La Teoría de la Medida: 1875-1925

Fernando Bombal
Seminario de Historia de la Matemática I
Universidad Complutense, Madrid. 1991. págs. 107-144

Índice

1. Introducción

El desarrollo de la noción de integral a lo largo del siglo XIX está íntimamente ligado a la evolución del concepto de función y, en general, a los conceptos más importantes del análisis en este período (diferenciación, series trigonométricas, teoría de conjuntos, topología, etc.). De hecho, muchos de los nuevos conceptos se introdujeron a la vista de las necesidades de la teoría o como consecuencia de contraejemplos aparecidos en la misma, y sus éxitos contribuyeron en gran medida al desarrollo del Análisis en este siglo (el siglo de la teoría de funciones, según Volterra).

La noción de integral hasta comienzos del siglo XIX era simplemente la de operación inversa a la derivación, conectada a través de la «regla de Barrow» con el problema de calcular el área limitada por una curva. Pero éste era un concepto primitivo y anterior, de modo que se admitía como evidente que todo conjunto del plano tenía un «área», y cuando este conjunto era de la forma $\{(x, y) : x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$ para una f no negativa en $[a, b]$, entonces este área era precisamente la integral de f en $[a, b]$. Las funciones «arbitrarias» consideradas en aquella época eran esencialmente las descritas por una expresión analítica o un número finito de ellas en distintos subintervalos (funciones «discontinuas» en sentido de Euler), pero en ningún caso podía pensarse en funciones discontinuas en más de un número finito de puntos, en sentido moderno.

En un artículo presentado a la Academia de Ciencias de París en 1807 (y no publicado hasta la aparición de *Théorie analytique de la chaleur* en 1822), Fourier (1768-1830) reafirmaba la idea de D. Bernouilli sobre la posibilidad de expresar cualquier función (acotada) en $[-a, a]$ en la forma

$$f(x) = \frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right] \tag{1.1}$$

con

$$a_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx \qquad b_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx$$

Aunque Fourier habla expresamente de funciones discontinuas, parece claro que su noción es la del siglo XVIII y que el término de «función arbitraria» es sinónimo para él de lo que podríamos llamar actualmente «función regular a trozos».

Ante la necesidad de demostrar su afirmación, Fourier utilizó dos tipos de argumentos. En el primero, consideró f desarrollada en serie de potencias y, usando sugestivas manipulaciones con sistemas de infinitas ecuaciones lineales, determinó los coeficientes del desarrollo en serie trigonométrica. El segundo argumento consistía en

1) Suponer que f era de la forma (**??**) en $[-a, a]$ (tomando por comodidad el caso $a = \pi$).
2) Multiplicar ambos términos de (**??**) sucesivamente por $\cos(mx)$ y $\operatorname{sen}(mx)$ e integrar entre $-\pi$ y π, *asumiendo la validez de la integración término a término de la serie.* Entonces resultaba inmediatamente la fórmula de los coeficientes citada.

Incluso aceptando la validez de 1) para una función f, en 2) se hacen a su vez dos nuevas suposiciones:

a) $f(x)$, $f(x)\cos(mx)$ y $f(x)\operatorname{sen}(mx)$ tienen integral.
b) Es válida la integración término a término de una serie.

Es curioso que mientras que a) se cuestionó enseguida, no se pusieron objeciones a b) hasta mucho más tarde, siendo admitida, por ejemplo, por Cauchy y Gauss. Sin embargo, Fourier justifica a) de modo evidente: al multiplicar la curva $f(x)$ por $\operatorname{sen}(mx)$ se obtiene otra curva, y el área (algebraica) limitada por esa curva entre $x = \pi$ y $x = -\pi$ es el valor de la integral. La existencia de la integral se basa, por tanto, en la existencia «evidente» del área del conjunto de ordenadas de la función. Como veremos, la clarificación y generalización de la noción de área, es de fundamental importancia para el desarrollo del concepto de integral.

En todo caso, el trabajo de Fourier da origen a una serie de problemas que merecieron gran atención a lo largo de todo el siglo XIX:

A) ¿Cuándo puede representarse una función acotada por una serie trigonométrica?

B) Si una función acotada puede representarse por una serie trigonométrica, ¿es necesariamente ésta la serie de Fourier de la función?

C) ¿Cuándo es válida la integración término a término de una serie?

Naturalmente, las respuestas a estos problemas [especialmente B) y C)] deben encuadrarse en una teoría de la integración concreta, por lo que las respuestas fueron variando según iba cambiando el contexto. Por ejemplo, a finales del XIX estaba claro que C) no era cierto ni siquiera para series convergentes uniformemente acotadas, ya que la función límite podía no ser integrable (Riemann). En cualquier caso, los resultados positivos sobre esta cuestión exigían pruebas extremadamente largas y delicadas.

2. La integral de Cauchy

En su *Cours d'analyse* (1821), Cauchy (1789-1857) introduce la noción moderna de función continua (realmente, función continua en un intervalo, lo que lleva a Cauchy a confundir reiteradamente la continuidad con la continuidad uniforme) y dos años más tarde, en su *Resume des leçons donnes a l'Ecole Royale Polytechnique sur le calcul infinitesimale*, Cauchy define la integral de una función continua f en un intervalo $[a, b]$, como límite de las sumas

$$S_P = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1})$$

asociadas a cada partición $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$ cuando $\|P\| = \sup\{\,|x_i - x_{i-1}| : 1 \leq i \leq n\}$ tiende a 0. Usando la continuidad (uniforme) de f en $[a, b]$, Cauchy demostró la existencia de este límite.

En efecto, Cauchy observa que, para una subdivisión Q del intervalo más fina que P, se tiene

$$S_Q = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1} + \theta_{i-1}(x_i - x_{i-1})) \qquad 0 < \theta_{i-1} < 1$$

y poniendo

$$f(x_{i-1} + \theta_{i-1}(x_i - x_{i-1})) = f(x_{i-1}) + \varepsilon_i \qquad (\varepsilon_i \text{ pequeño})$$

obtenemos

$$S_Q = S_P + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (x_i - x_{i-1})$$

Si las diferencias $(x_i - x_{i-1})$ son muy pequeñas, la continuidad de f (en realidad, la continuidad uniforme), hace que cada ε_i «difiera muy poco» de cero. Cauchy utiliza entonces el llamado «criterio de Cauchy» (es decir, la completitud de los números reales), que había enunciado previamente en su *Cours d'analyse*, para concluir que si los valores de $(x_i - x_{i-1})$ son muy pequeños y el número n muy grande, las sucesivas subdivisiones producirán sumas que «terminarán por alcanzar un cierto límite», que depende únicamente de la función (continua) f y el intervalo $[a, b]$. Este límite es lo que llama Cauchy *integral definida.*

Una de las ventajas de esta definición es que, por primera vez, permite *demostrar* de modo riguroso[1] la existencia de función primitiva de una función (continua) dada. En efecto, Cauchy considera la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ y establece los tres teoremas fundamentales siguientes:

I) F es una primitiva de f; es decir, $f(x) = F'(x)$.

II) Todas las primitivas de f son de la forma $F + C$, siendo C una constante. Por tanto, si G es una función con derivada continua,

$$\int_a^x G'(t)dt = G(x) - G(a)$$

[1] La mayoría de los contemporáneos de Cauchy no tenían ningún reparo en admitir esto. Así, por ejemplo, Lagrange, en un suplemento a las lecciones que había dado en la Ecole Polytechnique en 1806, había publicado (véase [1], pág. 118):

> «Toda función de una sola variable puede considerarse una derivada exacta; pues si no tiene una primitiva de modo natural, siempre puede obtenerse una por series... expresando la función dada en una serie de la variable y tomando la función primitiva de cada término».

Es también Cauchy quien pone en cuestión la posibilidad de que la serie de Taylor converja siempre y, caso de hacerlo, que su límite sea la función de partida (véase [1], pág. 121).

III) Como consecuencia de II), si G es tal que $G'(x) = 0$ para todo x de $[a, b]$, entonces $G(x)$ es una constante.

Las extensiones de I), II) y III) van a motivar gran parte de las investigaciones sobre la extensión del concepto de integral y, en consecuencia, de la noción misma de función. Precisamente, la definición de Cauchy no exige que la función f tenga una expresión analítica concreta, lo que podría haber motivado un cambio importante en la noción de función. Sin embargo, no parece que Cauchy considerara seriamente la posibilidad de extender la noción de función como correspondencia «arbitraria» entre números.

La teoría de integración de Cauchy puede extenderse para funciones acotadas con un número finito de discontinuidades en $[a, b]$. Por ejemplo, si $c \in (a, b)$ es el único punto de discontinuidad de f en $[a, b]$, los límites

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(t)\, dt \qquad \text{y} \qquad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{c+\varepsilon}^b f(t)\, dt$$

existen, y la integral puede definirse por la fórmula

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(t)\, dt + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{c+\varepsilon}^b f(t)\, dt \tag{2.1}$$

Para una cantidad finita de discontinuidades, se procede del mismo modo. Para el caso de funciones no acotadas en un número finito de puntos, los límites en (**??**) pueden no existir, y Cauchy *define* entonces la integral por (**??**), cuando los límites existen. Por el mismo proceso de paso al límite, define también la integral de funciones en intervalos infinitos.

La noción de integral de Cauchy resolvía satisfactoriamente los problemas de la teoría de funciones de su época, y el problema del significado de los coeficientes de Fourier para las nociones de función al uso.

No es extraño que Dirichlet (1805-1859), a quien se debe el concepto moderno de función, llamara la atención sobre la necesidad de extender el concepto de integral para funciones con infinitas discontinuidades (que el mismo descubrió). Durante sus estudios en París (1822-1825), Dirichlet conoció los trabajos de Fourier, y fue el primero en dar una demostración rigurosa de la convergencia de la serie de Fourier de una función, bajo ciertas condiciones generales. De hecho probó, que si f es una función continua salvo a lo más en un número finito de puntos en un intervalo, y tiene solo un número finito de máximos o mínimos en el intervalo, la serie de Fourier de f converge en cada punto x a

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

La hipótesis de continuidad sobre f se impone exclusivamente para poder asegurar la integrabilidad (en el sentido de Cauchy) de $f(x)\cos(nx)$ y $f(x)\operatorname{sen}(nx)$.

Dirichlet creyó que podía extender este resultado para funciones más generales, siempre que tuviera una buena definición de integral definida, y expresó su convencimiento de que esto podría hacerse para una función acotada tal que el conjunto de puntos de discontinuidad fuera «pequeño». Concretamente, la condición impuesta por Dirichlet es que dados dos puntos cualesquiera $a < b$ del intervalo de definición, existieran r y s, $a < r < s < b$, de modo que f fuera continua en $[r, s]$ (en terminología moderna, que el conjunto de puntos de discontinuidad fuera *diseminado*). Dirichlet prometió una nota sobre este tema, que nunca apareció, aunque su programa fue llevado a cabo por su discípulo Rudolf Lipschitz (1832-1903) en su tesis doctoral (1864). En su investigación sobre la demostración de Dirichlet y su extensión, Lipschitz supone que f es una función acotada que cumple la condición de Dirichlet y *concluye* que el conjunto derivado D' del conjunto D de discontinuidades de f, es finito.

Esta confusión no es sorprendente, pues la teoría de conjuntos y las nociones generales de topología no se conocían por entonces. Y además es sintomática, pues, como veremos, la confusión entre las distintas nociones de «pequeñez» de conjuntos se va a repetir muy frecuentemente. La clarificación de estas nociones va a ser una de las más importantes motivaciones de Cantor en sus investigaciones sobre la teoría de conjuntos. Volviendo a la definición de Lipschiz, si $D' = \{x_1, \dots, x_n\}$ es finito, en cada intervalo I que no contenga ningún x_i la función tiene un número finito de discontinuidades, luego la integral en I existe como integral de Cauchy. Por tanto, existen las integrales

$$\int_{x_{i-1}+\varepsilon_i}^{x_i-\delta_i} f(t)\,dt \qquad i = 1, \dots, n \quad \varepsilon_i + \delta_i < x_i - x_{i-1}$$

En consecuencia, como f es acotada, existen los límites de las expresiones anteriores cuando ε_i y δ_i tienden a 0^+, luego puede definirse

$$\int_a^b f(t)\,dt \stackrel{def}{=} \lim_{\varepsilon_i,\delta_i\to 0^+} \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}+\varepsilon_i}^{x_i-\delta_i} f(t)\,dt \tag{2.2}$$

En el caso de funciones no acotadas, se toma (**??**) como definición, entendiendo cada integral de la derecha como integral impropia de Cauchy, y se postula la existencia del límite en (**??**). Utilizando los teoremas fundamentales de Cauchy, es fácil ver que la definición anterior de función integrable es equivalente a la siguiente:

[Di] f (acotada o no) es integrable en $[a,b]$ si existe una única función continua (salvo constantes) F en $[a,b]$ tal que en cada segmento $[x',x''] \subset [a,b]$ en el que f sea continua, se cumpla

$$F(x'') - F(x') = \int_{x'}^{x''} f(t)\,dt$$

(puede probarse que la exigencia de unicidad para F implica necesariamente que D' es finito).

