XV Programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica.
Rev. Real Acad. Ci. Exactas Físicas y Naturales, Madrid, (2013), 123-145.

David Hilbert: La búsqueda de la certidumbre.

Fernando Bombal

Real Academia de Ciencias de España.
Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, Madrid.

Introducción.

David Hilbert es una de esas figuras que marca una nueva época en las Matemáticas. Como veremos, realizó importantes contribuciones en muy distintas áreas (Álgebra, Geometría, Teoría de Números, Análisis Funcional, Física, etc.) pero, sobre todo, desarrolló nuevos métodos y técnicas que provocaron cambios radicales en la manera de entender y desarrollar la matemática.

Como señala su colega y discípulo **H. Weyl** ([We; p. 614 y sigs.]) *"el impacto de un científico en su propia época no es directamente proporcional al peso científico de su investigación."* Y pone el ejemplo de **Gauss** o **Riemann**, ciertamente de no menor estatura científica que Hilbert, pero que no crearon *"escuela"* entre sus contemporáneos. No es el caso de Hilbert, quien sabía contagiar a sus mejores alumnos su entusiasmo y su pasión por las matemáticas. Por ejemplo, entre los años 1900 y 1914, en los que se dedicó intensamente al estudio de las ecuaciones integrales y a crear el comienzo de lo que sería la *Teoría Espectral en Espacios de Hilbert*, dirigió unas 40 Tesis Doctorales[1] sobre estos temas. Entre los nuevos doctores figuran **Georg Hamel** (1901), **Oliver Kellog** (1903), **Erhart Schmidt** (1905), **Hermann Weyl** (1908), **Alfred Haar** (1909), **Richard Courant** (1910) y **Hugo Steinhaus**

---
[1] De un total de 69 , según se cita en [R1; pág. 205]

(1911), entre otros. Nombres que resultarán familiares a muchos alumnos de Grado y, por supuesto, a la mayoría de los especialistas en Análisis Funcional. Hilbert, en efecto, no solamente realizó importantes y decisivas aportaciones en muchas partes de las matemáticas, sino que ejerció una enorme influencia en el mundo científico a través de sus muchos alumnos, una verdadera *escuela*. Uno de estos alumnos, el citado H. Weyl, recuerda así la fascinación que le causó su maestro:

> *"Me parece escuchar todavía el dulce sonido de la flauta del encantador flautista que era Hilbert, seduciéndonos como a ratas para seguirle al profundo río de las matemáticas. [...] Cuando, atrevidamente, asistí al curso que Hilbert ofrecía aquel semestre, [...] las puertas de un nuevo mundo se abrieron ante mí [...] y en mi joven corazón se formó la resolución de que debía leer y estudiar todo lo que este hombre había escrito."* [We; pág. 614])

Otra característica de Hilbert es la amplitud de sus campos de interés. Como tuvo ocasión de poner de manifiesto durante la celebración del Segundo Congreso Internacional de Matemáticos en París, su famosa *lista de Problemas* (sobre la que volveremos) contemplaba temas tan diversos que indicaba unos conocimientos impresionantes del estado de las matemáticas en aquel momento. De hecho, se suele decir que Hilbert y **Poincaré** son los últimos universalistas en Matemáticas, esto es, que tenían un conocimiento casi total de todo el edificio de las Matemáticas de su época.

Pero además, a lo largo de toda su vida Hilbert mostró siempre una firme e inquebrantable fe en la confiabilidad de la inferencia matemática. Para Hilbert la investigación en Matemáticas está fundamentada en la resolución de sucesivos problemas que surgen al realizarla. Un buen problema es

> *Un verdadero hilo conductor a través de los dédalos del laberinto hacia las verdades ocultas.*

Y el objetivo de toda investigación es dar respuesta a los problemas planteados. Y para Hilbert, todo problema determinado en matemáticas admite una respuesta, bien mediante una prueba rigurosa de su solución o bien con la demostración de la imposibilidad de la misma, porque *"en matemáticas no existe el ignorabimus"*[2]([H2; pág. 445]).

En esta convicción o "axioma" reside el núcleo de la epistemología de Hilbert y condiciona su actividad investigadora cotidiana: Su obra se podría presentar como una serie de problemas resueltos en distintas áreas. Por supuesto, el camino para su solución no es lineal, pero hay una *unidad* subyacente en los métodos de resolución, a saber: la construcción de un marco teórico adecuado, usualmente a través del *método axiomático*, en el que se puedan desarrollar las herramientas para resolver el problema planteado. Como consecuencia, Hilbert no

[2] En 1872 el fisiólogo alemán **Emil du Bois-Reymond** (hermano del famoso matemático **Paul du Bois-Reymond**) acuño la frase latina *ignoramus et ignorabimus* (desconocemos y desconoceremos) para designar la limitación esencial de la razón humana para conocer la Naturaleza, indicando que hay ciertas cuestiones que quedarán siempre más allá de nuestro conocimiento. Esta frase ha sido adoptada como lema por el agnosticismo moderno. A ella se refiere Hilbert en su comentario.

solamente resuelve problemas, sino que abre nuevos campos de investigación hasta entonces insospechados.

Hilbert es uno de los primeros en utilizar sistemáticamente en su obra la noción de *estructura*, es decir, tratando y agrupando los objetos matemáticos no tanto por su naturaleza, sino por las *relaciones* existentes entre ellos. Es así como surgieron a lo largo del siglo XIX las primeras estructuras algebraicas: grupos, anillos, cuerpos, ideales, etc. cuyo uso Hilbert sistematizó en muchos de sus trabajos. El hecho de obviar la naturaleza de los objetos estudiados permite liberar los razonamientos de consideraciones contingentes ligadas a la naturaleza de estos objetos, y consigue que se ponga de manifiesto las ideas fundamentales en la demostración:

> *"La ventaja de este tipo de demostraciones* [abstractas] *es que se eliminan las construcciones particulares aisladas para agruparlas bajo una idea fundamental, de modo que se pone claramente en evidencia lo que es esencial en la demostración."* [3]

Junto a una inquebrantable fe en su fiabilidad, Hilbert defendía también la unidad de las matemáticas, frente a otras ciencias:

> *"La ciencia de las matemáticas, tal como yo lo veo, es un todo indivisible, un organismo cuya habilidad para sobrevivir reside en la conexión entre sus partes."* [We; pág. 617]

Cualquiera de las dos últimas frases podrían haberlas suscrito los integrantes del famoso grupo **Bourbaki**[4], creado a mediados de los 1930's por un grupo de jóvenes matemáticos franceses para renovar las matemáticas, y que tuvo gran influencia durante más de 50 años (y no sólo en matemáticas). Y, de hecho, en varias ocasiones algunos de sus más destacados miembros declararon su admiración por Hilbert y su forma de abordar las matemáticas

Los primeros años

Para comenzar, no puedo resistirme a citar el comienzo de la biografía de Hilbert realizada por Constance Reid ([R1]):

> *"La fortuita combinación de genes que produce un individuo excepcionalmente dotado, fue realizada por Otto Hilbert y su esposa María en algún momento de la primavera de 1861; y así, el 23 de enero de 1862, a la una de la tarde, nació su primer hijo en Wehlau, cerca de Königsberg, la capital de Prusia oriental* [hoy la ciudad rusa de Kaliningrado]. *Le pusieron por nombre David."*

[3] D. Hilbert, *Die Grunglagen der Mathematik.* Abh. Aus d. Math. Sem. d. Hamb. Univ., (1928), 65-83. Citado en [Ca; p. 38]).

[4] El lector interesado puede consultar [B3]

Se ha cumplido, pues, el 150 aniversario del nacimiento de David Hilbert, que coincide, casi exactamente, con el nacimiento del nacionalismo alemán y la unificación de Alemania como nación bajo el impulso de Prusia.

Königsberg, la capital de Prusia oriental, fue fundada a mediados del siglo XIII por los *caballeros teutones* a ambos lados del río Pregel, y sus distintos barrios estaban conectados entre sí por siete puentes. El problema, resuelto por el gran **L. Euler** en el siglo XVIII, de si se podía realizar un circuito cerrado por la ciudad pasando una y solo una vez por cada uno de los puentes, se considera el origen de la teoría de grafos y la topología. Cerca de su Universidad, una de las más antiguas de Alemania, estaba la tumba del más famoso de los hijos de Königsberg: el gran **Immanuel Kant.**

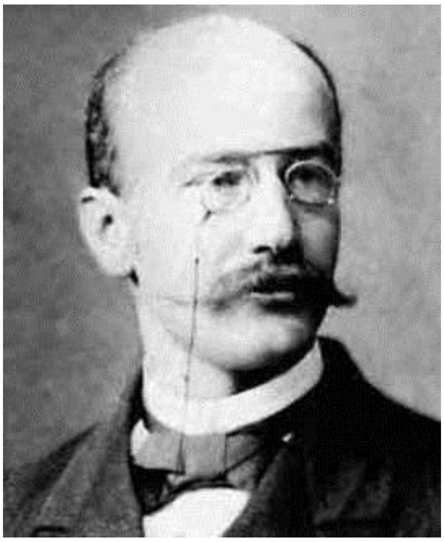
La familia de Hilbert se había establecido en Königsberg a finales del siglo XVIII. Su padre, **Otto Hilbert**, era juez del condado, uno de sus tíos era abogado y otro director de un *gymnasium* o Instituto de segunda enseñanza. Formaban parte, pues, una familia acomodada. Poco después del nacimiento de David, su padre ascendió a juez de ciudad y se trasladó con su familia a la cercana Königsberg. De su madre, **María,** se tiene menos información**,** aunque todas las referencias apuntan a que era una mujer poco corriente, interesada en la filosofía, la astronomía y ¡fascinada por los números primos!

Otto Hilbert, como estudiante universitario alrededor de 1850

Hasta los nueve años, David estudió en su casa bajo la tutela de su madre. Al comienzo del curso de 1872, se incorporó a un *gymmsium* privado muy tradicional y rígido, en el que David no descolló especialmente. Tras un último curso en un Instituto estatal (en donde su rendimiento escolar mejoró sustancialmente), en el otoño de 1880, a sus 18 años, David se inscribe en la Universidad de Königsberg, una de las más antiguas y reputadas del país.

El joven Hilbert se inclina por los estudios de matemáticas, contra los deseos de su padre, que hubiera preferido que estudiara leyes. Como en otras universidades alemanas, durante los 4 años que se supone duran los estudios de cada titulación los alumnos eligen con absoluta libertad los cursos a los que asisten y suelen pasar varios semestres en otras universidades. No hay ningún control antes del examen final al término del periodo de 4 años. Y así, Hilbert asiste, entre otros, a cursos de **Heinrich Weber** (que

H. Weber (1842-1913)



F. Lindemann (1852-1939)

trabajaba con **Dedekind)** y **Ferdinand von Lindeman,** quien había probado poco antes (1882) la trascendencia del número π (y con ello la imposibilidad de poder construir un cuadrado con área igual a la de un círculo dado, usando solamente la regla y el compás). También pasa un semestre en Heidelberg, donde asiste al curso de **Lazarus Fuchs** (1833-1902) sobre ecuaciones diferenciales. Pero quizá lo más importante que le sucedió a Hilbert durante su época de estudiante fue conocer al que sería su mejor amigo, **Hermann Minkowski** en 1883.

