

Un paseo por el Infinito

Fernando Bombal

Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 28004, Madrid.
Facultad de Matemáticas. Universidad Complutense, 28040 Madrid.

1.- Introducción



Pocos conceptos han inquietado y fascinado tanto a los pensadores de todas las épocas como el del *infinito*. **Jorge Luis Borges** (1899-1986), uno de los escritores que más y mejor han tratado el tema desde el punto de vista literario, en su obra *Avatares de la tortuga* [Bg, p. 254], escribe:

*Hay un concepto que es el corruptor y el desatinador de los otros. No hablo del Mal, cuyo limitado imperio es la ética; hablo del **Infinito**.*

La sensación de pequeñez y apabullamiento que provoca la idea de infinito en relación con nuestras experiencias personales lo expresa muy claramente Pascal cuando dice:

Cuando considero la limitada extensión de mi vida comparada con la eternidad [...] o la pequeña parte de espacio que puedo tocar o ver, sumergido en la inmensidad infinita de espacios que no conozco [...] siento miedo y asombro al verme aquí en lugar de allí, ahora en vez de entonces. ([Pa], P. 427).



Los griegos parece que fueron los primeros, como en tantas ocasiones, en abordar rigurosamente el problema del infinito y, como veremos, los resultados no fueron muy satisfactorios que digamos. La palabra que utilizaron para designar los distintos aspectos del infinito fue *ἄπειρον* (*ápeiron*), formada por el prefijo negativo α y la raíz *πειρο* (límite), que literalmente significa *ilimitado*, pero también *indefinido*, *totalmente desordenado*, *infinitamente complejo*, etc. En palabras de **Aristóteles** (384-322 a. d. C.), “... *ser infinito es una privación, no una perfección...*” (*Física*, III.7.208a)

Lo cierto es que hay muchos aspectos de la realidad que parecen apuntar hacia la existencia real de infinitos: por ejemplo, el tiempo parece prolongarse hacia atrás y adelante indefinidamente; la percepción del espacio que nos rodea parece indicarnos que

éste es ilimitado; cualquier intervalo, espacial o temporal, parece poder dividirse indefinidamente...

Aristóteles se percató de estos hechos y, como es imposible negar la existencia de procesos que parecen no tener fin, utilizó su sempiterno *sentido común* para separar el concepto de infinito en dos: Y así introdujo la noción de *infinito potencial*, para designar magnitudes o procesos que se pueden prolongar *tanto como se desee*, en oposición al *infinito actual* o real

“No es posible que el infinito exista como un ser en acto o como una sustancia y un principio. El infinito existe [sólo] potencialmente, bien por adición o por división” [Física III]

Es decir, Aristóteles acepta que existen magnitudes que pueden dividirse indefinidamente (como el tiempo o el espacio), o pueden aumentar también indefinidamente, (como los números naturales), pero rechaza la existencia de conjuntos infinitos como un todo. Ni siquiera en Matemáticas acepta la existencia del infinito actual, *“porque los matemáticos no hacen uso de él. Sólo postulan, por ejemplo, de una línea finita que se pueda prolongar tanto como se desee”* [Física, III, 207b]. Y es que Aristóteles era plenamente consciente de los problemas y paradojas a que puede dar lugar la consideración de infinitos de acto. Aunque volveremos de nuevo sobre este tema, bueno será exhibir alguna de las curiosas propiedades de los conjuntos infinitos de *acto*:

La siguiente historia se refiere a un ángel que debe desplazarse a una ciudad celestial diferente del lugar donde usualmente reside para cumplir una misión que le ha encomendado el Arcángel jefe de su legión celestial. El ángel se dirige al Hotel de la ciudad celestial (que tiene el curioso nombre de *Hotel de Hilbert*) y que, como es frecuente en los hoteles del Cielo, tiene la excelente cualidad de contar con infinitas habitaciones. Pero debe ser temporada alta en la ciudad, porque cuando llega el ángel resulta que todas las habitaciones están ocupadas. Sin embargo, el director recurre a un pequeño truco: traslada al ocupante de la habitación número 1 a la dos; después, pasa al ocupante de la 2 a la 3, y así sucesivamente. Cuando termina, queda disponible la habitación número 1 para el ángel y el director no ha echado a ninguno de sus huéspedes. Simplemente, el que ocupaba la habitación número n está ahora en la $n+1$.

Al día siguiente, el ángel recibe un mensaje de su Arcángel jefe que le encarga de encontrar alojamiento para toda la legión (que consta de *infinitos* ángeles). Se dirige de nuevo al director del hotel en busca de ayuda, y éste le dice que no se preocupe. Y procede a instalar al primitivo ocupante de la habitación número 1 en la 2; Después al de la habitación 2 lo pasa a la 4 y, en general, al que ocupaba la habitación número n lo pasa a la habitación $2n$. Como resultado, al final del proceso ¡todas las habitaciones impares están libres! Y así puede encontrar acomodo para los infinitos ángeles de la legión. Con un truco algo más complicado, el director podría dar alojamiento incluso a *infinitas* legiones sin echar a ningún huésped.

Esta anécdota, con distintas variaciones, se suele atribuir al eminente matemático **D. Hilbert** (1862-1943), del que volveremos a hablar más adelante, y muestra claramente la naturaleza paradójica de los conjuntos infinitos de acto (como el *Hotel de Hilbert* de la ciudad celestial) cuya existencia, como vemos por buenas razones, rechazaba Aristóteles.

2.- El infinito físico¹.

2.1 Infinitos temporales y espaciales.

Como hemos dicho, nuestra percepción inmediata nos presenta el tiempo y el espacio en muchos aspectos como infinitos.

Aristóteles, por ejemplo, afirmaba que el mundo había existido siempre, en aparente contradicción con su rechazo a la existencia de infinitos actuales. La razón es que Aristóteles sostenía la teoría, muy extendida en la antigüedad, de los *ciclos cósmicos* o tiempo circular: Al cabo de un gran número de años (el *Gran Año* cósmico), el Sol, la Luna y los cinco planetas conocidos recobrarían una cierta posición original, y a partir de entonces volverían a repetirse los mismos acontecimientos: habría otra guerra de Troya, otra Alejandría e incluso otro Platón. Por tanto, no habría una infinidad de acontecimientos ya que en cada recorrido del ciclo completo o gran año, volverían a repetirse los mismos. De hecho, ni siquiera hace falta hablar de una infinidad de ciclos: el *mismo* ciclo puede repetirse una y otra vez.

La teoría del los ciclos cósmicos reaparece con frecuencia a lo largo de la historia: En la mitología hindú, el mundo es periódicamente destruido y creado a lo largo de ciclos cósmicos muy largos; los antiguos chinos habían calculado un ciclo cósmico de 23.639 años, producido por interacción de los principios de ying y el yang. La misma idea, aunque con ciclos más cortos, reaparece entre los mayas y los aztecas, etc.

La aceptación por parte de la Iglesia Católica de que el Universo fue creado por la divinidad en un momento dado, implica el abandono de la teoría del tiempo circular y la introducción de un tiempo lineal. Al fin y al cabo, la doctrina cristiana se centra en la muerte y resurrección de Jesús, y este debe ser un hecho absolutamente singular, ya que si se repitiese una y otra vez en sucesivos ciclos cósmicos, desaparecería en significado mismo de la Redención².

Pero si hubo una Creación en un momento específico del tiempo, ¿qué había antes?, ¿qué hacía Dios antes de crear el Cielo y la Tierra? Se dice que **San Agustín** (354-430) dio la siguiente respuesta: “*Preparar el Infierno para quienes hacen semejantes preguntas*”. Pero, realmente, la solución dada por San Agustín al problema fue, como era de esperar de un hombre excepcional, tremendamente original: antes de la Creación, simplemente el tiempo *no existía*. El tiempo y el Cosmos aparecieron conjuntamente. La eternidad de Dios *no* es un tipo de tiempo; al contrario, Dios subsiste eternamente *fuera* del tiempo. Hay que hacer notar la semejanza de este argumento con las teorías cosmológicas recientes del *Big Bang*, confirmadas teóricamente por el teorema de **Hawking-Penrose** de 1970 sobre la existencia de una singularidad al comienzo del Universo.

Las profecías sobre el fin de los días señalan que el tiempo en la teología cristiana resulta ser finito. Por el contrario, se introduce un infinito actual claro: Dios o el Absoluto.

En cuanto al espacio, los astrónomos griegos (y Aristóteles con ellos) sostenían que el Universo estaba formado por una serie de esferas en movimiento, con centro en la

¹ En esta Sección se incluye alguno de los contenidos de la sección 3.1 de [Bo].

² **San Agustín** señaló que “*Cristo murió una vez por nuestros pecados; y, alzándose entre los muertos, no murió más.*” Por otro lado, la repetición incesante de los mismos acontecimientos apoyaría la pretensión de los astrólogos de poder predecir el futuro mediante el estudio de la posición de los astros en el firmamento, lo que también le parecía impío a San Agustín. La idea del tiempo cíclico fue sistemáticamente combatida por la Iglesia y así, por ejemplo, cuando en 1277 el obispo de París **Etienne Tempier** recopiló 219 creencias heréticas; la teoría del tiempo cíclico ocupaba el número 6 de la lista.

Tierra, que contenían los distintos objetos que se observaban en el Cielo: la Luna, el Sol, los cinco Planetas y las Estrellas Fijas. Por tanto, nuestro universo es acotado y finito. Respecto a la pregunta obvia de qué hay más allá de la última esfera, Aristóteles mantiene que “*lo que está limitado, no lo está en referencia a algo que lo rodee*” (Física, III.8.208a).

