# INVESTIGACIÓN OPERATIVA

http://blogs.mat.ucm.es/bvitoriano/teaching-materials/


Begoña Vitoriano

bvitoriano@mat.ucm.es

blogs.mat.ucm.es/bvitoriano

Andrés Ramos

Andres.ramos@comillas.edu


Julio 2022

# ÍNDICE

# I. Optimización

## I.1. Investigación operativa y optimización

> "In the last decade, new advances in algorithms have been as important as the impressive advances in computer technology" George L. Nemhauser (1994).

> "The technology improvements in algorithms, modeling languages, software, and hardware have made the methodology accessible, easy to use, and fast. So the Age of Optimization has arrived" George L. Nemhauser (1994).

Definir el término investigación operativa (*operations research* en inglés de USA u *operational research* en inglés de UK) no es una tarea fácil ya que su evolución permanente hace que sea difícil dar con precisión una definición. La investigación operativa se puede definir como la aplicación de métodos científicos en la mejora de la efectividad en las operaciones, decisiones y gestión, ver [Robinson, 1999] o como la ciencia de aplicar los recursos disponibles para conseguir la satisfacción óptima de un objetivo específico deseado. Otra definición más extensa es la siguiente: la investigación operativa es la aplicación, por grupos interdisciplinarios, del método científico a los problemas complejos producidos en la dirección y gestión de grandes sistemas de hombres, máquinas, etc. La principal característica consiste en construir un modelo científico del sistema del cual se pueden predecir y comparar los resultados de diversas estrategias, decisiones, incorporando medidas del azar y del riesgo. El objetivo es ayudar a los responsables a determinar su política y actuaciones en forma científica. En este sentido también se pueden utilizar como sinónimos *management science* o análisis de las decisiones.

Los profesionales de la investigación operativa colaboran con los decisores en el diseño y mejora de las operaciones y decisiones, resuelven problemas y ayudan en las funciones de gestión, planificación o predicción, aportan conocimiento y ayuda en la toma de decisiones. Aplican las técnicas científicas más adecuadas seleccionadas de la matemática, ingeniería o cualquier ciencia social o de administración de empresas. Su trabajo normalmente consiste en recoger y analizar datos, desarrollar y probar modelos matemáticos, proponer soluciones o recomendaciones, interpretar la información y, en definitiva, ayudar a implantar acciones de mejora. Como resultado desarrollan e implantan aplicaciones informáticas, sistemas, servicios técnicos o productos.

La investigación operativa tiene sus orígenes en la Segunda Guerra Mundial, debido a la necesidad urgente de asignación de recursos escasos en las operaciones militares, en problemas tácticos y estratégicos. Estas mismas técnicas se han extendido con posterioridad a las empresas.

Disciplinas típicas de la investigación operativa son la optimización con sus múltiples sabores (lineal, no lineal, entera, estocástica, multiobjetivo), teoría de la decisión y de juegos, teoría de colas y simulación, teoría de grafos o flujos de redes. Otras disciplinas como algoritmos metaheurísticos y lógica borrosa, redes neuronales artificiales, reconocimiento de patrones y otras técnicas de inteligencia artificial, aunque conceptualmente se encuadran dentro de la investigación operativa, habitualmente se estudian dentro de otras disciplinas ligadas a la ingeniería informática como la inteligencia artificial. Los contenidos de algunas de estas últimas disciplinas también están muy ligados a la estadística.

La optimización es una parte relevante dentro de la investigación operativa. Tuvo un progreso algorítmico inicial muy rápido. Muchas técnicas –programación lineal (*linear programming*) LP, programación dinámica (*dynamic programming*) DP– son anteriores a 1960. Por ejemplo, el método Simplex[1] de programación lineal debido a Dantzig[2] es de 1947, el principio de optimalidad de Bellman base de la programación dinámica se formuló en 1957. En la última década se han producido avances significativos generados por el desarrollo en 1984 por parte de Karmarkar de un método de punto interior para programación lineal. Por ejemplo, en una nota técnica de ILOG se presenta que desde su optimizador CPLEX 3.0 en 1994 a CPLEX 7.0 en 2000 la reducción de tiempo de resolución ha sido de 28 veces en el método simplex dual para un problema lineal concreto. Para otro caso se observa una mejora global, de software y algorítmica, de 10000 veces entre la versión de CPLEX 1.0 de 1988 y la 7.0 del 2000. Como referencia, se estima que la mejora en el rendimiento del hardware ha sido del mismo orden de magnitud. Si tomamos conjuntamente ambas mejoras hoy se pueden resolver problemas en segundos que habrían tardado años en ser resueltos hace una docena de años. Estos avances han sido tan importantes como los realizados en el campo de la informática, según la opinión de George L. Nemhauser uno de los expertos actuales en programación entera, y se han producido acompasadamente con ellos. Hoy es posible resolver un problema LP de 200000 ecuaciones con 200000 variables y 1000000 de elementos no nulos en la matriz de restricciones en un PC con suficiente memoria principal. Aproximadamente, para un problema LP se puede decir que se requiere 1 MB de memoria principal por cada 1000 ecuaciones.

El estilo de este documento es eminentemente aplicado, práctico, ingenieril, a caballo entre una visión matemática de los problemas y de los algoritmos y la visión económica o de gestión empresarial de algunas de sus aplicaciones. Este documento trata de explicar suficientemente los fundamentos matemáticos como para permitir desarrollar aplicaciones de optimización de manera

---

[1] En castellano la traducción de esta palabra es símplice pero no es habitual su uso para denominar este método de optimización lineal.

[2] En http://www.e-optimization.com/directory/trailblazers/dantzig/ se puede encontrar un resumen de sus logros así como una entrevista sobre diversos temas, incluyendo imágenes en vídeo.

rigurosa y precisa. Al mismo tiempo, se presentan algunas aplicaciones a problemas concretos de ingeniería.

Al final del capítulo se citan algunos libros generales o de referencia de investigación operativa que pueden servir de consulta o como texto para un nivel de pregrado y postgrado. Luego, en cada capítulo se indican además referencias específicas de los diferentes temas. Dentro de los libros generales, [Hillier y Lieberman, 2002] es un libro clásico de investigación operativa muy ampliamente utilizado que compendia numerosos temas y tiene una orientación ingenieril. [Taha, 1998] presenta los temas con una orientación más matemática mientras que [Winston, 1994] los presenta con una perspectiva más de administración de empresas. [Sarabia, 1996] da una base teórica suficiente para poder resolver una colección de problemas relacionados con el temario de investigación operativa.

Entre las revistas principales que tratan sobre optimización se pueden incluir: *Interfaces*, *Operations Research*, *Management Science*, *European Journal of Operational Research*, *Mathematics of Operations Research*, *OR/MS Today*, *Mathematical Programming*, *INFORMS Journal on Computing*, *Journal of the Operational Research Society*, *Omega*, *Journal of Optimization Theory and Applications*, *Transportation Science*, *Transportation Research*. Existe una enciclopedia de investigación operativa que puede servir como consulta inicial y referencia de un tema específico, ver [Gass, 2001]. Además se puede encontrar información sobre los temas de investigación operativa en las direcciones de la *Sociedad Española de Estadística e Investigación Operativa* (SEIO) (www.seio.es), de la *Association of European Operational Research Societies* (EURO) (www.euro-online.org), de la *International Federation of Operational Research Societies* (IFORS) (www.ifors.org) y del *Institute for Operations Research and the Management Sciences* (INFORMS) (www.informs.org).

La optimización consiste en la selección de una alternativa mejor, en algún sentido, que las demás alternativas posibles. Es un concepto inherente a toda la investigación operativa. Sin embargo, determinadas técnicas propias de la investigación operativa se recogen bajo el nombre de optimización o programación matemática, en los que se plantean modelos que se componen generalmente de estos tres ingredientes:

- *función objetivo*

  Es la medida cuantitativa del funcionamiento del sistema que se desea optimizar (maximizar o minimizar). Como ejemplo de funciones objetivo se pueden mencionar: la minimización de los costes variables de operación de un sistema eléctrico, la maximización de los beneficios netos de venta de ciertos productos, la minimización del cuadrado de las desviaciones con respecto a unos valores observados, la minimización del material utilizado para fabricarn de un producto, etc.

- *variables*

  Representan las decisiones que se pueden tomar para afectar el valor de la función objetivo. Desde un punto de vista funcional se pueden clasificar en variables *independientes* o *principales* o *de control* y variables *dependientes* o *auxiliares* o *de estado*, aunque matemáticamente todas son iguales. En el caso de un sistema eléctrico serán los valores de producción de los grupos de generación o los flujos por las líneas. En el caso de la venta, la cantidad de cada producto fabricado y vendido. En el caso de la fabricación de un producto, sus dimensiones físicas.

- *restricciones*

  Representan el conjunto de relaciones (expresadas mediante ecuaciones e inecuaciones) que ciertas variables están obligadas a satisfacer. Por ejemplo, las potencias máxima y mínima de operación de un grupo de generación, la capacidad de producción de la fábrica para los diferentes productos, las dimensiones del material bruto del producto, etc.

Resolver un problema de optimización consiste en encontrar el valor que deben tomar las variables para hacer óptima la función objetivo satisfaciendo el conjunto de restricciones.

Los métodos de optimización los podemos clasificar en: métodos *clásicos* (que son los algoritmos que habitualmente se explican en los libros de optimización) y métodos *metaheurísticos* (que aparecieron ligados a lo que se denominó inteligencia artificial e imitan fenómenos sencillos observados en la naturaleza). Dentro de los primeros se encuentra la optimización lineal, lineal entera mixta, no lineal, estocástica, dinámica, etc. que se explican en el documento. En el segundo grupo se incluyen los algoritmos evolutivos (genéticos entre otros), el método del recocido simulado (*simulated annealing*), las búsquedas heurísticas (método tabú, búsqueda aleatoria, avariciosa, etc.) o los sistemas multiagente. De forma muy general y aproximada se puede decir que los métodos clásicos buscan y garantizan un óptimo local mientras que los métodos metaheurísticos tienen mecanismos específicos para alcanzar un óptimo global aunque no garantizan su alcance.

En la siguiente tabla se muestran las expresiones matemáticas generales de algunos tipos de problemas de optimización dentro de los métodos clásicos. Los problemas se distinguen por el carácter de las funciones que intervienen (lineales o no lineales) y de las variables (reales/continuas o enteras/discretas).

| | |
|---|---|
| Programación lineal<br>(*linear programming*)<br>LP | $\min_x c^T x$<br>$Ax = b$<br>$x \geq 0$<br>$x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$ |
| Programación lineal entera mixta<br>(*mixed integer programming*)<br>MIP | $\min_x c^T x + d^T y$<br>$Ax + By = b$<br>$x, y \geq 0$<br>$x \in \mathbb{Z}^n, y \in \mathbb{R}^l, c \in \mathbb{R}^n, d \in \mathbb{R}^l$<br>$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{m \times l}, b \in \mathbb{R}^m$ |

| | |
|---|---|
| Programación cuadrática<br>(*quadratic programming*)<br>QP | $\min_x c^T x + \frac{1}{2} x^T Q x$<br>$Ax = b$<br>$x \geq 0$<br>$x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$<br>$Q \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^m$ |
| Programación no lineal<br>(*non linear programming*)<br>NLP | $\min_x f(x)$<br>$g(x) = 0$<br>$h(x) \leq 0$<br>$l \leq x \leq u$<br>$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$<br>$g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ |

Existen decisiones que no pueden ser representadas de forma adecuada mediante variables continuas. Por ejemplo, las decisiones de inversión son variables discretas (por ejemplo, planificación de la expansión de la generación o de la red, adquisición de equipos singulares, contratación de personas) o binarias (como localización de plantas o almacenes). Los problemas lineales con variables enteras se pueden clasificar en: programación entera pura PIP (*pure integer programming*) si todas las variables son enteras, programación entera binaria BIP (*binary integer programming*) si todas son binarias o programación lineal entera mixta MIP (*mixed integer programming*) si algunas son enteras o binarias y el resto continuas.

Un caso particular, pero muy frecuente, de variables *enteras* son las variables *binarias* (0/1), ya que permiten modelar condiciones de asignación o condiciones lógicas. Por otra parte, toda variable entera $x$ se puede expresar como suma de variables binarias $y_i$, donde $x = \sum_{i=0}^{N} 2^i y_i$ siendo $u$ una cota superior de $x$, $0 \leq x \leq u$, y estando $u$ comprendida en el intervalo $2^N \leq u \leq 2^{N+1}$.