Aunque casi 3 años más joven, Minkowski había ingresado en la universidad un semestre antes que Hilbert. Su precocidad y talento para las matemáticas eran conocidos por sus compañeros y profesores. Había pasado un año en Berlín, donde había ganado varios premios y, a su vuelta a Königsberg, se conoció la increíble noticia de que, con tan sólo 18 años, le iba a ser concedido el *Grand Prix des Sciences Mathématiques* de la Academia de Ciencias de París, por su elegante solución del cálculo del número de descomposiciones distintas de un número natural en suma de cinco cuadrados. Hilbert y Minkowski entablaron amistad casi inmediatamente, y esa relación se mantuvo durante el resto de sus vidas.

Por otro lado, en la primavera de 1884 llega a Königsberg como profesor *Extraordinario* con tan sólo 25 años, **Adolf Hurwitz.** Como en el caso de Minkowski, venía precedido por su fama de brillantez y precocidad matemática[5]. Muy pronto Hilbert, Minkowski y Hurwitz entablaron una estrecha amistad. Cada día "a las cinco, exactamente", daban largos paseos por los alrededores de Königsberg discutiendo sobre matemáticas.

Es a lo largo de estos paseos cuando Hilbert descubrió la matemática contemporánea y las distintas escuelas existentes en la matemática alemana, en particular la escuela

Hermann Minkowski (1864-1909)

Adolf Hurwitz (1859-1919)

geométrica de **Felix Klein** y la algebraico-analítica de Berlín. Durante toda su vida recordó Hilbert con cariño y añoranza estos interminables paseos en compañía de sus dos grandes amigos.

Completados los 8 semestres requeridos para poder obtener el grado de doctor, Hilbert se dirigió a Lindemann para que le sugiriera un tema de Tesis y éste le propuso un problema sobre uno de los temas de moda del momento: la teoría de invariantes algebraicos. El joven Hilbert se puso a la tarea y resolvió el problema de forma clara y elegante, a plena satisfacción de su Director. También obtuvo elogiosos comentarios de su amigo Minkowski, que se encontraba en Wiesbaden con su madre, tras el fallecimiento de su padre. Y así, en diciembre de 1884, Hilbert supero los exámenes orales que permitían el paso al proceso final de promoción y defensa pública, que se realizó el 7 de febrero de 1885.

El título de doctor en Alemania era solo el comienzo de una carrera académica, y ni siquiera facultaba al poseedor a dar clases. Para ello, debía realizar una segunda Tesis o *Habilitation*, que le facultaba para obtener la *venia legendi* de la Universidad y el título de *Privatdozent*, que otorgaba el privilegio de poder dar clases sin sueldo fijo de la

[5] Su primer trabajo lo había publicado, en colaboración con su Profesor **H. Schubert**, siendo todavía alumno del *Gymnasium.*

Institución, sino el procedente de las matrículas de los alumnos que escogieran sus cursos. Si se progresaba suficientemente en las tareas de investigación, podría alcanzar el título de Profesor *Extraordinarius*, que ya recibía un salario fijo. Y luego estaban las Cátedras, pero esas eran muy escasas (en la mayoría de las universidades alemanas había sólo dos cátedras de matemáticas; en Königsberg, sólo una) y difíciles de alcanzar. A Hilbert, pues, le quedaba un largo camino. No obstante, por si acaso, preparó y superó las pruebas para poder impartir clases en la enseñanza secundaria.

A instancias de su amigo Hurwitz, Hilbert decidió pasar un semestre en Leipzig, para entrar en contacto con **F. Klein,** por entonces, y con sólo 36 años, una figura ya legendaria. A los 23 años había obtenido una Cátedra en Erlangen y en su lección inaugural que expuso su famoso *"Programa de Erlangen"* por el que se propone clasificar las distintas geometrías mediante el estudio de las propiedades invariantes por un determinado grupo de transformaciones. Hilbert llamó pronto la atención de Klein, y pronto se estableció entre ellos una muy buena relación.

F. Klein (1849-1925)

Fue a sugerencia de Klein el que Hilbert decidiera pasar un tiempo en París, por entonces uno de los centros de excelencia mundial en matemáticas. Allí tuvo ocasión de conocer a los principales matemáticos franceses de la época: **Jordan**, **Hadamard, Picard, Poincaré…** Especialmente agradable fue su contacto con **Hermite**, que a la sazón contaba con 64 años, y se mostró muy hospitalario con el joven alemán de 23 años. En sus conversaciones le dirigió de nuevo hacia el tema de los invariantes, llamando su atención hacia el llamado *"Problema de Gordan",* que iba a ser muy importante para Hilbert.

Hilbert volvió entusiasmado de París. A su vuelta, hizo una breve parada en Gotinga para visitar a Klein (que había aceptado allí una cátedra). Ya en Königsberg, terminó de redactar su trabajo de *Habilitation,* también relacionado con la teoría de invariantes, aunque sin aportaciones destacadas. Así, en julio de 1886, tras la presentación del trabajo y la exposición de una Conferencia, Hilbert obtuvo su *Habilitation,* y su puesto de *Privatdozent.* La verdad es que Klein hubiera preferido que Hilbert presentara su *Habilitation* en una Universidad que no fuera Königsberg, tan alejada como estaba de los centros de actividad matemática en Alemania. Pero Hilbert contestó a Klein diciendo que la cercanía de Lindemann y, sobre todo, de Hurwitz era suficientemente estimulante para él y el aislamiento de Königsberg podía superarse a través de viajes periódicos a otros centros de investigación.

Sin embargo, en su primer año como docente Hilbert no realizó ninguno de los viajes que con tanto optimismo había planeado, pero se dedicó intensamente a estudiar en profundidad el tema objeto de su Tesis y su *Habilitation:* los invariantes algebraicos.

Primeros éxitos: la teoría de invariantes.

Ya hemos dicho que uno de los temas de moda en esta época era la teoría de invariantes algebraicos. La cuestión se puede plantear del siguiente modo: Pensemos por ejemplo en una expresión de la forma, $p(x,y,z)=ax^2+2bxy+2cxz+2dyz+ey^2+fz^2$ $=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, que es lo que se llama una *forma cuadrática* en las (tres) variables *x, y, z*. El conjunto de puntos que cumple $p(x,y,z) = 0$ representa una *cónica* en el plano proyectivo (o, haciendo $z=1$, una cónica en el plano afín usual). Si se efectúa un cambio de referencia la ecuación *cambia*, pasando a una de la forma

$q(X,Y,Z) = a'X^2+2b'XY+2c'XZ+2d'YZ+e'Y^2+f'Z^2=\begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ b' & e' & d' \\ c' & d' & f' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, pero hay ciertas expresiones de los coeficientes que se mantienen *invariantes* a través de los cambios de referencia. Por ejemplo, si escribimos el cambio de referencia, como es usual, en la forma

$$\begin{aligned} x &= \alpha X + \beta Y + \gamma Z \\ y &= \delta X + \varphi Y + \eta Z \\ z &= \kappa X + \lambda Y + \mu Z \end{aligned}$$

O, en forma matricial, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varphi & \eta \\ \kappa & \lambda & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, (con $|\det(P)| = 1$) entonces la matriz de coeficientes de *p*, $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{pmatrix}$, se transforma en la de *q*, $A' = P^t A P$[6], y claramente $\det(A') = \det(A)\det(P)^2 = \det(A)$. Así pues, $\det(A)$ es un *invariante* de la forma *p*. La propiedad $\det(A) = 0$ refleja entonces una propiedad intrínseca de la curva (la de ser *degenerada*), independiente de los cambios de coordenadas. La pregunta natural es: ¿hay más invariantes? ¿podemos describirlos todos?, y, por supuesto, la pregunta tiene sentido no sólo para las formas cuadráticas en dos variables, sino para formas generales de grado *n* en *m* variables:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i_1+\ldots i_m = n} a_{i_1,\ldots,i_m} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_m^{i_m}$$

[6] P^t designa la *matriz transpuesta* de la matriz *P*.

Con este planteamiento, los primeros estudios sobre invariantes algebraicos se iniciaron en la escuela británica: **G. Boole** publicó en 1841 un primer trabajo sobre invariantes de formas lineales, al que siguieron muchos otros de **A. Cayley, J.J. Sylvester y G. Salmon** (la *trinidad invariante*, en palabras de Hermite). Por ejemplo, Cayley probó que la expresión $ae - 4bd + 3c^2$ es un invariante de la forma cuártica binaria $f(x,y) = ax^4+4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4$. La cuestión que se plantea es saber si existe una familia finita de invariantes de una forma (o conjunto de formas) de modo que cualquier otro invariante se pueda expresar de forma razonable en términos de los elementos de la familia. Cayley construyó explícitamente sistemas completos de invariantes (o *bases*) para las formas cúbicas y cuárticas binarias.

El avance más significativo en este campo se produjo en 1868, cuando **Paul Gordan** (1837-1912) calculó explícitamente una base finita de invariantes para las formas binarias de cualquier grado. La prueba involucraba grandes cantidades de cálculos y era tremendamente complicada. Pero lo cierto es que, 20 años después y tras muchos esfuerzos de matemáticos franceses, alemanes, británicos e italianos, nadie había extendido el resultado de Gordan (que había merecido el título de *rey de los invariantes*) a otras formas (aunque se habían obtenido resultados parciales).

A principios de 1888 Hilbert se siente por fin preparado para realizar el viaje que se había prometido a sí mismo y, en primer lugar, se dirige a Erlangen a encontrarse con Gordan. El encuentro parece ser que le estimuló enormemente y el *Problema de Gordan* atrajo su atención como ninguno otro lo había hecho con anterioridad, de modo que se dedicó a él de forma absorbente. Y en septiembre de 1888 Hilbert envía una nota al Nachrichten de la Sociedad Científica de Gotinga dando una solución completa del problema de Gordan:

> *El álgebra A de los invariantes asociados a cualquier familia finita de formas n-arias es siempre finitamente generada, es decir, existe una familia finita de invariantes $f_1, \ldots f_r$ de modo que cualquier otro $g \in A$ se puede escribir en la forma $g = P(f_1,\ldots f_r)$ para un cierto polinomio P de r variables.*

¡El problema de Gordan resuelto de un plumazo! Pero quizá lo más innovador del resultado son las técnicas empleadas. Hilbert utiliza la estructura (conocida) de álgebra sobre los reales de los invariantes para sumergir el problema en un marco abstracto y reducirlo a una serie de resultados generales que, de por sí, marcaron nuevas direcciones de trabajo en áreas como la geometría algebraica, la teoría de números o el álgebra conmutativa. Por ejemplo, utiliza de manera esencial un lema técnico auxiliar para la prueba de su resultado que iba a tener importantes consecuencias, a saber: *Todo ideal del anillo de polinomios en n indeterminadas, es finitamente generado* (*Teorema de la base de Hilbert*). Por cierto, la noción de ideal había sido utilizada sobre todo en el marco de la teoría de números, refiriéndose a ciertos ideales (en sentido moderno) de números algebraicos. Es Hilbert quien utiliza sistemáticamente esta noción en toda su generalidad.

La prueba de Hilbert no es constructiva, lo que hizo que muchos especialistas en el tema la recibieran con reparos. Cuando envió su trabajo completo a *Mathematische Annalen*, Klein, su editor jefe pidió a Gordan que hiciera de recensor. Su informe fue realmente muy crítico, llegando a decir la famosa frase *"¡esto no es matemáticas; es teología!"* Hilbert se negó a realizar ningún cambio en su trabajo, que había sido ya contrastado con muchos otros expertos en teoría de invariantes. Tras una reunión con Gordan para limar asperezas, Klein decidió dar luz verde a la publicación de Hilbert, que apareció en 1890 y le convirtió rápidamente en uno de los matemáticos más importantes del momento.

