarse pruebas de si paran o no. Por ejemplo, el programa *"encontrar un número impar suma de dos pares"* no se para nunca*; "encontrar un número natural que no sea la suma de tres cuadrados"* se para para *n=7; "encontrar un número par mayor que 2 que no sea suma de dos primos"* nadie sabe a día de hoy si se parará o no (Conjetura de Goldbach).

Este argumento se ha mostrado de extraordinaria utilidad para proporcionar pruebas de indecibilidad en multitud de contextos.

Por ejemplo, una aplicación de este método proporcionó la solución (negativa) del décimo de los problemas propuestos por Hilbert en su famosa lista de 1900: *"encontrar un algoritmo que permita decidir si un polinomio en una o varias variables, con coeficientes enteros, tiene alguna raíz entera.* En 1960, **Martin Davis, Hilary Putman** y **Julia Robinson** mostraron cómo describir el comportamiento de un programa dado por medio una ecuación en términos de un polinomio con coeficientes enteros y una función exponencial, de forma que el programa se detiene si y sólo si la ecuación tiene alguna solución entera. En 1970, **Yuri Matyasevitch** logró eliminar la necesidad de la función exponencial, con lo cual ¡el décimo problema de Hilbert resultó ser equivalente al problema de la parada!

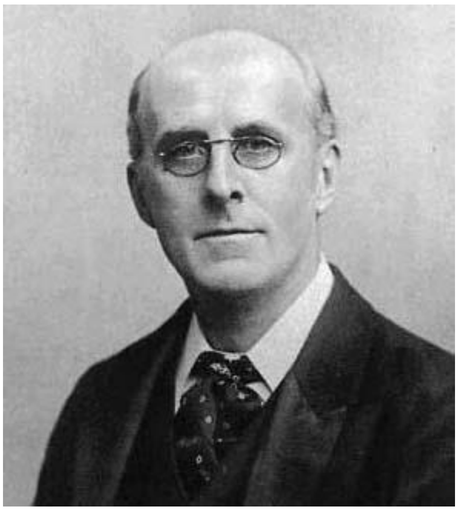
Otro ejemplo de la omnipresencia del problema de la parada es un sorprendente resultado probado muy recientemente en el campo de la mecánica cuántica. Se trata del llamado "*spectral gap problem for quantum many-body systems"*, es decir, determinar si dado un sistema cuántico hamiltoniano formado por un gran número de partículas interactuando entre sí, la diferencia de energía entre el estado básico y el primer estado excitado del sistema está acotada inferiormente cuando el tamaño del sistema es suficientemente grande (es decir, el sistema es "*gapped"* en el lenguaje de los especialistas) o bien el sistema tiene un espectro continuo por encima del estado básico en el límite termodinámico (el sistema es *"gapless"*). En un extenso trabajo (146 páginas) aparecido en febrero de este año, **Toby Cubitt**, **David Pérez-García** y **Michael Wolf** han probado que el problema es algorítmicamente indecidible, es decir, dadas las matrices que describen las interacciones locales de un sistema cuántico hamiltoniano, no existe procedimiento (*algoritmo*) alguno para determinar si el sistema resultante será *"gapped"* o *"gapless"*. La prueba es muy técnica y consiste en demostrar que el problema en cuestión es equivalente al problema de la parada de Turing (remitimos al lector interesado a [CDW]).

4.3 El impacto del ordenador en la investigación matemática.

La ventaja de disponer de una elevada potencia de cálculo a gran velocidad ha tenido un gran impacto en la investigación matemática. Y no sólo en áreas la simulación y creación de modelos, el análisis numérico de las soluciones de ecuaciones funcionales y las aplicaciones a la técnica y la ingeniería, sino en los dominios mismos de la matemática pura. A continuación vamos a ver alguno de los más destacados ejemplos:

a) <u>El Teorema de los cuatro colores,</u>

En 1976 el anuncio de una demostración de un teorema de matemática pura apareció en las páginas del *New York Times*. Se trataba de la *conjetura de los cuatro colores,* propuesta en 1852 por **Francis Guthrie,** un abogado y matemático aficionadol británico, quien propuso la siguiente afirmación: *"bastan cuatro colores para colorear cualquier mapa plano de regiones conexas, de modo que no haya regiones adyacentes con el mismo color".*

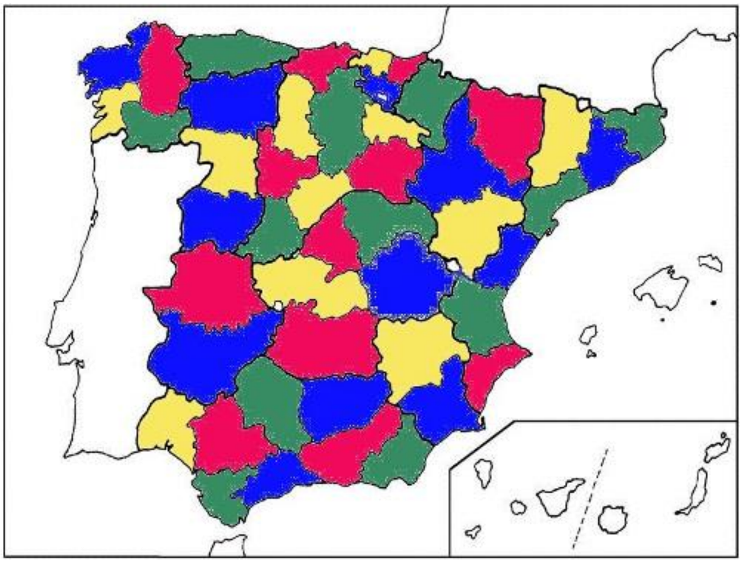


Alfred B. Kempe (1849-1922)