Existen algunos tipos de problemas de optimización que alteran ligeramente este esquema:

- *sistemas de ecuaciones lineales – no lineales*

  No existe una función objetivo como tal. Únicamente interesa encontrar una solución factible a un problema con un conjunto de restricciones.

- *optimización sin restricciones*

  Se trata de encontrar el conjunto de valores de las variables que determinan el mínimo/máximo de una función. Algunas de las técnicas que se verán en programación no lineal son para optimización sin restricciones.

- *optimización multiobjetivo*

Existe más de una función objetivo. El problema que se plantea es cómo tratar varias funciones objetivo a la vez, teniendo en cuenta que el óptimo para un objetivo no lo es para otro, son objetivos en conflicto entre sí. Ésta se enmarca dentro de lo que se conoce de forma más general como decisión multicriterio (*multicriteria decision making* MCDM).

La formulación matemática de algunos problemas de optimización especiales por no incluir alguno de los componentes se presenta en la siguiente tabla.

| | |
|---|---|
| Problema mixto complementario<br>(*mixed complementarity problem*)<br>MCP | $xF(x)=0$<br>$x \in \mathbb{R}^n$<br>$F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ |
| Optimización no lineal sin restricciones | $\min_x f(x)$<br>$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ |
| Programación multiobjetivo<br>(*multiobjective programming*) | $\min_x (f_1(x),\ldots,f_k(x))$<br>$Ax=b$<br>$x \ge 0$<br>$x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$<br>$f_i(x):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ |

# I.2. Referencias


Gass, S.L. and Harris, C.M. (eds.) (2001) *Encyclopedia of Operations Research and Management Science*. Centennial Edition. Kluwer Academic Publishers.

Hillier, F.S., Lieberman, G.J. (2002) *Investigación de Operaciones*. 7ª edición. McGraw Hill.

Robinson R. (1999) "Welcome to OR Territory" OR/MS Today pp. 40-43 August.

Sarabia, A. (1996) *La Investigación Operativa*. Universidad Pontificia Comillas.

Taha, H.A. (1998) *Investigación de operaciones. Una introducción*. Prentice Hall.

Winston, W.L. (1994) *Investigación de Operaciones. Aplicaciones y Algoritmos*. Grupo Editorial Iberoamericana.

# II. Modelos de Programación Matemática

## II.1. Modelo y modelado

> **Modelo**. Esquema teórico, generalmente en forma matemática, de un sistema o de una realidad compleja (por ejemplo, la evolución económica de un país), que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento. DICCIONARIO DE LA LENGUA ESPAÑOLA. REAL ACADEMIA ESPAÑOLA.

Un modelo es una representación matemática simplificada de una realidad compleja. Modelar es la acción de construir un modelo, de encorsetar la realidad. Implica la relación entre dos figuras (no necesariamente encarnadas por personas únicas sino por equipos): el *modelador* (encargado de la especificación y desarrollo del modelo) y el *experto* sobre la realidad (conocedor del problema real). La mayoría de las veces, el desarrollo de un modelo puede involucrar a un equipo multidisciplinar compuesto por matemáticos, estadísticos, ingenieros, economistas, psicólogos, etc. que aportan diferentes perspectivas y conocimiento en la representación de la realidad. Un modelo debe equilibrar la necesidad de contemplar todos los detalles con la factibilidad de encontrar técnicas de solución adecuadas.

Un modelo es, en definitiva, una herramienta de ayuda a la toma de decisiones. Por esta razón, sus resultados deben ser inteligibles y útiles. Modelar se puede entender simultáneamente como *ciencia* y como *arte*. Es una ciencia pues se basa en un conjunto de procesos estructurados: análisis y detección de las relaciones entre los datos, establecimiento de suposiciones y aproximaciones en la representación de los problemas, desarrollo o uso de algoritmos específicos de solución. Es un arte porque materializa una visión o interpretación de la realidad no siempre de manera unívoca. Cada persona imprime su estilo en el modelo mismo y en la especificación, en el desarrollo y en la documentación. Características tales como elegancia o simplicidad pueden atribuirse a un modelo. El desarrollo de un modelo es una creación hecha con ayuda de ciencias básicas o herramientas de apoyo.

Entre los beneficios explícitos o implícitos, tanto para el modelador como para el experto, derivados del proceso de modelado además del modelo en sí mismo, se pueden mencionar:

- Ayuda a establecer un diálogo con intercambio de información entre el modelador y el experto
- Organiza los datos, la información disponible sobre el sistema
- Organiza, estructura y mejora la comprensión del sistema
- Internaliza la estructura organizativa de la empresa

- Permite compartir supuestos y resultados entre el modelador y el experto
- Proporciona un entorno ágil para el análisis y la sensibilidad
- Indica la dirección de mejora en las decisiones

En este capítulo se tratará exclusivamente de modelos de optimización, es decir, aquellos donde existe un conjunto de *variables* de decisión que deben maximizar/minimizar una *función objetivo* sometidas a un conjunto de *restricciones*. Los modelos de programación lineal son más utilizados que todos los otros tipos de optimización juntos y abarcan cualquier tipo de actividad humana como micro y macroeconomía, finanzas, marketing, economía de la energía, organización de la producción, planificación de la operación, selección de procesos, asignación de tareas, ingeniería química, forestal, agrónoma, comercio internacional, desarrollo económico, etc. Como referencias generales de modelado de problemas de optimización que se pueden utilizar en la enseñanza de pregrado o postgrado cabe citar a [Schrage, 1997] y [Williams, 1999].

# II.2. Etapas en el desarrollo de un modelo

Las etapas que componen el *ciclo de vida* de un modelo son las siguientes:

### Identificación del problema

Consiste en la recolección y análisis de la información relevante para el problema, en el intercambio de información entre el modelador y el experto, en establecer una relación simbiótica y una estrecha coordinación entre ambos.

Los problemas reales suelen estar definidos en términos vagos e imprecisos. Se debe hacer la tarea de traducción o interpretación en frases precisas, convertibles en ecuaciones matemáticas. En esta etapa se establecen y documentan los supuestos realizados que en etapas posteriores deberán ser validados.

Esta etapa es fundamental para que las soluciones proporcionadas, las conclusiones obtenidas sean útiles, las decisiones adoptadas sean correctas. Los datos suelen ser vitales para conseguir un realismo o aplicabilidad en las soluciones. A menudo representan el cuello de botella del proceso de modelado.

### Especificación matemática y formulación

Escritura matemática del problema de optimización, definiendo sus variables, sus ecuaciones, su función objetivo, sus parámetros. En esta etapa se analiza el tamaño del problema, la estructura de la matriz de restricciones, su tipo (LP, MIP, NLP). Es una etapa de creación donde se debe prestar especial atención a la precisión en la formulación y a la escritura de las ecuaciones que describen el problema.

En LP la elección de una formulación de un problema, aunque importante, no afecta de manera significativa la resolución del mismo. Sin embargo, en NLP o MIP la elección de la formulación es crucial. Pueden existir diversas alternativas de modelado que afectan de manera fundamental en la resolución del mismo, existiendo un desarrollo cada vez mayor en la reformulación de problemas. En problemas MIP la calidad de una formulación se mide por la cercanía entre la envoltura convexa del poliedro de soluciones enteras factibles y la del poliedro del problema MIP relajado linealmente. En el apartado I.6.5.2 se explica en más detalle algunas técnicas de reformulación de problemas MIP.

La caracterización de un problema LP según su tamaño resulta difícil y ha sufrido un gran cambio desde los recientes desarrollos de algoritmos simplex mejorados y, sobre todo, desde la aparición de los métodos de punto interior. En la tabla 1.1 se propone una clasificación de tipos de problemas LP según su tamaño. Esta clasificación debe ser tomada como guía o referencia relativa actual pero téngase en cuenta que los tamaños relativos de los problemas cambiarán conforme evolucionen los códigos de optimización. Actualmente se puede afirmar que los códigos de optimización lineal implantan algoritmos muy eficientes, son fiables y numéricamente robustos y están ampliamente disponibles.

| | Restricciones | Variables |
|---|---|---|
| Caso ejemplo | 100 | 100 |
| Tamaño medio | 10000 | 10000 |
| Gran tamaño | 100000 | 100000 |
| Muy gran tamaño | > 100000 | > 100000 |

Tabla 1.1 Tipos de problemas LP según su tamaño.

En lo referente a MIP o NLP ni siquiera se pueden dar criterios generales de tamaño ya que la dificultad de resolución no tiene por qué estar ligada al tamaño del problema, puede ser incluso preferible reformular un problema aunque aumenten las dimensiones, para lograr una resolución más eficiente.

### Resolución

Se trata de implantar un algoritmo de obtención de la solución numérica (muy próxima a la matemática) óptima o cuasióptima. El algoritmo puede ser de propósito general (método simplex) o específico. Puede haber diferentes métodos de solución de un problema o diferentes implantaciones de un mismo método. El tiempo de resolución de un problema también puede depender drásticamente de cómo esté formulado.

La solución óptima debe ser suficientemente satisfactoria, debe ser una guía de actuación para el experto.

### Verificación, validación y refinamiento

Esta etapa conlleva la eliminación de los errores en la codificación, es decir, conseguir que el modelo haga lo que se ha especificado matemáticamente en la etapa anterior mediante su escritura en un lenguaje informático (depurar y verificar). Es necesario comprobar la validez de las simplificaciones realizadas a través de los resultados obtenidos, incluso contrastando éstos con situaciones reales ya transcurridas (validar) o comprobando que los resultados son coherentes con respecto a lo que sucedería en la realidad.

Esta etapa de verificación, validación y comprobación da lugar a nuevas necesidades de refinamiento en el modelado para mejorar la capacidad de representación del sistema. Por ejemplo, eliminar la linealidad y hacer el modelo no lineal o hacer el modelo estocástico si la realidad lo fuera. Además, también se puede abordar el refinamiento matemático en la formulación del problema para hacerla más eficaz.

### Interpretación y análisis de los resultados

Esta etapa consiste en proponer soluciones. Permite conocer en detalle el comportamiento del modelo al hacer un análisis de sensibilidad en los parámetros de entrada, estudiar diferentes escenarios plausibles de los parámetros, detectar soluciones alternativas cuasióptimas pero suficientemente atractivas, comprobar la robustez de la solución óptima.

### Implantación, documentación y mantenimiento

Ésta es una etapa fundamental del desarrollo de un modelo para garantizar su amplia difusión. La documentación ha de ser clara, precisa y completa. El manual de usuario debe incluir la especificación técnica funcional, matemática e informática. El propio código debe incluir una buena documentación para facilitar la tarea del mantenimiento. Piénsese que la mayor parte del ciclo de vida de un modelo no está en el desarrollo sino en la fase de uso y mantenimiento.

En esta etapa se incluye también la tarea de formación para los usuarios del modelo.

## II.3. Referencias

Schrage, L. (1997) Optimization Modeling with LINDO. Duxbury Press.

Williams, H.P. (1999) Model Building in Mathematical Programming. 4th Edition. John Wiley and Sons.

# III. Formulación de problemas de optimización

## III.1. Modelos característicos de programación matemática

A continuación se presentan algunos problemas característicos de programación lineal, entera y no lineal. Éstos se utilizan como referencia y clasificación para otros problemas. En particular, para los problemas enteros existen numerosas referencias de investigación dedicadas a la solución de los mismos. A pesar de la enorme atención que se ha dedicado a su solución su importancia práctica es limitada.

### III.1.1. Problema de la dieta

El problema por excelencia de programación lineal es el de asignación óptima de recursos. Un caso particular de éste es el denominado problema de la dieta. Consiste en determinar la composición de la dieta de mínimo coste que satisface las necesidades específicas de nutrientes. Pongamos un caso particular muy sencillo de alimentación de ganado bovino.

Aprovechamos este ejemplo para seguir paso a paso las etapas en el desarrollo de un modelo.

- En primer lugar hay que ***identificar el problema***.