Es fácil ver también que el proceso de extensión de la integral propuesto por Lipschitz se puede aplicar a cuando $D^{(2)} = (D')'$ es finito y, por inducción, al caso en que $D^{(n)}$ sea finito. Es probable que Dirichlet estuviera pensando en este caso cuando anunció la extensión del concepto de integral, y creyera que D es diseminado si y solo si $D^{(n)}$ es finito para algún n (conjuntos *reducibles*).

A pesar de sus errores, el trabajo de Lipschitz supuso una aportación valiosa. Entre otras cosas, introdujo lo que hoy se conoce como «condición de Lipschitz», bajo la cual el resultado de Dirichlet también es cierto.

3. La integral de Riemann

Probablemente Riemann (1826-1866) adquirió su interés por las series de Fourier a través de sus contactos con Dirichlet, a quien consideraba el matemático más grande de su época. Para su *Habilitationsschrift* en 1854, Riemann decidió tomar como tema la representación de funciones en serie de Fourier. Después de discutir la contribución de Dirichlet, Riemann observó que es razonable suponer que «las funciones no cubiertas por el análisis de Dirichlet, no ocurren en la naturaleza». Sin embargo, consideró valioso estudiar el caso de funciones más generales por dos razones. En primer lugar, por la propia opinión de Dirichlet, que consideraba el tema de gran importancia en relación con los principios fundamentales del cálculo. Y en segundo lugar, porque las aplicaciones de las series de Fourier comenzaban a extenderse a dominios de la matemática pura, como la teoría de números, en donde estas funciones más generales parecían tener importancia.

Riemann parte de la misma definición de Cauchy, pero en lugar de restringirse a funciones continuas, considera la totalidad de todas las funciones integrables (aquellas para las que existe el límite de las sumas asociadas a particiones) y después da condiciones necesarias y suficientes de integrabilidad. Consideró como evidente la condición:

[R1] $\text{lím}_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta_i = 0$, donde ω_i es la oscilación de f en el segmento $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ de la partición $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$; y $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$

(esto no es obvio, y fue probado por Thomae en 1875, quien introdujo las sumas superiores e inferiores correspondientes a una partición, comprobando que convergen. La notación $\overline{\int} f$ y $\underline{\int} f$ para designar las integrales superior e inferior, fue introducida por Volterra en 1881. Con esta notación $[R1]$ se traduce en la condición $\overline{\int} f = \underline{\int} f$)

Riemann prueba que $[R1]$ es equivalente a la condición más operativa:

[R2] Para todo $\varepsilon, \delta > 0$, existe $d > 0$ tal que si $\|P\| < d$, entonces $s(P, \delta) =$ suma de las longitudes de los intervalos I, de la partición P en los que la oscilación de f es $\geq \delta$ es menor que ε.

Tanto $[R1]$ como $[R2]$ contienen el germen del concepto de medibilidad y contenido exterior de Jordan, aunque el mismo Riemann no continuó en esa dirección: el ambiente no estaba maduro.

Riemann señaló que su definición incluía la posibilidad de integrar funciones con «infinitos puntos de discontinuidad en cada intervalo» y «como estas funciones no han sido todavía consideradas, será bueno empezar con un ejemplo». El ejemplo es el siguiente: sea $m(x)$ = entero más próximo a x y $(x) = x - m(x)$ si $x \neq \frac{2k+1}{2}$; $\left(\frac{2k+1}{2}\right) = 0$. Pongamos entonces

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}$$

La serie es uniformemente convergente, luego se pueden permutar los signos lím y Σ y f es continua en todos los puntos en los que (nx) sea continua para todo n. Los puntos $x_n^k = \frac{2k+1}{2n}$ (fracción irreducible) son de discontinuidad para todas las (mx) con $m = (2i+1)n$, teniendo por límites a la derecha y la izquierda de ellos $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$ respectivamente. Por tanto

$$f(x_n^k + 0) = f(x_n^k) - \frac{1}{2n^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} = f(x_n^k) - \frac{\pi^2}{16n^2}$$

$$f(x_n^k - 0) = f(x_n^k) + \frac{1}{2n^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} = f(x_n^k) + \frac{\pi^2}{16n^2}$$

Así, f es discontinua en el conjunto infinito denso $\{x_n^k\}$. Pero f es integrable, pues en cada intervalo finito hay un número finito de puntos x_n^k en los que el salto $|f(x_n^k + 0) - f(x_n^k - 0)| = \frac{\pi^2}{8n^2}$ sea mayor que un $\delta > 0$ prefijado, y por tanto se cumple $[R2]$.

La extensión de la integral de Riemann para funciones no acotadas, se hace como en el caso de la integral de Cauchy.

Riemann aplicó su noción de integral al estudio de las series trigonométricas, no necesariamente de Fourier (fue el primero en distinguirlas), obteniendo resultados de gran importancia, que marcaron la pauta en los trabajos posteriores (véase, por ej., [6]). Sin embargo, su investigación dio origen a más problemas de los que pudo resolver, y quizá fue ésta la razón por la que mantuvo sin publicar su trabajo durante toda su vida, y no fue hasta que Dedekind lo incluyó en 1867 en una colección de trabajos, cuando se dio a conocer a la comunidad matemática.

La extensión de la noción de integral de Cauchy hecha por Riemann parece obvia desde nuestra perspectiva, pero en su tiempo supuso un cambio radical en la idea de función y una visión mucho más «moderna» de la matemática. Las condiciones de integrabilidad de Riemann parecían las más débiles y generales posibles bajo las que la definición tradicional de Cauchy podía seguir teniendo sentido. Una generalización posterior parecía impensable, siguiendo el mismo procedimiento de límites de sumas. Durante mucho tiempo, las funciones integrables Riemann constituyeron el grupo «manejable» más amplio concebible, dentro de la noción general de función como correspondencia. Como veremos, en la búsqueda de una generalización satisfactoria de esta noción de integral, se fueron gestando las nociones de la teoría de la medida, que culminaron con la integral de Lebesgue.

4. Desarrollo de las ideas de Riemann

Fourier había dado por supuesta la validez de la integración término a término de una serie, y en general, la posibilidad de intercambio de la sumación infinita con otros procesos de paso al límite. Este hecho era generalmente aceptado por los matemáticos de la época, como Cauchy y Gauss. El primero en cuestionar la validez del intercambio del límite fue Abel (1802-1829) en 1826 quien usó el ejemplo

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$$

para ilustrar que la suma de una serie convergente de funciones continuas podía no ser continua. Weierstrass (1815-1897) fue el primero, en 1841, en hacer la distinción entre convergencia uniforme y no uniforme. A partir de su designación como profesor en Berlín (1856) puso gran énfasis en este concepto, probando entre otras cosas la validez de la integración término a término de una serie uniformemente convergente de funciones integrables. Sin embargo, fuera del círculo de Weierstrass, la significación de la convergencia uniforme para la integración término a término, no fue bien reconocida hasta la aparición de un artículo de Heine (1821-1881) en 1870 sobre la unicidad de la representación de una función en serie trigonométrica. El problema en cuestión era saber si, cuando se cumplía

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)] = 0 \tag{4.1}$$

salvo a lo más para los puntos pertenecientes a un conjunto finito P, se tenía necesariamente $a_n = b_n = 0$ para todo n. Usando técnicas desarrolladas por Riemann, Heine respondió afirmativamente a esta cuestión cuando la convergencia en (**??**) era «uniforme en general» con respecto al conjunto P, *e.d.* cuando la convergencia fuera uniforme en cada intervalo que no contuviera puntos de P.

En una serie de artículos entre 1870 y 1871, Cantor (1845-1918) consiguió eliminar la hipótesis de la convergencia uniforme, lo que le llevó a considerar la misma cuestión cuando P era un conjunto infinito. Para ello, comenzó a estudiar la estructura de los conjuntos infinitos, introduciendo los conceptos de punto límite y conjunto derivado, logrando dar una respuesta afirmativa a la pregunta de Heine cuando (**??**) se cumple excepto para los puntos de un conjunto de *primera especie, e.d.*, tal que $P^{(n)} = \varnothing$ para algún n (conjuntos reducibles de Dirichlet).

En cualquier caso, los trabajos de Heine y Cantor sirvieron para destacar que la integración término a término de una serie es, en efecto, un problema no trivial.

Los trabajos de Heine y Cantor probaron la unicidad de la representación en serie trigonométrica de una función, pero no aportaron nada sobre la naturaleza de los coeficientes. Aunque Dini y Ascoli obtuvieron resultados en este sentido, fue Du Bois-Reymond (1818-1896) quien, en 1875, logró demostrar que si una función acotada integrable Riemann (la hipótesis más débil concebible, según él) es expresable como una serie trigonométrica, necesariamente esta serie es la de Fourier, de acuerdo con lo afirmado por Fourier. Este resultado, cuya demostración es larga y difícil, constituyó un gran triunfo y contribuyó en gran medida a su difusión por la comunidad matemática.

El principal responsable de difundir las ideas de Riemann en Francia fue Gaston Darboux (1842-1917), quien estudió asiduamente los trabajos de Riemann, publicó varios interesantes artículos, y finalmente, una *Memoire* *sur la théorie des fonctions discontinues* (1875), escrita con un rigor y claridad poco usual para la época. En esta obra se establecen las proposiciones básicas de la Teoría de Funciones, ilustrando con gran cantidad de ejemplos la necesidad de las hipótesis para la validez de los teoremas. Entre otras, se prueba la validez de la integración término a término de series uniformemente convergentes, y que en general este procedimiento no es correcto sin hipótesis adicionales.

Puede decirse que, tanto Heine como Du Bois-Reymond y Darboux estaban tan impresionados por la noción de convergencia uniforme, que no dedicaron su atención a otras posibilidades de obtener teoremas sobre la validez de la integración término a término de series de funciones.

Como hemos dicho, en el criterio $[R2]$ de Riemann estaba implícita la noción de medibilidad y su importancia para la teoría de la integración, aunque estas implicaciones no fueron desarrolladas en la década de 1870-80. Sin embargo, un discípulo de Riemann, Hermann Hankel (1839-1873), mostró claramente que la integrabilidad de una función depende de la naturaleza de ciertos conjuntos de puntos asociados a ella. Hankel hizo explícito lo que estaba implícito en Riemann y Dirichlet: las funciones no poseen propiedades específicas generales, como continuidad, etc. El análisis de esta noción general de función, le llevó a establecer una clasificación de las funciones en las siguientes clases:

1ª Funciones continuas.

2ª Funciones con un número finito de discontinuidades en cada intervalo.

3ª Funciones con infinitas discontinuidades en cada intervalo.

Basándose en la condición de integrabilidad de Riemann, Hankel introduce un concepto análogo al de oscilación de una función en un punto: el de «salto». El salto de f en x es $\geq r > 0$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un h tal que $|h| < \varepsilon$ y $|f(x+h) - f(x)| \geq r$. A continuación, clasifica las funciones de la clase 3ª en dos tipos:

a) *Funciones puntualmente discontinuas*: aquellas para las que

$$S_r = \{x : f \text{ tiene salto } \geq r \text{ en } x\}$$

es diseminado para todo $r > 0$.

b) *Funciones totalmente discontinuas*: aquellas para las que existe un $r > 0$ de modo que S_r es denso en algún intervalo.

Hankel creyó haber demostrado que una función (acotada) discontinua es integrable Riemann si y solo si es puntualmente discontinua, pues identificó los conjuntos diseminados (topológicamente «pequeños» o irrelevantes) con los conjuntos que podían recubrirse por un número finito de intervalos de longitud total arbitrariamente pequeña (conjuntos de contenido nulo, en lenguaje actual). De nuevo aparece la confusión entre los tres tipos de conjuntos «pequeños» conocidos por entonces: los diseminados, los de 1ª especie y los de contenido nulo. Estos tres tipos son todos distintos, pero no se reconocía así en 1870. La importancia dada a las ideas topológicas, hizo que se pensara que los conjuntos «despreciables» desde este punto de vista debieran ser los importantes en todos los aspectos de la teoría de funciones.

En cualquier caso, el trabajo de Hankel centró la atención en la naturaleza de los conjuntos S_r, y relacionó la integrabilidad de una función con el grado de discontinuidad de la misma, probando que los puntos de continuidad de una función integrable forman un conjunto denso.