De todas formas, para acallar las críticas, Hilbert retomó el tema y logró demostrar su resultado reduciéndolo al cálculo de ciertas cuestiones de teoría de anillos que habían sido estudiadas anteriormente por **Kronecker** y de la que conocían soluciones constructivas. A lo largo del trabajo, Hilbert introduce una serie de ideas y técnicas que iban a revolucionar la geometría algebraica. En particular, prueba su famoso *Nullstellensatz* o *Teorema de los ceros de Hilbert*, básico en el desarrollo posterior de esta disciplina. El trabajo apareció en la revista de Klein en 1893 y significó la consagración definitiva de Hilbert. Conseguido su objetivo, Hilbert escribió en 1892 a su amigo Minkowski que pensaba abandonar definitivamente el estudio de la teoría de invariantes y dedicarse por completo a su nuevo campo de interés: la Teoría de Números. Y así lo hizo.

Profesor y hombre casado.

En 1892 Hurwitz aceptó un puesto en el Instituto Tecnológico de Zurich y la facultad, a la vista de los logros obtenidos por Hilbert, le propuso como Profesor *Extraordinarius* en agosto del mismo año. Con 30 años, Hilbert había establecido firmemente su carrera profesional y ya podía pensar en formar una familia. Era un hombre sociable, al que le gustaba el baile y las fiestas, y había participado con asiduidad en las actividades sociales de la ciudad. En ellas había frecuentado la compañía de una prima segunda suya, **Käthe Jerosh** de la que se enamoró. Le propuso matrimonio y se casaron en octubre de 1892. Al año siguiente, en agosto, nació el que sería único hijo del matrimonio, **Franz** (1893-1969).

El matrimonio Hilbert en 1892

Al poco tiempo de ocupar Hilbert su nuevo puesto, Lindemann aceptó una oferta de una cátedra en Munich y la Universidad ofreció su puesto a Hilbert, que de este modo, con 31 años, alcanzó el máximo grado de la carrera docente (bien que en una Universidad "de provincias").

Por otro lado, Hilbert pensó que el puesto de *Extraordinarius* que dejaba vacante podía ocuparlo Minkowski, que no se encontraba a gusto en Bonn, y de este modo reunirse de nuevo los dos amigos. Las negociaciones fueron difíciles, pero finalmente, en la primavera de 1894, Minkowski se incorporó a la Universidad de Königsberg. Pero la reunión de los dos amigos no iba a durar mucho: en diciembre Hilbert recibió una carta "muy confidencial" de Klein, informándole de que **Weber** iba a ocupar una cátedra en Estrasburgo, por lo que su puesto quedaba libre en Gotinga y él estaba dispuesto a apoyar la candidatura de Hilbert, si aceptaba. Gotinga, la Universidad de Gauss, Dirichlet y Riemann, era por entonces una de las capitales de la matemática mundial. No es pues extraño que, tras alguna reflexión, Hilbert aceptara el ofrecimiento. Tomo posesión de su cátedra en marzo de 1895 y permanecería en Gotinga el resto de su vida. Y su amigo Minkowski fue promovido a la cátedra que él dejó vacante.

La Teoría de números.

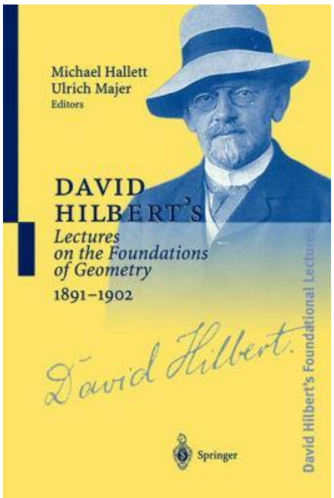
Como había anunciado a su amigo Minkowski, tras la solución del problema de Gordan, Hilbert abandonó la teoría de invariantes y se centró en la teoría de números. A principios de 1893 había obtenido nuevas demostraciones de la trascendencia de e y de π, sorprendentemente simples y directas, y después se había centrado en la teoría de *cuerpos de números*, cuyo estudio había comenzado **Gauss**, quien extendió la teoría de números más allá de los enteros y los racionales. Gauss consideró problemas de factorización, irreducibilidad, etc. para "números" de la forma $a+b\sqrt{2}$ o, en general, del tipo $a+b\theta$, siendo a, b números enteros o racionales y θ un número *algebraico*, es decir, raíz de un polinomio $p(x) = a_nx^n+\ldots+a_1x + a_0$ con coeficientes enteros (si $a_n = 1$ se dice que θ es un *entero algebraico*; por ejemplo $\sqrt{3}$ es un entero algebraico, raíz del polinomio $x^2-3=0$, mientras que $\sqrt{3}/2$ es un número algebraico, pero no es un entero algebraico.) Los números algebraicos forman un subcuerpo de $\mathbb{C}$ y los enteros algebraicos forman un *anillo* (es decir, un subconjunto cerrado por las operaciones de suma y producto). La teoría de cuerpos de números trata de estudiar propiedades del cuerpo de números algebraicos y sus subanillos. El estudio del problema de factorización en elementos irreducibles en un anillo de enteros algebraicos (que no siempre es única) es lo que llevó a **E. Kummer** (1810-1893) a introducir la noción de *números ideales* (realmente, ciertos conjuntos de números algebraicos) para los que probó un teorema de factorización única y así pudo abordar (y resolver) muchos casos del último teorema de **Fermat.** Más tarde, **R. Dedekind** (1831-1916) introdujo la noción actual de ideal de un anillo y obtuvo importantes resultados estructurales. En particular, probó un análogo para ideales del teorema de factorización única de un entero en producto de primos (que ya dijimos no es en general cierto para anillos de enteros algebraicos): *Todo ideal no nulo de un anillo A de enteros de un cuerpo de números se puede descomponer de for-*

ma única (salvo el orden) como producto de ideales primos de A[7]. Hilbert encontró una nueva demostración de este importante resultado, que expuso en la reunión anual de la Sociedad Matemática Alemana celebrada en Munich en septiembre de 1893. Probablemente estos hechos motivaron que la Sociedad encargara a Hilbert, juntamente con Minkowski, también bien conocido por sus trabajos en la teoría geométrica de números, la redacción de un informe sobre el estado presente de la teoría de números. Poco después, Minkowski se retiró del proyecto, y este quedó totalmente en manos de Hilbert. El trabajo le absorbió de tal manera que llegó a preocupar a sus amigos. Afortunadamente, su esposa Käthe le ayudaba a pasar a limpio sus notas. Casi un año después de su llegada a Gotinga, el trabajo estaba terminado: una monumental obra de más de 350 páginas: *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper* (Teoría de cuerpos de números algebraicos), conocido generalmente por el *Zahlbericht,* en la que no sólo consiguió poner orden en la enorme masa de resultados dispersos existentes, sino que aplicó muchas de las técnicas abstractas que había desarrollado en sus estudios sobre los invariantes y así abrió nuevas direcciones en la teoría algebraica de números que iban a marcar gran parte de las investigaciones en el tema hasta bien entrado el siglo XX. La obra apareció publicada en 1897 y en palabras de H. Weyl:

> *Su informe es una joya de la literatura matemática. Incluso hoy* (1944), *casi 50 años después, su estudio es indispensable para quien quiera profundizar en la teoría algebraica de números. Introduciendo investigaciones originales, Hilbert consiguió convertir la teoría en un cuerpo unificado. Las demostraciones de los teoremas conocidos fueron cuidadosamente elegidas de modo que los principios subyacentes pudieran generalizarse y utilizar en investigaciones posteriores…* [We; pág. 626]

El mismo Hilbert se dedicó en los dos años siguientes a explotar muchas de las ideas planteadas en la Memoria, y gran parte de los trabajos en el área durante los siguientes 50 años tuvieron como objeto probar resultados que había anticipado Hilbert.

Los *Fundamentos de la Geometría.*

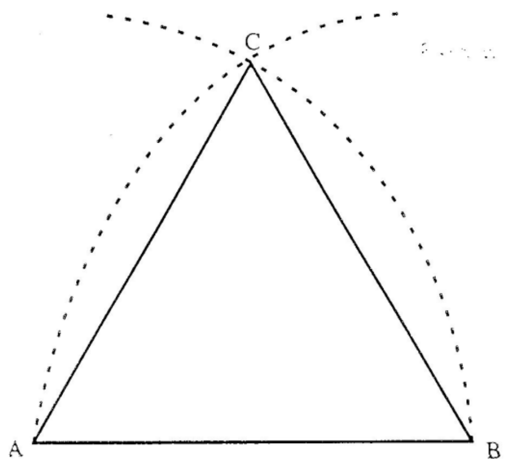


Tras el agotador trabajo que supuso la elaboración del *Zahlbericht*, en el curso 1898-99 Hilbert sorprendió a sus alumnos ofreciendo un curso sobre los elementos de la geometría. Parecía que Hilbert había dado uno de sus habituales cambios de rumbo en sus investigaciones. Pero, como en los casos anteriores, se trata también de una consecuencia lógica de la propia evolución interna de Hilbert: Una profundización en la visión abstracta y estructural de la matemática. La versión escrita *Grundlagen der Geometrie* ("Los fundamentos de la Geometría") apareció en 1899 e inmediatamente se

[7] Recuérdese que un ideal I de un anillo A es *primo* si dados $x, y \in$ A, la relación $xy \in$ I implica $x \in$ I o $y \in$ I.

convirtió en un *bet seller*, rápidamente traducido al francés, inglés y otros idiomas.

Alrededor del 300 antes de C. **Euclides** había recopilado los conocimientos geométricos de su tiempo en un tratado conocido como *Los Elementos*, que se convirtió en uno de los libros más conocidos de todas las épocas. En él, a partir de una pocas aseveraciones *evidentes* (23 *definiciones* casi intuitivas, 5 *postulados* o **axiomas** y 5 *nociones comunes* a afirmaciones generales del tipo "el todo es mayor que la parte", etc.) y, utilizando exclusivamente las leyes de la lógica deductiva (algunas recogidas en las *nociones* comunes, aunque la mayoría están implícitas en *Los Elementos*) se obtienen hasta 465 Proposiciones que recopilan todo el conocimiento geométrico de la época. Durante mucho tiempo, *Los Elementos* se consideraron el paradigma del rigor en matemáticas. Sin embargo, poco a poco se empezaron a notar algunos defectos en el majestuoso edificio: los axiomas de Euclides no eran suficientes para deducir todos los teoremas incluidos. Por ejemplo, en la *Proposición I.1* (¡la primera del libro!), se prueba que sobre cualquier segmento **AB** se puede construir un triángulo equilátero. Para ello, se trazan circunferencias de centros en **A** y en **B**, de radio la longitud del segmento (lo que está permitido por los axiomas), y el punto de corte **C** es el otro vértice del triángulo buscado (véase la figura). Pero ¿por qué las dos circunferencias se cortan? Nada en las definiciones, los postulados olas nociones comunes permite asegurarlo.