  Se ha determinado que las necesidades mínimas diarias en la alimentación de una ternera son de 700 g de proteínas, 28 g de calcio y 150 mg de vitaminas. Los alimentos disponibles son pienso y forraje con un coste unitario de 0.30 y 0.35 €/kg respectivamente. La composición nutritiva por kg de alimento se muestra en la siguiente tabla.

| | Proteínas (g) | Calcio (g) | Vitaminas (mg) |
|---|---|---|---|
| Pienso | 30 | 2 | 10 |
| Forraje | 45 | 1 | 5 |

  Se trata de determinar la cantidad diaria óptima de cada alimento para minimizar el coste total de alimentación.

- A continuación ***se especifica matemáticamente y se formula*** el problema.

Para ello analizamos y organizamos los **datos** del problema. Sean $i$ los alimentos disponibles (pienso y forraje) y sean $j$ los nutrientes (proteínas, calcio y vitaminas). Sea $b_j$ la cantidad mínima diaria requerida de cada nutriente. Sea $a_{ij}$ la cantidad de nutriente por kg de alimento correspondiente a los valores de la tabla dada. Sea $c_i$ el coste unitario de cada alimento. A continuación definimos las **variables**. Sea $x_i$ la cantidad diaria en kg de cada alimento $i$. Además indicamos la **función objetivo** y las **restricciones** del problema. La función objetivo es la minimización del coste diario de la dieta

$$\min_{x_i} \sum_i c_i x_i \tag{1.1}$$

Las restricciones corresponden a satisfacer con la mezcla de alimentos las necesidades mínimas diarias de cada nutriente y, por consiguiente, habrá tantas restricciones de este tipo como nutrientes.

$$\sum_i a_{ij} x_i \geq b_j \quad \forall j \tag{1.2}$$

Además hay que añadir la restricción natural de que la cantidad de cada alimento ha de ser no negativa.

$$x_i \geq 0 \tag{1.3}$$

Particularizando estas ecuaciones para los datos previos se obtiene.

$$\begin{aligned}
&\min_{x_1, x_2} 0.30x_1 + 0.35x_2 \\
&30x_1 + 45x_2 \geq 700 \\
&2x_1 + x_2 \geq 28 \\
&10x_1 + 5x_2 \geq 150 \\
&x_1 \geq 0 \\
&x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

- Después viene la ***resolución***.

  Vamos a resolver gráficamente el problema. Para ello se dibujan las ecuaciones en forma de igualdad en el espacio de las variables y se indica la región factible del problema. Es decir, el conjunto de puntos que cumple todas las restricciones. Se traza la recta de la función objetivo para un valor cualquiera y se desplaza paralela a sí misma en el sentido de minimizar dicho valor hasta el último punto de la región factible. Dicho punto será el óptimo del problema.

- Las etapas de ***verificación*** (comprobación de que el modelo es correcto) y ***validación*** (comprobación de que la realidad se representa adecuadamente) son inmediatas en un modelo tan sencillo como éste.

- Seguidamente se realiza la ***interpretación*** y ***análisis*** de los resultados.

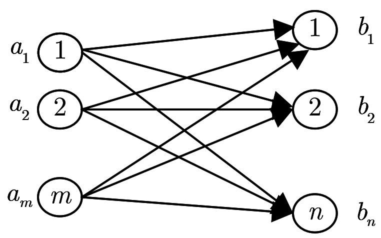
Los resultados indican que la decisión óptima es comprar 10.833 kg de pienso y 8.333 kg de forraje cada día. Con estas decisiones el coste diario de los alimentos es de 6.1667 €.

Al ganadero le ha llegado una oferta de otro fabricante de piensos a un precio de 0.25 €/kg pero con menor contenido en calcio, 1.5 g de calcio por kg de pienso, y tiene interés en analizar si le interesa comprar o no a dicho fabricante. Para ello planteamos este nuevo problema de optimización. La solución óptima para este nuevo problema es comprar 14.933 kg de pienso y 5.6 kg de forraje diariamente con un coste de 5.6933 €. Luego, esta oferta es atractiva económicamente.

- La etapa de ***implantación, documentación y mantenimiento*** se da por satisfecha en este modelo sencillo con este apartado donde se explica el modelo.

# III.1.2. Problema de transporte

Se trata de minimizar el coste total de transporte de un cierto producto desde los diferentes orígenes a los destinos, satisfaciendo la demanda de cada destino sin superar la oferta disponible en cada origen. Se s $j$ upo $j$ ne que todos los $m$ orígenes están conectados con los todos los $n$ destinos. Sea $a_i$ la oferta de producto en el origen $i$, $b_j$ la demanda de producto en el destino y $c_{ij}$ el coste unitario de transporte desde el origen $i$ al destino $j$.




El problema de optimización consiste en determinar las unidades de producto $x_{ij} \geq 0$ transportadas desde $i$ hasta $j$, , que minimizan los costes de transporte sujeto a las restricciones de oferta disponible en cada origen $i$ ($m$ restricciones de oferta) y demanda en cada destino ($n$ restricciones de demanda)

$$
\begin{aligned}
&\min_{x_{ij}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, m \\
&\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, n \\
&x_{ij} \geq 0
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Implícitamente en esta formulación, se supone que la oferta del producto es igual a la demanda del mismo $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Si $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ se ha solido decir que se añade un sumidero universal con coste nulo, y si $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ se añade una fuente universal conectada con todos los destinos con coste muy elevado. Esta opción se lleva a cabo para aplicar métodos específicos de solución para el problema de transporte.

Industrialmente, este modelo se utiliza muy a menudo, pero hay que tener en cuenta algunos detalles de formulación. En primer lugar, respecto al estilo, es importante que las variables reflejen su significado, así como los datos. Por ejemplo, es habitual para cantidades usar *Q*, para demandas *d*, etc. También es importante, distinguir de alguna forma datos de variables (por ejemplo, unos en mayúsculas y otros en minúsculas). Respecto a las condiciones de los datos, el modelo se formula sin hacer hipótesis sobre los valores iniciales ni la red (pueden no existir conexiones entre algunos orígenes y destinos, de modo que *A* es el conjunto de arcos de la red), siendo la siguiente formulación la que contempla que pueda haber más oferta que demanda (equivalente a poner un sumidero universal):

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} Q_{ij} \\
&\sum_{j/(i,j)\in A} Q_{ij} \le o_i \quad i = 1,\dots,m \\
&\sum_{i/(i,j)\in A} Q_{ij} = d_j \quad j = 1,\dots,n \\
&Q_{ij} \ge 0
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Por otra parte, para evitar infactibilidades que harían que el modelo no dé solución alguna, se introducen unas variables que recogen la demanda no suministrada en cada nodo y que son penalizadas en la función objetivo, por ejemplo con un valor *p:*

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} Q_{ij} + \sum_{j} p N_j \\
&\sum_{j/(i,j)\in A} Q_{ij} \le o_i \qquad i = 1,\dots,m \\
&\sum_{i/(i,j)\in A} Q_{ij} = d_j + N_j \quad j = 1,\dots,n \\
&Q_{ij}, N_j \ge 0
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Éste sería un modelo formulado para poder ser implementado de forma industrial.

En cualquier caso, la estructura que presenta la matriz de restricciones del problema tiene el siguiente aspecto.

$$
\begin{array}{c|cccc|cccc|c|cccc|}
 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \\
\hline
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & & \\
2 & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & \\
\vdots & & & & & & & & & \ddots & & & & \\
m & & & & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
\hline
1 & 1 & & & & 1 & & & & \cdots & 1 & & & \\
2 & & 1 & & & & 1 & & & \cdots & & 1 & & \\
\vdots & & & \ddots & & & & \ddots & & \cdots & & & \ddots & \\
n & & & & 1 & & & & 1 & \cdots & & & & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Si tanto las ofertas como las demandas de los productos son números enteros, entonces el valor óptimo de las variables va a resultar entero por ser la matriz totalmente unimodular[3], por lo que no se necesita recurrir a métodos específicos de resolución de problemas de programación entera.

## III.1.3. Problema de transbordo

Consiste en determinar en una red con $n$ nodos las cantidades óptimas para llevar unidades de un producto desde sus orígenes a sus destinos pasando por puntos de transbordo intermedios.

Cada *origen* genera $b_i > 0$ unidades, cada *destino* consume $b_i < 0$ unidades y cada *transbordo* ni genera ni consume unidades $b_i = 0$. El coste unitario de transporte desde el origen $i$ hasta el destino $j$ en dicho sentido es $c_{ij}$.

Hay que determinar las unidades de producto transportadas desde $i$ a $j$, $x_{ij} \geq 0$, $\forall i, j$, que minimizan los costes de transporte teniendo en cuenta la restricción de balance o conservación del flujo en cada nudo $i$.

[3] Una matriz es *totalmente unimodular* si toda submatriz cuadrada tiene determinante 0, 1 ó –1. Si la matriz de un problema lineal es totalmente unimodular y las cotas de las restricciones son enteras, entonces todos los puntos extremos del poliedro tienen coordenadas enteras (se denomina *politopo entero*).

$$\begin{aligned}&\min_{x_{ij}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\\ &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{k=1}^{n} x_{ki} = b_i \quad i=1,\dots,n\\ &x_{ij}\geq 0\end{aligned} \tag{1.7}$$

Implícitamente en esta formulación, se supone que la oferta es igual a la demanda del producto, es decir, $\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$.

Esta matriz también es totalmente unimodular por lo que el problema también puede ser resuelto mediante programación lineal.

También en este caso, el modelo académico del industrial difiere sensiblemente, ya que no es normal hacer la hipótesis de que la suma en la red sea 0 (no es normal que la demanda de un producto en una red sea exactamente la oferta, eso suele darse en casos límite). Por otra parte, también ha de protegerse respecto a posibles infactibilidades. Y por último, hablar un lenguaje propio del sector, que en general no va a considerar que producción y demanda sea lo mismo pero con signos opuestos. En este caso la formulación se podría plantear como sigue.

El problema es transportar a través de una red un determinado producto. La red está formada por $n$ nodos y $A$ arcos. Cada nodo puede ser de tres tipos: nodo de oferta donde hay disponible o se produce una cantidad del producto ($s_i$), nodo de demanda donde hay una demanda del producto ($d_i$), o nodo de transbordo donde ni se genera ni se consume ($s_i = 0, d_i = 0$).

Las variables del modelo son las siguientes:

$Q_{ij}$: cantidad transportada de nodo $i$ a nodo $j$

$N_j$: demanda no suministrada en nodo $j$

$P_j$: cantidad suministrada en nodo $j$

Con estas variables se admite que la producción o cantidad suministrada en un nodo pueda ser inferior a la oferta existente, así como no suministrar la demanda completa de un nodo si es que no hay existencias o forma de enviar suficiente cantidad al nodo, aunque ha de ser altamente penalizada esta opción (con un valor $p$ alto). El modelo entonces resulta el siguiente:

$$\begin{aligned}&\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}Q_{ij} + \sum_{i} p\, N_i\\ &\sum_{\substack{j/\\(i,j)\in A}} Q_{ij} - \sum_{\substack{j/\\(j,i)\in A}} Q_{ji} = P_i - d_i + N_i \quad \forall i\\ &P_i \leq s_i \quad \forall i\\ &N_i \leq d_i \quad \forall i\\ &Q_{ij}\geq 0 \quad \forall (i,j)\in A \quad P_i, N_i \geq 0 \quad \forall i\end{aligned} \tag{1.8}$$

# III.1.4. Problema de asignación

Se trata de asignar la realización de $n$ tareas a $n$ personas (máquinas, etc.). Este problema es un caso particular del problema de transporte. Por consiguiente las variables toman valores enteros sin exigir esta condición en la formulación del problema.