También Du Bois-Reymond, el más entusiasta defensor de la teoría de integración de Riemann, cometió el error de identificar los conjuntos de 1ª especie como los únicos diseminados, lo que le llevó a afirmar que la condición de Dirichlet (*e.d.*, las discontinuidades forman un conjunto diseminado) era suficiente para la integrabilidad (aunque el ejemplo de la función de Riemann, pág. **??**, prueba que la condición no es necesaria). La razón es clara: es fácil ver que los conjuntos de 1ª especie son de contenido nulo. Por tanto, su identificación con los diseminados hace que la condición de Dirichlet implique automáticamente el criterio de integrabilidad de Riemann.

Dini (1845-1918) fue el primero, en 1878, en demostrar explícitamente que los conjuntos de 1ª especie tenían contenido 0 y en obtener muchos resultados sobre el carácter irrelevante para la integración de estos conjuntos. Aunque en sus hipótesis aparecen constantemente los conjuntos de 1ª especie, en sus demostraciones sólo se usa la propiedad de que estos conjuntos tienen contenido 0; pero desgraciadamente Dini no supo aislar esta propiedad, lo que hubiera dado origen a una teoría del contenido. En cualquier caso, es dudoso que Dini confundiera los conjuntos de primera especie con los diseminados, pues expresó varias veces sus dudas sobre la validez de la proposición de Hankel.

Volvamos ahora a la situación en que habían quedado los teoremas fundamentales de Cauchy (pág. **??**) en el marco de la nueva teoría. Como señaló Hankel (1871), la función

$$F(x) = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}\, dx$$

es continua, pero $F'(x)$ no existe en el conjunto denso de discontinuidades de la función subintegral. Esto echaba por tierra la validez de I) para la integral de Riemann. A fin de abordar este problema, Dini introdujo las 4 derivadas de una función $D_+f(x), D^+f(x), D_-f(x)$ y $D^-f(x)$, probando que todas tenían los mismos extremos sobre cada intervalo (lo que implica en particular que si una de ellas es integrable, lo son las demás y tienen la misma integral). Con estas nociones, Dini logro recobrar el teorema I) para la integral de Riemann, en el siguiente sentido (1878):

I') Si $F(x) = \int_a^x f$, cada una de las 4 derivadas difiere de f en una función de integral nula en cada intervalo.

(Notemos que si una función tienen integral nula en cada intervalo, es nula en casi todo punto, luego el resultado de Dini es equivalente a que $(\int_a^x f)' = f(x)$ en c.t.p., aunque desde luego estas consideraciones eran extrañas al pensamiento de Dini.)

Después, Dini abordó también el teorema II), dando una elegante demostración de que si F es continua y una de sus 4 derivadas, DF, es integrable, entonces $\int_a^b DF = F(b) - F(a)$. Dini fue el primero en destacar que la hipótesis de integrabilidad sobre la derivada (en algún sentido) no era superflua. Supongamos, decía Dini, una función continua F, con $F(a) \neq F(b)$ y con la propiedad de que todo intervalo contenga un subintervalo en el que F es constante. Entonces si las 4 derivadas de F fueran acotadas e integrables, en cada partición $\{x_n\}$ de $[a, b]$ habría puntos $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tales que $DF(t_i) = 0$, luego $\int_a^b DF = 0 \neq F(b) - F(a)$; así pues, DF no puede ser integrable en este caso. Dini no pudo construir una función con estas características, pues su existencia está ligada a la de conjuntos diseminados con contenido exterior positivo. En efecto, sea F tal función e (I_n) los intervalos (abiertos) en los que es constante. Sea $G = [0,1] - \bigcup I_n$. Por la propiedad supuesta en los I_n, G es diseminado. Como D^+F es 0 en I_n, los puntos de discontinuidad de D^+F están contenidos en G, y como D^+F no es integrable, sus puntos de discontinuidad no pueden encerrarse en un número finito de intervalos de longitud arbitrariamente pequeña. Dini confiaba en la existencia de tales funciones, e incluso conjeturó la existencia de funciones con derivada ordinaria acotada y no integrable. Pronto se demostró la validez de su conjetura, aunque Dini nunca consideró este hecho como un defecto de la definición de Riemann, probablemente porque la posibilidad de una definición alternativa jamás se le ocurrió.

Sin embargo, ya en 1875 el matemático inglés H. J. Smith (1826-1883) publicó un artículo que, de haberse conocido en el continente, hubiera contribuido en gran medida a clarificar este tipo de problemas. En este trabajo, Smith descubrió dos métodos de construcción de conjuntos diseminados, y los usó para construir un contraejemplo a la afirmación de Hankel sobre la integrabilidad de funciones con un conjunto diseminado de discontinuidades. El segundo método, que es el que nos interesa, era el siguiente: dado $m \in \mathbb{N}$, $m > 2$, se divide $[0,1]$ en m partes iguales y se quita el último segmento de ésta y todas las divisiones posteriores. Se dividen los restantes $m-1$ intervalos en otras m partes iguales, y se sigue así «ad infinitum». El conjunto P de puntos de subdivisión es claramente diseminado. Además, después de k operaciones, la longitud total de los intervalos que quedan es

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)^k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Una función con discontinuidades en P es, desde luego, integrable, pues este conjunto tiene contenido 0. Sin embargo, modificando la construcción de modo que la segunda división se haga en m^2 partes iguales, dividiendo después las $(m-1)(m^2-1)$ restantes en m^3 partes, etc., se obtiene un conjunto de puntos Q tal que en el k-ésimo paso la longitud de los segmentos que quedan es

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{m^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{m^k}\right) \xrightarrow{k\to\infty} \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{m^k}\right)$$

Así pues, Q es un conjunto diseminado que tiene contenido (exterior) positivo, y por tanto la función característica de Q no es integrable. En su artículo también rechaza Smith la afirmación de Hankel de que un conjunto diseminado tiene contenido 0.

En resumen, entre 1870 y 1880 la teoría de Riemann fue ampliamente conocida y aceptada, obteniendo algunos éxitos espectaculares: Du Bois-Reymond probó la afirmación de Fourier para funciones integrables expresables como series trigonométricas (a pesar de no ser válido en general la integración término a término); Dini restableció los teoremas fundamentales de Cauchy en el nuevo contexto. Así mismo, la definición de Riemann contribuyó decisivamente a la generalización de la noción de función y a clarificar muchos de los conceptos básicos de la teoría de funciones. Por otro lado, es característico de la época la confusión entre las distintas nociones de «pequeñez» de los conjuntos infinitos; pero las controversias y contraejemplos surgidos contribuyeron decisivamente a la creación de la teoría de la medida.

5. La década 1880-1890

Durante esta década, las investigaciones en la teoría de la integración se centraron en las propiedades de los conjuntos infinitos. El descubrimiento de conjuntos diseminados con contenido exterior positivo (es decir, tal que cualquier conjunto finito de intervalos que lo cubra tiene longitud total acotada inferiormente por un número positivo) condujo rápidamente al inicio de la teoría de la medida. Estas consideraciones jugaron también un papel importante en los intentos de extender la integral de Riemann a funciones no acotadas, que revelaron la importancia de la continuidad absoluta.

En un artículo elaborado en 1881, cuando aún era estudiante en Pisa, Vito Volterra (1860-1940) construyó, siguiendo más o menos el proceso de Smith, un conjunto cerrado y diseminado en $[0,1]$ con contenido exterior mayor que 2/3. Considerando la función característica de este conjunto Q, Volterra pudo exhibir una función «puntualmente discontinua» en el sentido de Hankel, y no integrable Riemann. Este mismo conjunto le sirvió también para probar otra conjetura de Dini: la existencia de una función continua con derivada acotada y no integrable. La idea es la siguiente: para cada intervalo (a, b) se construye una función $f_{a,b}$ diferenciable y tal que cerca de a o b su derivada se comporte como

$$\left(x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

cerca de 0. Por tanto, $f'_{a,b}$ es acotada (por $2(b-a)+1$) y cerca de a o b oscila indefinidamente entre -1 y $+1$. Si se pone $[0,1] - Q = \bigcup(a_n, b_n)$ y se define $g(x) = f_{a_n,b_n}(x)$ en cada (a_n, b_n) y 0 en el resto, g es diferenciable, con derivada acotada por 3 y g' tiene oscilación $= 2$ en los puntos de Q, luego no es integrable Riemann. Evidentemente, para esta función el teorema II) no se cumple.

También Du Bois-Reymond se dio cuenta de su error y construyó otro ejemplo de un conjunto diseminado con contenido exterior positivo. Dio entonces el nombre de «sistemas integrables de puntos» a los conjuntos de contenido cero, para distinguirlos de los diseminados.

Pero fue Harnack (1851-1888), en una serie de artículos, quien desarrolló el concepto de conjunto de contenido cero (a los que llamó conjuntos «discretos»), estudió sus propiedades y destacó su importancia para la teoría de la integración. En particular, estableció la versión correcta del teorema de Hankel:

> f es integrable si y solo si para todo $r > 0$ el conjunto de puntos S_r en los que oscilación de f es $\geq r$, tiene contenido cero.

En un artículo posterior, Harnack introduce una noción que en la integración de Riemann juega el mismo papel que la «igualdad en casi todo punto» en la integral de Lebesque: define que f y g son iguales «en general» si para todo $r > 0$, el conjunto $\{x : |f(x) - g(x)| \geq r\}$ es de contenido 0. Prueba que dos funciones integrables tienen la misma integral si son iguales «en general» e incluso cree haber encontrado una extensión satisfactoria del teorema III), afirmando que si f es continua y su derivada es cero «en general» en $[a, b]$, f es constante (un contraejemplo de Cantor, análogo a la función descrita en la pág. **??**, cuya existencia no pudo probar Dini, muestra la falsedad de esta afirmación). Incluso creyó haber probado la convergencia «en general» de la serie de Fourier de una función acotada integrable, aunque pronto reconoció su error.

La investigación sobre series trigonométricas exigía la integración de funciones no acotadas. La noción de conjunto de contenido 0 contribuyó a la realización de sustanciales avances en este sentido. Además de la extensión natural de la definición de Dirichlet (pág. **??**) en el marco de la integración Riemann, debida a Hölder (1859-1937), conviene destacar sobre todo la definición propuesta por Harnack para la integración de funciones f que no estén acotadas en el entorno de los puntos de un conjunto U_f de contenido 0: si $I_1, \ldots, I_n$ es un número finito de intervalos cuya unión U contiene a U_f, entonces $f_U = F_{\chi_{U^c}}$ es integrable Riemann. Se define entonces

$$\int_a^b f = \lim_{m(U) \to 0} \int_a^b f_U \quad (m(U) = \text{ longitud total de } U) \tag{H}$$

si el límite existe. Aunque Harnack no fue muy explícito al respecto, es importante considerar recubrimientos U en los que cada I_k contenga al menos un punto de U_f, según hizo notar el matemático americano Moore, pues si no es así, las funciones H-integrables lo son absolutamente, lo que no sucede con las integrales impropias de Riemann. La integral de Harnack tiene algunas propiedades comunes con la de Riemann, como por ejemplo que la integral indefinida es continua. Pero, sin embargo, la suma de dos funciones H-integrables puede no serlo (véase [6], págs. 23 y sigs.). También el teorema fundamental II) falla en este caso, pues existen funciones F tales que $D + F = 0$ fuera de un conjunto de contenido 0 (y por tanto $D + F$ es H-integrable), no constantes, luego $\int_a^x D + F = 0 \neq F(x) - F(a)$. Así, aunque la teoría de conjuntos sugería maneras de extender la integral de Riemann a funciones no acotadas, estas extensiones revelaban la existencia de funciones con sorprendentes propiedades. De este modo, las dificultades encontradas por Dini y Volterra para restablecer la validez del teorema II) en el marco de la integración Riemann, se acrecentaban, pues incluso la integrabilidad de la derivada era insuficiente para asegurar la validez de este teorema. Intentando resolver este problema, Harnack llamó la atención por primera vez sobre lo que hoy se conoce como «continuidad absoluta» de la integral de Riemann: solo para las funciones H-integrables absolutamente continuas pudo demostrar Harnack la versión de Dini del teorema fundamental II). Este resultado, precursor del teorema de Lebesgue de diferenciación, revaloriza el trabajo de Harnack.

6. El concepto de contenido

Como extensión natural de la noción de conjunto de contenido 0, aparece el concepto de contenido (exterior) de un conjunto. La idea es sencilla: se trata de cubrir un conjunto por regiones elementales cuya «medida» (longitud, área, volumen) se conoce, y pasar al límite. La primera definición se debe a Otto Stolz (1842-1905) en 1884, para subconjuntos de $\mathbb{R}$, y es la siguiente: si (P_n) es una sucesión monótona de particiones de $[a, b]$ con $\|P_n\|$ tendiendo a 0, y para cada subconjunto arbitrario E de $[a, b]$ se designa por $L(P_n)$ la suma de las longitudes de los intervalos que contienen puntos de E, Stolz probó que existía el límite $\lim_{n\to\infty} L(P_n)$, y que no dependía de la sucesión (P_n) elegida. A este límite le llamó «medida» de E, $L(E)$, probando incluso que se trataba de un límite generalizado (en lenguaje actual), según el filtro de todas las particiones de $[a, b]$. En particular, E es de contenido 0 si y solo si $L(E) = 0$. Stolz extendió también su definición a conjuntos acotados del plano.