A lo largo del siglo XIX, en gran parte motivado por el descubrimiento de las geometrías no euclídeas, se renueva el interés por los axiomas de la geometría y aparecen distintas propuestas para fundamentar la geometría: Así por ejemplo, **Sophus Lie** (1842-1899) propone una axiomatización basada en el uso de grupos de transformaciones (siguiendo el *Programa de Erlangen* de Klein); **M. Pasch** (1843-1930) propone un conjunto de axiomas para la geometría proyectiva basados en la intuición empírica (así una recta indefinida, no es un objeto que se pueda percibir, luego sólo se podrá introducir la noción de *segmento* finito, etc.), pero una vez introducidos los axiomas, los resultados sólo pueden deducirse a través de un promeso puramente lógico-deductivo, sin apelar a la intuición. La versión de **G. Peano** (1858-1932) es completamente abstracta, una especie de traducción del trabajo de Pasch al lenguaje de lógica simbólica que él mismo había inventado, etc.

Lo que Hilbert propuso fue un sistema simple y completo de axiomas para probar todos los teoremas de la geometría euclídea. Pero, mientras los axiomas que plantea Euclides los basa en la evidencia e intuición física, Hilbert adopta una postura bien distinta. Comenzó su curso explicando a la audiencia que las definiciones de Euclides de *punto, recta* y *plano* no tenían en realidad relevancia matemática. Lo importante es la conexión que entre estos objetos establecen los axiomas. Como dijo alguna vez "*en lugar de hablar de puntos, rectas y planos, los objetos para los que se postula la validez* *de los axiomas podrían llamarse mesas, sillas y jarras de cerveza".* Por supuesto que en su curso Hilbert opta por el lenguaje tradicional de Euclides. Pero se renuncia a tratar de definir las nociones primitivas: los axiomas constituyen una especie de *definición camuflada* ("*définition déguisée"* en palabras de Poincaré) o *determinación implícita* de esas nociones[8]. Sin embargo, el sistema de axiomas no determina de manera única los objetos considerados. Cada conjunto concreto de objetos matemáticos que verifique los axiomas constituye un *modelo* de la Geometría.

Los 20 axiomas que propone Hilbert están divididos en cinco grupos, según el tipo de propiedades que rigen: 8 de *Incidencia*, 4 de *Orden*, 5 de *Congruencia*, 2 de *Continuidad* y el *Axioma de las Paralelas.* Y tras exponer las distintas consecuencias de cada grupo de axiomas, Hilbert emprende una tarea totalmente original: el estudio de los problemas de *independencia* de los axiomas y su *consistencia* o ausencia de contradicción. Para ello utiliza sistemáticamente el método de *construcción de modelos*. Probar la independencia del axioma X respecto al sistema de axiomas $\mathcal{S}$ significa que el sistema $\mathcal{T}$ obtenido añadiendo a $\mathcal{S}$ la *negación* del axioma X, es consistente. Para ello, se construye un modelo (en una teoría más simple y segura) que verifica el sistema $\mathcal{S}$ de axiomas y la negación del axioma X. Así, la existencia de una contradicción en $\mathcal{T}$ implicaría una contradicción en las proposiciones obtenidas dentro del modelo construido, y por tanto en la teoría con la que se ha construido el modelo[9]. De esta forma, Hilbert prueba la independencia de su sistema de axiomas y su consistencia (relativa), construyendo diversos modelos formados por números algebraicos o números reales, utilizando sus amplios conocimientos en esos campos.

Las ideas contenidas en el *Grundlagen* van a influir de manera decisiva en el devenir de la matemática moderna. Citando una vez más a Weyl:

> *Las ideas generales* (sobre consistencia e independencia) *nos parecen hoy casi triviales, tanta ha sido su influencia en nuestro pensamiento matemático. Hilbert las estableció en un lenguaje claro e inconfundible y las incluyó en un trabajo que es como un cristal: un todo irrompible con muchas facetas. Sus cualidades artísticas han contribuido indudablemente a su éxito como una obra maestra de la ciencia."* [We; pág. 636]

El Congreso Internacional de Matemáticos.

[8] Dice Hilbert al comienzo del *Grundlagen: "Consideramos tres sistemas diferentes de objetos, que llamaremos puntos, rectas y planos. Entre ellos imaginamos ciertas relaciones, que expresaremos por términos como "estar sobre", "estar entre" o "ser congruente con". La descripción exacta y las propiedades de estas relaciones vienen dadas por los axiomas."*

[9] Un importante precedente de este método es el famoso modelo de Klein (descubierto en 1870, cuando sólo tenía 21 años) de la geometría hiperbólica, formado por los puntos interiores a una elipse en el plano euclídeo dotado de una métrica adecuada. Las "rectas" son las geodésicas de ese conjunto, que coinciden precisamente con las porciones de rectas euclideas que intersecan el modelo. Este conjunto verifica los axiomas de la geometría hiperbólica, y prueba, por tanto, que si la geometría euclídea es consistente, también lo es la hiperbólica.

En 1900 Hilbert se encontraba en la plenitud de su carrera profesional y personal. Tras unos comienzos poco satisfactorios en Gotinga (tanto él como su esposa encontraron la atmósfera social en Gotinga muy rígida y fría), poco a poco los Hilbert se fueron encontrando más a gusto, al conocer nuevos amigos y, sobre todo, establecer relaciones cordiales y de camaradería con los estudiantes más brillantes y los miembros más jóvenes del *staff*.

Además, el matrimonio decidió construir una casa en Wilhelm Weber Strasse, lugar de residencia de la mayoría de los Profesores, que ya estaba concluida 1n 1897 y que pronto se convirtió en lugar de reuniones con amigos y camaradas de estudio.

Además, era ya un matemático consagrado, conocido internacionalmente por sus muchas e importantes contribuciones. No es pues de extrañar que recibiera una invitación para dar una Conferencia Plenaria en el segundo Congreso Internacional de Matemáticos que se iba a celebrar en París en el verano de 1900. Como en tantas otras ocasiones, recabó la opinión de su querido amigo Minkowski (a la sazón en Zurich, pero con grandes deseos de volver a Alemania) sobre cuál sería el tema apropiado de su Conferencia. El en Congreso anterior, celebrado en Zurich en 1897, Poincaré había dado un discurso sobre la relación entre el Análisis y la Física. Hilbert siempre había querido replicar a Poincaré, haciendo una defensa del valor de la matemática en sí misma y pensó que una posibilidad, aprovechando además la rotundidad de la fecha, sería discutir la dirección que iba a seguir el desarrollo de las matemáticas en el nuevo siglo enumerando una serie de problemas relevantes a los que los matemáticos venideros deberían dedicar sus esfuerzos.

D. Hilbert alrededor de 1900

Minkowski opinó que lo mejor sería una Conferencia de tipo técnico, ya que la audiencia iba a estar formada por especialistas. No obstante, tampoco le pareció mal la idea de intentar prever la evolución de las matemáticas, aunque le previno sobre las dificultades de las profecías. Hilbert no respondió y Minkowski volvió a escribirle, sin obtener de nuevo respuesta, hasta que a mediados de julio recibió el manuscrito de la conferencia de Hilbert cuyo título era simplemente *"Problemas matemáticos"*.

La Memoria (véase [H2]) comienza con una exposición de la forma de entender las matemáticas que tenía Hilbert, reafirmando su convicción de que todo problema en matemáticas admite una respuesta precisa, bien sea dando una solución concreta a la cuestión planteada, o bien dando una prueba de la imposibilidad de tal solución. Tras enumerar alguno de los problemas que han tenido gran importancia en el desarrollo de las matemáticas, pasa a enunciar una serie de 23 problemas que, en su opinión, debieran centrar la atención de los matemáticos del siglo XX. Él mismo advierte que los problemas son de muy distinta naturaleza, señalando que los 6 primeros son problemas generales que afectan al fundamento de las matemáticas, mientras que los siguientes son más concretos o especializados.

A la exposición oral de la Conferencia, celebrada en la mañana del miércoles 8 de agosto, asistieron unos 250 matemáticos y, por falta de tiempo, Hilbert presentó sólo 10 de su lista de 23 problemas. En los próximos días, quedó claro que Hilbert había captado la atención del mundo matemático con su lista de problemas. Y desde entonces esta lista ha señalado gran parte de la investigación matemática posterior. Remitimos al lector interesado a [Br].

El nuevo siglo: Contribuciones al Análisis.

Aunque Hilbert siguió interesado en problemas sobre fundamentos de la Geometría, otros temas empezaban a llamar su atención. En particular, Hilbert dirige su atención hacia el Análisis. Probablemente se trata de una evolución natural, tratando de extender al Análisis el método axiomático que tan buenos resultados había dado en Geometría, y convertir así el análisis en una disciplina perfectamente rigurosa, como quería Weierstrass. Pero para ello es necesario establecer los axiomas suplementarios precisos para esta fundamentación, y eso lleva a analizar los principios esenciales presentes en la resolución de los problemas del análisis. De esta forma, Hilbert se interesa por los grandes problemas del análisis de finales del siglo XIX. Y uno de ellos, que había resistido todos los esfuerzos previos, es el llamado *"Principio de Dirichlet"*. Se trata de un método, anticipado en 1833 por **G. Green** (1793-1841) para resolver un importante problema matemático que aparece constantemente al modelizar muchos fenómenos de la Física (transmisión del calor, vibración de una membrana, cálculo de potenciales eléctricos o gravitatorios, etc.) o de la Geometría. Matemáticamente, la cuestión (por ejemplo en el plano) es obtener una función de dos variables en un conjunto abierto U del plano que verifique la ecuación $\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ y tome en el borde ∂U de U un valor prefijado, digamos f. La solución propuesta por Green y, posteriormente por **W. Thompson (Lord Kelvin)** (1824-1907) y **J. L. Dirichlet** (1805-1859)[10] en sus lecciones sobre teoría del potencial, consistía en encontrar, entre todas las funciones v regulares en U y que toman el valor f en la frontera ∂U, aquella que hacía *mínimo* el valor de la integral

$$D(v) := \iint_U \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

Es fácil probar que *si existe una de tales funciones en la que se alcance el mínimo*, esa función es solución del problema. Por consideraciones físicas, se solía admitir como evidente la existencia de este mínimo. Pero pronto surgieron críticas y objeciones a esta asunción. De hecho, pronto aparecieron contraejemplos que mostraban que no siempre

[10] Se debe a **B. Riemann** (1826-1866), que fue discípulo de Dirichlet y utilizó ampliamente este método en sus trabajos sobre variable compleja, el nombre de *Principio de Dirichlet* con el que se conoce.

se alcanzaba el mínimo o, lo que es peor, que el conjunto de funciones *v* entre las que había que encontrar el mínimo era *vacío.* Pues bien, así las cosas, en la reunión de la Sociedad Alemana de Matemáticas de septiembre de 1899 Hilbert presentó un breve trabajo (de apenas 5 páginas) en el que probó que, bajo ciertas restricciones sobre la naturaleza de las cuervas de la frontera ∂U, el principio de Dirichlet era válido, despertando la admiración (una vez más) de los asistentes. Como siempre, sus técnicas eran tremendamente novedosas y originales y tuvieron importantes aplicaciones posteriores en la solución de problemas de contorno de ecuaciones en derivadas parciales.