Guthrie trasladó la pregunta a su hermano, estudiante del University College de Londres, quien a su vez se lo planteó a su profesor, el eminente **A. de Morgan** (1806-1871). La noticia sobre el problema se extendió rápidamente y muchos notables matemáticos intentaron resolverlo. En 1879 el matemático británico **Alfred Bray Kempe** (1849-1922) publicó un artículo en el *American Journal of Mathematics* en el que sostenía haber resuelto afirmativamente el problema de los cuatro colores. El artículo pasó el proceso de revisión, y poco después Kempe fue elegido miembro de la Royal Society y posteriormente nombrado *Sir* por sus contribuciones a las matemáticas.

Pero desgraciadamente, en 1890 un profesor de la Universidad de Durham, **Percy John Heawood** (1861-1955), demostró que la prueba de Kempe estaba equivocada. El problema seguía abierto.

El hecho de que cinco colores eran suficientes, había sido probado en 1890 por Percy Heawood en el mismo artículo en el que mostraba que la prueba de Kempe era errónea, pero el paso a cuatro colores era considerablemente más difícil y resistió los esfuerzos de dos generaciones de matemáticos. Hay que decir que, sin embargo, los intentos de solución contribuyeron de forma importante al desarrollo de la topología.



Coloración del mapa de España con 4 colores

Pero la razón de que un problema matemático despertara el interés de la prensa en 1976 residía, además de la fácil comprensión del enunciado, en el método de demostración, ya que en la misma era esencial el uso del ordenador.

Los matemáticos **Kenneth Appel** (1932-2013) y **Wolfgang Haken** (1928-) tras un esforzado trabajo teórico, lograron reducir el problema a la comprobación de unas 1500 configuraciones básicas. Desde luego, comprobar estas configuraciones básicas y todas las combinaciones de colores de cada una, era una tarea más allá de la capacidad de cualquier equipo de matemáticos, incluso con la ayuda de los ordenadores existentes. Appel y Haken se dedicaron a buscar atajos y estrategias que pudieran usarse en un ordenador para acelerar el proceso de comprobación de las configuraciones básicas. Y así, cinco años después de que empezaran a trabajar en el problema, con la ayuda de un complejo programa de ordenador y el uso de más de 1.200 horas de computación, pudieron anunciar al mundo que todas las configuraciones básicas habían sido analizadas y no precisaban más de cuatro colores. ¡El problema propuesto por Guthrie 124 años antes había sido resuelto!

K. Appel y W. Haken en 1970

La demostración presentada por Appel y Haken fue seguida de una amplia controversia, pues introduce una nueva concepción de lo que se entiende por *demostración matemática*, que no depende exclusivamente de un razonamiento humano, ya que contiene etapas en el programa que nunca podrán ser comprobadas por un matemático. Por otro lado, el proceso puede estar sometido a errores, tanto de *software* como de *hardware*, además de los errores de redondeo que aparecen cuando ser trabaja con números no enteros. Es, por tanto, un argumento que depende de la fiabilidad de una máquina y la convicción de que *siempre* se obtendrá el mismo resultado al correr el programa con todo tipo de ordenadores.

Hay que decir que con el paso del tiempo, la oposición hacia este tipo de argumentos (las llamadas *"demostraciones de silicio"*) se ha ido aminorando, tanto por los resultados obtenidos como por la aceptación de los argumentos esgrimidos por los propios Appel y Haken:

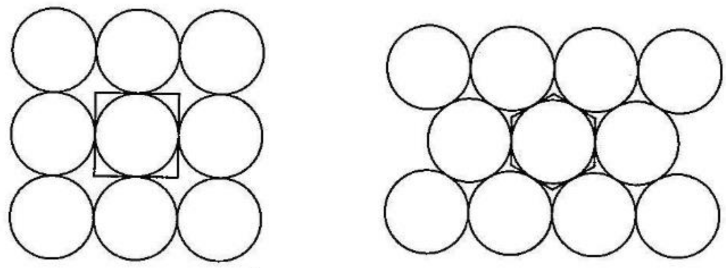
> *"Existe una tendencia a considerar que la verificación de resultados obtenidos por ordenador mediante programas independientes no proporciona una tan gran certeza de su corrección como la verificación manual de las demostraciones tradicionales de los teoremas. Este punto de vista es defendible para aquellos teoremas cuyas demostraciones son de longitud razonable y sumamente teóricas. Pero cuando las demostraciones son largas y de carácter muy computacional, puede aducirse que aunque sea posible la verificación manual, la probabilidad de error humano es considerablemente mayor que la de error de máquina"* (el subrayado es mío)[34].