Poco más tarde, e independientemente de Stolz, Cantor publicó una definición equivalente de contenido de subconjuntos acotados de $\mathbb{R}^n$: si E es uno de estos conjuntos y $B(p, r)$ denota la bola de centro p y radio r, sea

$$\prod(r) = \bigcup_{p\in E} B(p, r)$$

Y aquí Cantor hacía dos suposiciones poco justificadas. En primer lugar, asumía que $\prod(r)$ consistía en un número finito de *regiones* («Stücken») simples (lo que puede justificarse a posteriori por la compacidad de $\overline{E}$), P, para las cuales la integral múltiple $\int_P dx_1 \dots dx_n$ tenía sentido y *por tanto* también estaba definida la integral

$$\int_{\prod(r)} dx_1 \dots dx_n$$

(hasta los trabajos de Jordan en 1892, la teoría de integrales múltiples no se desarrolló con la generalidad y precisión que requería el tratamiento de Cantor). Supuesto esto, la función

$$F(r) = \int_{\prod(r)} dx_1 \dots dx_n$$

decrece con r. Cantor define entonces el contenido («Inhalt») de E como $J(E) = \lim_{r \to 0} F(r)$. Probó entonces que $J(E) = J(E^{(\alpha)})$ para cualquier α; en particular, $J(E) = J(\overline{E})$, relación que influyó poderosamente en la renuncia a aceptar las ideas de Borel sobre distintas nociones de medida, que podían asignar medida 0 a conjuntos densos. También Cantor se preocupó sobre las propiedades de aditividad del contenido, probando que la relación $J(E \cup D) = J(E) + J(D)$ podía no ser cierta si $\overline{E} \cap \overline{D} \neq \varnothing$. Las motivaciones de Cantor, al menos en parte, hay que buscarlas en sus trabajos sobre el continuo y la teoría de la dimensión, aunque no desarrolló sus ideas, probablemente por su dedicación absoluta a su teoría de números transfinitos.

Sin el teorema de compacidad de los cerrados y acotados, la definición de Cantor no parece coincidir con la de conjunto nulo cuando $J(E) = 0$, ya que se admiten recubrimientos por infinitos conjuntos. Esta dificultad fue observada por Harnack, quien dió una definición de contenido para subconjuntos de la recta, admitiendo solo recubrimientos por un número finito de intervalos, y demostrando los resultados de Cantor en este caso (no parece que Harnack conociera la definición de Stolz, equivalente a la suya). Los trabajos de Cantor despertaron el interés de Harnack sobre lo que sucede si se admiten recubrimientos infinitos de intervalos en la definición de contenido. Descubrió que los conjuntos numerables podían encerrarse en una cantidad infinita de intervalos de longitud total arbitrariamente pequeña. La existencia de conjuntos numerables densos, y por tanto de contenido no nulo, hacía parecer excesivamente paradójica la posibilidad de asignarles medida 0, por lo que Harnack pensó que la restricción a cubrimientos finitos de intervalos era esencial (véase también [3], págs. 65-66).

El contenido así definido puede extenderse sin dificultad a conjuntos acotados del plano. En particular, si f es acotada en $[a, b]$ y E_f denota los puntos del plano acotados por la gráfica de f y las rectas $x = a$ y $x = b$, tanto E_f como sus subconjuntos E_f^+ y E_f^- (los puntos de E_f por encima y por debajo del eje x, respectivamente), tienen contenido (exterior) independientemente de la integrabilidad de f. Por tanto, la acostumbrada relación

$$\int_a^b f = \text{ área}(E_f^+) - \text{ área}(E_f^-), \qquad \int_a^b |f| = \text{ área}(E_f)$$

ya no es cierta si «área» se identifica con «contenido». En sus conclusiones finales, Harnack reconoció este hecho, observando que el contenido de E_f no podía expresarse por una integral, salvo si la «frontera» de E (que no definió) tiene contenido nulo (en otras palabras, si E es medible Jordan). Pero nunca se le ocurrió restringir la noción de contenido a este tipo de conjuntos (del mismo modo que la integración se restringe a las funciones integrables). Solo a través del estudio de las integrales múltiples y el trabajo de C. Jordan, fue reconocida la importancia de la noción de medibilidad, lo que significó el paso crucial para la reformulación de la integrabilidad Riemann en el marco de la teoría de la medida, señalando así el camino para el descubrimiento innovador de Lebesgue y su nueva definición de integral.

7. La introducción del concepto de medibilidad

Entre 1880 y 1890 el concepto de medida adoptado por Stolz, Cantor y Harnack estaba disociado del concepto de integral definida para la mayoría de los matemáticos de la época: el recinto de ordenadas E_f de una función acotada siempre tenía un «área», independientemente de si f era o no integrable. El matemático italiano G. Peano (1858-1932) asumió una actitud diferente, criticando los tratamientos de la integral basados en la noción de área, por falta de una noción precisa y rigurosa de este concepto. En el capítulo sobre «Magnitudes geométricas» de su *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (1887) aborda el problema de la definición de área, desarrollando con detalle algunas ideas que aparecieron en un trabajo suyo de 1883. Después de definir rigurosamente las nociones de puntos interior, exterior y frontera de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, considera el problema de definir el área de A, tratando por separado los casos $n = 1, 2$ y 3. Para el caso $n = 2$, por ejemplo, Peano define el «área interior» $c_i(A)$ como el supremo de las áreas de todas las regiones poligonales contenidas enteramente en A, y el «área exterior» $c_e(A)$ como el ínfimo de las áreas de todas las regiones poligonales que contienen a A. Si $c_e(A) = c_i(A)$, este valor común es el «área» de A, $c(A)$. En caso contrario —dice Peano— A no tiene un área comparable con la de un polígono. Peano reconoció el hecho de que $c_e(A) = c_i(A) + c_e(\partial A)$ ($\partial A =$ frontera de A), y por tanto que A tiene área si y solo si $c_e(\partial A) = 0$. Peano señaló también que $c(A)$ es un ejemplo de lo que llamó «función distributiva» (*e.d.* función finitamente aditiva de conjunto), que estudió amplia y elegantemente. Usando las nociones de integral superior e inferior, descubrió que si f es no negativa en $[a, b]$ y E_f es el recinto de ordenadas,

$$\underline{\int_a^b} f = c_i(E_f) \qquad \text{y} \qquad \overline{\int_a^b} f = c_e(E_f)$$

luego f es integrable si y sólo si E_f tiene «área».

La noción de medibilidad está claramente subyacente en la obra de Peano, pero es C. Jordan (1838-1922) quien cinco años más tarde la introduce explícitamente y establece su importancia. La motivación de Jordan proviene del estudio de las integrales múltiples. El tratamiento habitual hasta entonces para definir $\int_E f(x, y)\, dxdy$ con $E \subset \mathbb{R}^2$ acotado, consistía en dividir el plano en rectángulos R_{ij}, de lados Δx_i, Δy_j, por líneas paralelas a los ejes, lo que inducía una partición de E en conjuntos E_{ij} (algunos iguales a los R_{ij}, otros, los que contienen partes de la frontera de E, irregulares). Se definía entonces $\int_E f$ por analogía al caso de dimension 1, como el límite de las sumas

$$\sum f(x_i, y_j) a(E_{ij}) \qquad ((x_i, y_j) \in E_{ij},\ a(E_{ij}) = \text{ «área» de } E_{ij})$$

cuando las dimensiones de R_{ij} tendían a 0. El significado de $a(E_{ij})$ solía quedar sin definir, aunque en tratamientos más rigurosos se tomaba el límite $\sum f(x_i, y_j) a(R_{ij})$, con la sumación extendida a los R_{ij} que cortaban a E. Sin embargo, para que esta última definición tuviera sentido, incluso para funciones muy regulares, había que suponer que las áreas de los rectángulos R_{ij} que cortaban a la frontera de E tendían a 0 al refinar las particiones (*e.d.*, que E es medible). Para algunos autores ésta era una propiedad evidente de E (debido a los ejemplos habituales, que solían ser recintos acotados por curvas regulares), o bien imponían condiciones sobre E para que esta condición implícita de medibilidad se verificara automáticamente (por ejemplo, Arzela impone que E esté acotado por curvas cerradas simples, continuas y rectificables; Picard supone que las rectas paralelas a los ejes cortan a la frontera de E en a lo más N puntos, con N fijo, etc.). El problema se agudizaba al estudiar la reducción de una integral doble a integrales reiteradas; pues las funciones parciales $x \to f(x,y)$ e $y \to f(x,y)$ podían no ser integrables aunque lo fuera $f(x,y)$. Así por ejemplo, Du Bois-Reymond en 1883 pone el ejemplo de la función

$$f(x,y) = \frac{1}{2^p} \text{ si } (x,y) = \left(\frac{2n+1}{2^p}, \frac{2m+1}{2^q}\right), \text{ y 0 en otro caso}$$

f es integrable en $[0,1]\times[0,1]$, aunque $y \to f(x,y)$ es totalmente discontinua cuando $x = \frac{2n+1}{2^p}$ y por tanto la integral $\int_0^1 f(x,y)\,dy$ no existe para un conjunto denso, de contenido exterior $= 1$, de valores de x. Sin embargo, el mismo Du Bois-Reymond pudo establecer la siguiente versión del teorema de Fubini: si f es integrable en $R = [0,1] \times [0,1]$, entonces las funciones

$$y \to \overline{\int_0^1} f(x,y)\,dx \qquad\qquad x \to \overline{\int_0^1} f(x,y)\,dy$$

son integrables en $[0,1]$ y

$$\int_R f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dy \left[\overline{\int_0^1} f(x,y)\,dx\right] = \int_0^1 dx \left[\overline{\int_0^1} f(x,y)\,dy\right]$$

Pero fue incapaz de obtener teoremas análogos para la integración sobre un conjunto arbitrario E (la traza de $y = a$ con E puede ser un conjunto extremadamente complicado). Así pues, como el mismo Jordan observó, aunque se había clarificado enormemente el papel que desempeñaba la función en la integral, la influencia de la naturaleza del dominio de integración no se había estudiado con el mismo cuidado. Todas las demostraciones se basaban en una doble asunción: todos los dominios E tienen una determinada «área», y este área es, en nuestras palabras, finitamente aditiva. Pero estos supuestos no son en absoluto evidentes cuando se admiten dominios arbitrarios (*Remarques sur les intégrales définies*, 1892).

Jordan, como Peano, comienza definiendo las nociones de punto interior, exterior y frontera de un conjunto. Después define el contenido exterior e interior de un conjunto acotado $E \subset \mathbb{R}^n$ de modo similar a Peano, y llama a E medible si $c_i(E) = c_e(E)$. Prueba después que si E es unión disjunta de subconjuntos $E_1, \ldots, E_n$, entonces

$$\sum c_i(E_j) \leq c_i(E) \leq c_e(E) \leq \sum c_e(E_j)$$

luego si los E_j, son medibles, E también lo es y $c(E) = \sum c(E_j)$. Para una función acotada f definida sobre un conjunto medible E, define las sumas superior e inferior relativas a una partición $E = \bigcup E_i$ en conjuntos medibles como

$$U = \sum M_j c(E_j); \quad L = \sum m_j c(E_j) \quad (M_j = \sup_{E_j} f; m_j = \operatorname{ínf}_{E_j} f)$$

y prueba que los límites de U y L existen cuando las dimensiones de los E_j tienden a 0. A estos límites los llama «integral por exceso» e «integral por defecto» de f sobre E y define que f es integrable sobre E si coinciden.

Es de destacar que la definición de Jordan para $n = 1$ conduce a una noción de integral de Riemann que emplea particiones del intervalo $[a, b]$ en conjuntos medibles arbitrarios y no sólo intervalos, lo que proporciona el primer indicio de la conexión entre la extensión de la integral de Riemann y la extensión de la clase de conjuntos medibles. Jordan define también la integral $\int_E f$ cuando E no es medible: si (E_n) es una sucesión creciente de conjuntos medibles tal que $c_i(E) = \operatorname{lím} c(E_n)$, entonces la sucesión $(\int_{E_n} f)$ tiene límite, que por definición será la integral de f sobre E. Con estas definiciones, Jordan pudo establecer el teorema de Fubini en los siguientes términos: sea f acotada e integrable sobre un conjunto medible E del plano, $F = \{y : (x, y) \in E \text{ para algún } x\}$ y $G_y = \{x : (x, y) \in E\}$. Entonces

$$\int_E f = \int_F dy \left[\underline{\int}_{G_y} f(x, y)\, dx \right] = \int_F dy \left[\overline{\int}_{G_y} f(x, y)\, dx \right]$$

(Los G_y pueden no ser medibles, pero las integrales entre corchetes están definidas.) Como señaló Jordan, la hipótesis esencial sobre E es la medibilidad. Esta versión del teorema de Fubini, incorporada a la 2ª edición de su *Course d'analyse*, fue ampliamente difundida, y las ideas de Jordan influyeron decisivamente en Borel y Lebesgue.