El primer argumento clásico contra la finitud del espacio aparece explícitamente en *De Rerum Natura*, del poeta **Lucrecio** (94-50 a. de C.), y es el siguiente: si el espacio fuera limitado, supongamos que alguien llega hasta el mismo borde y lanza un dardo; entonces, o bien el dardo atraviesa el borde (en cuyo caso no es realmente el borde del espacio) o se para, en cuyo caso se trata efectivamente de una frontera y hay algo *más allá* del borde³. Este argumento es similar al atribuido al pitagórico **Arquitas de Tarento** (430-360 a. de C.) para probar que el Cosmos visible (limitado) existía en un vacío infinito: si alguien se encuentra al borde del universo y extiende un brazo hacia el exterior, lo tenderá al vacío; si ahora se coloca un poco más afuera y lo vuelve a tender, y repite el proceso indefinidamente, resultará que el exterior del universo sería infinito (incidentalmente, para Aristóteles este argumento sólo probaría que *caso de existir* el vacío sería potencialmente infinito). La idea de un vacío infinito fue también mantenida por algunos teólogos medievales, que sostenían que Dios debía disponer de un espacio infinito en donde estar omnipresente.

Durante la Edad Media, el modelo cosmológico griego (esencialmente formalizado por Ptolomeo) fue asumido sin discusión, salvo ligeras modificaciones para adaptarlo a las nuevas observaciones realizadas. La revolución astronómica llevada a cabo por **N. Copérnico** y **J. Kepler**⁴ en los siglos XVI y XVII, acabó con este modelo y planteó de nuevo la posibilidad de un espacio infinito. Tras el precedente de Lucrecio, un inglés, **Thomas Digges**, publicó en 1576 una obra de divulgación sobre la teoría de Copérnico y describió un Universo donde las estrellas eran otros soles, esparcidos por un espacio infinito. **Giordano Bruno** (1548-1600) defendió apasionadamente la idea de un Universo infinito, tanto en el espacio como en el tiempo; en él existirían infinitos mundos, muchos de ellos habitados por otros seres humanos (*Del infinito Universo y Mundos*, 1584). Sus teorías planteaban tremendos problemas teológicos y contradicciones con muchas afirmaciones contenidas en la Biblia: la Creación había tenido lugar en un momento determinado del tiempo y el mundo no había existido eternamente, como afirmaba Bruno. Sólo hubo una Caída y una Redención. ¿Cómo podían participar de estos hechos los habitantes de los otros mundos? ¿Había sido Cristo crucificado en todos los mundos, o existían seres humanos sin pecado original? En 1591, Bruno fue detenido por la Inquisición y, tras nueve años de interrogatorios y torturas, fue quemado en la Plaza romana de Campo di Fiori en 1600.

³ El punto débil de la teoría de Aristóteles es que si el Cosmos es una esfera finita, tiene un borde, y el argumento de Lucrecio se puede aplicar. Ahora sabemos que se pueden concebir modelos cosmológicos finitos y sin borde, como puede ser la superficie de una hiperesfera, lo que haría más defendible la idea de Aristóteles.

⁴ Kepler no solamente formuló las famosas 3 leyes del movimiento planetario (las dos primeras se incluyen en *Nova Astronomia*, en 1609, y la tercera en *Harmonices Mundi* en 1619). También escribió un texto sobre el cálculo del volumen de las barricas de vino (y de paso el de cerca de 90 sólidos de revolución), innumerables horóscopos y hasta una novela de ciencia ficción: *Somnium* (publicada en 1634), en la que describe un viaje a la Luna, que resulta estar habitada. La cara orientada siempre hacia la tierra (Subvolva) está ocupada por un pueblo más o menos civilizado, mientras que el hemisferio opuesto (Privolva) sustenta una civilización nómada.

La rápida difusión y amplia popularidad de las teorías de Copérnico y Kepler, a pesar de la oposición de la Iglesia, se debió en gran parte al trabajo del iniciador de la Revolución Científica que iba a cambiar sustancialmente las ideas sobre la Naturaleza y el Universo: **Galileo Galilei** (1564-1642). Su descubrimiento del telescopio en 1609 y sus observaciones y teorías sobre la Naturaleza se difundieron rápidamente por toda Europa. A ello contribuyeron sin duda sus libros, dirigidos a un público muy amplio y que tuvieron un enorme éxito. Por ejemplo, su famoso *Diálogo sobre los dos máximos Sistema del Mundo* (se refiere al Ptolomeico y al Copernicano), publicado en 1632, estaba escrito en italiano, en lugar de latín, que era la lengua científica por excelencia.

Si bien no contiene pruebas concluyentes del sistema copernicano (y alguna de las teorías que propugna son completamente erróneas, como el capítulo dedicado a las mareas), *El Diálogo* contribuyó decisivamente a demoler la cosmología aristotélica y señaló las pautas a seguir por la nueva Revolución Científica en ciernes.

El éxito de *El Diálogo* fue inmenso en toda Europa... y atrajo la atención de la Inquisición, que prohibió su venta y llamó a juicio a Galileo. En junio de 1633, reafirmando el dictamen de la Inquisición de 1616 sobre la teoría copernicana, un tribunal de 7 cardenales declaró *absurda, falsa en Filosofía y herética la afirmación de que el Sol ocupa el centro del Universo y que la Tierra no está inmóvil en el centro del mundo*. y obligó a Galileo, a retractarse de sus creencias. Tras la abjuración, fue condenado a una especie de arresto domiciliario de por vida, muriendo en su hogar, cerca de Florencia, en 1642. A pesar de su reclusión y amargura, siguió trabajando incansablemente, y en 1638 apareció su *Discorsi e dimostrazioni matematiche in torno a due nove scienze attenanti alla meccanica i movimenty locali*, en el que hace un estudio sistemático y revolucionario sobre el movimiento de los proyectiles, formula la ley de composición de movimientos, la del movimiento uniformemente acelerado y aborda el estudio del péndulo.

La comprobación por parte de los astrónomos de que al aumentar la potencia de sus telescopios se descubrían más y más estrellas, cada vez más lejanas, hizo que fuera arraigando con fuerza la idea de un Universo infinito. El mismo Galileo se inclinaba por esta opción, aunque nunca dio por zanjada la cuestión. La causa de estas dudas, que contrastan con la facilidad con la que muchos de sus contemporáneos aceptaron la idea de un Universo infinito, probablemente se debe a las propiedades paradójicas que él mismo había descubierto del infinito matemático (véase la Sección siguiente.)

Pragmático como era, en una carta que escribió en 1649 a Fortunio Liceti, un Profesor de la Universidad de Padua, manifestó que no podía concebir un universo finito y limitado ni un universo infinito e ilimitado⁵. El hecho de que lo infinito no pudiera ser comprendido por el intelecto finito del hombre, le inducía a inclinarse por la segunda posibilidad: ¡era mejor sentirse desconcertado ante lo incomprensible que verse incapaz de comprender lo finito!

El hombre encargado de desarrollar el programa de Galileo, **Isaac Newton** (1642-1727), creía, como G. Bruno, que el espacio era infinito y estaba ocupado por un Dios omnipresente. Su primer argumento en apoyo de esta idea se encuentra en una carta escrita al clérigo **Richard Bentley** en 1692: Si el universo fuera finito –dice Newton– la gravedad determinaría que toda la materia se concentrara finalmente en un punto. Por el

⁵ Más de un siglo después, el filósofo **I. Kant** (1724-1804) presentó una serie de argumentos contra la existencia tanto de un espacio o tiempo finitos como la de un espacio o tiempo infinitos, a fin de sustentar su teoría de que el tiempo y el espacio no son realidades objetivas, sino que son creaciones de la mente humana.

contrario, en un universo infinito cualquier astro experimentaría fuerzas gravitatorias en todas direcciones.

El argumento de Newton se basa en su concepción de un espacio infinito y estático. Hoy sabemos que esto no es así. Además, el Universo visible tiene una estructura granulosa, no homogénea: las estrellas se distribuyen en galaxias, muy distantes unas de otras. Los efectos gravitacionales del resto de las galaxias son despreciables frente a los que originan las estrellas de la propia galaxia. Y sin embargo, las galaxias permanecen estables a lo largo de muchos millones de años, ya que su rotación impide el colapso que predecía Newton. Claro está que Newton no sabía de la existencia de otras galaxias distintas de nuestra propia Vía Láctea, y las observaciones de los astrónomos contemporáneos suyos parecían mostrar que las estrellas se hallaban uniformemente distribuidas en el espacio, lo que servía de apoyo a su argumento.

Aunque nadie había encontrado un argumento concluyente que probara que el universo es infinito, la mayoría de los científicos de la época se inclinaban por esta idea. Sin embargo, el astrónomo real **Edmond Halley** (1656-1742) (que, por cierto, había financiado la primera edición de los *Principia* de Newton), creyó haber encontrado un argumento *en contra* de la infinitud del Universo: Si lo fuera —argumentaba Halley— contendría infinitas estrellas, y no habría lugar en el cielo al que uno pudiera dirigir la mirada sin que la línea de visión se encontrara con una estrella. Por tanto, ¡el cielo en la noche debería aparecer tan brillante como durante el día! En la actualidad este argumento se conoce como **Paradoja de Olbers**, por el astrónomo alemán **H. Olbers**, que la redescubrió en 1826. El mismo Olbers creyó haber encontrado una explicación: la luz de las estrellas lejanas podría ser absorbida por grandes masas de materia interestelar intermedias. Pero si esto sucediera, con el tiempo esta materia intermedia se calentaría, hasta hacerse tan brillante como las mismas estrellas. Se puede argumentar que, incluso en un universo infinito con infinitas estrellas, éstas podrían estar asimétricamente distribuidas y existir algunos sectores (infinitos) del cielo sin estrellas. Pero esta hipótesis parece poco natural (y contradice las observaciones astronómicas.) La hipótesis del *Big Bang*, ampliamente aceptada en la actualidad, permite explicar fácilmente la paradoja: si se admite que el Universo tuvo su origen en una gran explosión, hace unos 15.000 millones de años, aunque el espacio fuera infinito y con infinitas estrellas sólo podríamos percibir las que estuvieran situadas a menos de 15.000 millones de años luz y, además, la luz emitida por las más lejanas habría sufrido un enorme desplazamiento hacia el rojo (convirtiéndose de hecho en ondas de radio).