Consiste en minimizar el coste total de realizar las tareas sabiendo que cada tarea $i$ debe ser hecha por una sola persona y cada persona $j$ debe realizar una única tarea, siendo $c_{ij}$ el coste de realizar la tarea $i$ por la persona $j$. Las variables del problema son $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si se asigna la tarea } i \text{ a la persona } j \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$, $\forall i, j$.

$$
\begin{aligned}
& \min_{x_{ij}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1,\ldots,n \\
& \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = 1,\ldots,n \\
& x_{ij} \geq 0
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

# III.1.5. Problema de la mochila (*knapsack*)

Se trata de maximizar el valor total de la elección de un conjunto de $n$ proyectos sin sobrepasar el presupuesto $b$ disponible, siendo $v_j$ y $c_j$ el valor y coste de cada proyecto $j$ respectivamente. El nombre procede de la decisión que toma un montañero que trata de maximizar el valor de lo que introduce en su mochila con una restricción de máximo peso admisible. Las variables del problema son $x_j = \begin{cases} 1 & \text{si se elije el proyecto } j \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$. Ésta es una utilización habitual de las variables binarias como forma de seleccionar una alternativa, un proyecto en este caso. La formulación del problema es la siguiente

$$
\begin{aligned}
& \max_{x_j} \sum_{j=1}^{n} v_j x_j \\
& \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq b \\
& x_j \in \{0,1\}
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

## III.1.6. Problema de recubrimiento (*set covering*)

Existen $m$ características y $n$ combinaciones (subconjuntos) de dichas características. La elección de una combinación implica realizar todas las características de la misma. Se trata de minimizar el coste total de las combinaciones elegidas de manera que se cubra o posea cada característica $i$ *al menos* una vez. Los datos son $c_j$ el coste de elegir la combinación $j$ y la matriz de pertenencia de cada característica $i$ a cada combinación $j$, $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ pertenece a } j \\ 0 & \text{si no pertenece} \end{cases}$.

Denominamos las variables $x_j = \begin{cases} 1 & \text{si se elige la combinación } j \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$.

El problema se formula de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
&\min_{x_j} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1 \quad i = 1, \ldots, m \\
&x_j \in \{0,1\}
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

En la siguiente figura se representa gráficamente el problema de recubrimiento así como los de empaquetado y partición que se explican a continuación.

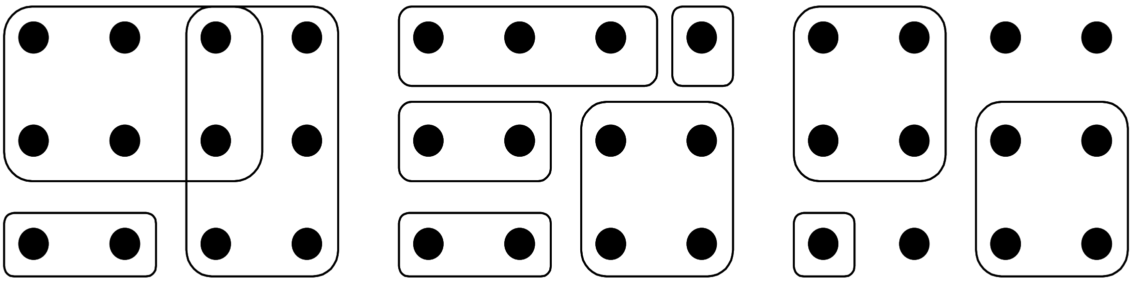


Figura 1.1 Representación gráfica de un recubrimiento, una partición y un empaquetado, respectivamente.

Veamos a continuación un ejemplo de recubrimiento: *asignación de tripulaciones*, tomado de [Hillier y Lieberman, 2002]. Una compañía aérea necesita asignar sus tripulaciones para cubrir todos sus vuelos. En particular, quiere resolver el problema de asignar tres tripulaciones con base en San Francisco a los vuelos listados en la primera columna de la tabla. Las otras columnas muestran las 12 secuencias factibles de vuelos para una tripulación cualesquiera. Los números de cada columna indican el orden de los vuelos. Se necesita elegir tres secuencias (una por tripulación) de manera que se cubran todos los vuelos. Se permite tener más de una tripulación en un vuelo, donde la/s tripulación/es extra viajan como pasajeros, pero por convenio laboral la tripulación extra cobra como si estuviera trabajando. El coste de asignación de una tripulación a cada secuencia de vuelos se da en millones de euros en la última fila. El objetivo es minimizar el coste total de asignación de las tres tripulaciones para cubrir todos los vuelos. Resolver el mismo problema para el caso en que no se permite el vuelo de una tripulación fuera de servicio en un vuelo.

| | Secuencias factibles | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| SF – LA | 1 | | | 1 | | | 1 | | | 1 | | |
| SF – Denver | | 1 | | | 1 | | | 1 | | | 1 | |
| SF – Seattle | | | 1 | | | 1 | | | 1 | | | 1 |
| LA – Chicago | | | | 2 | | | 2 | | 3 | 2 | | 3 |
| LA – SF | 2 | | | | | 3 | | | | 5 | 5 | |
| Chicago – Denver | | | | 3 | 3 | | | | 4 | | | |
| Chicago – Seattle | | | | | | | 3 | 3 | | 3 | 3 | 4 |
| Denver – SF | | 2 | | 4 | 4 | | | | 5 | | | |
| Denver – Chicago | | | | | 2 | | | 2 | | | 2 | |
| Seattle – SF | | | 2 | | | | 4 | 4 | | | | 5 |
| Seattle – LA | | | | | | 2 | | | 2 | 4 | 4 | 2 |
| Coste (M€) | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 | 5 | 7 | 8 | 9 | 9 | 8 | 9 |

Se definen las variables del problema como

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si se asigna la secuencia } j \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}, \qquad x_j \in \{0,1\} \quad j = 1, \ldots, 12$$

La función objetivo será

$$\min 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 5x_6 + 7x_7 + 8x_8 + 9x_9 + 9x_{10} + 8x_{11} + 9x_{12}$$

Cobertura de cada vuelo al menos una vez

$$\begin{gathered} x_1 + x_4 + x_7 + x_{10} \geq 1 \text{ (SF-LA)} \\ x_2 + x_5 + x_8 + x_{11} \geq 1 \text{ (SF-Denver)} \\ x_3 + x_6 + x_9 + x_{12} \geq 1 \text{ (SF-Seatlle)} \\ \vdots \end{gathered}$$

Asignación de las tres tripulaciones $\sum_{j=1}^{12} x_j = 3$

Las soluciones óptimas son $x_3 = x_4 = x_{11} = 1$ y el resto 0 ó $x_1 = x_5 = x_{12} = 1$ y el resto 0, ambas con coste 18 millones de €.

Si no se permite que una tripulación fuera de servicio vuele en un avión las restricciones de cobertura de mayor o igual pasan a ser de igualdad. Luego, se trata de un problema de partición, cuya formulación se verá a continuación.

## III.1.7. Problema de empaquetado (*set packing*)

Se tienen que realizar $m$ proyectos divididos en $n$ paquetes. La elección de un paquete implica realizar todos los proyectos del mismo. Se trata de maximizar el beneficio total de manera que cada proyecto $i$ del conjunto de todos los paquetes que lo incluyen no pueda ser elegido más de una vez. $c_j$ es el beneficio de elegir el paquete $j$, la matriz de pertenencia de cada proyecto $i$ a cada paquete $j$ es $a_{ij}\begin{cases}1 & \text{si } i \text{ pertenece a } j\\ 0 & \text{si no pertenece}\end{cases}$. Las variables del problema son $x_j\begin{cases}1 & \text{si se elige el paquete } j\\ 0 & \text{en cualquier otro caso}\end{cases}$. La formulación del problema es la siguiente

$$\begin{aligned}&\max_{x_j}\sum_{j=1}^{n}c_j x_j\\&\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le 1 \quad i=1,\ldots,m\\&x_j\in\{0,1\}\end{aligned} \tag{1.12}$$

## III.1.8. Problema de partición (*set partitioning*)

La formulación es similar al problema anterior pero en este caso exactamente una característica (proyecto) del conjunto de combinaciones (paquetes) que la contienen debe ser elegida.

$$\begin{aligned}&\max_{x_j}\sum_{j=1}^{n}c_j x_j\\&\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j = 1 \quad i=1,\ldots,m\\&x_j\in\{0,1\}\end{aligned} \tag{1.13}$$

## III.1.9. Problema del viajante de comercio (*Traveling Salesman Problem TSP*)

El problema consiste en hacer un recorrido que pase por $n$ ciudades sin repetir ninguna y volviendo a la ciudad de partida de manera que la distancia (o tiempo o coste) total sea mínima. Es un problema de asignación pero con la condición de que la asignación sea un *ciclo*. Es uno de los problemas más importantes en la historia de la programación matemática por todas las investigaciones a las que ha dado lugar y por todas las aplicaciones que tiene, tanto directamente o apareciendo como subproblema dentro de otros más complejos. En una noticia de *OR/MS Today* (publicada por el *Institute of Operations Research and the Management Sciences* (*INFORMS*)) de junio de 2004, mencionaba que se había conseguido resolver un problema del viajante con 24978 ciudades. Los problemas de enrutamiento de vehículos (expedición o recogida de mercancías) pueden ser formulados basándose en este modelo. Una de las características más interesantes de este problema es que existen muchas formulaciones conocidas para el mismo, ver [Williams, 1999] y [Nemhauser, 1999]. Una de ellas es la siguiente. Sea $c_{ij}$ la distancia entre las ciudades $i$ y $j$.

Se definen las variables

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si se va de la ciudad } i \text{ a la ciudad } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$T_j: \text{ instante de llegada a ciudad } j$$

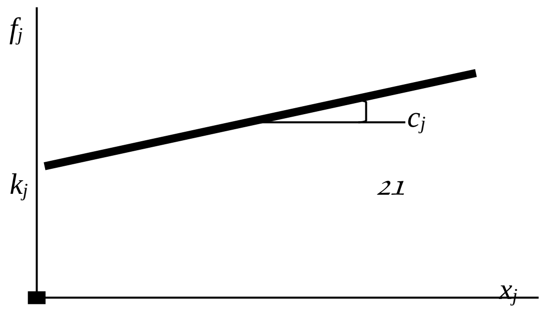
La formulación del problema es:

$$\begin{aligned} & \min_{x_{ij}} \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \\ & \sum_i x_{ij} = 1 \quad \forall j \\ & \sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i \\ & T_j \geq T_i + c_{ij} - m(1 - x_{ij}) \qquad \forall i, j \\ & T_j \geq c_{1j} - m(1 - x_{1j}) \qquad \forall j \neq 1 \\ & x_{ij} \in \{0,1\}, T_j \geq 0 \end{aligned} \tag{1.14}$$

La primera restricción indica que a una ciudad $j$ sólo se puede llegar una vez desde cualquier ciudad $i$. La segunda dice que desde una ciudad $i$ sólo se puede salir una vez a cualquier otra ciudad $j$. Sólo con estas variables no es suficiente para formular el problema, ya que se pueden formar subciclos. La forma de evitarlos es añadiendo las variables continuas.

## III.1.10. Problema de coste fijo

Los problemas de coste fijo aparecen cuando el coste de una variable tiene un término fijo con valor diferente de 0 si la variable toma un valor estrictamente positivo. Es una función no lineal y discontinua:



$$f_j(x_j) = \begin{cases} 0 & x_j = 0 \\ k_j + c_j x_j & x_j > 0 \end{cases}$$

Este coste se puede modelar con ayuda de una variable binaria auxiliar $y_j \in \{0,1\}$ definida como $y_j = \begin{cases} 1 & x_j > 0 \\ 0 & x_j = 0 \end{cases}$, que indica la realización de la actividad $x_j$. Introduciendo la condición $x_j \le My_j$, $j = 1,\dots,n$, siendo $M$ una constante, cota superior de $x_j$, cuyo valor dependerá del problema, se distingue entre no realizar la actividad y realizarla al menos infinitesimalmente. El valor de la constante $M$ debe ser el menor posible ya que esto es computacionalmente beneficioso.

El problema lineal entero se formula como sigue

$$\begin{aligned} &\min_{x_j, y_j} \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) = \sum_{j=1}^{n} \left( k_j y_j + c_j x_j \right) \\ &x_j \le My_j \\ &x_j \ge 0 \\ &y_j \in \{0,1\} \end{aligned}$$

## III.1.11. Modelado de restricciones con variables binarias

Supongamos que necesitamos considerar en un problema la condición de que si se produce el producto A también se debe producir el producto B. La condición de producción de un producto $j$ la representamos por la restricción $x_j \ge 1$. Entonces, la implicación es

$$x_A \ge 1 \rightarrow x_B \ge 1$$

Esta condición no se puede introducir directamente en un problema lineal porque hace que la estructura del problema (el que se considere o no una restricción más $x_B \ge 1$) depende de que se cumpla otra ($x_A \ge 1$) y esto sólo se conoce una vez que se ha determinado la solución óptima. Un problema de optimización no se puede redefinir endógenamente, es decir, en función de los propios valores que toman las variables del problema.