8. La teoría de la medida de Borel

El artículo de Jordan situó definitivamente la teoría de la integración en el contexto de la teoría de la medida. Sin embargo, la moderna concepción de la noción de medida (distinta de la de Jordan) tuvo su origen en una teoría absolutamente distinta: las investigaciones de E. Borel (1871-1956) en la teoría de funciones de variable compleja.

Siguiendo algunos trabajos previos de Weierstrass, Appell y Hermite, Poincaré había dado en 1883 un procedimiento general para construir funciones analíticas en una región que no pueden continuarse analíticamente a través de su frontera: sea C un contorno convexo en el plano, con tangente y radio de curvatura en cada punto. Así pues, si S y T son las regiones acotada y no acotada determinadas por C, para cada z de T existe un círculo contenido enteramente en T con centro en z y tangente a C. Poincaré definió una función f en T por la fórmula

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{z - b_n}$$

con $\sum_{n=0}^{\infty} |A_n| < \infty$ y $(b_n) \subset C \cup S$ formando un conjunto denso en C. Entonces f es analítica en T y para todo z de T su desarrollo en serie tiene como círculo de convergencia el círculo de centro z tangente a C, luego no puede continuarse analíticamente a través de C. En su Tesis (1894), Borel se propuso probar que para estas series es posible en ciertos casos dar una definición de continuación analítica a través de un contorno singular como el C. Consideró funciones

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{(z - a_n)^{m_n}}$$

con $m_n \leq N$ (fijo), $\sum |A_n| < \infty$ y (a_n) denso en C. Borel probó que f (definida en $S \cup T$) verifica muchas de las propiedades de las funciones analíticas, como por ejemplo el teorema de identidad. Más aún, si se toma $\sum |A_n|^{1/2} < \infty$, todo punto de T puede unirse con cualquier punto de S por un arco circular en el que la serie anterior, con $m_n = 1$, converge absoluta y uniformemente; luego, en cierto sentido, f puede prolongarse analíticamente a través de C a S. La demostración es como sigue: sean $P \in T$ y $Q \in S$ y $\overline{AB}$ un segmento en la mediatriz de $\overline{PQ}$. Cada punto $O \in \overline{AB}$ determina entonces un arco que une P con Q, que puede o no pasar por un a_n. Supongamos el caso peor: para cada n, los puntos P, Q y a_n determinan un círculo con centro O_n en $\overline{AB}$. Sea L la longitud de $\overline{AB}$, $\sum u_n$ una serie convergente de términos positivos tal que $\sum |A_n|/u_n < \infty$ (p. ej. $u_n = |A_n|^{1/2}$) y N tal que $\sum_{n>N} u_n < L/2$. Para $n > N$ construyamos el intervalo I_n en $\overline{AB}$, de centro O_n y longitud $\leq 2u_n$. La suma de las longitudes de estos segmentos es, pues, $\leq 2\sum_{n>N} u_n < L$. De este hecho, utilizando por primera vez el llamado teorema de Heine-Borel, dedujo Borel en primer lugar que existe al menos un punto O en $\overline{AB}$ que no pertenece a $\bigcup_{n>N} I_n$. De aquí concluye fácilmente que hay realmente una cantidad no numerable de puntos en $\overline{AB}$ que no pertenecen a $\bigcup_{n>N} I_n$, pues si hubiera sólo una cantidad numerable, utilizando los argumentos de Harnack, se podrían encerrar estos puntos en una sucesión de intervalor (J_n) de longitud total lo suficientemente pequeña para que la suma de las longitudes de los (I_n) y la de los (J_n) sea todavía menor que la longitud total de $\overline{AB}$, y por tanto no podrían cubrir $\overline{AB}$. Así pues, existe un punto $O \in \overline{AB}$ (¡de hecho, una cantidad no numerable de puntos!) que no pertenece a $\bigcup_{n>N} I_n$ y es distinto de O_n, para $n = 1, 2, \ldots N$. El círculo de centro O que pasa por P y Q no contiene ningún a_n. Además, utilizando la forma de elegir O, Borel puede probar que en todo este círculo, la serie $\sum A_n/(z - a_n)$ converge absoluta y uniformemente.

Cuatro años más tarde, en su monografía *Leçons sur la theorie de functions*, Borel refinó sus argumentos, probando que la serie en cuestión converge uniformemente en subconjuntos de C cuyo complementario (en C) se pueda encerrar en una cantidad numerable de arcos de longitud total arbitrariamente pequeña. Estos resultados, le convencieron de la necesidad de un desarrollo más amplio de sus ideas sobre la teoría de la medida, lo que llevó a cabo en la primera parte de esta monografía.

Es de destacar que aquí aparece la primera exposisión axiomática de la teoría de la medida. Este tratamiento se debe probablemente a la influencia de las ideas de un amigo y compañero de Borel en la Ecole Normale Superieur, Jules Drach. En 1895 ambos habían publicado un libro sobre álgebra y teoría de números, en el que postulaban un tratamiento abstracto de esta teoría, «considerando los números enteros y racionales como símbolos o signos enteramente definidos por unas pocas propiedades dadas *a priori*, y operando solo con estas propiedades» (prólogo de J. Tannery). Drach utilizó también este método en su tesis sobre ecuaciones diferenciales, caracterizando y clasificando las soluciones por ciertas propiedades esenciales que debían poseer *a priori*. Esta aproximación axiomática a una teoría es particularmente evidente en el concepto de Borel de medibilidad: si por simplicidad se supone que todos los subconjuntos están en $[0,1]$, Borel formula los postulados que debe cumplir la medida (a la manera de Drach, según el mismo advierte) de la siguiente forma:

1. La medida es siempre no negativa.
2. Si E es la unión de una cantidad numerable de intervalos no rampantes, de longitud total s, entonces la medida de E es s.
3. Si los (E_n) son disjuntos, cada uno con medida s_n, entonces su unión tiene medida, igual a $\sum s_n$.
4. Si E tiene medida s, y E' es un subconjunto de E con medida, s', entonces $E - E'$ tiene medida, igual a $s - s'$.

Los conjuntos para los que se puede definir una medida que verifique las propiedades anteriores, se llaman medibles.

Borel no presentó una descripción rigurosa de la clase de los conjuntos medibles, ni probó la consistencia de sus postulados. En cualquier caso, de acuerdo con 2), la clase de los conjuntos medibles debe contener a los abiertos, y por 4) a los cerrados. Las propiedades 3) y 4) prueban entonces que esta clase es, en términos actuales, una σ-álgebra (posteriormente Lebesgue propuso el nombre de *conjuntos de Borel* a los que son medibles según la definición de Borel). La existencia de conjuntos muy complicados, que aparecían por ejemplo al estudiar los conjuntos de convergencia de series, llevó a Borel a proponer que si E contiene un conjunto medible de medida r, debería asignarse a E una «medida» $\geq r$, sea o no E medible, reemplazando así un cálculo de igualdades por otro de desigualdades (en el fondo, se estaba planteando implícitamente la noción de medibilidad de Lebesgue: si $E_1 \subset E \subset E_2$ con E_1 y E_2 medibles Borel y ambos con medida r, la convención de Borel obliga a asignar a E la medida r, sea o no medible Borel. La clase de estos conjuntos coincide precisamente con los medibles según Lebesgue). En ningún momento relaciona Borel su teoría de la medida con la integración. Según sus propias palabras, «sería interesante comparar las definiciones dadas con las más generales de M. Jordan. El problema que nosotros investigamos, sin embargo, es totalmente diferente del resuelto por M. Jordan...» (1898: *Leçons sur la théorie des fonctions*). Así pues, Borel consideraba la definición de Jordan más general que la suya, lo que es cierto en el sentido que hay «más» conjuntos medibles Jordan que medibles Borel (estos últimos tienen cardinalidad c, mientras que los medibles Jordan tienen cardinal 2^c: si E es un conjunto perfecto diseminado, de contenido 0, todo subconjunto suyo es medible Jordan, de contenido 0).

9. El informe Schoenflies. Final de siglo

Hacia finales del siglo XIX, la Deutsche Mathematiker-Vereinigung encargó al matemático Artur Schoenflies (1853-1928) la preparación de un informe sobre curvas y conjuntos de puntos. El informe preliminar, presentado en septiembre de 1898, dio origen a dos volúmenes, el primero de los cuales representa el primer tratado sobre teoría de conjuntos. Más de la mitad de la obra está dedicada a las aplicaciones a la teoría de funciones de variable real, incluyendo la teoría de integración. Cuando Schoenflies abordó el tema de la medida de conjuntos, tuvo que encararse con la existencia de tres teorías al respecto: el contenido exterior de Stolz, Cantor y Harnack; la teoría del contenido de Peano y Jordan; y la teoría de la medida de Borel. Después de destacar que una definición de medida, como cualquier otra definición matemática, debe juzgarse por su utilidad y adecuación a la resolución de los problemas que motivaron su introducción, Schoenflies cuestiona la definición de Borel, por considerarla inútil para la mayoría de las aplicaciones contemporáneas de la teoría del contenido, y ni siquiera necesaria para la obtención de los propios resultados de Borel sobre la convergencia de las series $\sum \frac{A_n}{|x-a_n|}$. Otra objeción de Schoenflies a la teoría de Borel es que, mientras en la teoría del contenido exterior, éste es el mismo para un conjunto y para su adherencia (lo que también es cierto en las teorías de Peano y Jordan), esto deja de ser cierto en la teoría de Borel, que permite asignar medida 0 a conjuntos densos. Esta separación radical con la teoría del contenido no le parecía satisfactoria a Schoenflies, quien además objetaba la forma axiomática en que Borel presentaba su definición. Evidentemente, estas objeciones cayeron por tierra cuando la imaginación creativa de Lebesque utilizó las ideas de Borel para la construcción de una útil y potente generalización de la integral de Riemann.

Como veremos, una de las ventajas de la integral de Lebesgue reside en la posibilidad de integración término a término de series no necesariamente uniformemente convergentes. Como antecedentes directos de este aspecto de la teoría de Lebesgue, conviene señalar las investigaciones de W. F. Osgood (1864-1943) (profesor en la Universidad de Harvard) y C. Arzela (1847-1912) quienes, con demostraciones extremadamente largas y complicadas, lograron probar la validez de la integración término a término para series uniformemente acotadas, siempre que se impusieran condiciones adicionales (continuidad o integrabilidad) a la función límite.

En cualquier caso, hacia finales del siglo XIX nadie ponía en duda la utilidad de la integral de Riemann ni concebía la posibilidad de una definición alternativa. Las excepciones y contraejemplos que habían ido surgiendo se aceptaban y eran más o menos esperados, al igual que había pasado con la teoría de las funciones de variable real. La idea general era descubrir tantos fenómenos excepcionales como fuera posible, para determinar las leyes que permitieran su clasificación.

10. Lebesgue

Henri Lebesgue (1875-1941) asistió a la Ecole Normale Superieur y completó allí sus estudios en 1897. Además de varios artículos (sobre los trabajos de Baire en varias variables, etc.) entre 1897 y 1899, la Academia de Ciencias publicó en sus Comptes Rendus, entre junio de 1899 y abril de 1901, cinco notas de Lebesgue que formaron posteriormente el grueso de su Tesis en la Sorbona. La Tesis, con el título *Integrale, Longueur, Aire*, fue publicada en la revista italiana «Annali di Matematica» en 1902. El primer capítulo trata sobre la medida de conjuntos. Influenciado por las ideas de Borel y Drach, hace una presentación axiomática de la teoría, planteando el problema de definir para cada conjunto acotado E de $\mathbb{R}$ una medida no negativa $m(E)$ tal que

1) $m(E) \neq 0$ para algún E.
2) $m(E + a) = m(E)$ para cada número real a.
3) Si los (E_n) son disjuntos, $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$.