[34] citado en [DH; página 276]. También remitimos al lector interesado al artículo de **R. Thomas (**[Th]) que, además de una breve historia y la relación del problema con otros resultados, describe, sin entrar en detalles

Es cierto que el razonamiento "tradicional" ha producido errores a lo largo de la historia, algunos de los cuales han pervivido durante años (sin ir más lejos, recuérdese la falsa "prueba" de Kempe). Además, como ya comentamos en la Sección 2.4, las matemáticas han alcanzado tal de nivel de especialización y complejidad que incluso en los casos citados por Appel y Haken, la verificación de un resultado puede llevar años y depender de un número muy reducido de especialistas.

b) La Conjetura de Kepler.

En 1600, Sir Walter Raleigh preguntó a su asistente, el matemático **Thomas Harriot** (1560-1621) cuál era la forma más eficiente de apilar balas de cañón en la bodega de un buque. El problema atrajo la atención del matemático y astrónomo **Johannes Kepler** (1571-1630), quien en 1611 lo reformuló como el siguiente problema matemático: *"Encontrar cuál es la configuración de esferas de un radio dado que tiene máxima densidad[35]"* Por supuesto, se puede plantear un problema similar en el plano (considerando disposiciones de círculos con la máxima densidad respecto al área) o, en general, en cualquier dimensión *n.*



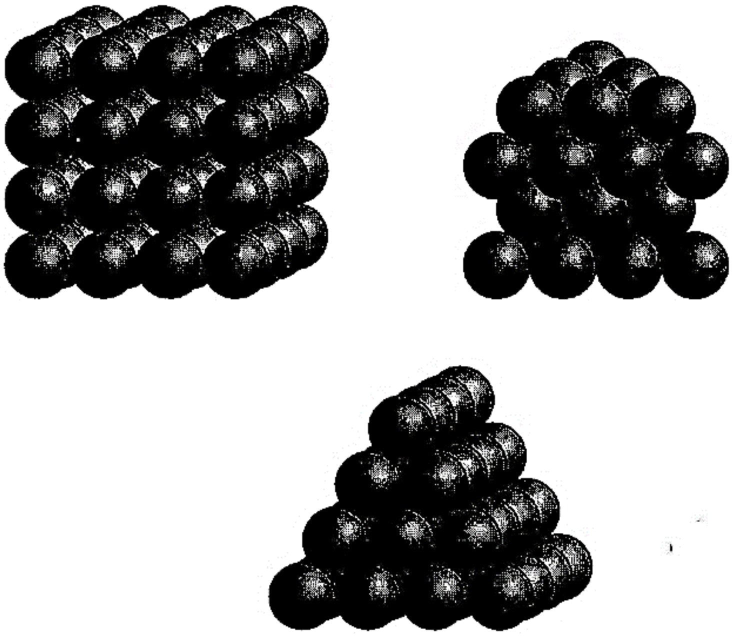
Configuraciones de círculos (cuadrada y Hexagonal)

Para disposiciones *regulares*, es decir, tales que los centros de las esferas forman un retículo simétrico, **Gauss** probó en 1831 que la mejor configuración en el plano es la hexagonal (es decir, formada por círculos inscritos en hexágonos que teselan el plano), y en el espacio la formada por capas apiladas sobre una configuración cuadrada (o hexagonal, son equivalentes) de modo que las esferas de la capa superior estén colocadas en los huecos que quedan en la capa inferior (configuración de centros no alineados; exactamente la que suelen utilizar los fruteros para colocar las naranjas y otros frutos esféricos)[36].

técnicos, una nueva prueba que, aunque sigue las mismas ideas de la de Appel y Haken, reduce sensiblemente en número de configuraciones a estudiar (de 1476 a 633) y utiliza un algoritmo más eficiente de cálculo que utiliza solamente aritmética entera, y por tanto no origina problemas de redondeo..

[35] Es decir, haga máximo el cociente entre el volumen total de las esferas y el del espacio que las contiene

[36] Kepler había ya calculado la densidad de la configuración cuadrada de círculos (∼0,785) y la hexagonal (∼0,907), y también la de las configuraciones regulares de esferas cuadrada con centros alineados (∼0,524), hexagonal con centros alineados (∼0,605) y (cuadrada o hexagonal) con centros no alineados (∼0,740). Véanse las figuras.



Configuraciones regulares de esferas

El caso general es mucho más difícil y forma parte del problema 18 de Hilbert, y son muchos los matemáticos que han intentado resolverlo. El problema llegó a los titulares de prensa en 1990, cuando **Wu-Yi Hsiang**, reputado profesor de la Universidad de California en Berkeley, afirmó haber demostrado la conjetura. La historia tiene paralelismos con la de Andrew Wiles, ya que durante el proceso de revisión se encontraron una serie de errores importantes en la prueba. Pero no tuvo el mismo final feliz, pues aunque un año más tarde Hsiang presentó una demostración revisada en la que afirmaba haber corregido los errores, no convenció a la comunidad matemática. Y aunque Hsiang siguió defendiendo la validez de su prueba, los argumentos en su contra se fueron acumulando. Incluso uno de los antiguos colaboradores de Hsiang envió a la misma revista en la que apareció la supuesta prueba de Hsiang (*International Journal of Mathematics*) un contraejemplo a uno de sus lemas fundamentales.