En el momento actual, aún no tenemos una respuesta definitiva a la pregunta de si el espacio es finito o infinito. A lo largo del siglo XX han ido apareciendo importantes datos empíricos que parecían inclinar la respuesta en una dirección, para después corregirla en sentido contrario. Si se acepta la Teoría de la Relatividad, la respuesta dependerá de la curvatura del espacio: si ésta es positiva, el Universo se cerrará sobre sí mismo y será finito; si la curvatura es negativa o 0, el Universo será infinito. Por otro lado, la idea de un Universo en el que tiempo y espacio deben ser finitos y sin frontera es defendida por muchos cosmólogos modernos, con **S. Hawking** a la cabeza (*Cfr.* [Ha; pág. 182 y sgs.])

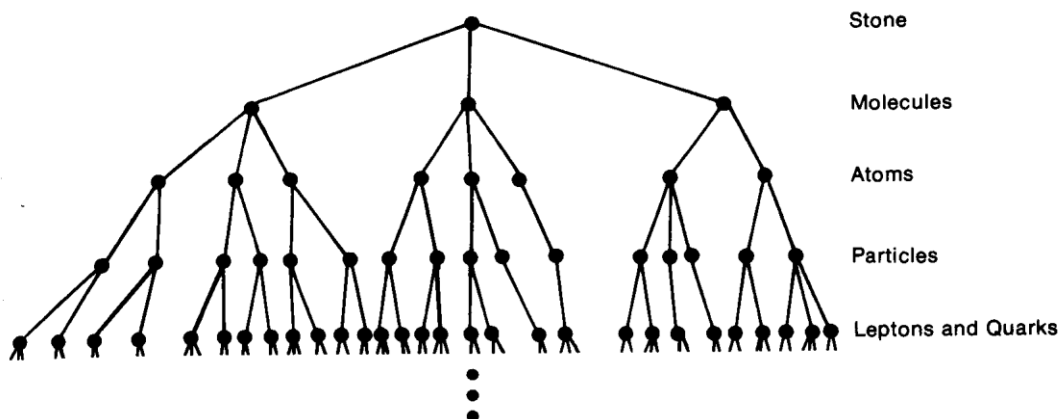
2.2 *Lo infinitamente pequeño.*

En la Sección anterior hemos analizado algunos aspectos de la realidad que pueden interpretarse como infinitos. Nos preguntamos ahora por la existencia de lo infinitamente pequeño en el mundo físico. Es claro que el espacio *matemático* euclídeo consta de infinitos puntos *matemáticos*. Pero cualquier fenómeno observado o percibido se ex-

tiende necesariamente a lo largo de una cierta región del espacio y/o el tiempo. Por lo tanto, cuando nos preguntamos por la existencia de lo infinitamente pequeño en la naturaleza, realmente lo que queremos saber es si el espacio y el tiempo son *infinitamente divisibles*.

Para Aristóteles la respuesta es afirmativa, y lo pone claramente de manifiesto con su definición de continuo: *Lo que puede dividirse en partes que son infinitamente divisibles* (Física, VI. 232b). Notemos, sin embargo, que esto no contradice su rechazo de magnitudes infinitas reales, ya que si bien un cuerpo material o un intervalo de tiempo pueden dividirse indefinidamente, como nadie puede realizar esas infinitas divisiones, no puede decirse que el conjunto de partículas del objeto o de instantes de tiempo sea infinito realmente, sino sólo en sentido *potencial*⁶. Por el contrario, para Hilbert, “*la divisibilidad infinita de un continuo es exclusivamente una operación del pensamiento, una idea que la observación de la naturaleza y la experimentación en la física y la química refutan*” [Hi]

Como sabemos, la mayoría de las teorías sobre la naturaleza de la materia que se han desarrollado a lo largo de la historia, se inclinan hacia la existencia de elementos o partículas básicas e indivisibles que compondrían, por agregación, todo lo existente: primero, los cuatro elementos clásicos de la Antigüedad griega (Aire, Tierra, Fuego y Agua), que al mezclarse en diversas proporciones, originarían todas las demás sustancias. Después, los Alquimistas agregaron al sistema nuevas sustancias “elementales”, como ciertas sales, esencias, etc. Los primeros químicos encontraron una nueva unidad fundamental de cada sustancia: la *molécula*. Posteriormente, se comprobó que las moléculas podían a su vez descomponerse en unidades más simples, llamadas *átomos*, de los que se pensó que existían menos de un centenar diferentes (cantidad que ha ido aumentando paulatinamente).



Cuando se dispuso de energías mayores, se descubrió que el átomo no era una unidad tan simple, sino que podía “romperse” en diversas partículas: electrones, protones, neutrones... A lo largo de los últimos 50 años, utilizando aceleradores cada vez más energéticos, se han ido encontrando más y más “*partículas elementales*” que, actualmente, parecen estar todas ellas constituidas por distintas variedades de *quarks* (cuyo número va creciendo con el uso de mayores energías...) Citando a S. Hawking, “*Podríamos, en verdad, esperar encontrar varios niveles de estructura más básicos que los “quarks” y electrones que ahora consideramos como partículas elementales.*” ([Ha, pág. 215]). La verdad es que el proceso parece repetir el viejo argumento de Aristóteles de la divisibilidad infinita del espacio. Sin embargo, el mismo Hawking señala que

⁶ Ya **Anaxágoras** (500-428 a.d.C.) había escrito: “*No existe lo más pequeño entre lo pequeño ni lo más grande entre lo grande, sino siempre algo todavía más pequeño y algo todavía más grande*”.

“...la gravedad puede poner un límite a esta sucesión de “cajas dentro de cajas”. Si hubiese una partícula con una energía por encima de lo que se conoce como energía de Planck (10^9 GeV), su masa estaría tan concentrada que se amputaría ella misma del resto del universo y formaría un pequeño agujero negro.” [ibidem]

Otros científicos prefieren interpretar la realidad como un continuo espacio temporal, en el que los distintos objetos que percibimos surgen como variaciones o perturbaciones en la geometría del mismo. En esta interpretación, la pregunta sería si el continuo espacio temporal tiene una estructura granular (lo que significaría la existencia de partículas o “*granos*” indivisibles) o más bien tiene una estructura continua, semejante a la del espacio matemático.

En todo caso, en el momento actual, parece que no existe una respuesta definitiva a la cuestión de si la materia es finita o infinitamente divisible. Y quizá,

“ las nociones de “espacio” y “tiempo” son abstracciones que pueden aplicarse al nivel de nuestra experiencia sensible, pero que carecen de sentido más allá de la trigésima cifra decimal⁷. ¿Qué habría entonces allí? Nuestro viejo amigo el “ápeiron” ([Ru, pág. 29]).

Salvo algunos pensadores medievales (entre ellos, San **Isidoro de Sevilla**) que creían que el tiempo está formado por instantes indivisibles, llegando a cuantificar que una hora contenía exactamente 22.560 instantes (*cfr.* [B1, pág. 66]), no parece que haya habido muchos defensores de la idea de un tiempo discreto. En este aspecto, la concepción generalizada, pues, es la misma que la de Aristóteles: El tiempo es un continuo infinitamente divisible⁸.

3.- El infinito en las Matemáticas.

El gran matemático alemán **David Hilbert** (1862-1943), en su famoso ensayo *Sobre el Infinito* (Über das Endliche), publicado en la prestigiosa Revista *Mathematische Annalen* en 1926 y sobre el que más tarde volveremos, dice al comienzo del mismo:



“Como ningún otro problema, el del infinito ha inquietado desde los tiempos más remotos al ánimo de los hombres. Ninguna otra idea ha sido tan estimulante y fructífera para el entendimiento.”

Por ello

“...la elucidación definitiva de la naturaleza del infinito es algo que va mucho más allá del ámbito de los intereses científicos particulares, algo que, en realidad, se ha convertido en una cuestión de honor para el entendimiento humano.”

⁷ La llamada longitud de Planck $d = 10^{-35}$ cm.

⁸ Diversos especialistas en mecánica cuántica han propuesto teorías que implican un espacio y un tiempo discretos, y por tanto con átomos espaciales y temporales. Por ejemplo, **A. Mach** en su texto *Quantum Mechanics of Particles and Wave Fields* (1951) dedica todo un capítulo a la teoría de la longitud fundamental o átomo espacial. Más aún, las limitaciones que impone la mecánica cuántica a la precisión con la que se puede medir un intervalo espacio temporal, parecen ser más estrictas que las postuladas por **W. Heisenberg**, según ha probado el premio Nobel **E. Wigner**.