Estas propiedades implican que $m([0,1]) \neq 0$; si por convención se toma $m([0,1]) = 1$, para cada intervalo $I \subset [0,1]$ resulta entonces que $m(I) = L(I) =$ longitud de I. Como m es monótona, según se deduce de 3) y de la positividad, si E está contenido en una unión numerable $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ de intervalos, $m(E)$, caso de poder definirse, debe ser menor o igual que

$$\sum_{n=1}^{\infty} L(I_n) \tag{10.1}$$

El ínfimo de los números (**??**) (cuando se toman todas las sucesiones de intervalos cuya unión recubra E) es, por definición, la medida exterior $m_e(E)$ de E. Esta definición es una extensión natural de la noción de contenido exterior, a la luz de las ideas de Borel. Pero las nociones de medida interior y de medibilidad son mucho más sutiles. En efecto, la generalización análoga del contenido interior de Jordan (usando sucesiones en lugar de familias finitas de intervalos), no conduce a ningún concepto nuevo. Sin embargo, guiado probablemente por el hecho de que para conjuntos medibles Jordan en $I = [a, b]$ se tiene $c_e(E) + c_e(I - E) = b - a$, Lebesgue consideró la clase de los conjuntos E tales que si $E \subset [a, b]$, entonces

$$m_e(E) + m_e(I - E) = b - a \tag{10.2}$$

Si se define la medida interior de $E \subset [a, b]$ por $m_i(E) = b - a - m_e(I - E)$, entonces se verifica (**??**) si y sólo si $m_e(E) = m_i(E)$. A los conjuntos que cumplen esta condición, los llamó *medibles.* Lebesgue notó que si $m(E)$ puede definirse, cumpliendo las condiciones 1), 2) y 3), entonces, como hemos visto, ha de ser $m_e(E) \geq m(E)$ (supuesto normalizada, con $m([0, 1]) = 1$), y, por tanto

$$m_i(E) = b - a - m_e(I - E) \leq b - a - m(I - E) = m(E) \leq m_e(E)$$

Por tanto, para los conjuntos medibles al menos, existe una y solo una solución al problema de la medida, que es $m(E) = m_e(E) = m_i(E)$. (Lebesgue probó que la unión contable de conjuntos medibles, es medible y que se cumple 3)). De la desigualdad evidente

$$c_i(E) \leq m_i(E) \leq m_e(E) \leq c_e(E) \tag{10.3}$$

Lebesgue deduce que todos los conjuntos medibles Jordan, son medibles y tienen la misma medida. Después establece muy fácilmente que E es medible si y solo si existen dos conjuntos de Borel $A_1 \subset E \subset A_2$ tales que $m(A_1) = m(E) = m(A_2)$, con lo que los conjuntos medibles resultan ser los que poseen una medida definida en el «cálculo de desigualdades» de Borel.

La teoría de la medida de Lebesgue, aunque desarrollada con más claridad y generalidad, no deja de ser una extensión natural de las ideas de Borel. Sin embargo, su aplicación posterior para desarrollar una nueva teoría de la integración, se debe exclusivamente al genio de Lebesgue. En efecto, el segundo capítulo de su Tesis comienza con una discusión de la relación entre la integral (Riemann) de una función y el contenido de su recinto de ordenadas $\int_E f = E_f^+ - E_f^-$ análoga a la esbozada en la página **??** (se usan las notaciones de dicha pagina). Esto le sugiere la siguiente generalización geométrica de la noción de integral: si f es acotada en $[a, b]$ y el recinto E_f, limitado por la gráfica de f, es medible (y por tanto también E_f^+ y E_f^-), puede definirse la integral de f por

$$\int_a^b f = m(E_f^+) - m(E_f^-)$$

De manera análoga pueden definirse la integral superior y la inferior. Las desigualdades (**??**) prueban entonces que la definición de Lebesgue incluye la de Riemann como caso especial. Pero esta casi obvia generalización es solo el comienzo, ya que en su Tesis y trabajos posteriores, Lebesgue se dedicó a probar brillantemente la superioridad de su definición sobre las anteriores.

Para ello, comienza dando una definición más manejable: en lugar de dividir el intervalo donde está definida f, como en la integral de Riemann, Lebesgue divide la imagen de f en particiones cada vez más finas. Si $m \leq f \leq M$ y (a_n) es una partición de $[m, M]$, sea $E_i = \{x : a_i \leq f(x) \leq a_{i+1}\}$. El conjunto E_f está comprendido entre los rectángulos generalizados de bases E_i y alturas a_i y a_{i+1}, es decir, su medida está entre $\sum a_i m(E_i)$ y $\sum a_{i+1} m(E_i)$. La diferencia es $\leq \|P\|(b-a)$, siendo $\|P\|$ la norma de la partición de $[m, M]$, luego

$$\int_a^b f = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} a_i m(E_i) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} m(E_) \tag{10.4}$$

Para que este razonamiento tenga sentido, los *conjuntos E_i deben ser medibles*. En efecto, Lebesgue prueba que si f es integrable en su sentido, para cada $r \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x : f(x) > r\}$ es medible, y de ahí deduce fácilmente la medibilidad de los E_i. A las funciones que cumplen esta condición las llama «sumables», aunque posteriormente pasó a denominarlas «funciones medibles», que es la nomenclatura que emplearemos nosotros. Así pues, Lebesgue probó que si f es medible y acotada en $[a, b]$, entonces es integrable, y su integral viene dada por (**??**).

La generalización de Lebesgue es, pues, análoga a la reformulación de Jordan de las funciones integrables Riemann utilizando particiones arbitrarias de $[a, b]$ por conjuntos medibles, en lugar de intervalos (pág. **??**). Como veremos, la extensión «natural» de la definición de la integral de Riemann siguiendo el camino de Jordan (usando particiones medibles Lebesgue, en lugar de medibles Jordan) fue hecha por W. H. Young, quien sin embargo, no descubrió los profundos resultados y las aplicaciones realizadas por Lebesgue. Parece, pues, así extremadamente afortunada la idea de Lebesgue de dividir la imagen de f en lugar del dominio de definición, pues esta idea le condujo a la noción de función medible, cuyas propiedades permitieron obtener a Lebesgue sus resultados más profundos.

Por medio de esta definición analítica, Lebesgue prueba las propiedades usuales de la integral, pero pronto empiezan a descubrirse diferencias con las propiedades de las definiciones anteriores. Así, Lebesgue demuestra muy fácilmente que las funciones medibles son estables por el paso al límite de sucesiones, y comprueba que todas las funciones que puede considerar son medibles (en particular, la intratable función de Dirichlet es integrable en la nueva teoría, y tiene integral 0). De hecho, Lebesgue no puede construir una función no medible.

También descubre Lebesgue que una función acotada es integrable Riemann si y solo si sus puntos de discontinuidad forman un conjunto de medida 0, lo que le proporciona un método para construir funciones integrables en su sentido, que no son integrables Riemann.

La definición analítica permite definir de manera obvia la integral de f sobre un conjunto medible E arbitrario, y obtener las propiedades elementales de la integral indefinida, como función de conjunto. Después, de manera elegante y simple, Lebesgue prueba, entre otros, los siguientes resultados:

A) Si (f_n) es una sucesión de funciones medibles, uniformemente acotadas sobre un conjunto medible E, que converge puntualmente sobre E a una función f, entonces $\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n$.

(Resultado que extiende los resultados de Osgood y Arzela sobre integración término a término de series uniformemente acotadas de funciones.) Este resultado le permite recuperar en parte el teorema fundamental II) dentro de la nueva teoría. Concretamente:

B) Si f' existe y es acotada en $[a, b]$, entonces f' es integrable y $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$.

Lebesgue pasa también a definir la integrabilidad de funciones medibles, no necesariamente acotadas, sobre $(-\infty, \infty)$, por la condición de que la serie $\sum a_i m(\{x : a_i \leq f(x) < a_{i+1}\})$ converja absolutamente cuando la norma

$\|P\|$ de la partición P tiende a 0. Es evidente que con esta definición f es integrable si sólo si lo es $|f|$. Prueba después que

$$\lim_{a\to\infty} \int_{\{x:|P(x)|>a} |f| = 0$$

lo que le permite deducir propiedades a partir de las de la integral de las funciones acotadas. Esta definición le permite abordar el teorema II) para funciones no acotadas, obteniendo como resultado parcial

C) Si f' es finita, entonces f' es integrable si y sólo si f es de variación acotada, en cuyo caso $\int_a^b f = f(b) - f(a)$.

La Tesis de Lebesgue ha sido, sin duda, una de las más notables que jamás se han escrito. Sin embargo, algunas propiedades de la integral de Riemann no las pudo demostrar. En particular, no hay ninguna referencia al teorema fundamental I) (*e.d.*, $\left(\int_a^x f\right)' = f(x)$ «en general», según la terminología de Harnack). También encontró dificultades Lebesgue en establecer la versión de Dini del teorema II) (pág. **??**).

Durante el año académico 1902-03, Lebesgue fue elegido para dar el *Cours Peccot* en el College de France. Durante este fructífero período pudo resolver muchas de las cuestiones que quedaron pendientes en su Tesis, plasmando sus logros en sus *Leçons sur l'integration et la recherche des fonctions primitives*, publicado en 1904. Allí, en el último capítulo, imitando el procedimiento de Drach y Borel, plantea el *problema de la integración* como el problema de asignar un número real $\int_a^b f$ a cada función acotada en $[a, b]$ de modo que

1) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x-h)\,dx$
2) $\int_a^b f + \int_b^c + \int_c^a f = 0$
3) $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
4) Si $f \geq 0$ y $b > a$ entonces $\int_a^b f \geq 0$
5) $\int_0^1 1 = 1$
6) Si $((f_n(x)) \nearrow f(x)$, entonces $\left(\int_a^b f_n\right) \nearrow \left(\int_a^b f\right)$

3) y 4) implican que $\int_a^b kf = k\int_a^b f$ y 1), 2) y 3) que $\int_a^b 1 = b - a$. De aquí se deduce que la única posible definición de $\int \chi_E$ para E medible, es $m(E)$.

Por tanto, si f es acotada y medible y si (a_i), (E_i) son las particiones de $f([a,b]) \subset [m,M]$ y $[a,b]$ (con la notación usada en la definición de integral en la Tesis de Lebesgue) y, finalmente, se definen

$$\varphi = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \chi_{E_i}; \qquad \Phi = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}\chi_{E_i}$$

entonces

$$\int_a^b \varphi = \sum a_i m(E_i) \qquad \text{y} \qquad \int_a^b \Phi = \sum a_{i+1} m(E_i)$$

y como $\varphi \leq f \leq \Phi$, $0 \leq \Phi - \varphi \leq |P\|$, aplicando (**??**) resulta que el único valor posible para $\int_a^b f$ es la integral de Lebesgue de f. Por tanto, el problema de la integración tiene una única solución para las funciones integrables.

Para abordar la solución de los teoremas fundamentales I) y II), Lebesgue introduce lo que llama «cadena de intervalos», estableciendo el siguiente resultado:

D) Supongamos que para cada $x \in [a,b]$ existe un intervalo $[x, x+h]$ ($h > 0$) contenido en $[a,b]$. Entonces existe una familia contable de intervalos no rampantes ($[x_n, x_n + h_n]$) cuya unión es $[a,b]$. Estos intervalos se llaman una «cadena» de intervalos de a a b.

Como puede apreciarse, se trata de un teorema de recubrimiento, sustituido en $\mathbb{R}^n$ por el teorema de Vitali y sus generalizaciones. Usando este resultado, Lebesgue pudo demostrar para su integral la formulación dada por Dini al teorema II):

E) Si f es continua y Df denota una de las 4 derivadas de Dini de f, que se supone finita, entonces Df es integrable si y solo si f es de variación acotada, en cuyo caso

$$\int_a^b Df = f(b) - f(a)$$

Usando este teorema, Lebesgue demostró posteriormente que toda función continua de variación acotada posee derivada finita en casi todo punto.

Quizá más sorprendente que el resultado anterior (que de alguna manera sustenta la creencia de los matemáticos hasta comienzos del siglo XIX de que toda función continua era diferenciable «en general»), es el descubrimiento de Lebesgue de que la continuidad no es esencial para la validez del teorema fundamental I):

F) Si f es integrable en $[a, b]$, entonces $\left(\int_a^x f\right)' = f(x)$ para casi todo x de $[a, b]$.

Para demostrar este resultado, Lebesgue emplea una técnica a la que acudirá con frecuencia: utilizando la densidad de las funciones simples, basta probarlo para funciones de la forma χ_E, con E medible (incluso basta considerar E boreliano, intersección numerable de conjuntos que son a su vez unión numerable de intervalos). En la demostración usa un resultado, plausible desde el punto de vista geométrico, pero que no probó hasta 1910, relativo a la densidad métrica de los conjuntos medibles.

También aplicó Lebesgue su teoría al problema de rectificación de curvas que, como el del área, se había ido separando de la noción de integral a raíz de los sucesivos contraejemplos que habían surgido. De nuevo en este campo Lebesgue restaura el antiguo orden perdido, y establece la fórmula usual de longitud de un arco de curva para funciones de variación acotada, por medio de una integral.

Finalmente, Lebesgue trata el problema de caracterizar todas las funciones que son integrales indefinidas de una función integrable. Trata primero el caso de funciones acotadas y, en una nota al pie de página que no se molesta en probar, afirma:

G) F es absolutamente continua en $[a, b]$ si y sólo si existe una función integrable en $[a, b]$, f, tal que $F(x) = \int_a^x f$ para todo $x \in [a, b]$.