Por otro lado, a lo largo del siglo XIX habían surgido una serie de problemas cuya solución implicaba resolver una ecuación del tipo

$$f(x)+\int_a^b K(x,y)f(y)dy = g(x) \quad \text{o simplemente} \quad \int_a^b K(x,y)f(y)dy = g(x)$$

(que reciben el nombre de *ecuación integral de 2ª especie* o *de 1ª especie*). En general, se habían encontrado algunas soluciones concretas, pero se suponía que la teoría era muy difícil, mucho más complicada que la de ecuaciones diferenciales. Por eso la comunidad matemática se mostró sorprendida cuando en 1900 apareció una nota, *Sur une nouvelle méthode pour la resolution du problème de Dirichlet*, en la que un matemático sueco hasta entonces desconocido, **I. Fredhom** (1866-1927) desarrolló un método completo para la solución delas ecuaciones de 2ª especie. La nota fue completada dos años más tarde por un artículo publicado en *Acta Mathematica* que contenía los detalles esenciales de lo que hoy se conoce como *alternativa de Fredholm*. En ambos trabajos se establece un método de resolución y se *demuestra* que funciona, pero *no* se explicita el porqué del método. En una entrevista en 1909, Fredholm declaró que su método estaba inspirado en una discretización del problema, sustituyéndolo por un sistema de ecuaciones lineales, cuya solución podía expresarse en una forma adecuada que permitiera prever el resultado obtenido por un paso al límite formal.

Pues bien, en 1901 el matemático sueco **E. Holmgren** (1872-1943) visita Gotinga y expone los resultados de Fredholm en el Seminario de Hilbert. Inmediatamente éste se interesó por el tema, que ocupó su atención preferente hasta 1912. Entre 1904 y 1912 publicó seis artículos sobre ecuaciones integrales en el *Göttingen Nachrichten*, que posteriormente fueron reunidos en forma de libro publicado en 1912. En él aparecen también numerosas aplicaciones a la Física Matemática. Como siempre, Hilbert introduce también aquí nuevos métodos y técnicas que iban a ser determinantes para el desarrollo de nuevas áreas de las matemáticas. En particular, el cuarto artículo ha sido considerado por muchos como el artículo fundador del Análisis Funcional: con una perspectiva actual, en él se prefigura claramente la teoría de los *Espacios de Hilbert* en su versión canónica del espacio ℓ_2 y la teoría espectral de distintas clases de operadores (completamente continuos, nucleares, de Hilbert-Schmidt, etc.) en su versión de formas cuadráticas. Hilbert explota fuertemente las analogías algebraicas y geométricas de ℓ_2 con el espacio euclídeo *n*-dimensional abriendo el camino a lo que, en palabras de **F. Riesz** (1880-1956) sería la *teoría de funciones de infinitas variables*. Además, aunque todavía no lo sabía Hilbert, se estaba creando la herramienta esencial para la formalización matemática de la naciente *Mecánica Cuántica,* que iba a culminar con los trabajos de **J. von Neumann** (1903-1957), también bajo la dirección de Hilbert, en 1929[11].

La vida sigue.

La fama de Hilbert atraía a estudiantes y matemáticos de todo el mundo a Gotinga. Muchas Academias extranjeras le nombraron miembro correspondientea Hilbert, quien incluso fue distinguido con el título de *Geheimrat* por el gobierno alemán (más o menos equivalente al de *caballero* en Inglaterra). Hilbert aceptó su éxito con naturalidad y sin falsa modestia, y continuó siendo una persona cordial y accesible para sus alumnos. Por otro lado, sus relaciones con Klein eran correctas, pero no especialmente cordiales. Klein, al contrario que Hilbert, gustaba siempre de marcar las diferencias con los estudiantes y otros profesores (exigía, por ejemplo, que siempre se le dirigiera por el título de *Geheimrat*). Por eso, cuando poco antes de su 40 cumpleaños Hilbert recibió una oferta para ocupar la cátedra en Berlín vacante tras el fallecimiento de Fuchs, muchos de sus colaboradores y estudiantes avanzados se mostraron consternados: Era natural que el más grande matemático alemán del momento ocupara una cátedra en la capital de la nación, ¡pero ellos habían ido a Gotinga precisamente porque allí estaba Hilbert! Se organizó un comité para pedir a Hilbert que se quedara en Gotinga. La Sra. Hilbert les recibió y les sirvió ponche en el jardín y Hilbert les escuchó atentamente, pero no hizo ningún comentario. Los visitantes se marcharon descorazonados. No sabían que Hilbert estaba tratando de resolver otro problema: él quería quedarse en Gotinga (prefería una pequeña ciudad que el ajetreo de la capital), pero también quería tener cerca un colega al que apreciara como un igual y pudiera compartir muchas de sus inquietudes

The Mathematics Club of Göttingen, 1902
Left to right, front row: Abraham, Schilling, Hilbert, Klein, Schwarzschild, Mrs. Young, Diestel, Zermelo; second row: Fanla, Hansen, C. Müller, Dawney, E. Schmidt, Yoshiye, Epsteen, Fleisher, F. Bernstein; third row: Blumenthal, Hamel, H. Müller

---

[11] Remitimos al lector interesado a [B1].

científicass. Así que entabló una dura negociación y finalmente consiguió que, a cambio de permanecer en Gotinga, se creara una nueva cátedra para Minkowski.

Así, en 1902, los dos amigos se reunieron en Gotinga, y esta vez de manera definitiva. Fue una época feliz para ambos y estimulante para los visitantes. Como dice Reid en su biografía, *"para Weyl, Born y otros estudiantes, Hilbert y Minkowski eran héroes, realizando grandes tareas, mientras que Klein, gobernando por encima de las nubes, era un dios distante."* [R1; pág. 95].

En 1908 Hilbert tenía 46 años y siempre había gozado de muy buena salud. Pero, de repente, en verano sufrió una crisis de agotamiento nervioso y depresión. Afortunadamente, tras unos meses de reposo, volvió con más fuerza a sus tareas de investigación. Y para ello retomó uno de sus dominios favoritos: la teoría de números. Y como siempre, eligió abordar uno de los problemas abiertos más difíciles de la teoría: el llamado *Problema de Waring.* En 1770 el matemático británico **E. Waring** (1736-1798) había incluido en su obra *Meditationes algebraicae* la afirmación de que todo número entero puede representarse como suma de 4 cuadrados, nueve cubos, diecinueve potencias cuartas y así sucesivamente. Es decir, se afirmaba (por supuesto, sin demostración) que dada una potencia n, todo número entero $k \geq 0$ se podía escribir como una suma de a lo más $h(n)$ (número que solo dependía de n) potencias n-ésimas. Lagrange había probado el mismo año 1770 que todo entero es suma de cuatro cuadrados (es decir, $h(2) = 4$), pero pocos avances más se habían obtenido en la solución del problema. De hecho, tras probar **J. Liouville** (1809-1892) que $h(4) \leq 53$, sólo se habían encontrado cotas de $h(n)$ para n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 10 por diversos autores. La contribución de Hilbert fue probar que, efectivamente, $h(n)$ es *siempre* finito, dando un método para encontrar una cota superior del mismo para cada n. **G. H. Hardy** (1877-1947), uno de los mayores especialistas mundiales en el campo, calificó el resultado de Hilbert como *"uno de los hitos en la teoría moderna de números.*

Hilbert mismo estaba muy orgulloso de su resultado, y anhelaba encontrarse con Minkowski (que se había marchado durante las vacaciones de Navidad) para contárselo. Al día siguiente a su regreso, el jueves 7 de enero, ambos amigos se encontraron e hicieron juntos una pequeña excursión. Pero el domingo por la tarde, Minkowski se sintió repentinamente enfermo, con un fuerte ataque de apendicitis que, desgraciadamente, derivó en una peritonitis fatal. Murió el 12 de enero, a los 45 años.

Obviamente, Hilbert sufrió un duro golpe por la pérdida de su amigo y tardó en recuperarse. Uno de sus estudiantes recuerda: "Yo estaba en clase cuando Hilbert nos comunicó la muerte de Minkowski, y Hilbert lloró. Casi nos produjo este hecho más impresión que la propia noticia de la muerte de Minkowski." ([R1; pág. 115]). Cuando apareció el trabajo sobre el problema de Waring, estaba dedicado *"A la memoria de Hermann Minkowski."*

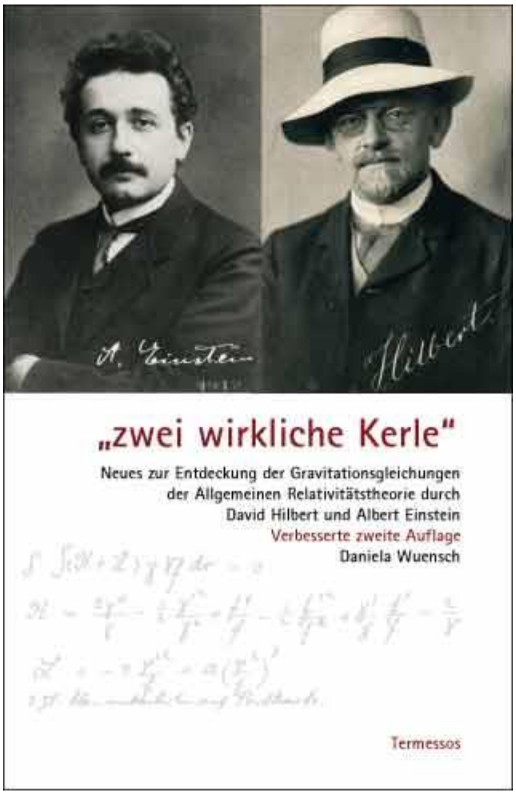
Hilbert y la Física.

Durante toda su carrera académica, Hilbert había dado numerosos cursos sobre física. Pero es sobre todo tras la incorporación de Minkowski a Gotinga cuando su interés por estos temas comienza a aumentar. A partir de 1905 organizan ambos un Seminario sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento (curiosamente, el mismo año de la publicación del artículo seminal de Einstein en el que se formula la teoría especial de la Relatividad). Por entonces, Minkowski se había claramente decantado por la investigación en física matemática y, en particular, en los aspectos matemáticos de la Relatividad cuyo creador, **A. Einstein** (1879-1955) había sido alumno suyo en Zurich. Minkowski pensaba que la presentación matemática de Einstein era incómoda y poco clara y se dedicó a mejorarla. Fue en su segundo trabajo sobre el tema, titulado *"Espacio y Tiempo"* (1908) en el que desarrolló el formalismo geométrico tetradimensional que se convertiría en la formulación estándar de la teoría. El espaldarazo llegó del propio Einstein, quien reconoció que el enfoque geométrico de Minkowski había sido decisivo también para la formulación de la teoría general de la relatividad.

Por otro lado, en sus investigaciones sobre ecuaciones integrales Hilbert había encontrado muchas aplicaciones a la Física, consiguiendo unificar y clarificar muchas teorías bajo un punto de vista común.

Pero es a partir de 1912 cuando, en uno de sus habituales cambios, Hilbert centra toda su atención en la física matemática. En el curso 1911-12 Hilbert da un curso sobre teoría cinética de los gases en el que da una presentación axiomática de la teoría, utilizando sus resultados en ecuaciones integrales para obtener nuevas soluciones de la ecuación de Boltzmann. Con técnicas similares, abordó el problema de la teoría de la radiación y, al mismo tiempo, organizó un Seminario interdisciplinar y decidió contar entre sus ayudantes con algunos dedicados a mantenerle actualizado en las últimas novedades en física. Entre estos asistentes figuran nombres relevantes, como **P. Ewald** (1888-1985), **P. Bernays** (1888-1977), **L. Nordheim** (1899-1985) o **E. Wigner** (1902-1995).