En este apartado se van a modelar en un problema de optimización algunas condiciones especiales (las restricciones lógicas entre ellas) que requieren el uso de variables binarias para detectar o forzar el cumplimiento de restricciones.

### III.1.11.1. Modelado de disyunciones

**Disyunciones**

Las disyunciones implican una pareja de restricciones donde una (cualquiera de las dos) debe satisfacerse, mientras que la otra no es necesario que se cumpla. Debe cumplirse una al menos pero no necesariamente las dos.

$$f(x) \leq 0 \text{ ó } g(x) \leq 0$$

Supongamos el ejemplo de esta disyunción

$$3x_1 + 2x_2 - 18 \leq 0 \text{ ó } x_1 + 4x_2 - 16 \leq 0$$

Veamos cómo estas restricciones se pueden incorporar en un problema de programación matemática.

Añadir una constante de valor elevado $M$ a una restricción es equivalente a eliminar (relajar) dicha restricción.

$$\begin{matrix} 3x_1 + 2x_2 - 18 \leq 0 \\ x_1 + 4x_2 - 16 \leq M \end{matrix} \text{ ó } \begin{matrix} 3x_1 + 2x_2 - 18 \leq M \\ x_1 + 4x_2 - 16 \leq 0 \end{matrix}$$

Se define la variable binaria auxiliar $y$ que selecciona la ecuación correspondiente, $y = \begin{cases} 1 & \text{se relaja la ecuación 1} \\ 0 & \text{se relaja la ecuación 2} \end{cases}$. Luego las restricciones disyuntivas se modelan en un problema de optimización como

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 18 &\leq My \\ x_1 + 4x_2 - 16 &\leq M(1-y) \end{aligned}$$

Si $y = 1$ se relaja la restricción 1 y se obliga a cumplir la 2, y viceversa para $y = 0$.

Algunas implicaciones son un caso semejante a las restricciones disyuntivas

$$f(x) > 0 \rightarrow g(x) \leq 0$$

es equivalente a

$$f(x) \leq 0 \text{ ó } g(x) \leq 0$$

ya que $P \rightarrow Q$ es equivalente a (No $P$) ó $Q$.

## Cumplir *k* de *N* ecuaciones

Se tiene un conjunto de $N$ ecuaciones de las cuales se han de satisfacer al menos $k$, siendo $k < N$. Las disyunciones son un caso particular de éste para $k = 1$ y $N = 2$. Sea el conjunto de $N$ ecuaciones

$$\begin{array}{l} f_1(x_1,\dots,x_n) \le 0 \\ f_2(x_1,\dots,x_n) \le 0 \\ f_N(x_1,\dots,x_n) \le 0 \end{array}$$

añadiendo una constante $M$ y una variable binaria $y_i$ para cada ecuación tenemos

$$\begin{array}{l} f_1(x_1,\dots,x_n) \le My_1 \\ f_2(x_1,\dots,x_n) \le My_2 \\ f_N(x_1,\dots,x_n) \le My_N \end{array}$$

donde además se impone la condición de seleccionar solamente $k$ ecuaciones.

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = N - k \qquad\qquad y_i \in \{0,1\} \quad i = 1,\dots,N$$

## Seleccionar entre *N* valores

Sea una función con múltiples posibles valores y se desea elegir uno de ellos.

$$f(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \end{cases}$$

La manera de modelarlo es introduciendo una variable binaria auxiliar $y_i$ por cada valor y la condición de elección única

$$\begin{array}{l} f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{N} d_i y_i \\ \sum_{i=1}^{N} y_i = 1 \\ y_i \in \{0,1\} \quad i = 1,\dots,N \end{array}$$

## MODELADO DE IMPLICACIONES LÓGICAS

Las variables binarias se utilizan para indicar que el cumplimiento de una restricción implica el cumplimiento de otra. Básicamente, si hay que modelizar $P \to Q$, esto es equivalente a modelizar No $P$ o $Q$, es decir, se reduce al caso de una disyunción.

Cuando se trabaja con variables binarias, hay que tener en cuenta que es habitual que surjan disyunciones o condicionales, pero en general no es necesario recurrir a esta formulación, sino que existe una función lineal que las relaciona. Por ejemplo, si $X, Y$ son binarias y hay que modelizar $X = 1 \Rightarrow Y = 1$, basta con poner $X \leq Y$.

## MODELADO DE PRODUCTOS CON VARIABLES BINARIAS

Las variables binarias también se pueden utilizar para eliminar algunos productos de variables que convertirían el problema en no lineal pero que con esta transformación resulta un problema lineal entero mixto, más fácil de resolver. Para ello a cada variable que intervenga en un producto se le asigna una variable binaria de cumplimiento ( $x_i \leq M\delta_i$ ) y luego se trabaja con esa variable binaria.

En la siguiente tabla se muestran algunas conversiones posibles. La primera columna indica los productos de variables que se desea modelar. En la siguiente la equivalencia para obtener las restricciones que se introducen en el problema de programación lineal, expresadas en la tercera columna.

| | | |
|---|---|---|
| $\delta_1\delta_2 = 0$<br>$\delta_i \in \{0,1\}$ | $\delta_1 = 0$ ó $\delta_2 = 0$ | $\delta_1 + \delta_2 \leq 1$<br>$\delta_i \in \{0,1\}$ |
| $\delta_1\delta_2$<br>$\delta_i \in \{0,1\}$ | Reemplazar $\delta_1\delta_2$ por $\delta_3$<br>$\delta_3 = 1 \leftrightarrow \delta_1 = 1$ y $\delta_2 = 1$ | $\delta_3 \leq \delta_1$<br>$\delta_3 \leq \delta_2$<br>$\delta_1 + \delta_2 \leq 1 + \delta_3$<br>$\delta_i \in \{0,1\}$ |
| $x\delta$<br>$x \geq 0$<br>$\delta \in \{0,1\}$ | Reemplazar $x\delta$ por $y$<br>$\delta = 0 \to y = 0$<br>$\delta = 1 \to y = x$ | $y \geq 0$<br>$y \leq M\delta$<br>$-x + y \leq 0$<br>$x - y + M\delta \leq M$<br>$x \leq M$ |

### III.1.11.2. Una aplicación: Modelo de asignación de grupos térmicos

El problema de la asignación de grupos térmicos de producción de electricidad consiste en la decisión de qué grupos térmicos hay que acoplar en cada hora del día (o semana) de manera que:

- Se minimicen los costes variables de generación (incluyendo costes de combustible y costes de arranque y parada)
- Se suministre la demanda en cada hora
- Se mantenga un cierto nivel de reserva rodante
- Se respeten los parámetros de funcionamiento de los grupos térmicos (mínimos técnicos, potencia nominal, rampas de subida y bajada)

Datos

$D_h$ demanda térmica en la hora *h* [MW]

$R$ coeficiente de reserva rodante con respecto a la demanda [p.u.]

$a_t$ término lineal del coste de combustible del grupo térmico *t* [€/MWh]

$b_t$ término fijo del coste de combustible del grupo térmico *t* [€/h]

$ca_t$ coste de arranque del grupo térmico *t* [€]

$cp_t$ coste de parada del grupo térmico *t* [€]

$\overline{P}_t$ potencia máxima del grupo térmico *t* [MW]

$\underline{P}_t$ potencia mínima del grupo térmico *t* [MW]

$rs_t$ rampa de subida del grupo térmico *t* [MW/h]

$rb_t$ rampa de bajada del grupo térmico *t* [MW/h]

Variables

$P_{ht}$ potencia producida por el grupo térmico *t* en la hora *h* [MW]

$A_{ht}$ acoplamiento del grupo térmico *t* en la hora *h* [0,1]

$AR_{ht}$ arranque del grupo térmico *t* en la hora *h* [0,1]

$PR_{ht}$ parada del grupo térmico *t* en la hora *h* [0,1]

$$\min \sum_{h=1}^{H} \sum_{t=1}^{T} \left( a_t P_{ht} + b_t A_{ht} + ca_t AR_{ht} + cp_t PR_{ht} \right)$$

$$\sum_{t=1}^{T} P_{ht} = D_h \qquad H$$
$$\sum_{t=1}^{T} (\overline{P}_t A_{ht} - P_{ht}) = RD_h \qquad H$$
$$\underline{P}_t A_{ht} \le P_{ht} \le \overline{P}_t A_{ht} \qquad 2HT$$
$$A_{ht} - A_{h-1t} = AR_{ht} - PR_{ht} \qquad (H-1)T$$
$$P_{ht} - P_{h-1t} \le rs_t \qquad (H-1)T$$
$$P_{h-1t} - P_{ht} \le rb_t \qquad (H-1)T$$

$$P_{ht} \ge 0 \;\; A_{ht}, AR_{ht}, PR_{ht} \in \{0,1\}$$

```
$TITLE ASIGNACIÓN HORARIA DE GRUPOS TÉRMICOS
SETS
T grupos térmicos /GALICIA, CATALUNA, MADRID, VALENCIA, EXTREMAD, ANDALUCI, CASTLEON/
H hora h /h1 * h5/

SCALAR
r porcentaje de reserva rodante sobre la demanda [p.u.] /0.2/

PARAMETERS
d(h) demanda cada hora [MW]
/h1 1000 , h2 1400 , h3 2400 , h4 2000 , h5 1000/
pmax(t) pot máxima de cada térmico [MW]
/GALICIA 400, CATALUNA 500, MADRID 700, VALENCIA 400, EXTREMAD 300, ANDALUCI 800, CASTLEON 800/
pmin(t) pot mínima de cada térmico [MW]
/GALICIA 100, CATALUNA 150, MADRID 150, VALENCIA 50, EXTREMAD 50, ANDALUCI 400, CASTLEON 200 /
rs(t) rampa de subida [MW por hora]
/GALICIA 200, CATALUNA 300, MADRID 500, VALENCIA 300, EXTREMAD 100, ANDALUCI 500, CASTLEON 400/
rb(t) rampa de bajada [MW por hora]
/GALICIA 300, CATALUNA 300, MADRID 200, VALENCIA 100, EXTREMAD 100, ANDALUCI 500, CASTLEON 400/
c(t)  coste lineal de producción [€ por MWh]
/GALICIA 4, CATALUNA 4, MADRID 4, VALENCIA 4, EXTREMAD 3, ANDALUCI 2, CASTLEON 7/
b(t)  coste fijo de producción [€]
/GALICIA 50, CATALUNA 30, MADRID 30, VALENCIA 25, EXTREMAD 30, ANDALUCI 80, CASTLEON 70/
ca(t) coste de arranque
/GALICIA 10, CATALUNA 20, MADRID 10, VALENCIA 15, EXTREMAD 20, ANDALUCI 10, CASTLEON 15/
cp(t) coste de parada
/GALICIA 5, CATALUNA 10, MADRID 5, VALENCIA 10, EXTREMAD 5, ANDALUCI 15, CASTLEON 10/
```

```
VARIABLES
CT      coste variable total del sistema [M€]
A(t,h)  acoplamiento del grupo t a las h horas [0-1]
AR(t,h) arranque     del grupo t a las h horas [0-1]
PR(t,h) parada       del grupo t a las h horas [0-1]
P(t,h)  generación producida por el grupo t a las h horas [MW]

BINARY VARIABLE A,AR,PR
POSITIVE VARIABLE P

EQUATIONS
COSTE         costes variables de generación-función objetivo [€]
DEMANDA(h)    abastecimiento de la demanda [MW]
RESERVA(h)    reserva rodante del sistema [MW]
COTASUP(t,h)  cota superior de producción del grupo t [MW]
COTAINF(t,h)  cota inferior de producción del grupo t [MW]
RAMPASUB(t,h) limitación de rampa de subida del grupo t [MW]
RAMPABAJ(t,h) limitación de rampa de bajada del grupo t [MW]
LOGICA(t,h)   relación lógica entre variables de acoplamiento arranque y parada ;

COSTE .. CT =E= SUM[(T,H), c(t)*P(t,h)+b(t)*A(t,h)+ca(t)*AR(t,h)+cp(t)*PR(t,h)] ;

DEMANDA(h) .. SUM[T, P(t,h)] =E= d(h) ;

RESERVA(h) .. SUM[T, A(t,h)*pmax(t)-P(t,h)] =G= d(h)*r;

COTASUP(t,h) .. P(t,h) =L= pmax(t)*A(t,h);

COTAINF(t,h) .. P(t,h) =G= pmin(t)*A(t,h);

RAMPASUB(t,h) .. P(t,h)-P(t,h-1) =L= rs(t);

RAMPABAJ(t,h) .. P(t,h-1)-P(t,h) =L= rb(t);

LOGICA(t,h) .. A(t,h)-A(t,h-1) =E= AR(t,h)-PR(t,h);

MODEL ASIGNA /COSTE,DEMANDA,RESERVA,COTASUP,COTAINF,RAMPASUB,RAMPABAJ,LOGICA/ ;

P.UP(t,h) = pmax(t)
OPTION OPTCR = 0

SOLVE ASIGNA USING MIP MINIMIZING CT
```

## III.1.12. Problemas de producción con elasticidad en los precios y/o costes

En algunos problemas de producción se puede suponer que hay una ganancia unitaria fija asociada a cada producto, con lo que la función objetivo de beneficio que se obtiene es lineal. Sin embargo, en otros problemas ciertos factores introducen no linealidades en la función objetivo. Por ejemplo, un gran fabricante puede encontrar *precios elásticos* mediante los cuales la cantidad que se puede vender de un producto va en relación inversa con el precio que se cobra. La curva precio-demanda, $p(x)$, que representa el precio unitario que se necesita para poder vender $x$ unidades, sería una función no lineal decreciente, nunca inferior al coste unitario de producción $c$.