Ya hemos visto algunos aspectos del problema del infinito en la realidad física. Pero también el problema del infinito tiene una larga historia en las matemáticas (de hecho, para algunos historiadores de la matemática, ésta puede verse como un enriquecimiento progresivo del universo matemático para incluir más y más *infinitos*. (véase, p. ej., [Ru]). En las líneas que siguen, ilustraremos algunos pasos de esta larga y dificultosa historia.

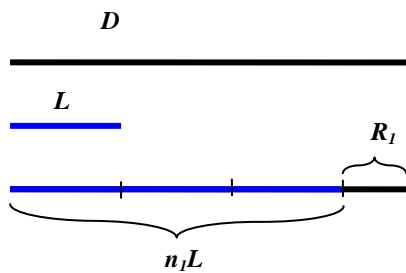
3.1. *El infinito en las matemáticas griegas.*

Junto con la Filosofía, las matemáticas aparecen en Grecia como un instrumento y un *modelo* para aprender métodos de razonamiento que permitieran encontrar respuestas *verdaderas*, depurando todo lo accesorio y cambiante de la realidad aparente. Los filósofos griegos pronto encontraron sorprendentes relaciones numéricas en muchos fenómenos naturales: Por ejemplo, la escuela pitagórica descubrió que los armónicos musicales fundamentales eran producidos por la vibración de cuerdas cuyas longitudes estaban siempre en relaciones fijas y simples. Así, la cuerda de longitud $\frac{1}{2}$ de la que produce el tono fundamental, origina la *octava*; la de longitud $\frac{3}{4}$ produce la *cuarta*; la de longitud $\frac{2}{3}$ da lugar a la *quinta*, etc. Los sonidos producidos por cuerdas de longitudes distintas, eran disonantes, o al menos no tan acordes como los anteriores. Por tanto, los números 1, 2, 3, 4, la *Tretraktys*, originaban con sus proporciones relativas los sonidos más consonantes. Este hecho provocó una búsqueda de nuevas relaciones numéricas con otros fenómenos físicos y las primeras evidencias de que la realidad física podrían ser entendidas a través de las matemáticas.

La Filosofía pitagórica sostenía que la naturaleza del cosmos era esencialmente numérica (recuérdese la afirmación de que *todo es número*), lo que hizo que diera gran importancia al estudio de los números naturales y a desarrollar una parte sustancial de la aritmética. Así pues, en el universo pitagórico no existía el *ápeiron*: los números naturales y sus relaciones eran suficientes para describir la realidad

La asunción de que todo objeto estaba formado por una colección de *átomos* individuales e indivisibles hace que, en particular, dos magnitudes geométricas análogas sean siempre *conmensurables*, es decir, exista una unidad de medida común para ambas. De este modo, las dos magnitudes están en la misma relación que los correspondientes múltiplos de la unidad de medida común. Estos argumentos permitían visualizar fácilmente los razonamientos geométricos, convirtiéndolos en muchos casos en problemas aritméticos. De hecho, las razones de números enteros (es decir, los números *racionales*), eran por tanto suficientes para describir las relaciones entre las distintas magnitudes geométricas. De esta forma, los pitagóricos formularon y desarrollaron una gran cantidad de resultados sobre la geometría del plano.

Los pitagóricos desarrollaron un método para encontrar una medida común a dos magnitudes homogéneas (de hecho, la *mayor* de las medidas comunes). Esencialmente, es el mismo algoritmo que se enseña en la escuela para calcular el *máximo común divisor* (m.c.d.) de dos números enteros $D > L$: se calcula la división entera del mayor por el menor $D = n_1L + R_1$, con $0 \leq R_1 < L$. Si $R_1 > 0$, se procede de forma análoga con L y R_1 : $L = n_2R_1 + R_2$ con $0 \leq R_2 < R_1$, y se continúa el proceso. Como los restos sucesivos forman una cadena estrictamente decreciente de números enteros no negativos, se llegará eventualmente a un $R_k = 0$. Entonces es claro que R_{k-1} divide a la vez a D y a L .



El argumento funciona igual cuando se trata de dos magnitudes geométricas análogas *commensurables* y se admita (lo que parece obvio) que si $D > L > 0$ siempre hay un múltiplo de L que es mayor que D ⁹. Pues bien, al aplicar este algoritmo a algunos casos concretos, los pitagóricos se dieron de bruces, a mediados del siglo V a. d C. con el *ápeiron*:

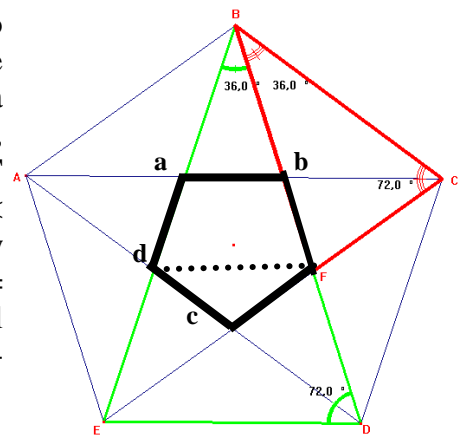
¡Existen segmentos –como el lado y la diagonal del cuadrado, o el lado y la diagonal del pentágono regular– para los que este proceso no termina nunca!¹⁰ Algunos autores afirman que el primer par de segmentos inconmensurables fue el lado y la diagonal del cuadrado, y suelen dar una sencilla demostración basada en las propiedades de divisibilidad de los enteros, de que $\sqrt{2}$ (relación entre la diagonal y el lado) no puede escribirse como una fracción m/n .

Pero, teniendo en cuenta que el pentágono estrellado era el símbolo de los pitagóricos, no resulta improbable que el primer par de segmentos inconmensurables fuera el lado y la diagonal del pentágono regular. En efecto, como el triángulo **BCF** es isósceles, el lado $L = BC = BF$ y, por tanto, la diagonal $S = BF + FD = L + FD$, con $0 < FD < L$. Pero los triángulos **dBf** y **BCF** son iguales, y también lo son los **aBb** y **cFD**, luego $Bb = FD = FC = dF = s =$ diagonal del pentágono pequeño. Por tanto, al realizar el segundo paso del algoritmo de Euclides, obtenemos

$$L = Db = DF + Fb = s + l,$$

siendo **l** el lado del pentágono pequeño. Así pues, en el siguiente paso estaremos como al principio: comparando la diagonal con el lado de un pentágono regular, que sabemos que nunca da resto nulo. Por tanto, el algoritmo de Euclides no terminará nunca en este caso.

Así pues, todos los resultados basados en la hipótesis de *commensurabilidad* de segmentos deben ser puestos en duda. La geometría *no* es aritmética, las relaciones entre magnitudes geométricas (longitudes, áreas o volúmenes) no necesariamente pueden describirse como relaciones entre números naturales y los objetos matemáticos, no eran tan simples como se pensaba. Por tanto, los griegos abandonaron la idea de *cuantificar* las magnitudes geométricas en términos numéricos.



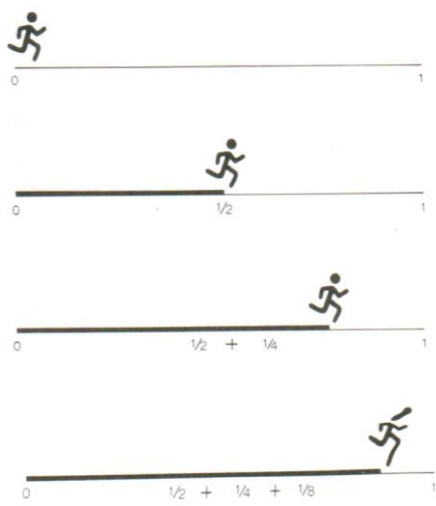
⁹ Los pitagóricos asumieron este hecho como evidente. Sin embargo, esta propiedad se recoge en la Definición 4 del libro V de *Los Elementos* de Euclides, que establece que *dos magnitudes forman razón* (es decir, se pueden comparar) *cuando cada una admite un múltiplo que es mayor que la otra*. Esta aparentemente inocua definición evita de hecho la existencia de infinitésimos en la matemática griega (un área no puede nunca ser un agregado de líneas, etc.) y es la base del *método de exhaustión* utilizado sistemáticamente para el cálculo de áreas y volúmenes. Este principio aparece como la Proposición 1 del libro X de *Los Elementos* y su trascendencia fue reconocida por **Arquímedes** que lo enunció explícitamente como *Axioma de Eudoxo*.

¹⁰ A veces se atribuye el descubrimiento de los inconmensurables al pitagórico **Hipaso de Metaponte**. La leyenda dice que sus compañeros de hermandad, al percatarse de las consecuencias del descubrimiento, llevaron a Hipaso mar adentro y lo arrojaron por la borda para que muriese.

A este cataclismo vino a unirse el producido por los distintos argumentos (*paradojas*) de **Zenón de Elea** (hacia 500 a. de C.) contra la pluralidad y el movimiento. A través de una serie de brillantes experimentos mentales, Zenón muestra la inconsistencia lógica del movimiento, tanto bajo la hipótesis de que el espacio o el tiempo son infinitamente divisibles, como si se supone que existen átomos espaciales o temporales. Recordemos dos de los más conocidos:

I. Paradoja de la dicotomía. Un móvil no puede recorrer una distancia finita d , pues para ello primero deberá recorrer la mitad de esa distancia $d/2$; después la mitad de lo que queda, es decir, $d/4$, etc. Así el móvil tiene que recorrer una infinidad $d/2, d/4, d/8 \dots$ de distancias. Pero esta sucesión no tiene último elemento y por tanto nunca puede ser completada.