Recordemos que el problema número seis de su famosa lista de París planteaba la cuestión de la axiomatización de las teorías físicas. Vemos, pues, que este interés de Hilbert por la física es absolutamente coherente con su trayectoria científica.



Durante los años 1915-16 Hilbert se centra en la teoría de la Relatividad

En julio de 1915. Einstein realiza una visita a Gotinga, invitado por Hilbert. En los meses que siguieron ambos científicos en enzarzaron en un intenso intercambio de ideas. En una carta a Sommerfeld, Einstein hablaría de estos meses como el período más agotador y estimulante de toda su vida. Y, como consecuencia, Hilbert presentaría dos trabajos a la Academia de Ciencias de Gotinga, con el título de *Die Grundlagen der Physik (I* y *II)* ("Los Fundamentos de la Física, I y II) y Einstein 4 notas a la Academia de Ciencias de Berlín en las que, entre otras cosas, aparecen formulaciones similares de las ecuaciones del campo gravitatorio. Aunque alguna vez se ha planteado un problema de prioridad, Hilbert siempre reconoció que las ideas fundamentales de la teoría se debían a Einstein.

Mientras que para Einstein encontrar unas ecuaciones de campo correctas (invariantes respecto a todos los cambios de referencia) y que explicaran fenómenos tales como el perihelio de Mercurio, para Hilbert se trataba de un capítulo más de su ambicioso proyecto de unificación y axiomatización de la Física. Como señala Rañada:

> *"En el fondo, Hilbert quiso hacer con la gravitación y el electro magnetismo lo que había hecho con la geometría: establecer con claridad los fundamentos y deducir resultados de un conjunto reducido de puntos fundamentales claramente establecidos. De hecho, Hilbert basa su teoría en sólo dos axiomas…"* [Ra; pág 659].

En la década de los 1920, Hilbert da otro (aparente) cambio de rumbo en su actividad investigadora y se dedica esencialmente a los Fundamentos de la Matemática. No obstante, sigue interesado puntualmente por problemas de física matemática. En 1924 aparece *Methoden der matematischen Physik* cuyo autor, **R. Courant** (1888-1972), que había sido alumno de Hilbert, incluye el nombre de éste como co-autor. Courant justifica este hecho porque el libro recoge gran parte de conferencias y artículos de Hilbert sobre el tema. El libro se convirtió inmediatamente en el texto de referencia por excelencia en física matemática. En 1925-26, Hilbert volvió a interesarse en la cuestión de la fundamentación axiomática de la Mecánica Cuántica, proceso que, como ya se ha dicho, sería culminado por J. von Neumann en 1929.

Uno de los creadores de esta disciplina, **W. Heisinberg** (1901-1976) escribió:

> *Indirectamente, Hilbert ejerció una gran influencia en el desarrollo de la mecánica cuántica en Gotinga* […] *Fue una especialmente afortunada coincidencia que los métodos matemáticos de la mecánica cuántica resultaran ser una aplicación directa de la teoría de ecuaciones integrales de Hilbert"* [R1; pág. 183].

Los años de guerra.

En agosto de 1914 gran parte de Europa estaba en guerra. El ambiente bélico favorecía los sentimientos y actitudes nacionalistas. Frente a las acusaciones de "barbarismo y atrocidades de los Hunos" por parte del enemigo, la sociedad cultural alemana respondió con un *Manifiesto por un mundo civilizado* (octubre 1914), firmado por 93 importantes intelectuales y científicos, defendiendo las razones de Alemania para declarar la guerra. La reputación internacional de Klein y Hilbert eran tales que, aunque los matemáticos no suelen ser muy conocidos fuera de su profesión, a ambos se les pidió su firma. Klein, que era un nacionalista convencido, no tuvo ningún inconveniente. Pero Hilbert, a quien las razones aducidas no le convencían y, además, pensaba que la guerra era estúpida, rehusó firmar. Otro de las firmas claramente ausentes del documento era la de Albert Einstein, a la sazón Profesor en Berlín.

Al menos Einstein podía argüir que era un ciudadano suizo, pero Hilbert no tenía ese pretexto, por lo que muchos de sus alumnos y colegas se apartaron de él como si fuera un traidor. Por cierto, Klein fue expulsado de la Academia de París, mientras que Hilbert continuó siendo miembro.

Pero poco a poco las cosas fueron volviendo a su sitio. Muchos de los estudiantes y profesores más jóvenes se incorporaron a filas (Courant y Weyl entre otros). Hilbert, todavía absorbido por la física, tenía pocos estudiantes.

Emmy Noether (1882-1935)

Poco después de la batalla de Verdun llegó a Gotinga una joven matemática, **Emmy Noether** (1882-1935), hija y hermana de matemáticos, que impresionó muy favorablemente a Hilbert. Tenía un enorme conocimiento en muchos temas que tanto Klein como Hilbert necesitaban por su trabajo en teoría de relatividad, y ambos deseaban que se incorporara a la Universidad. Pero no era tarea fácil en una Universidad alemana conseguir que se otorgara la *Habilitation* a una mujer. Tras una agria discusión en el Senado de la Universidad, se recuerda que Hilbert dijo: "*Pero, señores míos, no veo que el sexo del candidato sea un argumento en contra de su admisión. Al fin y al cabo, el Senado no es una casas de baños!*" Hilbert no consiguió su propósito, pero mantuvo a Emmy Noether en Gotinga, y permitió que diera sus conferencias, anunciándolas bajo el nombre de Hilbert. A Emmy Noether se la considera como uno de los fundadores del Álgebra moderna. Permaneció en Gotinga (ya como profesora) hasta 1933, donde tuvo que emigrar a U.S.A. por su condición de judía.

El bloqueo de los puertos alemanes por parte de la flota británica provocó una gran escasez en toda Alemania. Pero con la indispensable ayuda de su esposa Käthe, Hilbert consiguió mantener unos estándares de confort suficientes,

En la primavera de 1917 los Estados Unidos entraron en guerra, lo que iba a significar el principio del fin para Alemania. El mismo año llegó la noticia de la muerte del matemático francés **G. Darboux** (1842-1917), a quien Hilbert admiraba. Inmediatamente, preparó una necrológica en su honor. Cuando apareció publicada en el *Nachrichten*, una enardecida masa de estudiantes se reunió frente a la casa de Hilbert, pidiendo que la necrológica sobre el "matemático enemigo" fuera retirada inmediatamente por su autor y se destruyeran todas sus copias. Hilbert se dirigió al Rector y le amenazó con dimitir si no recibía unas disculpas oficiales por el comportamiento de los estudiantes. Por supuesto, la necrológica de Darboux fue publicada.

El fracaso de la gran ofensiva de primavera de 1918 fue el comienzo del fin de la guerra para Alemania. El 9 de noviembre de 1918, el Káiser cruzó la frontera danesa hacia el exilio y el nuevo canciller pidió las condiciones para un armisticio.

Los Fundamentos de las Matemáticas: el *Programa de Hilbert.*

En su reseña sobre la obra matemática de Hilbert, uno de sus mejores discípulos, Hermann Weyl, ([We], distingue 5 periodos en la actividad creadora de Hilbert:

- i) Teoría de Invariantes (1885-1893).
- ii) Teoría de cuerpos algebraicos de números (1893-1898).
- iii) Fundamentos a) de la geometría (1898-1902), (b) de las matemáticas en general (1922-1930).
- iv) Ecuaciones Integrales (1902-1912).
- v) Física (1910-1922).

De hecho hemos visto en nuestra exposición que, con algunas pequeñas excepciones (“Principio de Dirichlet”y “Problema de Waring” esencialmente), esta división es bastante precisa. Sin embargo creo que esta clasificación no hace suficiente hincapié en el hecho (que hemos tratado de poner de manifiesto en las páginas anteriores) de que el apartado (iii) es realmente el hilo conductor y está presente en toda la obra de Hilbert: la búsqueda del rigor y de principios generales de razonamiento, el descubrimiento de los axiomas mínimos de los que se deducen los resultados de una teoría, la utilización, en fin, del método axiomático en sentido moderno, permea toda su ingente tarea investigadora.

Ya vimos que en su trabajo sobre los fundamentos de la geometría, Hilbert considera la *consistencia* o ausencia de contradicción de un sistema de axiomas como una verdadera prueba de existencia de los objetos descritos. Para Hilbert un axioma es verdadero no porque traduce un hecho basado en la experiencia, sino en tanto que forma parte de un sistema consistente. Esa idea se va a repetir a lo largo de toda su obra. Así, en el texto escrito de la Conferencia de París, comentando el problema número 2 (“compatibilidad de los axiomas de la aritmética”), dice:

> *“Si se puede probar que los atributos asignados a un concepto nunca pueden, por aplicación de un número finito de deducciones lógicas, conducir a una contradicción, yo digo que se ha demostrado la existencia matemática del concepto en cuestión.”* [H2; pág. 448])

En otro momento, Hilbert hacer referencia al uso que él ha hecho de modelos numéricos para probar la consistencia relativa de la geometría. Pero para demostrar la consistencia de la aritmética no se puede uno remitir a un modelo más sencillo, con lo que hace falta dar una demostración directa. Y Hilbert se muestra confiado:

> “*Estoy convencido de que es posible encontrar una demostración directa de la compatibilidad de los axiomas de la aritmética*[12]*, por medio de un cuidadoso estudio y una modificación adecuada de los métodos de razonamiento en la teoría de números irracionales.”* [H2; pág. 448]

Evidentemente, Hilbert era por entonces demasiado optimista. Se puede especular que Hilbert pensaba que la consistencia de la aritmética podía obtenerse a partir de la teoría de conjuntos. En efecto, las construcciones rigurosas de los números reales dadas por **G. Cantor** (1845-1918) y **R. Dedekind** (1831-1916) en sendos artículos aparecidos en 1872, utilizaban de manera esencia la consideración de conjuntos *infinitos* de números racionales (y no meramente de infinitos potenciales). Los trabajos posteriores de Cantor crearon una teoría bella y potente que permitía trabajar con los conjuntos infinitos. Y quizá es aquí donde Hilbert pensaba que podía construir un modelo consistente de la aritmética.

El problema de la fundamentación de la aritmética había sido abordado ya anteriormente desde otro punto de vista. **F. Frege** (1848-1925), había tratado de reducir la aritmética a la lógica, tratando de establecer una exposición deductiva de la aritmética, a partir de unos axiomas y un desarrollo basado en las leyes de la lógica. Para ello, Frege comienza un estudio sistemático de las leyes deductivas, que explicita, creando el cálcu-

[12] Probablemente Hilbert se refería al sistema de axiomas que había dado Peano para formalizar la definición de número natural que había dado Dedekind en su Memoria *Qué son y qué deben ser los números,* aparecida en 1888.

lo de predicados. Pero para Frege los axiomas no son una definición, ni siquiera *camuflada* de las nociones. Estas designan conceptos que tienen una existencia previa a los axiomas. Por otra parte, ya que lo que hacen es expresar nociones o leyes adquiridas por la experiencia o deducidas de la lógica, los axiomas son *verdaderos* por naturaleza y, si se siguen correctamente las reglas de inferencia, nunca podrán originar una contradicción. Por ello, para Frege es absolutamente inútil dar una prueba de la consistencia. En una carta dirigida a Frege , el 29 de diciembre de 1899, Hilbert mantiene exactamente la postura contraria: *Si los axiomas, elegidos arbitrariamente, no se contradicen, entonces son verdaderos y las nociones que definen existen. Este es para mí el criterio de verdad y de existencia.* (Citado en [Ca; pág. 72].