Vitali dio la primera demostración de este resultado, y acuñó el término «continuidad absoluta», aunque el concepto ya había sido utilizado por

Hanack en relación con su noción de integración (pág. **??**). Sin embargo, Lebesgue dio en 1907 una demostración más simple de este resultado, que es un buen ejemplo de la utilización del método de la cadena de intervalos: si F es absolutamente continua, es de variación acotada, luego es derivable en casi todo punto. Sea $f(x) = F'(x)$ en donde exista la derivada, y 0 en el resto. Para demostrar que $F(x) = \int_a^x f$ (de la demostración de $[E]$ resulta fácilmente que f es integrable), Lebesgue considera la función $g(x) = \int_a^x f - F(x)$, que es absolutamente continua y con derivada 0 en casi todo punto. Para demostrar que entonces g es constante, Lebesgue procede así: sea $r > 0$ y

$$E = \{x : g'(x) \neq 0 \text{ o } g'(x) \text{ no existe}\}$$

Resulta que $m(E) = 0$. Encerremos E en una unión numerable de intervalos, A, de longitud total L arbitrariamente pequeña. Para cada t de $[a, x]$ existe un intervalo $[t, t+h] \subset [a, x]$ tal que si $t \in E$ entonces $[t, t+h] \in A$, y si $g'(t) = 0$ entonces $|g(t+h) - g(t)| < rh$. Por $[D]$, existe una cadena $[t_n, t_n + h_n]$ de intervalos de a a x. Pero entonces

$$|g(x) - g(a)| \leq \sum |g(t_n + t_n) - g(t_n)| \leq \sum{}' |g(t_n + h_n) - g(t_n)| + r(b-a)$$

donde $\sum'$ denota la suma extendida a los $t_n \in A$. Como g es absolutamente continua, $\sum'$ tiende a 0 con L, y el teorema está demostrado.

El problema general de recuperar f a partir de su derivada, en el caso de que esta derivada sea finita, pero no integrable, fue abordado y resuelto por Denjoy en 1912, quien estableció el teorema (II) para toda función del tipo citado anteriormente, extendiendo previamente la noción de integral.

En cualquier caso, la época de comienzos del siglo XX estaba madura para el desarrollo de la teoría de la medida. Como prueba de ello, podemos señalar, por ejemplo, que entre 1903 y 1904, G. Vitali (1875-1932) redescubrió la caracterización de la integrabilidad de Riemann en términos del conjunto de discontinuidades de la función, y comenzó a desarrollar una teoría de la medida análoga a la de Lebesgue, aunque sin prever la conexión entre esta teoría y una generalización de la noción de integral. Cuando conoció los trabajos de Lebesgue, pronto se familiarizó con la nueva teoría y obtuvo importantes resultados. A él se debe el término «continuidad absoluta» y la primera demostración de la afirmación de Lebesgue de que una función es absolutamente continua si y solo si es una integral indefinida.

Otro matemático, William H. Young (1863-1942), fue más lejos, duplicando el trabajo de Lebesgue en la teoría de la medida y proponiendo una generalización de la integral equivalente a la de Lebesgue. La carrera de Young como investigador comenzó a los 34 años cuando decidió, con su mujer (también matemática), dedicarse a la investigación. Así, abandonó Inglaterra y se fue a Göttingen, y entre 1897 y 1908 publicó gran número de artículos sobre la teoría de la medida y el concepto de integral.

La contribución de Young a la teoría de la medida aparece en su trabajo *Open sets and the theory of content* (1904) (aquí *abierto* significa «no necesariamente cerrado»). Young parte de la noción de medida de Borel para conjuntos formados por uniones contables de intervalos y sus complementarios (en particular, para conjuntos cerrados de la recta). Prueba entonces que si (G_n) es una sucesión decreciente de conjuntos tal que las medidas de todos los cerrados de G_n exceden un número fijo $g > 0$ para todo n, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ contiene cerrados de medida mayor que $g-r$, para cualquier $r > 0$. Este resultado motiva la definición de *medida interior* de un conjunto G (contenido en un intervalo $[a, b]$) como el supremo de las medidas de los subconjuntos cerrados de G. Young considera después la clase

$$\mathcal{Y}_i = \{G \subset [a, b] : \forall S \text{ tal que } S \cap G = \varnothing,\ m_i(G \cup S) = m_i(G) + m_i(S)\}$$

y prueba que $\mathcal{Y}_i$ contiene a los cerrados y verifica las propiedades que había establecido Lebesgue para los conjuntos medibles.

Young observó que, por el teorema de Heine-Borel, la medida de un conjunto cerrado (=compacto) puede definirse como el ínfimo de las medidas de todos los conjuntos formados por recubrimientos del cerrado por intervalos. En esta forma, la definición puede extenderse a cualquier conjunto, y ésta es la definición de Young de medida exterior m_e de un conjunto (para un cerrado, obviamente $m_e(C) = m_i(C)$). Después considera la clase $\mathcal{Y}_e$, análoga a la $\mathcal{Y}_i$, y finalmente considera la clase aditiva $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_i \cap \mathcal{Y}_e$ (que evidentemente contiene a todos los conjuntos medibles Lebesgue). Plantea también Young por primera vez si $\mathcal{Y}$ contiene a todos los subconjuntos de $[a, b]$ o no. El interés de Young por la teoría de la medida *per se* contrasta con el de Lebesgue, para quien la teoría de la medida era fundamentalmente un medio para extender la noción de integral.

En otro artículo Young se dedica a estudiar las integrales inferior y superior de una función acotada f en $[a, b]$, probando que existe una función semicontinua superiormente $\overline{f}$ y otra semicontinua inferiormente $\underline{f}$ de modo que

$$\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} \overline{f} \qquad \text{y} \qquad \underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} \underline{f}$$

El problema se reduce entonces a estudiar las integrales de las funciones semicontinuas, en cuyo caso $S(k) = \{x : \overline{f}(x) \geq k\}$ y $T(k) = \{x : f(x) \leq k\}$ son conjuntos cerrados para todo real k, y por tanto medibles. Las funciones $I(k) = m(S(k))$ y $J(k) = m(T(k))$ son entonces monótonas y, por tanto, integrables Riemann. Young prueba entonces que

$$\overline{\int_a^b} \overline{f} = m(b-a) + \int_n^M I(k) \qquad \text{y} \qquad \underline{\int_a^b} \underline{f} = M(b-a) + \int_n^M J(k)$$

(con $m \leq f \leq \overline{f} \leq M$ en $[a, b]$). Young observó que las expresiones de la derecha seguían teniendo sentido, cuando se reemplazaba $[a, b]$ por un conjunto cerrado arbitrario sobre S. Es muy fácil comprobar que las integrales de Riemann de la derecha son realmente las integrales de Lebesgue de f y siguen teniendo sentido siempre que los conjuntos usados para definir I y J sean medibles, es decir, siempre que f sea medible, en cuyo caso las dos expresiones coinciden y se obtendría así una generalización de la integral de Riemann (que coincide con la integral de Lebesgue). Pero desde luego Young no siguió este camino para obtener su generalización de la integral de Riemann. En efecto, en su trabajo *Outline of the general theory of integration* (1905) Young señala en la introducción dos posibles vías de generalización de la noción de integral: 1) reemplazar las particiones en intervalos por particiones en conjuntos más generales (medibles); y 2) admitir particiones numerables en lugar de finitas. Así, si f es acotada en $[a, b]$ y (E_i) es una partición contable de $[a, b]$ en conjuntos medibles, Young define la integral superior $(Y)\overline{\int_a^b} f$ como el ínfimo de las $\sum M_i m(E_i)$ y análogamente la integral inderior $(Y)\underline{\int_a^b} f$ como el supremo de las sumas $\sum m_i m(E_i)$ $(Mi = \sup_{E_i}(f); m_i = \inf_{E_i}(f))$, cuando se consideran todas las particiones.

Young prueba que

$$\underline{\int_a^b} f \leq (Y)\overline{\int_a^b} f \leq (Y)\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$$

lo que indica que esta definición podía servir para generalizar la definición usual de integral (Riemann); pero sin embargo, el hecho de que su definición no coincida con la noción habitual de integral superior e inferior de Darboux (piénsese en $f = \chi_{\mathbb{Q}}$, en cuyo caso $(Y)\overline{\int_a^b} f = (Y)\underline{\int_a^b} f = 0$ mientras que $\underline{\int_0^1} f = 0$ y $\overline{\int_0^1} f = 1$) le plantea dificultades. Extiende estas nociones para integrales sobre conjuntos medibles arbitrarios (y no solo sobre conjuntos cerrados como en su trabajo anterior) e intenta repetir lo que había hecho en su trabajo sobre integrales inferiores y superiores de Riemann, probando resultados análogos para su definición. Solo más tarde decide Young olvidarse de sus escrúpulos y definir una función integrable por la condición $(Y)\overline{\int_a^b} f = (Y)\underline{\int_a^b} f$ que, como él dice «ya vimos que no coincide con las definiciones usuales». Concluye el artículo mostrando que cuando f es acotada y medible, su definición coincide con la de Lebesgue. Tanto el trabajo de Young como el de Lebesgue se inspiraron en las ideas de Jordan y Borel sobre la medida de conjuntos, y ambos obtuvieron generalizaciones de la noción de integral, que son esencialmente la misma. Pero mientras que Young culmina con su definición de integral, para Lebesgue este es solo el punto de partida sobre el que construye una teoría sustancial y potente.

11. Aplicaciones y extensiones de la integral de Lebesgue

Una de las extensiones más fructíferas de la integral de Lebesgue es la posibilidad de considerar integrales de funciones definidas en casi todo punto, es decir, salvo un conjunto de medida 0. En efecto, la definición analítica de Lebesgue permite demostrar fácilmente que si dos funciones difieren en un conjunto de medida 0, ambas son a la vez integrables o no integrables y, en el primer caso, tienen la misma integral. Esto sugiere la siguiente extensión: si f esta definida en $[0,1]$ excepto en un conjunto E de medida 0, y f es integrable Lebesgue en $E^c = [0,1] - E$, puede definirse la integral $\int_0^1 f$ como

$\int_{E^c} f$. Esta extensión natural no fue, sin embargo, considerada por Lebesgue (quien solo se permitió esta identificación de integrales cuando E era finito), y debe mucho al estudio del problema de expresar una integral doble por medio de integrales reiteradas. En efecto, cuando Lebesgue abordó este problema en su Tesis, se encontró con las mismas dificultades que sus predecesores, y las intentó solventar también del mismo modo, definiendo las integrales inferiores y superiores y obteniendo versiones similares a la de Jordan para la integral de Riemann. Sin embargo, Lebesgue hizo una observación que sugirió posteriormente a Fubini la solución del problema: si f es medible Borel (y no solo medible Lebesgue) en un rectángulo R del plano, entonces las funciones parciales $x \to f(x, y)$, $y \to f(x, y)$ son también medibles Borel, y entonces las integrales superiores e inferiores en la expresión de $\int_R f(x, y)\, dxdy$ como integral reiterada, se convierten en integrales ordinarias. Por otro lado, analizando los contraejemplos existentes sobre el tema en la integración de Riemann, Hobson (1856-1933) señaló que tales contraejemplos desaparecían si se consideraba la integral de Lebesgue, ya que los puntos excepcionales formaban conjuntos de medida 0 «y la integral de Lebesgue es independiente de los valores de la función en estos puntos»; es decir, Hobson asumía tácitamente la integración de funciones definidas en casi todo punto. Esta observación de Hobson, junto con la versión de Lebesgue del teorema de integración reiterada, condujeron a Fubini (1879-1943) al descubrimiento del teorema que lleva su nombre, sobre integración reiterada: si f es integrable en un rectángulo $[a, b] \times [c, d]$, las funciones $x \to f(x, y)$, $y \to f(x, y)$ son integrables para casi todos los valores de y y x, respectivamente. Además, las funciones (definidas en casi todo punto) $y \to \int_a^b f(x, y)\, dx$ y $x \to \int_c^d f(x, y)\, dy$ son integrables y

$$\int_R f(x, y)\, dxdy = \int_c^d dy \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] = \int_a^b dx \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right]$$

El teorema de Fubini fue un gran triunfo para la nueva teoría de la integración.

Entre 1902 y 1908 aparecieron importantes trabajos de Lebesgue, Fatou, Riesz y Fisher, demostrando la potencia de la nueva teoría de integración y sus aplicaciones a otras ramas de la matemática. Así, Lebesgue y Fatou obtuvieron importantes resultados sobre series trigonométricas. Por ejemplo, Lebesgue probó que si una función acotada se puede expresar como suma de una serie trigonométrica, esa serie es necesariamente la de Fourier, haciendo buena la afirmación de Fourier y extendiendo el resultado de Du Bois-Reymond para las funciones integrables Riemann. También extendió el teorema de Fejer sobre convergencia Cesaro de la serie de Fourier de una función continua, consiguiendo una elegante demostración de la identidad de Parseval para funciones acotadas de cuadrado integrable (¡resultado que se creía falso incluso para funciones integrables Rieman!). Posteriormente, Fatou extendió este resultado para funciones no necesariamente acotadas, y obtuvo importantes éxitos en relación con la formula de Poisson y la convergencia Abel de la serie de Fourier de una función de cuadrado integrable.