II.- Paradoja de Aquiles y la Tortuga. Probablemente es la más conocida: El veloz Aquiles nunca podrá alcanzar a la lenta tortuga en una carrera en la que le ha dado una cierta ventaja, porque primero Aquiles debe llegar a la posición inicial de la tortuga, y ésta ya se habrá movido a una posición posterior. Cuando Aquiles llegue a este segundo punto, la tortuga se habrá movido de nuevo, y así sucesivamente. Por tanto, Aquiles nunca logrará alcanzar a la tortuga.



Es claro que la paradoja de Aquiles se reduce a la de la dicotomía por una traslación del sistema de referencia (colocando el nuevo origen en la tortuga móvil) y una elección adecuada de las velocidades de uno y otra. También es claro que Zenón sabía que en la hipotética carrera, Aquiles alcanzaría a la tortuga o el móvil recorrería la distancia requerida. Lo paradójico para Zenón es la identificación de un proceso *infinito* (las sucesivas posiciones a recorrer) con uno *finito* (la distancia total a recorrer). Como Aristóteles, Zenón

pensaba que ningún proceso infinito puede considerarse como completo.

En su *Física*, Aristóteles rechaza estas paradojas afirmando que Zenón olvida que *se puede recorrer un número infinito de magnitudes* (las que separan a Aquiles de la tortuga, o las sucesivas mitades que debe recorrer el móvil) *o estar en contacto con cada una de ellas, en un tiempo limitado*. Este argumento lógico de Aristóteles se suele identificar en los primeros cursos de cálculo con una solución *analítica* de la paradoja: El móvil alcanzará su destino tras recorrer la *serie infinita convergente*

$$\frac{d}{2} + \frac{d}{4} + \dots + \frac{d}{2^n} + \dots = d. \quad (*)$$

Muchos matemáticos piensan que la teoría de series explica completamente la paradoja de la dicotomía. A este respecto, la opinión del historiador **Ch. Boyer** puede ser representativa cuando dice:

Las cuatro paradojas [se refiere también a las conocidas como Paradoja de la Flecha y Paradoja del Estadio] son, desde luego, fácilmente resueltas apelando al cálculo diferencial. No hay dificultades lógicas en la Dicotomía o la de

Aquiles... en términos de series infinitas convergentes¹¹. La paradoja de La flecha concierne directamente al concepto de derivada y se responde inmediatamente en esos términos... [B1, p. 24-25]

Pero incluso admitiendo estos argumentos, el razonamiento de Zenón se nos muestra aún más misterioso al formularlo en términos del siguiente experimento mental: supongamos una pelota perfectamente esférica y elástica situada a una altura h cmts. de un suelo perfectamente liso que se deja caer. Supongamos que las características del choque elástico son tales que en cada rebote la pelota alcanza $4/9$ de la altura que tenía anteriormente (la cifra se ha elegido por conveniencia en los cálculos). Como el tiempo que tarda en recorrer un espacio dado un cuerpo sometido solamente a la fuerza de gravedad es proporcional a la raíz cuadrada del espacio recorrido, si en el primer bote a pelota tarda t segundos, en el segundo bote tardará $(2/3)t$ hacia arriba y otro tanto hacia abajo, etc., de modo que en $t + 2\left(\frac{2}{3}t + \left(\frac{2}{3}\right)^2 t + \dots\right) = 5t$ segundos la pelota habrá dado

infinitos botes y habrá recorrido $h + 2\left(\frac{4}{9}h + \left(\frac{4}{9}\right)^2 h + \dots\right) = \frac{13}{5}h$ cmts. Más aún, ¿qué

hará la pelota al cabo de $5t$ segundos? ¿Se moverá hacia arriba o hacia abajo? ¿Se detendrá? Por supuesto, una situación como la descrita nunca puede darse en el mundo real, pero los argumentos que se utilizan para modelizar una gran variedad de fenómenos reales son del tipo de los esbozados anteriormente.

En todo caso, como bien señala **M. Jammer** en [Ja], el recurso a la teoría de series, o lo que es lo mismo, a la noción de límite, no resuelve la paradoja. En efecto, *por definición*, (*) significa que cualquiera que sea $\varepsilon > 0$ el móvil, tras recorrer un número *finito* de etapas n_0 , a partir de entonces en cada etapa posterior estará en algún punto del intervalo $(d - \varepsilon, d)$, ¡y no que alcance el punto d !

Las implicaciones de las paradojas de Zenón sobre la naturaleza del tiempo y el espacio son fascinantes y continúan causando polémica en la actualidad, como bien refleja el citado artículo [Ja] y las referencias que en él se encuentran.¹² En todo caso, ponen claramente en evidencia la contradicción entre la experiencia sensible y los modelos lógicos creados por nuestra mente¹³.

Lo cierto que la introducción de procesos infinitos puede llevar a contradicciones lógicas nada deseables. Por ello los matemáticos griegos desarrollaron un verdadero "horror al infinito" que les llevó a prohibir sistemáticamente del uso de los procesos y algoritmos infinito. Puede decirse que la afirmación de Aristóteles citada en la introducción de que los matemáticos griegos sólo usaban el infinito potencial es esencialmente cierta. Cualquier demostración debe obtenerse tras un número *finito* de etapas. La famosa Proposición 20 del libro IX de *Los Elementos* en la que se demuestra la infinitud de

¹¹ En el mismo sentido se pronuncia **A. N. Whitehead** cuando declara que "Zenón utiliza un argumento inválido, debido a su ignorancia de la teoría de series numéricas infinitas convergentes..."

¹² **Bertrand Russell**, en un ensayo escrito en la década de 1920, las calificó de "inmensamente sutiles y profundas" y opinó que su origen estaba en la "más o menos inconsciente operación de la idea de contar". Para resolver la dificultad, apeló a la teoría cantoriana de conjuntos, señalando que "una serie sin final puede, no obstante, formar un todo y puede haber nuevos términos más allá de ese todo". Parece claro que Russell estaba pensando en el ordinal $\omega + 1$, sucesor del primer ordinal infinito (sin predecesor) ω .

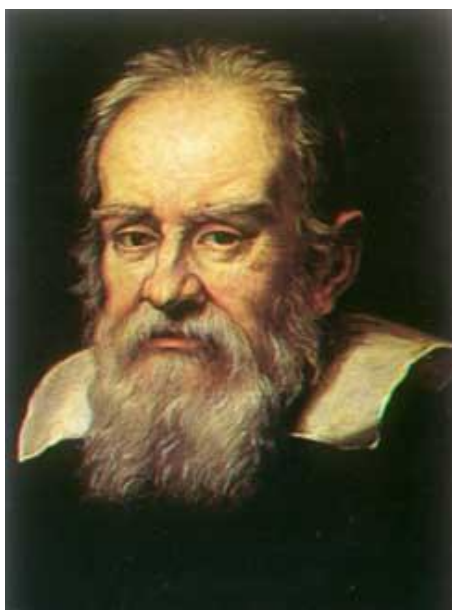
¹³ En palabras de **M. Jammer** en el artículo ya citado [Ja], "En su versión moderna, las paradojas de Zenón muestran el conflicto entre el pensamiento matemático y la física moderna, [...] pues se refieren al hecho de que la física moderna rechaza el significado de las mismas matemáticas en las que se funda."

los números primos es un ejemplo paradigmático: el enunciado dice que *hay más números primos que cualquier colección (finita) de primos que consideremos* y no que hay infinitos primos. Ya hemos visto también que en la definición 3 del libro V se prohíbe de hecho la existencia de magnitudes infinitamente pequeñas o infinitamente grandes.

3.2. Especulaciones medievales y renacentistas.

Las discusiones sobre la naturaleza del infinito en la Edad Media tuvieron un carácter esencialmente filosófico. La asimilación por parte de la Iglesia Católica de las ideas aristotélicas se contraponen con la afirmación cristiana de la existencia real de un infinito absoluto: Dios. En general, se adoptaron las ideas aristotélicas sobre el infinito potencial y actual y la naturaleza paradójica de los conjuntos infinitos se utilizó esencialmente en apoyo de determinadas afirmaciones escolásticas sobre la naturaleza del mundo. Así en el siglo XIII se utilizó el siguiente argumento para “probar” la imposibilidad de un mundo eterno: si fuera así, a lo largo de un pasado infinito habría habido 12 veces más revoluciones de la luna en torno a la tierra que del sol. ¡Pero, al mismo tiempo, habría tantas revoluciones de la luna en torno a la tierra que del sol, puesto que ambas serían infinitas!¹⁴

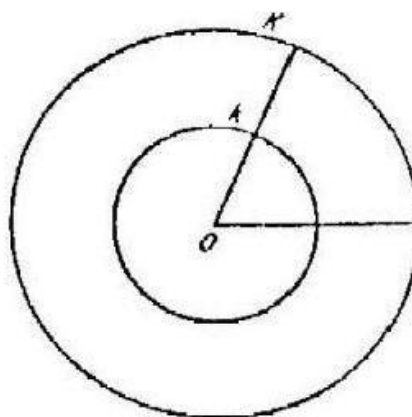
La naturaleza paradójica de los conjuntos infinitos actuales y su imposibilidad de tratamiento matemático fue claramente puesta de manifiesto por **Galileo**. En su obra póstuma *Discorsi e dimostrazioni matematiche in torno a due nova scienze* (1638) uno de sus personajes hace notar que se pueden emparejar biunívocamente los números naturales con sus cuadrados¹⁵, por lo que



Galileo Galilei

En un conjunto infinito, si uno pudiera concebir tal cosa, nos veríamos forzados a admitir que hay tantos cuadrados como números.