Desgraciadamente entre 1895 y 1905 aparecen una serie de *paradojas* en la teoría de conjuntos. Una de ellas en particular, la llamada *Paradoja de Russell*, iba a echar por tierra el monumental sistema lógico creado por Frege. En efecto, Frege admitía que toda propiedad enunciable en el sistema definía un conjunto (el formado por los elementos que cumple esa propiedad; esta asunción había sido implícitamente aceptada por Cantor y todos sus seguidores). Si ahora consideramos la propiedad "no pertenecer a sí mismo"[13] el conjunto U que definiría (conjunto de los conjuntos que no pertenecen a sí mismos) es en sí contradictorio: $U \in U$ si y sólo si $U \notin U$[14]. El segundo volumen de la monumental obra de Frege *Die Grundgesetze der Arithmetik* ("las leyes básicas de la Aritmética") estaba en prensa cuando éste recibió una carta de Russell en el que le comunicaba su paradoja. Frege tuvo que modificar su sistema axiomático, pero entonces muchos de los resultados del Volumen 1 quedaban en entredicho (y, por cierto, el sistema seguía siendo inconsistente, aunque Frege nunca lo supo). El caso es que Frege quedó tan afectado que nunca publicó el Volumen 3 e incluso reconoció al final de su vida que su intento de fundamentar la aritmética en la lógica estaba equivocado.

Este hecho supuso una llamada de atención para Hilbert. No se pueden dar por supuestas sin más las reglas de inferencia, como hizo en los *Fundamentos de la Geometría.* Es preciso explicitar completamente el sistema de axiomas *y* las reglas de inferencia subyacentes en la demostración matemática *y probar además que este sistema completo es consistente.* Por tanto, es necesario aplicar a la lógica el mismo tratamiento que al resto de las teorías. Este es un primer esbozo de lo que iba a ser conocido como *Programa de Hilbert.*

En el Congreso Internacional de Matemáticos de 1904 en Heidelberg, Hilbert enuncia un esquema de una prueba de la consistencia dela aritmética basada en los supuestos anteriores: a partir de un cierto "objeto de pensamiento" designado por **|** explicita cuidadosamente una lista de signos, relaciones y reglas de inferencias que permiten obtener nuevos objetos: **| |, | | |,** etc. y trata de probar que nunca se puede deducir en el sistema una expresión del tipo **| | = | | |** (con distinto número de signos **|** a uno y otro lado del signo =). Se trata del primer intento para dar una demostración de consistencia basada en la *sintaxis* y no en la construcción de modelos más básicos. El trabajo fue duramente criticado por Poincaré, señalando que en el mismo se utiliza implícitamente el principio de inducción completa, que no estaba incluido en los axiomas, y si lo in-

[13] Existen conjuntos que no tienen esa propiedad, como el de todas las ideas (que es una idea), y conjuntos que la tienen, como el de todas las sillas de una habitación (que no es una silla)

[14] La versión semántica de esta paradoja es la conocida *paradoja del barbero*: En un pueblo, el barbero afeita a todos los hombres del pueblo que no se afeitan a sí mismos, y sólo a ellos. La peg unta es ¿quién afeita al barbero?.

cluía suponía utilizar ese principio para probar la validez del mismo, lo que provoca ciertamente un círculo vicioso.

Hilbert no respondió a las críticas de Poincaré, bien porque no tuviera clara la solución, bien porque por entonces estaba totalmente absorbido por la teoría de ecuaciones integrales.

El retorno de Hilbert al estudio de los fundamentos puede cifrarse en 1917, con la conferencia que impartió en Zurich invitado por la Sociedad Matemática Suiza, titulada *Axiomatisches Denken* ("El pensamiento axiomático". Traducción en [H1; pág. 23-35]), que terminaba con una rotunda declaración: *"Creo firmemente que todo lo que está sujeto al pensamiento científico cae bajo el poder del método axiomático y, por tanto, de la matemática."* Y a continuación esboza un programa para el estudio mismo del proceso de demostración en matemáticas.

L. E. J. Brouwer (1881-1966)

En gran parte, la vuelta de Hilbert a los temas de fundamentos estaba motivada por la creciente aceptación de las teorías de **L. E. J. Brouwer** (1881-1966), que incluso abía seducido a uno de sus más queridos discípulos, H. Weyl. Brouwer tenía tras sí una importante obra en la matemática *tradicional*[15]. Pero ya en su Tesis, presentada en 1907, había defendido un punto de vista nada tradicional: para Brouwer la matemática es una actividad interior de la mente humana, que se trascribe al exterior por medio del lenguaje de la lógica. Pero el uso automático y abusivo de las reglas de la lógica formal puede dar lugar a enunciados desprovistos de sentido y a paradojas. El lenguaje (formal o informal) no está lo suficientemente adaptado para expresar los experimentos mentales que realmente tienen lugar en el pensamiento matemático.

La actividad matemática tiene su origen en el paso del tiempo, que al hacer abstracción de la sensación de multiplicidad observada en el mundo exterior, conduce a la intuición de la sucesión indefinida de los números enteros. Los objetos matemáticos se engendran por construcciones *efectivas* en un número *finito* (aunque arbitrariamente grande) de etapas, a partir de los enteros.

Brouwer y sus seguidores (la llamada *escuela intuicionista*) rechaza, por ejemplo, el principio lógico del *tertio excluso*, que afirma que, dada una proposición A, o bien A es verdadera o su negación lo es (excluyendo una tercera posibilidad).

Desde Aristóteles este principio ha sido aceptado (y utilizado) por los matemáticos, y es el fundamento de la demostración por *reducción al absurdo*: Por ejemplo, si se supone que todos los enteros verifican una cierta propiedad P y de ahí obtenemos una

[15] Sus contribuciones en topología se consideraron las más importantes desde las de Cantor. Su famoso *teorema del punto* fijo o su prueba de que la dimensión del espacio euclídeo es un invariante topológico son verdaderos hitos en el desarrollo de la topología.

contradicción, el principio del *tertio excluso* permite deducir que existe al menos un entero que no verifica la propiedad *P*. Para Brouwer esto no es aceptable, hasta que se dé una construcción efectiva y finitaria de tal entero. Desde el punto de vista intuicionista, aceptar el principio del *tertio excluso* supone poder probar o refutar de forma efectiva toda proposición matemática. Por tanto, su rechazo supone también rechazar la tesis hilbertiana de que todo problema matemático tiene solución. Y esto era demasiado para Hilbert. Y a partir de 1922 se dedicó intensamente a reparar la tremenda mutilación que, a su juicio, supondría para las matemáticas la aceptación de las tesis intuicionistas[16]. Así,, Hilbert declara :

> *"Weyl y Brouwer intentan ofrecer una fundamentación de las matemáticas que echa por la borda todo aquello que les resulta incómodo* […] *Al seguir a tales reformadores, nos exponemos a perder una gran parte de nuestros más valiosos conceptos, resultados y métodos".* ("Neuebegründen der Mathematik" Texto de la conferencia presentada en Hamburgo en 1922. Incluido en [H1; págs.. 37-62]]).

> Así que Hilbert se pone a la tarea de remediar esta situación:

> *"Mis investigaciones acerca de los nuevos fundamentos de las matemáticas tienen como propósito eliminar de manera definitiva cualquier duda en relación a la confiabilidad de la inferencia matemática* […] *Una solución completa de estas dificultades requiere una teoría cuyo objeto de estudio sea la demostración matemática misma.*" (*Die logischen Grundlagen der Mathematik,* Math. Annalen (1923), 151-165; traducción incluida en [H1; págs.. 63-81]).

> Porque

> *"¿En dónde podríamos buscar la certeza y la verdad si el pensamiento matemático mismo falla?* […] *La tesis de que todo problema en las matemáticas posee una solución es compartida por todos los matemáticos* […] *¡En las matemáticas no hay* ignorabimus!" (*Über das Unendliche.* Math. Annalen (1926), 161-190; traducción incluida en [H1; págs.. 83-121]).

> Lo que propone Hilbert con su Teoría de la Demostración (*Beweistheorie*) es

> *"dar una base firme y segura de las matemáticas* […] *que se convierten así en una especie de tribunal de suprema instancia para la evaluación y resolución de cuestiones de principio."* (Obra citada).

Para ello, Hilbert propone la *formalización* completa del sistema estudiado. Ello requiere, en primer lugar, explicitar el listado o *vocabulario completo* de signos que se va a emplear, junto con las *reglas de formación* de las expresiones válidas. A continuación, hay que especificar las *reglas de transformación* para pasar de una fórmula válida a otra. Finalmente, para comenzar la tarea, se seleccionan algunas expresiones válidas como *axiomas*. A partir de aquí, lo que pretende Hilbert es desarrollar una teoría de las propiedades combinatorias del lenguaje formal que permita hacer afirmaciones *sobre* una expresión determinada del sistema. Esta teoría la llamó Hilbert *metamatemática*.

[16] En una Conferencia dictada en 1927 en la Universidad de Hamburgo, Hilbert dijo: *expulsar el principio del tertio excluso de las matemáticas es como si se quisiera prohibir al astrónomo utilizar el telescopio o al boxeador emplear sus puños.*

Sus enunciados son pues afirmaciones sobre los signos del sistema formal y su disposición. La demostración de la consistencia de un sistema formal dado consistiría en probar, por enunciados metamatemáticos finitistas, que nunca puede obtenerse en el sistema una fórmula y su negación.

Los signos y fórmulas que aparecen en el proceso carecen, en principio de un significado concreto, tienen un mero valor formal (de ahí el nombre de *programa formalista*). Pero Hilbert sostiene que este juego de símbolos replica pensamientos que constituyen la práctica habitual de los matemáticos. Por tanto, no puede prescindirse nunca de las consideraciones obtenidas por la experiencia, esenciales para la elección *razonable* de los axiomas.

La larga trayectoria investigadora de Hilbert en tantos y tan diferentes campos de la matemática muestra claramente que para él los problemas matemáticos tienen contenido y respuestas provistas de significado. Si llegó a propugnar una interpretación formalista de las matemáticas fue porque estaba dispuesto a pagar ese precio a cambio de la certidumbre.

En el excelente artículo *La demostración de Gödel,* ([NN]) se establece una interesante analogía entre esta idea de Hilbert y el juego del ajedrez, interpretando éste como un sistema formal (*cálculo* para los autores):

> *El ajedrez es un juego de 32 piezas de forma determinada, jugado en un tablero cuadrado que contiene 64 subdivisiones cuadradas; Las piezas pueden moverse de acuerdo con reglas fijas. Es obvio que puede jugarse sin atribuir ninguna "interpretación" a las piezas ni a sus distintas posiciones en el damero [...] Las piezas y las subdivisiones cuadradas del tablero corresponden a los signos elementales del cálculo; las configuraciones permitidas de las piezas en el tablero corresponden a las fórmulas del cálculo; las posiciones iniciales de las piezas en el tablero corresponden a los axiomas o fórmulas iniciales del cálculo; las configuraciones subsiguientes corresponden a las fórmulas derivadas a partir de los axiomas (esto es, a los teoremas); y las reglas del juego corresponden a las reglas de derivación del cálculo. Además, aunque las configuraciones de las piezas en el tablero, igual que las fórmulas del cálculo, carecen de "significación", los enunciados acerca de esas configuraciones, igual que los enunciados metamatemáticos acerca de las fórmulas, tienen pleno significado. Un enunciado del metaajedrez puede afirmar, por ejemplo, que hay 20 posibles jugadas de apertura para las blancas [...] o que si las blancas no tienen más que dos caballos y el rey, y las negras sólo el rey, es imposible que las blancas den mate [...] Pueden establecerse teoremas generales del metaajedrez mediante métodos de razonamiento finitistas que consisten en el sucesivo examen de un número finito de configuraciones...* ([NN; p. 67])

Hacia 1930 el Programa de Hilbert parecía bien encaminado, gracias a los esfuerzos del propio Hilbert y algunos de sus estudiantes, como **W. Ackermann** (1896-1962) y **P. Bernays** (1888-1977). En particular, se había podido demostrar la consistencia absoluta para el sistema de la aritmética de los números naturales con la adición (aunque no con la multiplicación).