Finalmente, el problema parece haber sido resuelto. En 1998 **Thomas C. Hales** (1954-) anunció haber probado la conjetura, mostrando que la configuración regular de centros no alineados es, efectivamente, la óptima. Como en el caso del Teorema de los Cuatro Colores, se trata de un proceso de reducción del número de configuraciones posibles. La demostración de Hales logra reducir el problema a minimizar una ecuación de 150 variables sobre unas 5.000 configuraciones de esferas. Se trata de un trabajo de más de 250 páginas de razonamientos matemáticos y 3 gigabytes de datos y programas de ordenador. La Revista *Annals of Mathematics*, una de las más prestigiosas, designó un panel de 12 expertos para revisar la demostración. Tras 4 años de trabajo (2003), el presidente del comité de revisión declaró que el comité estaba 99% seguro de la exactitud de la prueba, pero que no iban a continuar. Finalmente, en 2005, apareció publicada la parte "humana" de la prueba en *Annals.*

Thomas C. Hales

En enero de 2003, Hales anunció la creación del *Proyecto Flyspeck* para transcribir su demostración a una prueba formal que pudiera ser comprobada por alguno de los verificadores formales de teoremas, como *Isabelle*. El 9 de agosto de 2014 se completó el Proyecto, anunciando que el programa creado había verificado la demostración de Hales y que no encontró errores.

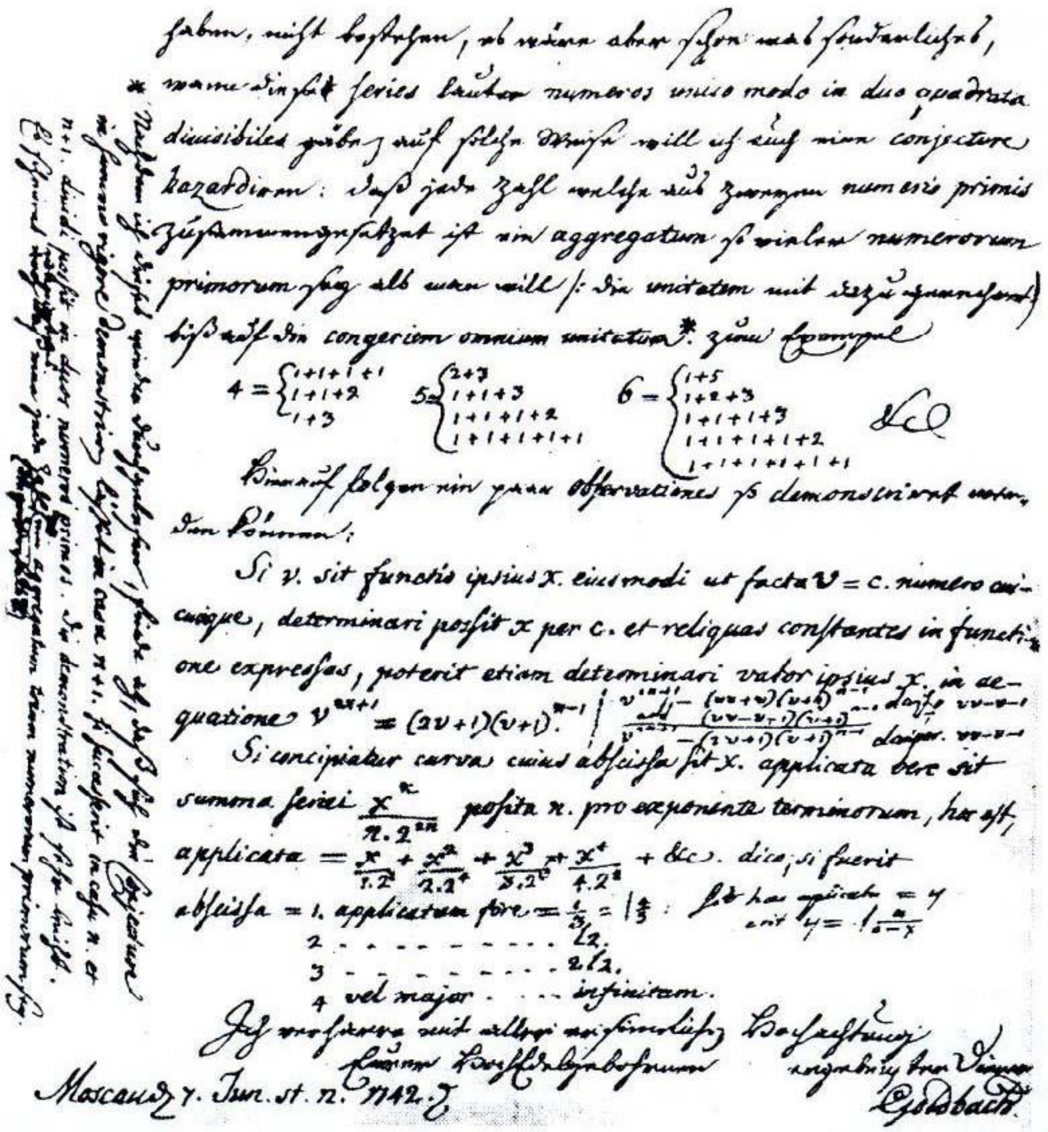
El problema del empaquetamiento óptimo de hiperesferas en dimensión *n* tiene considerable importancia en la corrección de errores en la transmisión de mensajes. El conjunto de cadenas binarias de *n* símbolos forman los vértices de un hipercubo de *n* dimensiones. Para evitar la transmisión de errores hay que tratar que los vértices que codifican mensajes no sean adyacentes. Una configuración de hiperesferas con máxima densidad maximiza el número de posibles mensajes a enviar, minimizando la posibilidad de error.