En otro lugar, Galileo constata que si se consideran dos circunferencias concéntricas y se trazan radios desde el centro



¹⁴ Los escolásticos suponían que todos los (conjuntos)

¹⁵ Notemos que ésta es semejante a la correspondencia las habitaciones impares en el hotel inicialmente llenas, en lugar de su cuadrado..

común, haciendo corresponder a cada punto **A** de la circunferencia pequeña el *único* punto de la circunferencia grande el que el radio que pasa por **A** la corta, se establece una correspondencia biunívoca entre los puntos de la circunferencia grande y los de la circunferencia pequeña y por tanto, ambos conjuntos (infinitos) de puntos, tienen el mismo número de elementos.

La conclusión que obtiene Galileo de estos hechos es que

“Esta es una de las dificultades que surgen cuando intentamos, con nuestra mente finita, discutir el infinito, asignándole las mismas propiedades que damos a lo finito y limitado. Creo que esto es un error, pues no se puede decir de [dos] cantidades infinitas que una sea mayor, menor o igual que otra...”

En una carta escrita en 1692, **I. Newton** (1642-1727) coincide con Galileo al decir que “Los infinitos, cuando se consideran sin ninguna limitación o restricción, no son ni iguales, ni distintos, ni guardan ninguna proporción uno respecto de otro”.

G. Leibniz, (1646-1716), el co-descubridor del Cálculo, conocedor de los ejemplos de Galileo, dijo en una ocasión que “*Nada es más palpable que lo absurdo de la idea de un número infinito*”, aunque parece contradecirse cuando en otro lugar escribe “*Estoy tan a favor de la realidad del infinito que, en lugar de admitir que la Naturaleza lo abomina, como se dice vulgarmente, creo que la afecta por todas partes, para exhibir mejor las perfecciones de su Autor.*”

En general, la actitud de los matemáticos ante el problema del infinito actual durante los 200 años siguientes fue similar a la de Galileo: ignorarlo y seguir adelante, cuando no rechazar completamente su existencia.

Mejor suerte tuvo la consideración de elementos infinitamente pequeños en matemáticas. Primero, a través de la consideración de *indivisibles* geométricos, esto es, la interpretación de las áreas planas como una infinidad de líneas, o los volúmenes como formados por una infinidad de secciones planas, de modo que recombinándolos adecuadamente se pudiera *calcular* el área o el volumen considerado. Por supuesto que estas consideraciones eran claramente inconsistentes y daban origen a paradojas y contradicciones, pero en manos de personas como **J. Kepler** (1571-1630) o **B. Cavalieri** (1598-1647) se convirtieron en métodos efectivos de cálculo de muchas áreas y volúmenes. Y, lo que es más importante, su *aritmización*, es decir, la interpretación cuantitativa de esos indivisibles mediante la asignación de reglas de cálculo efectiva con ellos, dio origen a la noción de *infinitésimo*, base del desarrollo espectacular del *Cálculo Diferencial* por genios como **Newton** o **Leibniz**, que constituyó la herramienta esencial para la matematización de la naturaleza y la gran Revolución Científica comenzada en el siglo XVII. De nuevo la noción de infinitésimo era lógicamente inconsistente y fue ampliamente criticada, pero *funcionaba* y su éxito fue espectacular. No obstante, la acumulación de paradojas y contradicciones por el uso indiscriminado de los métodos infinitesimales fue aumentando la inseguridad de los matemáticos en la utilización de los *aborrrecibles pequeños ceros*, como los llama el historiador C. Boyer, y condujo a la refundación crítica del Cálculo en términos de la noción de *límite*. Pero un análisis más detallado de esta situación alargaría demasiado esta exposición, por lo que remitimos al lector interesado a [B1] o [Bo] y a las referencias que allí se citan, para volver a centrarnos en la evolución y desarrollo de los métodos para tratar el infinito actual en matemáticas.

3.3 El Infinito Actual en Matemáticas.

Como ya hemos dicho, la actitud predominante de los matemáticos posteriores a Galileo respecto al problema del infinito fue un tanto hipócrita, pues la mayoría lo ignora-

ron, cuando no rechazaron enfáticamente su existencia, aunque utilizaron implícitamente sus propiedades en muchos razonamientos.

Así, por ejemplo, el gran **C. F. Gauss** (1777-1855) escribe en una carta a uno de sus correspondientes en 1831: “*En lo que concierne a su demostración [...] protesto contra el uso que se hace de una cantidad infinita como una entidad real; esto nunca se permite en matemáticas. El infinito es sólo una manera de hablar...*”

En el mismo sentido se manifestó **Cauchy** quien, en su *Cours d'Analyse*, describe el infinito como “*una cantidad variable, cuyo valor se incrementa sin límite y puede sobrepasar cualquier cantidad dada*”, es decir, el viejo *infinito potencial* de Aristóteles. Posturas similares eran las defendidas por la mayoría de los matemáticos contemporáneos.

Más radical se mostró **L. Kronecker** (1822-1891), para quien sólo los objetos matemáticos que podían construirse con un número finito de etapas a partir de los naturales, tenían sentido (es, pues, el primer representante de la corriente *intuicionista* o *constructivista* en Matemáticas). Al parecer, cuando **Lindemann** probó la trascendencia de π en 1882, Kronecker le dijo: “*¿De qué sirve su bello trabajo sobre π ? ¿Por qué estudiar estos problemas, si los números irracionales no existen?*”

Las propiedades paradójicas de las magnitudes infinitas, explicitadas por Galileo, pero conocidas con seguridad mucho antes, se basan esencialmente en las dos afirmaciones siguientes:

I.- Dos colecciones son del mismo tamaño si y sólo si sus elementos se pueden emparejar entre sí por medio de una correspondencia biunívoca.

II.- Una colección tiene un tamaño mayor que cualquiera de sus partes propias.

La primera afirmación parece indiscutible y es la base del proceso mismo de contar. En cuanto a la segunda, es también un principio firmemente establecido; de hecho, figura como uno de los axiomas de *Los Elementos* de Euclides, concretamente como la “*noción común*” nº 5, en la forma *El todo es mayor que la parte*. Recordemos que estas *nociones comunes* corresponden a axiomas generales o “*verdades evidentes*” no específicas de la Geometría. Es difícil rechazar cualquiera de las dos afirmaciones, y de ahí la dificultad de aceptar la existencia *real* de infinitos.

El matemático y teólogo checo **B. Bolzano** (1781-1848) fue el primero en aceptar explícitamente la existencia de infinitos actuales y realizar los primeros intentos para su estudio y manejo. Tres años después de su muerte, en 1851, apareció su obra *Paradoxien des Unendlichen* (Paradojas del infinito [Bol]), en la que expone sus reflexiones sobre el infinito, tanto desde los aspectos matemáticos como desde el punto de vista filosófico y físico.

Para empezar, Bolzano introduce por primera vez un punto de vista conjuntista en las Matemáticas, describiendo en las primeras secciones de su obra las nociones de

agregado, que define como “*un todo cuyas partes se encuentran bien definidas (ein aus gewissen Teilen bestehendes Ganze)*”, *conjunto*, que es “*un agregado que depende de un concepto respecto al cual el orden de sus elementos es indiferente*” y *multitud* o *multiplicidad* (de A), que es “*un conjunto cuyos elementos pueden ser considerados como objetos de un cierto tipo A*” ([Bol: §4]). Tras una poco clara construcción de los



números naturales (partiendo de un elemento abstracto y construyendo lo que llama una *serie* a través de una noción algo confusa de *sucesor* y *predecesor* de cada término de la serie. Cada uno de esos términos es lo que Bolzano llama multitud finita o *número* [Bol: §8]). Y es entonces cuando Bolzano *define* un conjunto infinito:

Llamaré infinita a una multitud si todo conjunto finito es tan sólo una parte de ella.

E, inmediatamente, pasa a mostrar que existe al menos un conjunto infinito: “El conjunto de todas las proposiciones y verdades en sí”. Su demostración se basa en construir, a partir de una verdad cualquiera A , la verdad “ A es verdadera” (distinta, obviamente, de A) y proseguir con el proceso. De esta manera se construye una *serie* “análoga a la de los números”. Bolzano hace hincapié en que esas proposiciones existen por sí mismas, independientemente de que las construyamos o no, y que posee una multiplicidad que supera cualquier número. Es claro que Bolzano utiliza implícitamente la existencia de un conjunto infinito previo: el de los números naturales (que, por otro lado, aparece como el ejemplo más claro de conjunto infinito). Seguramente Bolzano quería evitar este círculo vicioso, aunque hoy sabemos que los desarrollos de la Teoría de Conjuntos habituales incluyen la existencia de al menos un conjunto infinito como axioma. En cualquier caso, Bolzano defiende la existencia *real* de multitudes infinitas “*no sólo entre las cosas que no poseen realidad, sino igualmente entre las que sí la tienen*” ([Bol: § 25]).

Bolzano afirma que no todas las multitudes infinitas son iguales, y pasa a intentar establecer criterios de comparación entre estas multitudes. Y así vuelve a encontrarse con el dilema de Galileo. Como le sigue pareciendo evidente la afirmación II, Bolzano pasa a analizar la afirmación I y prueba que la afirmación es cierta para conjuntos finitos ([Bol: § 22]), mientras que todo conjunto infinito es biyectivo con una parte propia (§20). Esta es quizá una de las mayores aportaciones de Bolzano, aunque su “prueba” consiste en exponer dos ejemplos: a) el intervalo $(0,12)$ es biyectivo con su parte propia $(0,5)$ por medio de la aplicación $y = \frac{5}{12}x$. B) En general, si $a < b < c$ son tres puntos sobre la recta, (a,c) y (a,b) pueden ponerse en biyección, aunque, *evidentemente* (a,c) es mayor que (a,b) .