K. Gödel (1906-1978)

Sin embargo, el año siguiente, un joven docente en la Universidad de Viena, **K. Gödel** (1906-1978) acababa con la esperanza de Hilbert[17].

En un artículo que lleva el expresivo título de "*Sobre proposiciones formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines, I"* Gödel prueba que todo sistema formal (en el sentido del programa de Hilbert) consistente y que contenga a la aritmética, es necesariamente *incompleto*, es decir, contiene enunciados legítimos del sistema que son *indecidibles*, esto es, ni su afirmación ni su negación son demostrables en el sistema. ¡Y uno de esos enunciados es, precisamente, el que afirma la *consistencia* del sistema![18]

La primera reacción de Hilbert a los resultados de G¨Çodel fue de enfado, porque los veía como un ataque frontal a su programa y, sobre todo, a su filosofía de las matemáticas. No obstante, el mismo Gödel había incluido en su trabajo la siguiente observación:

> *"Mi teorema no se opone al punto de vista formalista de Hilbert. En efecto, este punto de vista sólo supone la existencia de una prueba de consistencia realizada por medios finitarios y sería concebible que hubiera pruebas finitarias que no fuesen representables en P."*

No obstante, más adelante Gödel dejó de ser tan optimista al respecto. Lo que está claro es que los resultados de Gödel supusieron un golpe demoledor para el programa de Hilbert en su versión original. La matemática clásica podía ser consistente (y probablemente lo era); pero su consistencia no podía ser establecida por los métodos finitarios propuestos por Hilbert.

La confianza ilimitada de Hilbert en el poder del pensamiento humano hizo que se pronto comenzara a buscar soluciones al sentimiento de frustración que le provocó los resultados de Gödel. Por un lado, tanto Hilbert como algunos de sus discípulos entendían que la idea de *demostración finitaria* del programa original no coincidía con las restricciones impuestas por los trabajos de Gödel.

En otro orden de cosas, **G. Gentzen** (1909-1945), un alumno de Hilbert, logró probar en 1936 la consistencia de la aritmética y distintas partes del análisis utilizando un proceso de inducción transfinita sobre cierta clase de ordinales. Este y otros resultados indicaban la posibilidad de conseguir el objetivo propuesto inicialmente por el programa

[17] Previamente, en su Tesis, Gödel había probado la completitud de la lógica de primer órden, lo que suponía un paso importante dentro del programa de Hilbert. Anteriormente, en 1918, Hilbert y Bernays habían probado la consistencia y completitud del cálculo de predicados o lógica de orden 0.

[18] Gödel construye una proposición *verdadera* (es decir, universalmente válida) tal que ni ella ni su negación pueden obtenerse por una demostración sintáctica dentro del sistema formal dado. Si añadimos la *negación* de esta proposición al sistema original, obtendremos un nuevo sistema consistente que contiene como axioma una proposición falsa (aunque no refutable dentro del sistema).

debilitando adecuadamente las restrictivas hipótesis impuestas a los métodos de demostración.

Los últimos años.

En noviembre de 1919 Hurwitz falleció en Zurich. Ya no quedaba nadie más que él de aquel trío inseparable de los primeros estudios en Königsberg. Por supuesto, Hilbert se encargó de la necrológica de su amigo. A raíz de este hecho se extendió el rumor de que le habían ofrecido a Hilbert la cátedra de Hurwitz en Zurich lo que, teniendo en cuenta la situación económica por la que atravesaba Alemania, parecía tentador. Un grupo de estudiantes fue a verle para pedirle que que quedara en Gotinga, pero los temores eran infundados: ninguna oferta llegó de Zurich.

En enero de 1922 Hilbert cumplió 60 años, y la revista *Naturwissenschaften* (equivalente alemán a *Nature*) dedicó su número de enero a Hilbert, en el que intervinieron muchos de sus antiguos alumnos. Al banquete oficial asistió Klein, con 73 años y en silla de ruedas. Tres años después, en 1925, Klein murió. En fin, parecía que era la hora del relevo en Gotinga. Poco después, a Hilbert le fue diagnosticada una anemia perniciosa, sin cura en la época. Afortunadamente, un profesor de farmacología de Gotinga había leído la existencia de un tratamiento prometedor descubierto en los Estados Unidos. Tras una serie de urgentes contactos, el tratamiento llegó a Gotinga y Hilbert mejoró sensiblemente.

Desde el fin de la guerra, los matemáticos alemanes no habían sido invitados a los Congresos internacionales. En 1928 se iba a celebrar en Bolonia el primer Congreso Internacional de Matemáticos desde 1912, y los italianos enviaron invitaciones formales a las instituciones matemáticas alemanas. Muchos matemáticos alemanes, liderados por **L. Bieberbach** (1886-1982), secundado por el danés L. E. J. Brouwer se negaron a asistir. Hilbert lideró la postura contraria, defendiendo la universalidad de la matemática por encima de las diferencias políticas y, en agosto, en medio de un clamoroso aplauso, presidio una delegación de 67 matemáticos alemanes.

Hilbert todavía se dedicó intensamente al problema de los fundamentos, como hemos visto, y también se interesó vivamente por los nuevos descubrimientos en Mecánica Cuántica. Pero realmente ya no tenía el vigor de antaño. En 1930 alcanzó los 68 años, la edad obligatoria de jubilación, y recibió distinciones y homenajes de todas partes. Entre ellos, probablemente el que más le satisfizo fue el nombramiento de hijo predilecto de su ciudad natal, Königsberg. Con este motivo, pronunció un discurso de agradecimiento, de gran contenido conceptual: *Naturerkennen und Logik* ("Lógica y la comprensión de la Naturaleza"), en el que una vez más defendió el papel de las matemáticas para entender la naturaleza, junto con una defensa de la matemática *pura* como la mayor creación de espíritu humano. Concluyó reafirmando su convicción de que no existen problemas insolubles. Sus últimas palabras fueron:

Wir Müssen wissen. Wir werden wissen." (Debemos saber. ¡Sabremos!")

La situación política en Alemania se iba enrareciendo. En las elecciones de 1932 el Partido Nacional Socialista obtuvo importantes resultados y el año siguiente el Presidente Hindenburg nombró a Hitler Canciller. Inmediatamente se institucionalizó la persecución contra los judíos, dictándose leyes para expulsar a todos los docentes con sangre judía. Eso provocó un gran éxodo en toda Alemania. En particular, en Gotinga tuvieron que abandonar los principales miembros del *staff*: Courant, Landau, E. Noether, Bernays, Born, etc. El mismo Hilbert fue investigado por tener un nombre tan poco ario como *David* (aunque la investigación concluyó con el resultado –previsible- de que la familia Hilbert tenía unos sólidos antecedentes prusianos y cristianos).

Obviamente, Hilbert estaba muy molesto por la situación. En una ocasión, estando sentado en un banquete al lado del nuevo ministro de educación nazi, éste le preguntó: --¿Cómo están las matemáticas en Gotinga, ahora que las hemos liberado de la influencia judía?-. Y Hilbert le contestó: -¿Matemáticas en Gotinga? Ya no hay.-

Poco a poco Hilbert fue perdiendo memoria, creatividad e incluso interés por las matemáticas. En 1939 Alemania invadió Polonia y estalló la Segunda Guerra Mundial. Ello significó un nuevo éxodo para los estudiantes y profesores jóvenes que aún permanecían en Gotinga. En 1942, con motivo de su 80 cumpleaños, la Academia de Berlín decidió otorgar un premio especial a Hilbert. El mismo día de la votación del premio, Hilbert se cayó en la calle y se rompió un brazo. A resultas del accidente, surgieron una serie de complicaciones que motivaron su muerte el 14 de febrero de 1943. Poco más de una docena de personas atendieron a su funeral. De Munich vino uno de sus más antiguos amigos, **Arnold Sommerfeld** (1868-1951), quien pronunció unas palabreas sobre el trabajo de Hilbert. Fue enterrado en el mismo cementerio en el que yacía Klein. En su lápida se grabaron las palabras que había pronunciado en su conferencia en Kónigsberg:

Wir Müssen wissen. Wir werden wissen.

Referencias

[AS] J. M. Almira y J. C. Sabina de Lis, *Hilbert, Matemático fundamental.* Ed. Nivola, 2007.

[B1] F. Bombal, *Análisis Funcional: Una perspectiva histórica.* Proceedings of the Seminar of Mathematical Analysis 2002-2003, Secretariado de Publicaciones, Universidad de Sevilla (2003), 81-117.

[B2] F. Bombal, *Paradojas y rigor: la historia interminable.*Discurso leído en el acto de recepción como académico de número de la RAC. Madrid, 2006. ISBN 978-84-611-7339-6

[B3] F. Bombal, *Nicolás Bourbaki, el matemático que nunca existió.* Rev. R. Acad, Cienc. Exact. Fis. Nat. de España, vol. **105** (2011).

[Br] F. E. Browder (ed.), *Mathematical developments arising from Hilbert Problems* (2 vol.) Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1976.

[Ca] P. Cassou-Noguès, *Hilbert.* Les Belles Lettres, París, 2004.

[H1] D. Hilbert, *Fundamentos de las Matemáticas.* Selección de varios trabajos de Hilbert por Carlos Álvarez y Luis Felipe Segura. Colección Mathema. Servicios editoriales de la Facultad de Ciencias de la UNAM, México 1993.

[H2] D. Hilbert, *Mathematical Problems.* Bull. Of the American Mathematical Society, **8** (1902), 437-479 (Versión en inglés, autorizada por Hilbert, del original aparecido en *Göttinger Nachrichten* en 1900 y en *Archiv der Mathernatik una Physik,*, 1 (1901), pp. 44-63 y 213-237).

[H3] D. Hilbert, *Les Fondementgs de la Géométrie.* Edición crítica de la versión alemana, preparada por Paul Rossier. Dunod, 1971.

[NN] E. Nagle, J. R. Newman, *La demostración de Gödel* , en *Sigma, el mundo de las matemáticas*, vol. 5. Eds. Grijalbo, Barcelona, 1968.

[Ra] M. F. Rañada, *David Hilbert, Hermann Minkowski, la axiomatización de la Física y el problema número seis.* La Gaceta de la RSME, **6.3** (2003), 641-664.

[R1] C. Reid, *Hilbert*. 2ª edición. Springer Verlag, New York, 1972.

[R2] C. Reid, *Courant in Göttingen and New York. The story of an improbable mathematician.* Springer, 1976.

[We] H. Weyl, *David Hilbert and his mathematical work.* Bull. of the American Mathematical Society, 50 (1944), 612-654.