Particularmente importantes es el caso $n = 24$. **John Leech** encontró en 1965 una configuración regular de hiperesferas especialmente densa, en el contexto de la teoría de códigos. Analizando el grupo de simetrías del retículo de esta distribución, el matemático británico **John H. Conway** (1937 -) descubrió 3 de los 26 *grupos esporádicos* que aparecen en el teorema de clasificación de grupos finitos simples.

c) <u>La Conjetura "débil" de Goldbach.</u>

En una carta enviada al gran matemático suizo **Leonard Euler** (1707-1783) en 1742, su amigo, el prusiano **Christian Goldbach** (1690-1764), formuló la siguiente conjetura: *"Todo número par mayor que 2 se puede expresar como suma de dos números primos"* Aunque muchos matemáticos desde entonces han intentado resolverla, todavía no se sabe si es cierta o no y es uno de los problemas abiertos más importantes en la Teoría de Números (de hecho, forma parte del problema 8 de la lista de Hilbert). Se ha comprobado su veracidad para todos los números menores que 10^{18}.

Una modificación de la conjetura original es la siguiente: *"Todo número impar mayor que 5 puede escribirse como suma de tres números primos".* Se conoce como "Conjetura *débil* de Goldbach", ya que una respuesta afirmativa a la conjetura original implica obviamente una respuesta afirmativa a la modificada.



Carta de Goldbach a Euler (7 de junio de 1742)

El matemático ruso **I. M. Vinográdov** (1891-1983) probó en 1937 que la conjetura es cierta para todo número impar mayor que una constante C "suficientemente grande". Aunque Vinográdov no dio ninguna estimación para C, muchos trabajos posteriores se dedicaron a encontrar estimaciones cada vez menores. La mejor (hasta 2002) se debe a **Liu** y **Wang** que obtuvieron el valor $C = e^{3100} > 10^{1346}$, una cifra enorme, intratable por métodos computacionales (10^{100} es mayor que el producto del número estimado de partículas subatómicas del Universo por el número de segundos desde el Big Bang).

En 2013, el matemático peruano afincado en Francia **Harald Helfgott** (1977 -) anunció que había resuelto afirmativamente la conjetura débil de Goldbach, en un trabajo de más de 200 páginas, dividido en dos artículos y un apéndice. Su método consta de una parte analítica, con un uso intensivo del análisis de Fourier, para conseguir reducir la cota C a 10^{30} y de una parte computacional (en colaboración con el informático **David Platt)**, de verificación numérica por ordenador de la conjetura hasta $8{,}8 \times 10^{30}$. Remitimos al lector al magnífico artículo [He], en el que el autor describe con claridad y precisión las ideas fundamentales de su demostración.

5. Algunos problemas abiertos

Como creo que ha quedado claro a lo largo de las líneas anteriores, gran parte de la actividad de los matemáticos consiste en formular y resolver *problemas*, bien provenientes de otras ciencias (Física, Química, Biología, etc.), bien formulados por los propios matemáticos dentro de su actividad. El suministro es inagotable, y a menudo la solución de un problema interesante conlleva la creación de nuevas herramientas y nuevos campos de investigación, que a su vez son fuente de nuevos problemas.

Ya hemos visto el importante papel que tuvo la lista de problemas de Hilbert en el desarrollo de las matemáticas del siglo XX. A finales de siglo han surgido varias listas de problemas que cumpliera la misma función que la lista de Hilbert para las matemáticas del siglo XXI. Las más conocidas son quizá la lista de 18 problemas de **Stephen Smale** (1930, -), medallista Fields en 1966 por sus contribuciones en Topología (véase [Sm]) y la lista de 7 problemas "del milenio" propuestos por el *Instituto Clay de Matemáticas*, premiados cada uno de ellos con un millón de dólares. Hay varios problemas comunes en ambas listas[37], y la mayor parte de ellos son demasiado técnicos para comentarlos aquí. Pero al menos uno de ellos (común a ambas listas) creo que podrá ser fácilmente comprendido. Se trata del llamado

<u>Problema P = NP:</u>

Comencemos con un ejemplo sencillo: la mayoría de los actuales alumnos de secundaria no saben calcular manualmente la raíz cuadrada de un número, aunque todos saben elevar un número al cuadrado. Por tanto, aunque *obtener* la raíz cuadrada de un número a puede ser difícil, *comprobar* si un número b es la raíz cuadrada de a es muy fácil: basta calcular b^2 y ver si es igual a a. Esta es en esencia la diferencia que hay entre los problemas de la clase de complejidad P y los problemas de la clase NP: los problemas de la clase P son aquellos para los que *existe* un método (*algoritmo*) para encontrar la solución en un tiempo razonable, mientras que los de la clase NP son aquellos para los

[37] Uno de ellos, la *hipótesis de Riemann*, también aparecía en la lista de Hilbert. Remitimos, como en la nota (2), al lector interesado a la brillante exposición [LP].

que existe un método para *verificar* la solución en un tiempo razonable. Es obvio que es más fácil comprobar si un cierto resultado *es* solución de un problema que *hallar* la solución.