Por tanto, concluye Bolzano, la existencia de una biyección es solamente una condición *necesaria* para la igualdad de tamaños de conjuntos infinitos: hace falta, además, que ambos conjuntos posean un idéntico *modo de especificación* (*Bestimmungsgrund*) (?).¹⁶ A lo largo de toda la obra, Bolzano oscila sin cesar alrededor de la idea de biyección como criterio de igualdad de tamaño de conjuntos, para terminar rechazándola en diversas ocasiones, de forma explícita. ¡No es fácil rechazar la afirmación II!

Y esto es precisamente lo que hay que hacer para solventar la paradoja de Galileo. Pero hubo que esperar hasta unos años más tarde para que **R. Dedekind** (1831-1916) y **G. Cantor** (1845-1918) se atrevieran a abandonar esta segunda afirmación y aceptar, junto con la existencia *real* de conjuntos infinitos, el hecho de que estos conjuntos pueden tener el mismo tamaño que alguno de sus subconjuntos propios.

Tanto Dedekind como Cantor llegaron a interesarse por los conjuntos infinitos al tratar de definir rigurosamente la noción de *número real*.

¹⁶ En una obra anterior (*Wissenschaftslehre*, 1837), Bolzano había propugnado como criterio de igualdad entre dos multitudes la existencia de una biyección, pero la dificultad en establecer tales biyecciones en casos concretos, junto con la paradoja de la existencia de conjuntos biyectivos con una parte propia le hizo abandonar el criterio.



Richard Dedekind



Georg Cantor

En 1872 aparecen sendos trabajos donde se construyen los números reales a través de *sucesiones de Cauchy* de números racionales (Cantor) o por medio de *cortaduras* de números racionales (Dedekind), es decir, una partición de los racionales (\mathbf{I}, \mathbf{S}) en dos de subconjuntos *infinitos*, de modo que todo elemento de \mathbf{I} es menor o igual que cualquier elemento de \mathbf{S} . Lo destacable de ambas construcciones es que en ellas aparece el número real en términos de conjuntos *infinitos* de números racionales. Y tanto Cantor como Dedekind recurren al infinito actual o real como base de sus construcciones.

El interés de Cantor derivó claramente al estudio del infinito y el continuo, y a él se debe gran parte del desarrollo de la teoría de números transfinitos, una de las creaciones más bellas de las matemáticas.¹⁷ El primero de los trabajos de Cantor sobre este tema apareció en la prestigiosa revista *Journal de Crelle* en 1874 y en él Cantor considera algunos conjuntos infinitos de números. Prueba que no existe una biyección entre el conjunto de los números naturales y el de los todos los números reales y que el conjunto de los números algebraicos (es decir, los que son raíces de algún polinomio con coeficientes enteros) se puede poner en correspondencia biyectiva con el de los números naturales es decir, es *numerable*). De estos dos hechos, deduce un teorema de Liouville sobre la existencia de infinitos números trascendentes (es decir, no algebraicos).

En el artículo siguiente, Cantor establece ya como idea central de su teoría la noción de *conjunto*¹⁸ y acepta explícitamente la afirmación I para establecer la equivalencia de conjuntos: dos conjuntos equivalentes (es decir, entre los que existe una biyección) tienen la misma *potencia* (posteriormente se usó el término *cardinal*). En los trabajos posteriores, Cantor va descubriendo nuevas propiedades de los conjuntos infinitos: Prueba

¹⁷ En el ya varias veces citado ensayo *Über das Unendliche*, **Hilbert** dice que la teoría de los números transfinitos de Cantor constituye “no sólo la flor más admirable que el espíritu matemático ha producido, sino igualmente uno de los logros más elevados de la actividad intelectual humana en general.” Y más adelante, comentando las discusiones y controversias que esta teoría ha originado, manifiesta rotundamente: *Nadie podrá expulsarnos del paraíso que Cantor creó para nosotros.*

¹⁸ **Cantor** define un conjunto como “una colección de objetos bien definidos que la mente puede concebir como un todo y decidir si un objeto dado pertenece o no a ella”.

que los naturales son el conjunto infinito con menor potencia¹⁹ (que designó por \aleph_0) y que la potencia de \mathbb{R} (*potencia del continuo: c*) y la de \mathbb{R}^n es la misma para cualquier entero positivo n . Este último resultado le pareció tan sorprendente a Cantor que, cuando se lo comunicó a su amigo Dedekind en una carta escrita en 1877, escribió: “¡lo veo, pero no lo creo!”.

A lo largo de toda su obra, Cantor mantuvo un estrecho contacto epistolar con su amigo Dedekind, quien realizó también importantes aportaciones. Entre ellas, cabe citar la famosa monografía *Was Sind und Was Sollen die Zahlen* (traducida al inglés como *Essays on the Theory of Numbers* en 1901 y reimpresa por Dover en 1963), que sirvió para difundir entre la comunidad matemática los resultados fundamentales de la teoría de números transfinitos. En la Proposición 66 de esta monografía, Dedekind da un ejemplo de un conjunto infinito real: la totalidad S de todas sus ideas y pensamientos. En efecto, la función que asigna a cada elemento t de S la idea t' de que t es un objeto de S es una aplicación inyectiva de S en un subconjunto propio suyo, que es precisamente la definición de *conjunto infinito* adoptada por Dedekind. Como vemos, su argumento recuerdo a la construcción de Bolzano del conjunto de todas las verdades. Por el contrario, Cantor no hizo ningún intento para demostrar la existencia de conjuntos infinitos, pero estaba firmemente convencido de su existencia. En algún momento, escribió:

El miedo al infinito es una forma de miopía que destruye la posibilidad de ver el infinito actual, a pesar de que éste, en su aspecto más elevado, nos ha creado y nos sustenta, y en sus formas secundarias transfinitas se nos aparece constantemente alrededor e incluso habita en nuestras mentes.

Siguiendo con su programa de construir una teoría de números infinitos, Cantor define que un conjunto A tiene menor potencia (o número cardinal) que otro B (y escribiremos $\#(A) < \#(B)$) si A es equivalente a un subconjunto de B , pero no es biyectivo con B ²⁰. En 1891, Cantor descubrió su famosa prueba diagonal de que la potencia de cualquier conjunto es estrictamente menor que la del conjunto de sus partes: $\#(A) < \#(\mathcal{P}(A))$.

Como puede probarse fácilmente que $\#(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = c$, se deduce el resultado ya probado en el artículo de 1874 de que $\aleph_0 < c$. Partiendo entonces de $A = \mathbb{N}$ e iterando la operación $\mathcal{P}(A)$, Cantor construye entonces una jerarquía de números transfinitos todos diferentes. Cantor establece también una aritmética transfinita y diversas propiedades de estos números. Por ejemplo, intenta demostrar que los cardinales e dos conjuntos cualesquiera, A y B , son comparables, es decir, $\#(A) = \#(B)$, o bien $\#(A) < \#(B)$, o bien $\#(A) > \#(B)$ (Teorema de tricotomía), y lo consigue admitiendo que puede definirse un buen orden²¹ en cada uno de los conjuntos. Cantor denominó esta hipótesis “ley del pensamiento” cuando la enunció en 1883. Incluso dio una *demostración* de la misma mediante un sis-

¹⁹ **Cantor** no parece dar una definición precisa de conjunto *finito*, sino tomando el sentido intuitivo de aquel cuyos elementos pueden *contarse*: o, más precisamente, si puede ponerse en correspondencia biyectiva con el conjunto de números naturales ,menores que uno dado. Un conjunto *infinito* es, simplemente, el que no es finito. **Dedekind** procedió a la inversa, para evitar hacer referencia a la existencia del conjunto de los números naturales, y definió (1888) un conjunto infinito como aquel que puede ponerse en correspondencia biyectiva con una parte propia del mismo (propiedad que, según sabemos, Bolzano enunció como característica de los conjuntos infinitos). Todo conjunto finito en el primer sentido, lo es en sentido de Dedekind; pero la prueba de la implicación recíproca exige el uso esencial del *Axioma de Elección*.

²⁰ No es difícil probar que si $\#(A) \leq \#(B)$ y $\#(B) \leq \#(A)$, entonces $\#(A) = \#(B)$ (Teorema de *Cantor-Bernstein*).

²¹ Es decir, tal que todo subconjunto no vacío del conjunto ordenado, posee un primer elemento.

tema de elecciones arbitrarias sucesivas de elementos de ciertos subconjuntos no vacíos (v. [Fe; p. 159], es decir, un forma de lo que después Zermelo llamaría el *Axioma de Elección*. Utilizando esta hipótesis Cantor pudo probar que el orden definido entre los cardinales es incluso un *buen orden*. **E. Zermelo** (1871-1953) intentó demostrar la intuitivamente cierta suposición de Cantor de que en todo conjunto podía definirse una buena ordenación, pero para ello tuvo que introducir un nuevo axioma (implícitamente utilizado hasta entonces en muchas ocasiones): el *Axioma de Elección*, que establece que dada una colección no vacía de conjuntos no vacíos y disjuntos, existe un conjunto que contiene exactamente un elemento de cada conjunto de la colección²². Este axioma es *equivalente* tanto a la existencia de una buena ordenación sobre cualquier conjunto como al hecho de que dos cardinales cualesquiera sean comparables. Una vez puesto en evidencia, fueron apareciendo más y más resultados que dependían (lo incluso eran equivalentes) a este axioma, por lo que cuando Zermelo publicó la primera axiomática de la Teoría de Conjuntos en 1908, resultó natural que lo incluyera entre sus axiomas.