El húngaro F. Riesz (1880-1956) fue quizá el otro matemático que, junto a Lebesgue, contribuyó más a demostrar el valor de la nueva teoría en la primera década de este siglo. Combinando las ideas aparecidas en la Tesis de Frechet sobre espacios abstractos (1906) con la nueva noción de integral, introduce una métrica en el espacio de funciones de cuadrado integrable (el espacio L^2) y extiende a este caso el concepto de conjunto ortogonal (usado por Hilbert en sus trabajos sobre ecuaciones integrales). Prueba que todo conjunto ortonormal en L^2 es necesariamente numerable y consigue demostrar lo que hoy conocemos como Teorema de Riesz-Fischer: sea (φ_n) ortonormal en L^2; entonces dada una sucesión de escalares (a_n), existe $f \in L^2$ tal que $a_n = \int f\varphi_n$ (coeficiente de Fourier n-ésimo de f respecto a (φ_n)) si y solo si $(a_n) \in l^2$. (Fischer, independiente y casi simultaneamente, obtiene el mismo resultado, probando esencialmente que L^2 es completo, algo en lo que ya fracasó Harnack, mientras que los espacios de funciones continuas no lo son para la convergencia en media cuadratica.) Este resultado abrió nuevas perspectivas en el tratamiento de ecuaciones integrales de Fredholm, permitiendo extender los resultados de Hilbert y Fredholm a ecuaciones con núcleo simétrico de cuadrado integrable.

Los trabajos de Riesz en la teoría de la medida culminaron con la introducción de los espacios L^p (1910), $1 < p < \infty$, estableciendo importantes relaciones con otras partes del análisis, como el problema de los momentos, sistemas de infinitas ecuaciones lineales, etc., y contribuyendo poderosamente al desarrollo del naciente Análisis Funcional.

12. Otras definiciones de la integral de Lebesgue

En una nota aparecida en las Comptes Rendus en 1912, Borel sugería la necesidad de simplificar la exposición de la teoría de la medida e integración de Lebesgue a fin de que se pudiera incluir en los textos de Análisis Matemático. El mismo Borel propone una definición alternativa (véase [3], págs. 87 y sigs.). Pero quizá los dos intentos más fructíferos en este sentido se deban a Riesz y a Young.

Según el análisis de Riesz, la necesidad de un estudio preliminar de la teoría de la medida era el principal obstáculo para la comprensión de la integral de Lebesgue. Por ello, propuso una teoría de la integración (al menos para funciones acotadas) que utilizaba exclusivamente la noción de conjunto de medida 0 (y que de hecho se sigue usando con algunas variantes en muchos textos actuales). Las líneas generales de su definición son las siguientes: comienza Riesz definiendo las funciones simples, como aquellas funciones continuas a trozos que toman solo un número finito de valores en $[a, b]$. Para ellas, se considera la integral de Riemann. Se define entonces una función sumable en $[a, b]$ como una función que es límite en casi todo punto de una sucesión uniformemente acotada de funciones simples. Entonces, si $f = \text{lím}\, f_n$ es sumable, la sucesión de integrales de Riemann $(\int f_n)$ converge, y su límite es independiente de la sucesión (f_n) de que se parte (con tal de que converja en casi todo punto a f). Por definición

$$\int f = \text{lím}_{n\to\infty} \int f_n$$

Es fácil ver que las funciones sumables en el sentido de Riesz son precisamente las funciones acotadas medibles Lebesgue en $[a, b]$, y la integral de Riesz es la integral de Lebesgue. El caso de la integración Riemann es tratado por Riesz por separado: una función sumable f es integrable Riemann si y sólo si existe una sucesión de funciones simples que converge a f uniformemente en casi todo punto (*e.d.* para cada $r > 0$ y casi todo x existe un n_0 y un entorno V_x de x, tales que $|f_n(y) - f(y)| \leq r$ para $n \geq n_0$, $y \in V_x$).

En 1910 Young propuso otra definición de integral de Lebesgue, basada en el método de sucesiones monótonas: se parte inicialmente de las funciones simples semicontinuas inferior (l) o superiormente (u), para las que se toma como integral la de Riemann. A continuación se consideran las funciones (u) (resp. (l)) que son los límites de sucesiones decrecientes (resp. crecientes) de funciones u-simples (resp. l-simples). Su integral es, por definición, el límite de las integrales de las funciones simples aproximantes, probándose que este límite no depende más que de la función límite. Si ahora f es una función arbitraria en $[a, b]$, consideremos

$$\begin{aligned} L_f &= \text{ínf}\{\textstyle\int \varphi : \varphi \text{ es s.c.i. y } \geq f\} \\ U_f &= \sup\{\textstyle\int \psi : \psi \text{ es s.c.i. y } \leq f\} \end{aligned}$$

f se llama integrable si $U_f = L_f$, en cuyo caso a este valor común se le denomina integral de f. Como el mismo Young señala, este método coincide, en esencia, con la definición geométrica de la integral de Lebesgue (considerando el recinto de ordenadas de una $f \geq 0$, L_f corresponde a la medida exterior del mismo, y U_f a la medida interior). Sin embargo, el uso de funciones semicontinuas evita, aparentemente, la utilización de la teoría de la medida, lo que podía hacer más aceptable esta definición para los matemáticos de la vieja escuela.

El método de Young, junto con la definición del problema de la integración por Lebesgue, sirvió de base para las posteriores extensiones de la noción de integral como forma lineal, motivada por el desarrollo del análisis abstracto y la integración de funciones en espacios generales, sobre los que se hacía difícil desarrollar previamente una teoría de la medida. Esta nueva tendencia queda claramente expresada en la definición de Daniell en 1919: se parte de un conjunto arbitrario M y un retículo T_0 de funciones reales sobre M. Una integral de Daniell sobre T_0 es simplemente un funcional lineal positivo U_0, sobre T_0, con la siguiente propiedad:

[Da] Si $(f_n) \subset T_0$ es una sucesión decreciente, con $\text{lím}\, f_n = 0$, entonces $U_0(f_n)$ converge a 0.

(propiedad análoga a la (6) de Lebesgue en su planteamiento del problema de la integración; véase pág. **??**).

El próximo paso es la extensión de U_0 a una clase más amplia de funciones. Para ello, se considera primero la clase T_1, de las funciones que son límites puntuales de sucesiones crecientes de funciones de T_0 (el análogo a las 1-funciones de Young). Si $f \in T_1$ y $(f_n) \subset T_0$ es tal que $(f_n) \nearrow f$, la sucesión $(U_0(f_n))$ es creciente, y su límite (=supremo) no depende de la sucesión (f_n) elegida, sino de la función límite. Por,definición

$$U_1(f) = \lim U_0(f_n)$$

Finalmente, se definen para una función arbitraria sobre M:

$$\overline{U}(f) = \inf\{U_1(h) : h \in T_1,\, h \geq f\} \qquad \underline{U} = -\overline{U}(-f)$$

f se dice sumable si $\overline{U}(f) = \underline{U}(f)$, y el valor común se designa por $U(f)$, la *integral de Daniell* de f. La clase de funciones sumables es un retículo que contiene a T_0, y la integral es una extensión de U_0, que tiene sus mismas propiedades, y para la que son válidos las correspondientes versiones abstractas de los teoremas de convergencia de Lebesgue. En particular, tomando como T_0 las funciones simples integrables sobre $\mathbb{R}$ o las funciones continuas con soporte compacto, y como U_0 la integral de Riemann, el proceso anterior da como resultado la clase de funciones integrables Lebesgue, y la integral de Lebesgue. Esta concepción de la integral como funcional, culminaría en la década de los cuarenta con la noción de «medida de Radon» (mejor sería llamarla «integral de Radon») de Cartan, como una forma lineal continua arbitraria sobre el espacio de las funciones continuas con soporte compacto sobre un espacio topológico localmente compacto T_2 arbitrario, dotado de una topología adecuada (uno de los primeros ejemplos de la topología «límite inductivo»).

13. Funciones de conjunto e integración abstracta

En sus estudios sobre la extensión de la teoría de la integración a n dimensiones, y en un intento de abstraer las propiedades de la integral que no dependan de la dimension, Lebesgue comienza en *Sur l'integration des* *fonctions discontinues* (1910) el estudio de la función de conjunto

$$E \to \int_E f$$

para una función f integrable, y definida sobre la σ-álgebra de los conjuntos medibles. Prueba las propiedades fundamentales de esta función, a saber, que es σ-aditiva, absolutamente continua y de variación acotada. Este punto de vista permite a Lebesgue adoptar, entre las distintas posibles definiciones de diferenciación, la correcta, en términos de la cual la teoría adquiere una forma unificada, independientemente del número de dimensiones.

En las investigaciones de Lebesgue, las funciones de conjuntos siguen muy de cerca el modelo en que se basan, es decir, la integral indefinida de una función integrable. Así, siempre se consideran definidas sobre la σ-algebra de conjuntos medibles Lebesgue y, si son «absolutamente continuas», resultan ser la integral indefinida de una función integrable Lebesgue. Es de señalar que en la demostración de este resultado, Lebesgue utiliza el teorema de recubrimiento de Vitali, que sustituye a su «cadena de intervalos» en dimensión arbitraria.

Poco después, J. Radon generalizó sustancialmente los resultados de Lebesgue, considerando una σ-álgebra arbitraria en $\mathbb{R}^n$ (conteniendo a los intervalos semiabiertos $[a, b)$ en muchos casos, y por tanto a los conjuntos medibles), y una función numerablemente aditiva sobre ella, y construyendo una teoría de la integración imitando el procedimiento de Lebesgue. Radon define también la continuidad absoluta de una función σ-aditiva de conjunto respecto a una medida (≥ 0) y prueba la versión abstracta del resultado de Lebesgue: el teorema de Radon-Nikodym en terminología actual.

El paso final en la generalización de la integral de Lebesgue, fue dado por Frechet en 1915, estudiando funciones σ-aditivas sobre σ-álgebras arbitrarias en un espacio abstracto. Después de definir la variación de una función de conjunto, imitando la definición de Lebesgue en el caso de $\mathbb{R}^n$, Frechet desarrolló una teoría de la integración (siguiendo los pasos de Lebesgue y Radon) respecto a una medida σ-aditiva arbitraria.

Todos estos desarrollos ponen de manifiesto la estrecha relación entre la teoría de la medida y la correspondiente teoría de integración. Sin embargo, toda medida construida, provenía en último término de la restricción de una cierta medida exterior a los elementos de una σ-álgebra, en la que la medida exterior es aditiva. Este hecho fue reconocido expresamente por Carathéodory (1873-1950) quien, en 1914, define axiomáticamente la noción de medida exterior en $\mathbb{R}^n$, como una función $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$, monótona y subaditiva. A continuación, define los conjuntos medibles como aquellos $A \subset \mathbb{R}^n$ tales que

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c), \quad \forall\ B \subset \mathbb{R}^n$$

Carathéodory demuestra que la clase de los conjuntos medibles es un σ-anillo sobre el que μ^* es σ-aditiva. Sin embargo, en general no puede probarse que este σ-anillo sea no trivial, a menos que se impongan condiciones adicionales. Finalmente, Carathéodory introduce también la noción de medida exterior regular, como aquella para la que

$$\mu^*(A) = \text{ínf}\{\mu^*(B) : A \subset B \text{ medible}\}$$

probando que las medidas consideradas por Radon son regulares. Para este tipo de medidas, la mayor parte de las propiedades de la medida de Lebesgue se trasladan sin dificultad.

Bibliografía

(1) U. Bottazzini: *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*, Springer Verlag, Berlín, 1986.

(2) H. Edwards: *The Historical Development of the Calculus*, Springer Verlag, Berlín, 1979.

(3) T. Hawkins: *Lebesgue's Theory of Integration: its Origins and Development*, Chelsea, New York, 1979.

(4) H. Lebesgue: *Leçons sur L'integration et la Recherche des Fonctions Primitives*, Chelsea, New York, 1973.

(5) H. Lebesgue: *Leçons sur les Series Trigonometriques*, Blanchard, París, 1969.

(6) I. N. PESIN: *Classical and Modern Integration Theories*, Academic Press, New York, 1971.

(7) B. RIEMANN: *Oeuvres Mathematiques*, Blanchard, París, 1968.

(8) D. VAN DALEN, A. F. MONNA: *Sets and Integration: an Outline of the Development*, Noordhoff, Groninga, 1972.