Pero, ¿qué significa que un algoritmo se puede ejecutar en un tiempo razonable? Sabemos que la definición de Turing de algoritmo es simplemente un proceso que puede realizar un ordenador. El *tiempo de ejecución* de un algoritmo se mide por el número de pasos que debe realizar el ordenador para alcanzar la solución, en términos del tamaño de los datos sobre los que opera el algoritmo. Así un algoritmo cuadrático es que requiere para su ejecución a lo más n^2 pasos para datos de longitud n. Por supuesto, el tiempo de ejecución de un algoritmo depende del tipo de ordenador que se use, *pero*, sorprendentemente, resulta que si un algoritmo opera en tiempo polinomial en una máquina determinada, también opera en tiempo polinomial (con un polinomio distinto, claro) en cualquier otro ordenador. Así que la propiedad de que un algoritmo tenga un tiempo de ejecución polinomial es intrínseca del algoritmo, y no en dónde se ejecute.

Por supuesto, pueden encontrarse distintos algoritmos para resolver un problema dado. Por ejemplo, el *método del simplex* de programación lineal tiene un tiempo de ejecución exponencial. Sin embargo, en 1979 el matemático de origen armenio **Leonid Khachiyan** (1952-2005) descubrió un algoritmo en tiempo polinomial para resolver el problema de la programación lineal.

Ahora ya podemos definir con precisión el problema: La clase *P* es la de los problemas para los que existe una solución en tiempo polinomial. La clase *NP* contiene los problemas para los que cualquier candidato a solución se puede verificar si lo es realmente, en tiempo polinomial. Por la propia definición, es claro que la clase *P* es un subconjunto de la clase *NP*. La pregunta del millón de dólares es si es un subconjunto propio o si ambas clases coinciden. En otras palabras, si puede comprobarse la solución de un problema en tiempo razonable, ¿también existe un método para resolverlo en tiempo razonable? Si la respuesta fuera afirmativa (es decir, si $P = NP$), este hecho tendría importantes consecuencias.

Un ejemplo típico de problema en la case *NP* es de la descomposición de un número en factores: es muy fácil comprobar si un número p divide a un número N (algoritmo de la división), pero no se sabe si existe un método que permita conocer en tiempo polinomial si un número es primo o compuesto[38], es decir, si el problema está en *P*. Este hecho es la base de uno de los sistemas criptográficos de clave pública más utilizado, el RSA (de **Rivest**, **Shamir** y **Adleman**), desarrollado en 1977[39].

[38] Se sabe que tal método existe si es cierta la hipótesis de Riemann.

[39] Como se sabe, el método consiste en elegir dos primos muy grandes, p, q y construir $n = pq$, que es una de las claves que se hace pública. Después se eligen c y d de modo que cd sea congruente con 1, módulo $(p-1)(q-1)$. El par (n, c) es la clave pública, y d es la clave privada del receptor. Para enviar un mensaje codificado en un número m se envía el número m^c. El receptor usa su clave privada para construir el número $(m^c)^d = m^{cd}$. Por un bien conocido resultado (el Teorema de Euler-Fermat), se sabe entonces que m^{cd} da de resto m al dividirlo por n, lo que permite al receptor recuperar el mensaje original. La eficiencia del método reside en que calcular d a partir de c requiere conocer $(p-1)(q-1)$, o lo que es lo mismo, hallar la descomposición de n en sus factores primos p y q.

En general, se conocen muchos problemas de interés práctico o teórico que se sabe que pertenecen a la clase *NP*, pero no si pertenecen a *P*. Sorprendentemente, la mayoría de estos problemas son equivalentes, en el sentido de que si se encuentra una solución en tiempo de ejecución polinomial para uno, existe otra solución del mismo tipo para todos. En particular, el famoso *Nullstellensatz* o *teorema de los ceros* probado por Hilbert en 1890, proporciona una condición necesaria y suficiente para que un sistema finito de polinomios con coeficientes complejos tenga un cero común. **D. Brownawell** (1942-) demostró en 1987 que existe un algoritmo para calcular la condición del *Nullstellensatz* en tiempo de ejecución exponencial (respecto al número de coeficientes de los polinomios). Si los coeficientes y las soluciones son sólo 0 y 1 (es decir, el problema se considera en $\mathbb{Z}_2$), existe una solución en tiempo polinomial si y sólo si $P = NP$.