Como consecuencia de la buena ordenación de los números transfinitos y del hecho de que $\aleph_0 < c$, cabe plantearse si c es \aleph_1 , el siguiente número cardinal a \aleph_0 , o no (en otras palabras, si todo subconjunto infinito de números reales es o bien numerable o tiene la potencia del continuo). La hipótesis $\aleph_1 = c$ es lo que se conoce como *hipótesis del continuo*²³, a cuya respuesta dedicó Cantor muchos e infructuosos esfuerzos, y que aparece en primer lugar en la famosa lista de problemas enunciada por Hilbert en el Congreso Internacional de Matemáticos de París en 1900²⁴.

Hay que decir que, a lo largo de sus investigaciones sobre los números transfinitos, Cantor desarrolló una parte sustancial de la topología de \mathbb{R}^n . Nociones tales como *conjunto perfecto*, *conjunto conexo*, *continuo*, fueron introducidas y estudiadas por él. En particular, el famoso *conjunto de Cantor*, que se puede definir como el conjunto

$$\left\{ x = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \frac{c_3}{3^3} + \dots : c_i \in 0, 2, \text{ para todo } i \right\},$$

fue introducido como ejemplo de un conjunto perfecto y diseminado. Es indudable que muchas de las incursiones de Cantor en la topología estaban motivadas por sus estudios sobre la hipótesis del continuo. Por ejemplo, Cantor prueba que *un conjunto perfecto es no contable* y que *si un subconjunto de \mathbb{R} es no contable, puede ponerse como unión de un subconjunto contable y otro perfecto*.

²² De manera equivalente, el axioma de elección establece que si (A_i) es una familia no vacía de conjuntos no vacíos, el producto cartesiano $\prod A_i \neq \emptyset$.

²³ La *hipótesis del continuo generalizada* es la afirmación de que $\#(\mathcal{P}(A))$ es el cardinal siguiente a $\#(A)$, para todo conjunto A .

²⁴ En 1938, **K. Gödel** construyó un modelo de la teoría de conjuntos con la axiomática usual de Zermelo-Fraenkel (ZF) en el que la Hipótesis del Continuo (HC) es cierta. Por tanto, si la axiomática ZF es consistente, también lo es cuando se le añade la HC (es decir, no se puede demostrar la *negación* de la HC en la axiomática ZF). En 1962, **P. Cohen** dio otra vuelta de tuerca al problema, demostrando que la HC es *independiente* de los demás axiomas de la axiomática ZF y, por tanto, la HC no es un *teorema* de dicha axiomática.

3.4 Las paradojas de la Teoría de Conjuntos.

La teoría cantoriana de los números transfinitos tiene su base, como hemos visto, en la Teoría de Conjuntos. Pero la noción misma de conjunto no es tan simple como parece. Ya en 1895, Cantor había encontrado una dificultad importante en el desarrollo de su teoría. En efecto, si aplicamos su relación $\#(A) < \#(\mathcal{P}(A))$ al conjunto \mathbf{V} de *todos* los conjuntos, como $\mathcal{P}(\mathbf{V})$ es también un subconjunto de \mathbf{V} , tendríamos $\#(\mathbf{V}) \leq \#(\mathcal{P}(\mathbf{V}))$, lo que nos lleva a una contradicción. Por la misma fecha, Cantor encontró también otra paradoja en su teoría de números ordinales: Puesto que, como él mismo había probado, cualquier conjunto de ordinales está bien ordenado (y, por tanto, tiene un número ordinal), si consideramos el conjunto de *todos* los ordinales, éste tendrá un ordinal estrictamente *mayor* que cualquier otro, en particular, ¡estrictamente mayor que sí mismo!. Aunque Cantor comentó con Dedekind y Hilbert estos resultados, no dio difusión a los mismos que fueron redescubiertos en 1897 por **C. Burali-Forti** (1861-1931), nombre como se conoce actualmente esta *paradoja*.

Consciente de estas dificultades, Cantor escribía a Dedekind en 1899:

Una colección puede ser de tal naturaleza que la asunción de la “unificación” de todos sus elementos en un todo, conduce a contradicción, y por tanto es imposible concebir tal colección como una unidad [...] A esas colecciones yo las llamo absolutamente infinitas o colecciones inconsistentes.

La colección de todos los conjuntos, la de todos los cardinales o la de todos los ordinales son ejemplos de *colecciones inconsistentes*. Poco más tarde, **B. Russell** (1872-1970) descubrió que la colección de los conjuntos que no son miembros de sí mismos es también inconsistente²⁵.

La búsqueda de soluciones para evitar estas inconsistencias y expulsar las colecciones inconsistentes de la “legalidad” matemática motivó una gran cantidad de investigaciones a comienzos del siglo XX. Uno de los primeros intentos fue la llamada *teoría de tipos*, propuesta por B. Russell y A. Whitehead en su monumental obra *Principia Mathematica*, que trata de eliminar los *bucles extraños* en la teoría de conjuntos y la lógica por medio de una jerarquización exhaustiva del tipo de proposiciones que se puede utilizar en cada proceso. Desde luego, su aplicación para el desarrollo de las matemáticas usuales provocaría enormes dificultades. Y siempre quedaría la pregunta fundamental: ¿es *consistente* el sistema desarrollado en los *Principia*? (es decir, a salvo de contradicciones).

El otro intento de resolver las antinomias fue tratar de restringir la noción de conjunto y establecer cuidadosamente sus reglas de uso, es decir, *axiomatizar* la teoría. El primero en abordar seriamente el problema fue **E. Zermelo**, de quien ya hemos hablado. En 1908 publicó su sistema axiomático (que incluía el *Axioma de Elección*), desarrollado y mejorado posteriormente por **A. Fraenkel** (1891-1965), dado origen a lo que se conoce como *Axiomática de Zermelo-Fraenkel* o *ZF*, que es la que se utiliza habi-

²⁵ La construcción de Russell apunta contra la noción misma de conjunto: una entidad de la que se sabe en todo momento si un objeto pertenece o no a ella. El llamado *axioma de comprensión*, introducido por Cantor, establece que cualquier predicado $P(x)$ con una variable libre x determina un conjunto, cuyos elementos son precisamente los objetos que satisfacen $P(x)$. Pues bien, Russell consideró como $P(x)$ el predicado “ x es un conjunto que no es un elemento de x ”. Sea \mathbf{U} es el conjunto determinado por $P(x)$. Hay muchos elementos en \mathbf{U} , por ejemplo el conjunto de todos los ríos de España; también hay conjuntos que no pertenecen a \mathbf{U} , como por ejemplo el conjunto de todos los objetos que no son peces. ¡Pero el conjunto \mathbf{U} tiene la contradictoria propiedad de que pertenece a \mathbf{U} si y sólo si **no** pertenece a \mathbf{U} !

tualmente. En la axiomática ZF y en todas sus variantes, hay un *axioma del infinito* que asume explícitamente la existencia de un conjunto infinito (tipo Dedekind). Este axioma es independiente del resto de los axiomas: pueden construirse modelos del resto de los axiomas con infinitos elementos, pero en los que ninguno de sus miembros es infinito. Mencionemos, sin embargo, que existen variantes de axiomáticas de la teoría de conjuntos sin axioma del infinito, en las que la mayoría de la teoría elemental de números y combinatoria puede desarrollarse, pero, obviamente, no la mayor parte del resto de la matemática (es decir, la mayoría de la matemática actual). Esta es la razón por la que los llamados *formalistas*, como Hilbert o Robinson, que no creen en la existencia real de conjuntos infinitos, aceptan el axioma del infinito como una convención útil para obtener resultados.

BIBLIOGRAFÍA

- [Ar] Aristóteles, *Física*. Biblioteca Clásica Gredos N° 203, Madrid, 1995
- [Bo] F. Bombal, *Paradojas y Rigor: la historia interminable*. Discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid. Madrid, 2006.
- [Bol] B. Bolzano, *Las paradojas del Infinito*, Mathema, UNAM, México, 1991.
- [Bg] J. L. Borges, *Obras completas I*. RBA-Instituto Cervantes, 2005.
- [B1] C. Boyer, *The History of the Calculus and its conceptual development*. Dover
- [Du] A. J. Durán, *Pasiones, piojos, dioses... y matemáticas*. Ediciones Destino, Barcelona, 2009.
- [Fe] S. Feferman, *Infinity in Mathematics: Is Cantor Necessary?*, en «L'infinito nella scienza. Infinity in Science», 151-209. Istituto della Enciclopedia Italiana, 1987.
- [Ha] S. W. Hawking, *Historia del Tiempo*. Ed. Crítica, Barcelona, 1988.
- [Hi] D. Hilbert, *Über das Unendliche*. *Mathematische Annalen*, **95** (1926), 161-190. Hay traducción española: *Acerca del infinito*, incluida en la recopilación *Fundamentos de las Matemáticas*, Mathema, UNAM, México, 1993.
- [Ja] M. Jammer, *Zeno's paradoxes today*, en «L'infinito nella scienza. Infinity in Science», 81-96. Istituto della Enciclopedia Italiana, 1987.
- [Ma] E. Maor, *To infinity and beyond*. Birkhäuser, Boston, 1987.
- [Mo] R. Morris, *La historia definitiva del Infinito*. Ediciones B, Barcelona, 2000.
- [Pa] B. Pascal, *Pensées et Opuscules*. Classiques Hachette, Paris, 1961.
- [Ru] R. Rucker, *Infinite and the mind. The Science and Philosophy of the Infinite*. Birkhäuser, 1982.