Así el margen de contribución de la empresa (ingreso bruto menos coste de producción, beneficio neto, EBITDA) vendría determinado por

$$P(x) = xp(x) - cx$$

Si, además, la empresa tiene una función semejante para cada uno de los $n$ productos que puede fabricar la función objetivo global sería una suma de funciones no lineales.

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} P_j(x) = \sum_{j=1}^{n} \left[ x_j p_j(x_j) - c_j x_j \right]$$

Otra razón por la que pueden surgir no linealidades en la función objetivo es a causa de los costes de producción, ya que éstos pueden variar con el nivel de producción. Por ejemplo, el coste puede decrecer cuando aumenta el nivel de producción gracias al efecto de una *curva de aprendizaje* (mayor eficiencia con más experiencia) o aumentar por necesidad de tiempos extra o instalaciones más costosas.

Las restricciones también se pueden ver afectadas por estos tipos de no linealidades. Una que surge inmediatamente es la restricción de presupuesto, si existe, cuando los costes de producción varían como se ha descrito anteriormente. También serán funciones no lineales las asociadas a los recursos, siempre que el uso de un determinado recurso no sea proporcional a los niveles de los respectivos productos.

## III.1.13. Problema de transporte con descuentos por volumen

El problema de transporte que se ha considerado hasta el momento supone que el coste por unidad enviada de un origen a un destino dados es fijo, independientemente de la cantidad mandada. Sin embargo, una situación muy habitual es que se disponga de *descuentos por cantidad* para volúmenes grandes, con lo que la función de coste unitaria sería una función no lineal con pendiente no creciente. Una alternativa es aproximar esta función no lineal por una poligonal.

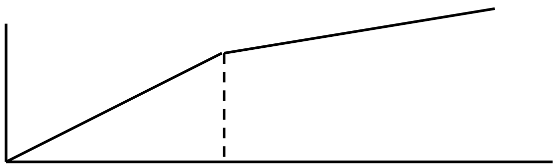
Así pues, el coste de embarcar $x$ unidades viene dado por una función *poligonal*, $C(x)$, continua, con pendiente en cada tramo igual al coste unitario de transporte. En consecuencia, si cada combinación de origen y destino tiene una función semejante, la función objetivo sería

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}(x_{ij})$$

Al ser una función poligonal cóncava en un problema de minimización se modelará introduciendo variables binarias de selección del segmento de la poligonal, y formulándolo como un problema lineal entero.

Sin embargo, hay que distinguir dos casos al hacer la formulación, según el descuento se aplique a todas las unidades si la cantidad supera un valor, o sólo a las que superan ese valor.

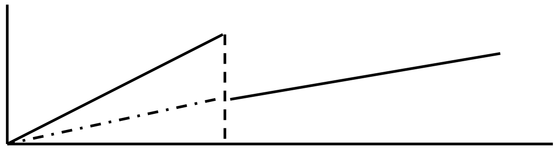
En el caso de que el descuento sólo se aplique a las cantidades que superan un valor, por ejemplo *k*, de modo que las *k* primeras siempre tienen un coste unitario *c* y las que sobrepasen a *k*, tengan un descuento siendo su coste unitario *c*-*a*, obsérvese que la función es continua:



El modelo para representar esta función, siendo *X* la variable pasa por dividir esta variable en dos, una hasta el valor *k* y otra para el exceso, obligando a que la segunda no sea distinta de cero mientras la otra no llegue al valor *k*:

$$\begin{aligned} \min \quad & cX_1 + (c-a)X_2 \\ & X = X_1 + X_2 \\ & \delta k \le X_1 \le k \\ & 0 \le X_2 \le \operatorname{cot} a\, \delta \\ & \delta \in \{0,1\} \end{aligned}$$

En el caso, de aplicarse el descuento a todas las unidades la función es discontinua:



Y el modelo, aún siendo también una descomposición en dos variables, es distinto, pues serán variables que no puedan ser distintas de cero a la vez:

$$\begin{aligned} \min \quad & cX_1 + (c-a)X_2 \\ & X = X_1 + X_2 \\ & 0 \le X_1 \le k\delta \\ & k(1-\delta) \le X_2 \le \cot a\,(1-\delta) \\ & \delta \in \{0,1\} \end{aligned}$$

## III.1.14. Selección de una cartera de inversiones

Actualmente, cuando se plantea la selección de una cartera de inversiones, los inversores se preocupan tanto por el rendimiento esperado como por el riesgo asociado a su inversión y para obtener un modelo que permita determinar una cartera que, con ciertas suposiciones, combine de forma óptima estos factores se utiliza la programación no lineal.

Supongamos que se están considerando $n$ tipos de acciones para incluirlas en la cartera; las variables de decisión $x_j$, $j=1,\ldots,n$ representan el número de acciones $j$ que se van a incluir. Sean $\mu_j$ y $\sigma_{jj}$ la media y la varianza del rendimiento sobre cada acción de tipo $j$, en donde $\sigma_{jj}$ es una medida del riesgo de estas acciones. Sea $\sigma_{ij}$ la covarianza del rendimiento sobre una acción de cada tipo $i$ y $j$. Entonces, el valor esperado $R(x)$ y la varianza $V(x)$ del rendimiento total de la cartera son

$$R(x) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j$$

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j$$

con lo que la función objetivo del modelo resultante es

$$f(x) = R(x) - \beta V(x)$$

donde $\beta$ se denomina factor de aversión al riesgo, ya que cuanto mayor sea mayor importancia (negativa) se le da en la función objetivo a la variabilidad (la volatilidad del rendimiento no es más que su desviación estándar) de la inversión final.

Como restricción se incluye la restricción del presupuesto y la no negatividad de las variables ($P_j$ representa el coste de cada acción de tipo $j$ y $B$ es el presupuesto):

$$\sum_{j=1}^{n} P_j x_j \le B$$

$$x_j \ge 0 \quad j=1,\ldots,n$$

### III.1.15. Problemas de sistemas de energía eléctrica

Un problema no lineal de sistemas de energía eléctrica muy característico es el flujo de cargas óptimo en corriente alterna AC. Se trata de minimizar los costes variables de operación de los grupos de generación sujeto al conjunto de restricciones de la red y a las restricciones de seguridad preventiva y/o correctiva. En este caso, tanto la función objetivo como las restricciones son no lineales. La función objetivo porque los costes de generación se suelen considerar cuadráticos en función de la producción. Las restricciones porque tanto la potencia activa como la reactiva son funciones no lineales del módulo y argumento de las tensiones en los nudos.

## III.2. Referencias

Hillier, F.S., Lieberman, G.J. (2002) *Investigación de Operaciones*. 7ª edición. McGraw Hill.

Nemhauser, G.L. and Wolsey, L.A. (1999) *Integer and Combinatorial Optimization*. John Wiley and Sons.

Williams, H.P. (1999) *Model Building in Mathematical Programming*. 4th Edition. John Wiley and Sons.

Wolsey, L.A. (1998) *Integer Programming*. John Wiley and Sons.

## III.3. Biblioteca de problemas

PROBLEMA: DISTRIBUCIÓN DE GASÓLEO

Una empresa de distribución de gasóleo dispone de tres depósitos D1, D2 y D3 donde guarda el gasóleo y desde los que abastece a cuatro estaciones de servicio, E1, E2, E3 y E4. En la tabla se muestra la capacidad máxima de almacenamiento de cada depósito, la demanda máxima de cada punto de venta y las capacidades máximas de transporte en las posibles rutas entre depósitos y estaciones de servicio.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Capacidad |
|---|---|---|---|---|---|
| D1 | 80 | – | 70 | – | 150 |
| D2 | – | 60 | 90 | 85 | 300 |
| D3 | 40 | 60 | – | 50 | 250 |
| Demanda | 130 | 200 | 150 | 250 | |

Además, cada unidad que se envíe a las gasolineras le supone un beneficio de 7 u.m. y los envíos se llevan a cabo en camiones cuya capacidad es de 20 unidades cada uno, con un coste estimado por camión en cada una de las rutas de:

| Costes (u.m.) | E1 | E2 | E3 | E4 |
|---|---|---|---|---|
| D1 | 100 | – | 125 | – |
| D2 | – | 100 | 125 | 100 |
| D3 | 75 | 100 | – | 125 |

Formular y resolver un problema para determinar el plan de rutas óptimo que maximice el beneficio de la empresa.

### PROBLEMA: CONDUCTORES DE METRO

La Compañía Metropolitana de Transporte (CMT) explota el metro de la ciudad y planifica la asignación de turnos de su personal de operación. El convenio laboral exige que cada conductor disponga de dos días libres consecutivos por semana. La demanda de conductores para operar los trenes varía dependiendo del día, siendo, de lunes a domingo, de 18, 16, 15, 16, 19, 14 y 12 conductores respectivamente. El coste de personal varía a lo largo de la semana. Para un día cualquiera de lunes a viernes el coste es de 50 € por día, los sábados se pagan a 75 y los domingos a 90. Además se puede recurrir a la contratación parcial de hasta 3 personas que trabajarían los viernes, sábados y domingos por un coste de 200 €. Determinar el esquema óptimo de turnos de trabajo de dichos conductores.

### PROBLEMA: PRODUCCIÓN

Una empresa puede fabricar 4 productos diferentes utilizando en su elaboración 5 tipos de materias primas. Las unidades requeridas de cada materia prima por cada unidad de cada producto se recogen en la tabla siguiente, así como el precio de venta de cada producto y la disponibilidad de cada materia prima:

| | M1 | M2 | M3 | M4 | M5 | Precio venta |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P1 | 1 | 1 | | 1 | | 15 |
| P2 | | 1 | | 1 | 1 | 20 |
| P3 | 1 | 1 | 1 | | | 15 |
| P4 | 1 | | 1 | | | 10 |
| Disponible | 200 | 150 | 150 | 200 | 100 | |

El precio unitario de cada materia prima es de 2, 3, 4, 5 y 5, respectivamente, pero hay un coste adicional por hacer un pedido de cada materia prima, independiente de la cantidad que se pida, de 20, 25, 20, 25, 25 unidades, respectivamente. Determinar el plan de producción óptimo para maximizar los beneficios de la empresa.