<u>El problema de los números perfectos. Primos de Mersenne</u>

Este problema no aparece en ninguna de las listas que hemos citado, pero tiene la ventaja de ser perfectamente comprensible y está relacionado con varios problemas importantes de teoría de números. El problema se remonta al siglo VI antes de Cristo, cuando los Pitagóricos definieron como *número perfecto* como aquel que es igual a la suma de todos sus divisores propios[40]. Por ejemplo, 6 y 28 son los dos primeros números perfectos, como se puede comprobar fácilmente. Además de ellos, los griegos descubrieron que también 496 y 8128 son perfectos. Los números perfectos son raros y, de hecho, a día de hoy sólo se conocen unos 50, aunque la lista crece de día en día.

Alrededor del año 300 a. de C., **Euclides** demostró (y es fácil) que si $2^{n+1}-1$ es primo, entonces $2^n(2^{n+1}-1)$ es perfecto (Prop. IX.36 de *Los Elementos*). Se debe al genio de **Euler** la demostración (1737) de que *todos* los números perfectos pares son exactamente los descritos por Euclides.

Los números primos de la forma $M_m = 2^m-1$ se llaman *primos de Mersenne*, en honor del filósofo y matemático **Marin Mersenne** (1588-1658), quien los introdujo y estudió varias de sus propiedades. También realizó una lista de los M_m primos con $m \leq 257$, y conjeturó que eran los únicos primos de Mersenne. Su lista contiene incorrecciones y su conjetura resultó ser falsa. Euler descubrió un método efectivo para comprobar si 2^m-1 es primo, y en el transcurso de sus estudios desarrolló la *teoría de congruencias*, fundamental en teoría de números. Con la ayuda de los ordenadores, el método de Euler ha servido para calcular primos de Mersenne más y más grandes. Hasta enero de 2013, el primo de Mersenne más grande conocido es el $M_{57.885.161}$ (aunque puede haber algún primo de Mersenne M_m con $m<57.885.161$ que no se conozca). El estudio de los números perfectos y los primos de Mersenne han contribuido al desarrollo de la teoría de números de forma significativa. Pero todavía no se conoce la respuesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Existen números perfectos impares?
b) ¿Existen infinitos primos de Mersenne?

[40] Consideraremos siempre números naturales positivos.

6. Conclusión

En 1781, el gran matemático **Joseph L. Lagrange** (1736-1813) escribía en una carta a su colega, el famoso enciclopedista, filósofo y matemático **Jean Le Rond d'Alembert** (1717-1783):

> *La mina de las matemáticas se ha hecho demasiado profunda* [...] *y si no se descubren nuevas vetas, la Geometría ocupará en la Academia el lugar que hoy ocupan las cátedras de Árabe en las Universidades.*[41]

Ya sabemos que los temores de Lagrange eran infundados y que la evolución de las matemáticas ha tenido un desarrollo que jamás habría imaginado, tanto en cantidad como en profundidad y aplicabilidad de las mismas. En la declaración del año 2000 como *Año Internacional de las Matemáticas* por la UNESCO se afirma que

> *"Las matemáticas constituyen un pilar fundamental de la cultura, no sólo por ser el lenguaje de la Ciencia, sino por lo que suponen como bagaje necesario para entender el mundo en que vivimos".*

Por obvias razones de limitación de espacio y tiempo, no he puesto demasiado énfasis en el aspecto de la relación de las matemáticas con las otras ciencias, pero a este respecto creo que siguen siendo válidas las palabras del Premio Nobel de Física de 1963, **E. P. Wigner** (1902-195), en su famoso artículo *The unreasonable effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences* (Cfr. [Wi]):

> *"El milagro de la adecuación del lenguaje de las matemáticas para la formulación de las leyes físicas es un don maravilloso que ni entendemos ni merecemos. Deberíamos estar agradecidos por ello, con la esperanza de que continúe siendo válido en el futuro y que se extienda* […] *a otras ramas del conocimiento."*

Pero con ser importante este aspecto, no olvidemos que esta no es la única ni la fundamental motivación para el desarrollo matemático, como espero haber dejado claro a lo largo de mi exposición. Sin embargo, bien es verdad que muchos de esos desarrollos "abstractos" han resultado a la postre decisivos para la formulación de nuevas teorías sobre distintos aspectos de la Naturaleza, como dice Wigner: la Geometría Riemaniana, desarrollada en la segunda mitad del siglo XIX, resultó fundamental para la formulación de a Teoría General de la Relatividad por **A. Einstein** (1879-1955): los "Espacios de Hilbert" introducidos por Hilbert en 1906 resultaron ser la base para la formulación de la Mecánica Cuántica por **J. von Neumann** (1903-1957); el estudio de la convexidad en el espacio euclídeo *n*-dimensional iniciado a principios del siglo XX es la base de la formulación axiomática de la teoría del equilibrio económico, etc.

En ese sentido, quiero citar una frase del Premio Nobel de Medicina de 1947, el argentino **B. Houssay** (1887-1971):

[41] El interés académico por el árabe en 1781 en Francia debía ser más bien escaso.

"No hay ciencia aplicada si no hay ciencia que aplicar",

una obviedad que hay que repetir una y otra vez, ya que no parece ser compartida por muchos de los responsables de la política científica que ha tenido de nuestro país.