### PROBLEMA: AYUDA EN EMERGENCIAS

Tienen que transportarse sacos con alimentos mediante tres tipos de aviones A1, A2, A3, desde un aeropuerto y arrojarse en las aldeas V1, V2, V3, V4, V5, afectadas por inundaciones. La cantidad de alimentos (en unidades adecuadas) que cada avión puede transportar a cada aldea en cada viaje, se da en la siguiente tabla. El número de viajes que puede hacer cada avión se da en la última columna y el número máximo de aviones que puede recibir diariamente cada aldea en la última fila. Encontrar el número de viajes que deberá hacer cada avión a cada aldea de forma que se maximice la cantidad de alimento distribuido por día.

| | V1 | V2 | V3 | V4 | V5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A1 | 10 | 8 | 6 | 9 | 12 | 50 |
| A2 | 5 | 3 | 8 | 4 | 10 | 90 |
| A3 | 7 | 9 | 6 | 10 | 4 | 60 |
| | 100 | 80 | 70 | 40 | 20 | |

### PROBLEMA: CONSTRUCCIÓN DE ALMACENES

Una compañía planea construir varios almacenes para guardar un cierto producto. Estos almacenes surtirán a dos grandes clientes con las unidades demandadas mensualmente apuntadas en la última fila de la tabla. Se pueden construir hasta tres almacenes, que se tienen como candidatos, con capacidades expresadas en la última columna. Usando el coste estimado de construcción de los almacenes, su vida útil y el valor del dinero en el tiempo, los costes de construcción por mes para los tres almacenes se han estimado en 8000, 12000 y 7000. A continuación se dan los costes de transporte por unidad desde los tres almacenes candidatos a los clientes.

| | Cliente 1 | Cliente 2 | Capacidad |
|---|---|---|---|
| Almacén 1 | 1.50 | 2.00 | 4000 |
| Almacén 2 | 2.00 | 1.50 | 5000 |
| Almacén 3 | 2.50 | 2.25 | 6000 |
| Demanda | 3000 | 5000 | |

Determinar qué almacenes se deben construir y cómo se ha de satisfacer la demanda de los clientes.

### PROBLEMA: TRANSPORTE DE ELECTRODOMÉSTICOS

Una compañía tiene dos fábricas, una en Alicante y otra en Huelva. Las dos fábricas producen frigoríficos y lavadoras. Las capacidades de producción de estos artículos en Alicante son de 5000 y 7000, respectivamente, y en Huelva de 8000 y 4000. La compañía entrega estos productos a tres grandes clientes en las ciudades de Barcelona, A Coruña y Valencia, siendo las demandas:

| Demanda/Cliente | Barcelona | A Coruña | Valencia |
|---|---|---|---|
| Frigoríficos | 4000 | 5000 | 4000 |
| Lavadoras | 3000 | 3000 | 4000 |

Los artículos se transportan por ferrocarril. En la tabla siguiente se muestran los costes unitarios de transporte y las limitaciones para enviar cualquiera de los dos productos de cada fábrica a cada cliente:

| | | Barcelona | A Coruña | Valencia |
|---|---|---|---|---|
| Alicante | Coste unitario | 6 | 14 | 7 |
| | Máximo unidades | 6000 | 3000 | 7500 |
| Huelva | Coste unitario | 10 | 8 | 15 |
| | Máximo unidades | 3000 | 9000 | 3000 |

Se desea minimizar el coste total de transporte.

### PROBLEMA: LOGÍSTICA

Una empresa tiene dos factorías, F1 y F2, con las que abastece a tres almacenes de distribución, D1, D2 y D3, de dos artículos, A1 y A2.

Los costes de transporte de una unidad de cualquiera de los dos artículos desde cada factoría a cada almacén se dan en la tabla izquierda, en tanto que los precios de venta unitarios de cada artículo en cada almacén se dan en la tabla derecha.

| Coste Tr | D1 | D2 | D3 |
|---|---|---|---|
| F1 | 4 | 7 | 5 |
| F2 | 6 | 5 | 7 |

| Precio | D1 | D2 | D3 |
|---|---|---|---|
| A1 | 17 | 20 | 18 |
| A2 | 19 | 17 | 21 |

El tiempo, expresado en minutos, que se tarda en fabricar una unidad de cada artículo en cada una de las factorías se refleja en la tabla izquierda, en tanto que los costes unitarios de fabricación de cada artículo en cada factoría aparecen en la tabla derecha.

| Tiempo | A1 | A2 |
|---|---|---|
| F1 | 6 | 7.5 |

| Coste Fb | A1 | A2 |
|---|---|---|
| F1 | 8 | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| F2 | 10 | 5 |

| | | |
|---|---|---|
| F2 | 5 | 10 |

La capacidad de producción de la factoría 1 es de 260 horas y la de la factoría 2 de 240 horas.

Las demandas mínimas de cada uno de los artículos que en cada almacén deben ser satisfechas son expresadas en la tabla siguiente.

| | D1 | D2 | D3 |
|---|---|---|---|
| A1 | 600 | 800 | 500 |
| A2 | 700 | 500 | 1200 |

Por último y por cuestiones de tipo técnico y de política de empresa, nunca se pueden producir en cualquiera de las factorías más de 500 unidades de un artículo que de otro.

Se trata de elaborar un modelo que proporcione el mejor programa de producción y distribución para maximizar el beneficio neto.

¿Se modifica la solución si el tiempo de ejecución de A2 en F1 se reduce en medio minuto?

## PROBLEMA: GESTIÓN DE AUTOBUSES

En una ciudad se intenta disminuir la contaminación reduciendo la circulación interurbana. Un primer estudio busca determinar el mínimo número de autobuses que satisfagan las necesidades de transporte. Después de recoger la información se observa que este número varía según la hora del día, pero se puede considerar constante en intervalos sucesivos de cuatro horas:

| | |
|---|---|
| 00:00 a.m. – 4:00 a.m. | 4 |
| 4:00 a.m. – 8:00 a.m. | 8 |
| 8:00 a.m. – 12:00 m. | 10 |

| | |
|---|---|
| 12:00 m. – 4:00 p.m. | 7 |
| 4:00 p.m. – 8:00 p.m. | 12 |
| 8:00 p.m. – 00:00 a.m. | 4 |

Los turnos de autobuses funcionan durante ocho horas seguidas y pueden comenzar al principio de cualquiera de los seis periodos descritos anteriormente. Además, si en el turno que comienza a las 8:00 p.m. hay estrictamente más de 4 autobuses, en el siguiente ha de haber también estrictamente más de 4. Plantear un problema de programación lineal entera para determinar el mínimo número de autobuses diario que satisface las necesidades anteriores.

## PROBLEMA: ADQUISICIÓN DE CAMIONES

Una compañía de transportes tiene 10 camiones con capacidad 40000 kg y 5 camiones de 30000 kg. Los camiones grandes tienen un coste variable de combustible de 0.30 €/km y los pequeños de 0.25 €/km.

En una semana la empresa debe transportar 400000 kg en un recorrido de 800 km. La posibilidad de otros compromisos recomienda que por cada dos camiones pequeños mantenidos en reserva debe quedarse por lo menos uno de los grandes.

¿Cuál es el número óptimo de camiones de ambas clases que deben movilizarse para ese transporte y teniendo en cuenta las restricciones?

### PROBLEMA: PLANIFICACIÓN DEL METRO

En una determinada ciudad se va a construir la red del metro. La empresa encargada ha de decidir qué líneas construir y para ello tiene varias opciones. Existen 10 puntos claves por los que ha de pasar la red y se ha visto que son 8 las posibles líneas a construir. Las líneas posibles, los puntos clave por los que pasaría cada una y su coste estimado de construcción en unidades apropiadas, son:

| | Puntos clave | Coste |
|---|---|---|
| L1 | P1 P2 P3 P4 | 4 |
| L2 | P1 P3 P5 P7 | 4 |
| L3 | P2 P3 P4 P6 | 4 |
| L4 | P5 P7 P9 P10 | 4 |
| L5 | P2 P7 P8 | 3 |
| L6 | P1 P4 P5 P10 | 4 |
| L7 | P3 P8 P9 | 3 |
| L8 | P2 P6 P10 | 3 |

Además, por el punto P2 han de pasar al menos dos líneas; y, si los puntos P3 y P7 no quedan conectados por una línea directa, entonces debe existir un transbordo en P8 de modo que pase una línea que una este punto con el P3 y otra con el P7. Plantear como un problema de programación lineal entera el problema de decidir qué líneas construir de la forma más económica con estas restricciones teniendo en cuenta que por cada punto clave debe pasar al menos una línea.

### PROBLEMA: OFICINA DE CORREOS

Una oficina de correos necesita distinto número de empleados de jornada completa para cada día de la semana, tal como se da en la tabla adjunta. Las reglas sindicales señalan que cada empleado de jornada completa tiene que trabajar durante cinco días consecutivos y, a continuación, descansar dos días. Por ejemplo, un empleado que trabaje de lunes a viernes tiene que descansar sábado y domingo. La oficina de correos quiere cumplir con sus requerimientos diarios y utilizar sólo empleados de jornada completa. Formular mediante programación matemática un modelo que pueda utilizar la oficina de correos para minimizar el número de empleados de jornada completa a contratar.

| | Empleados |
|---|---|
| Lunes | 17 |
| Martes | 13 |
| Miércoles | 15 |
| Jueves | 19 |
| Viernes | 14 |
| Sábado | 16 |
| Domingo | 11 |

### PROBLEMA: ABASTECIMIENTO

Una empresa abastecedora de agua tiene que llevar agua de un punto  a un punto $t$ y para realizar la conexión entre ambos puntos ha de pasar por unos puntos intermedios. Cada conexión entre un par de puntos tiene un coste estimado de construcción y, una vez construida, un coste unitario de envío de cada litro y una capacidad por hora que se recogen en la siguiente tabla:

| Conexión | Coste construcción | Coste envío l/min | Capacidad l/min |
|---|---|---|---|
| $s$–1 | 100000 | 40 | 100 |
| $s$–2 | 200000 | 50 | 200 |
| 1–3 | 80000 | 60 | 50 |
| 1–$t$ | 100000 | 70 | 30 |
| 2–3 | 200000 | 40 | 20 |
| 2–$t$ | 200000 | 70 | 100 |
| 3–$t$ | 150000 | 60 | 60 |

Plantear un problema de programación matemática si se quieren enviar 180 litros por minuto de la forma más económica posible, teniendo en cuenta que si se construye la conexión de $s$ a 2 ha de hacerse la de 2 a $t$.

### PROBLEMA: ADQUISICIÓN DE MÁQUINAS TROQUELADORAS

Una compañía tiene tres tipos de máquinas troqueladoras de diferente velocidad y precisión:

| | Velocidad (piezas/hora) | Precisión (%) | Coste (€/hora) |
|---|---|---|---|
| Tipo 1 | 20 | 99 | 2.00 |
| Tipo 2 | 15 | 95 | 1.75 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Tipo 3 | 10 | 99 | 1.50 |

Cada día (8 horas) se deben procesar por lo menos 3500 piezas y hay disponibles 8 máquinas del tipo 1, 10 del tipo 2 y 20 del tipo 3.

Si cada pieza errónea le cuesta a la compañía 1 céntimo. ¿Cuántas máquinas de cada tipo se deben utilizar para minimizar los costes?

## PROBLEMA: SECUENCIACIÓN DE TRABAJOS EN UNA MÁQUINA

Dados unos trabajos que realizar, una duración de éstos y una fecha de entrega prevista, plantear un problema de programación lineal entera para encontrar la secuencia que minimiza el retraso o demora media con que los trabajos son entregados, con los siguientes datos:

| Tarea | T1 | T2 | T3 | T4 |
|---|---|---|---|---|
| Tiempo de proceso | 9 | 12 | 7 | 14 |
| Fecha de entrega | 15 | 19 | 23 | 31 |

## PROBLEMA: PRODUCCIÓN II

En una empresa familiar se producen dos tipos de productos, 1 y 2, procesando materia prima. Se pueden comprar hasta 90 kg de materia prima a un coste de 10 €/kg. Se puede usar 1 kg de materia prima para producir 1 kg de producto 1 o para producir 1/2 kg del producto 2. Usar 1 kg de materia prima para producir el producto 1 requiere 2 horas de mano de obra. Usar 1 kg de materia prima para procesar el producto 2 requiere 3 horas de mano de obra. Se dispone de 300 horas de mano de obra a 3 €/hora. Se pueden vender a lo sumo 40 kg del producto 2. El producto 1 se vende a 29 €/kg y el producto 2 a 69 €/kg.

Además existe una limitación inferior y superior en caso de que se produzca alguna cantidad de cada artículo. Es decir, si se produce algo del producto 1 ha de ser más de 15 y menos de 30 kg y si se produce algo del producto 2 ha de ser más de 10 y menos de 20 kg. Plantear el problema y obtener la solución óptima.