Afortunadamente, y para terminar con un mensaje optimista, hay ejemplos positivos en el ancho mundo, como el citado en *El País* el 28 de agosto de este mismo año:

350 millones de euros para "pensar con libertad"

El Instituto Weizmann está en Rehovot, una ciudad 20 kilómetros al sur de Tel Aviv. La institución recibe 350 millones de euros al año "para pensar con libertad y sin ningún objetivo práctico", en palabras de su presidente, el físico Daniel Zajfman. En un mundo en el que cada vez más se enfatiza la necesidad de convertir en aplicaciones prácticas el conocimiento producido por los científicos, Zajfman es un hereje. "Nuestra labor es convertir el dinero en conocimiento", afirma. Esa libertad les permite tener planes a 30 años que, al final, dan sus resultados. "Las licencias han producido 30.000 millones de dólares", dice Zajfman.

(El País, 28-08-2015)

Les agradezco enormemente la atención que me han prestado.

REFERENCIAS

[AALM] V Arnold, M. Atiyah, P. Lax and B. Mazur, Editors, *Mathematics: frontiers and perspectives.* IMU, Published by the American Mathematical Society, 2000.

[AT] M. Atiyah, *Mathematics in the 20th century.* Bull. London Math. Soc, **34** (2002), 1-15.

[B1] F. Bombal, *Nicolás Bourbaki: el matemático que nunca existió.* Rev. Real Acad. Cienc. Exact. Fís. Nat. (España), **105**, nº 1 (2011), 77-98.

[B2] F. Bombal, *David Hilbert: la búsqueda de la certidumbre.* Rev. Real Acad. Cienc. Exact. Fis. Nat. (España) **106**, nº 1-2 (2013), 123-146.

[By] C. Boyer, *Historia de la Matemática.* Alianza Universidad Textos, **94**. Alianza Editorial, 1986.

[CMD] S. Chicara, S. Mitsuo and J. W. Daubenb, Editors, *The intersection of History and Mathematics.* Birkhäuser, 1994.

[CPW] T. Cubitt, D. Pérez-García, M. M. Wolf, *Undecidability of the Spectral Gap.* arXiv:1502.04573.

[Cu] G. Curbera, *Mathematicians of the world, Unite! The International Congress of Mathematicians – A human endeavor.* A. K. Peters Ld., Wellesley, Mass. 2009.

[Da] A. Dahan Dalmedico, *An image conflict in mathematics after 1945.* En "Changing images in Mathematics. From the French Revolution to the New Millenium", Ed. Routledge, London, 2001.

[DH] P. J. Davis, R. Hersh, *Experiencia matemática.* MEC y Labor, Barcelona, 1982.

[Di] J. Dieudonné, *Panorama des mathématiques pures. Le choix bourbachique*. Gauthier-Villars, París, 1977.

[Go] D. Gorenstein, *El teorema enorme.* Investigación y Ciencia, febrero 1986, págs. 70-83.

[Ha] J. Hadamard, *Psicología de la invención en el campo matemático.* Espasa Calpe, 1947.

[He] H. Helfgott, *La conjetura débil de Goldbach* La Gaceta de la RSME, vol. **16,** Núm. **4,** (2013), 709-726.

[Le] O. Lehto, *Mathematics without border, a history of the International Mathematical Union.* Springer-Verlag, New York, 1998.

[LP] M. López Pellicer, *Alrededor de la Hipótesis de Riemann.* Lección inaugural del año académico 2012-2013. Publicaciones de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid, 2012.

[Mo] J. E. Morrill, *A Nobel Prize in Mathematics.* Amer. Math. Monthly, **102**, Nº 10 (1995), 888-891.

[Mu] D. Munford, *Trends in the profession of mathematics,* Berlin Intelligencer, 1998.

[Od] P. Odifredi, *The Mathematical Century. The 30 greatest problems of the last 100 years.* Princeton Univ. Press, 2000.

[Re] C. Reid, *Hilbert* (2ª edición). Springer Verlag, New York, 1972.

[Ru] R. Rucker, *Infinite and the mind. The science and philosophy of the infinite.* Birkhäuser, 1982.

[Si] S. Singh, *El enigma de Fermat.* Editorial Planeta, Barcelona, 1998.

[Sm] S. Smale, *Mathematical problems for the next century*. En “Mathematics: Frontiers and Perspectives”, American Math. Soc., 2000.

[Th] R. Thomas, *An update on the four-color theorem.* Notices of the A.M.S., vol. **47**, N. **7** (1998), 848-859.

[Tu] A. Turing, *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem.* Proc. London Math. Soc, vol. 42 (1937), 230-265.

[Wa] R. Wavre, *Les Congrès Internationaux de Mathématiciens.* En “Les grandes courants de la pensée mathématique, presentés par F. Le Lionnais”, 2ª ed., Albert Blanchard, París, 1962.

[We] H. Weyl, *David Hilbert and his mathematical work.* Bull. Of the Amer. Math. Soc. **50** (1944), 612-654.

[Wi] E. Wigner, *The unreasonable effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, Commun. Appl.Math **13** (1960), 1-14.