## PROBLEMA: PRODUCCIÓN E INVENTARIO

Una empresa desea planear su política de producción/inventario para los meses de agosto, septiembre, octubre y noviembre. La demanda estimada del producto para esos meses es de 500, 600, 800 y 1000 unidades, respectivamente. En la actualidad, la capacidad de producción mensual es de 600 unidades con un coste de 2500 €. La administración ha decidido instalar un nuevo sistema de producción con capacidad mensual de 1100 unidades a un coste por unidad de 3000 €. Sin embargo, el nuevo sistema no puede ser instalado hasta noviembre. Supóngase que el inventario inicial es de 250 unidades y que, durante cualquier mes dado, se pueden almacenar a lo sumo 400 unidades. Si el coste mensual por unidad por mantener en inventario es de 300 €, minimizar el coste total de producción e inventario. Suponer que se debe satisfacer la demanda y que se requiere tener 100 unidades en inventario al final de noviembre.

### PROBLEMA: MISIÓN PACÍFICA

En una misión pacífica de las Naciones Unidas se dispone de 5 aviadores para formar las tripulaciones de dos aviones biplaza. Estos aviadores son de distintas nacionalidades: Español, Francés, Italiano, Griego y Portugués. Como en toda cuestión diplomática las relaciones internacionales son de gran peso, cada una de las distintas composiciones de las tripulaciones conlleva un beneficio, siendo éstos:

| | Francés | Italiano | Griego | Portugués |
|---|---|---|---|---|
| Español | 2 | 5 | 4 | 3 |
| Francés | | 4 | 4 | 2 |
| Italiano | | | 5 | 4 |
| Griego | | | | 3 |

Por otra parte, estas mismas relaciones internacionales hacen que si una tripulación está formada por el aviador español y el italiano la otra ha de estar formada por el aviador francés y el griego. Formular el problema de programación lineal entera.

### PROBLEMA: MEZCLA DE CRUDO

La empresa Sunco Oil produce dos tipos de gasolina (1 y 2), cada una de ellas mezclando dos tipos de crudo (1 y 2). Los precios de venta de cada barril de gasolina son 7000 y 6000 €, respectivamente. Por su parte, los precios de compra de los dos tipos de crudo son de 4500 y 3500 € por barril, respectivamente. Se pueden comprar hasta 5000 barriles de cada crudo diarios. Los dos tipos de gasolina difieren en su índice de octano y en su contenido en azufre. La mezcla del petróleo crudo que se utiliza para obtener la gasolina 1 ha de tener un índice de octano promedio de al menos 10 y a lo sumo un 1 % de azufre. La mezcla que se obtiene para la gasolina 2 ha de tener un índice promedio de octano de por lo menos 8 y a lo sumo un 2 % de azufre. Los índices de octano y el contenido en azufre de los dos tipos de crudo son:

| Crudo | Octano | Azufre |
|---|---|---|
| 1 | 12 | 0.5 |
| 2 | 6 | 2.0 |

La transformación de un barril de petróleo en un barril de gasolina cuesta 400 € y la refinería de Sunco puede producir diariamente hasta 9000 barriles de gasolina.

Los clientes de Sunco actualmente demandan 3000 barriles de la gasolina 1 y 2000 de la gasolina 2. Sin embargo, Sunco tiene la posibilidad de estimular la demanda mediante la publicidad, de modo que cada euro invertido en la publicidad de cada tipo de gasolina, aumenta la demanda diaria de ese tipo de gasolina en 0.1 barriles (si por ejemplo gasta 1000 € en publicidad de la gasolina 1 aumenta la demanda de gasolina 1 en 100 barriles). Formular un problema de programación lineal que permita a Sunco maximizar sus ganancias diarias.

### PROBLEMA: PRODUCCIÓN VI

Una planta de producción dispone de $m$ máquinas para llevar a cabo su producción. La demanda semanal del producto es conocida para las siguientes $n$ semanas, $dem_j$ siendo cada una de las semanas, y ha de ser satisfecha. Cada una de las máquinas $i$ puede estar arrancada y produciendo durante cada semana o no, pero si lo está tiene un coste fijo por estar arrancada de $cf_i$ €, siendo su producción máxima $pm_i$. Además, el coste unitario de producción con cada una de las máquinas es variable con las semanas, siendo $cv_{ij}$ € por unidad de producto, y el coste de almacenamiento de una semana a otra está estimado en $calm$ € por unidad de producto. Por otra parte, arrancar una máquina para acoplarla una semana si no lo estaba la anterior tiene un coste de arranque $carr_i$. Se supone que todas las máquinas inicialmente están arrancadas (no hay coste de arranque para la primera semana).

a) Plantear un modelo lineal para optimizar la planificación de la producción siendo el horizonte de planificación las $n$ semanas.

b) Sobre la formulación anterior supóngase ahora que cuando una máquina para, ha de hacerlo al menos dos semanas consecutivas por razones técnicas, ¿cómo se modelaría esta nueva condición?

### PROBLEMA: TRANSPORTE POR FERROCARRIL

Una empresa de transporte opera en una línea ferroviaria con un determinado material rodante que puede transportar un volumen máximo $V$ y un peso máximo $P$ de mercancías, transportando distintas mercancías de otras empresas. Para un determinado día dispone de distintas solicitudes de mercancías, de modo que de cada mercancía $i$ conoce la cantidad máxima a transportar $mx_i$, el volumen y peso $p_i$ unitarios, el pago que el propietario de la mercancía está dispuesto a pagar a la empresa por cada unidad transportada, $b_i$, y el coste que estima la empresa por cada unidad a transportar, $c_i$. La empresa de transporte desea tener un modelo que le permita elegir cada día las cantidades de las mercancías que le proporcionen mayor beneficio a partir de estos datos diarios.

A su vez, puede variar la capacidad del material rodante, tanto en volumen o peso, de modo que desea saber en cuánto puede valorar cada unidad extra de volumen y de peso de la que puede disponer, para saber cuánto puede estar dispuesto a pagar por un aumento de éstos.

Por otra parte, a los propietarios de las mercancías que no son transportadas, puede y debe informarles de la cantidad en la que deberían aumentar su oferta para que su mercancía fuera transportada (en detrimento de otras).

a) Presentar un modelo lineal para este problema, suponiendo que las cantidades se pueden fraccionar. ¿Qué elementos del modelo darías como resultado para responder a las distintas preguntas planteadas?

b) Supóngase ahora que la oferta conlleva un descuento por volumen de modo que la cantidad que un propietario paga por cada unidad es de la forma $a_i - g_i x_i$, donde $x_i$ es la cantidad transportada. Plantear el nuevo modelo.

c) Sobre el planteamiento del apartado a), supóngase que lo que hay es una capacidad de volumen y peso por vagón, $\overline{V}$ y $\overline{P}$, y que hay que decidir además de cuánto transportar, cuántos vagones hay que enganchar, existiendo un coste unitario por vagón utilizado, $cvag$. Plantear el nuevo modelo.

### PROBLEMA: EDICIÓN DE CDS

Una compañía discográfica está pensando en editar una colección de grandes éxitos de uno de sus cantantes más famosos. Todas sus canciones han sido agrupadas en doce lotes. Cada lote ocupa tiene un cierto tamaño expresado en MB y tiene asociado un índice de marketing (relacionado con su demanda esperada).

| Lote | Tamaño | Índice marketing |
|---|---|---|
| 1 | 350 | 15 |
| 2 | 300 | 32 |
| 3 | 160 | 20 |
| 4 | 310 | 25 |
| 5 | 260 | 35 |
| 6 | 250 | 10 |
| 7 | 400 | 40 |
| 8 | 100 | 34 |
| 9 | 520 | 24 |

| | | |
|---|---|---|
| 10 | 170 | 16 |
| 11 | 300 | 36 |
| 12 | 360 | 26 |

Los lotes van a ser grabados en una serie de CDs, cada uno con una capacidad máxima de 700 MB. Además, para que el CD funcione en el mercado, se estima que debe tener un índice de marketing superior a 45. Por otro lado, y dado el contenido de sus canciones, los lotes 1, 2 y 3 se han de grabar en CDs distintos. El objetivo de la compañía es maximizar el número de CDs editados, utilizando todos los lotes de canciones y sin editar más de una vez el mismo lote.

### PROBLEMA: VUELOS CHARTER

Una compañía aérea tiene una flota de 15 aeronaves: 5 de cada uno de tres tipos A, B y C, cuyas respectivas capacidades para el transporte de viajeros son de 80, 68 y 55 personas. Una agencia de viajes le solicita presupuesto para trasladar a 372 personas. La compañía analiza sus costes, que dependen del número de aviones de cada tipo que quiera utilizar para transportar a esas personas, datos que se dan en la siguiente tabla en miles de euros

| Tipo | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 11 | 20 | 30 | 40 | 50 |
| B | 9 | 17 | 24 | 34 | 45 |
| C | 8 | 15 | 21 | 26 | 31 |

Además la compañía aérea incurre en un coste fijo adicional de 6 k€ por cada tipo de aviones que utilice.

Proponer un modelo de programación lineal entera cuyo objetivo sea determinar la composición óptima de la flotilla de aviones que va a realizar el transporte para minimizar los costes de la operación.

### PROBLEMA: PROVEEDORES

Tres almacenes deben abastecer a cuatro mercados de cierto número de unidades de un producto. Los costes unitarios de transporte (en €), las existencias en los almacenes y las necesidades de los mercados se dan en la tabla siguiente.

| | M1 | M2 | M3 | M4 | Existencias en almacenes |
|---|---|---|---|---|---|
| A1 | 6 | 7 | 9 | 5 | 220 |
| A2 | 7 | 10 | 9 | 6 | 350 |
| A3 | 5 | 8 | 7 | 5 | 270 |
| Demandas en mercados | 80 | 90 | 100 | 135 | |

Cuando un almacén abastece a un mercado ha de firmar un contrato para establecerse como proveedor del mercado, de modo que ha de pagar una cantidad por el único hecho de ser proveedor, establecida en 100 €. La demanda de los mercados ha de ser satisfecha.

1. Establecer un programa lineal entero que permita obtener el plan de abastecimiento más económico.
2. Sobre el planteamiento anterior, si de un almacén cualquiera se envía a todos los mercados un total de menos de 100 unidades, sus costes unitarios de la tabla anterior se incrementan en 2 €, es decir, el coste unitario de la tabla es para todas las unidades enviadas desde un almacén a un mercado si la cantidad total que el almacén envía es mayor o igual que 100. Establecer un programa lineal entero que permita obtener el plan de abastecimiento más económico.

### PROBLEMA: COMPOSICIÓN DE PIENSO

Un pequeño ganadero alimenta sus reses con una mezcla de dos piensos compuestos, P1 y P2, que él mismo elabora, y en los que es posible encontrar tres nutrientes N1, N2 y N3, de acuerdo con lo reflejado en la tabla, donde se da el contenido, en gramos, de cada nutriente por kilo de pienso compuesto.

| | N1 | N2 | N3 | Aditivos |
|---|---|---|---|---|
| P1 | 100 | 300 | 400 | 200 |
| P2 | 200 | 250 | 300 | 250 |

Los costes de fabricación de un kilo de cada pienso son de 0.3 € para P1 y de 0.36 € para P2. Las necesidades diarias de una res respecto a los nutrientes considerados son:

- N1: entre 250 y 300 gramos, con una cantidad óptima de 250 gramos
- N2: entre 325 y 460 gramos, con una cantidad óptima de 400 gramos
- N3: entre 450 y 600 gramos, con un óptimo de 500 gramos.

La desviación, en más o en menos, de la cantidad de nutrientes proporcionados a una res respecto al valor óptimo antes indicado requiere un tratamiento compensatorio, con costes de 0.01 € por gramo, en el caso de N1, 0.005 € por gramo en el caso de N2 y de 0.008 € por gramo en el caso de N3.

1. Plantear un modelo de programación lineal para determinar qué cantidad de cada pienso hay que proporcionar a cada res para minimizar el coste de alimentación
2. Además, si la cantidad utilizada de P1 fuera estrictamente mayor que el doble de la de P2 el coste de P1 se incrementaría en 0.05 €/kg. Modificar el modelo anterior añadiendo este supuesto y sin que deje de ser lineal.

## PROBLEMA: EXPLOTACIONES GANADERAS

En dos explotaciones ganaderas G1 y G2 se crían vacas y cerdos, con los cuales se intenta satisfacer las demandas de tres mataderos industriales M1, M2 y M3.

Las disponibilidades y demandas actuales de vacas y cerdos en explotaciones y mercados, así como los costes de transporte unitarios entre ellos, en €, se resumen en las siguientes tablas.

| | Vacas | | | | Cerdos | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | M1 | M2 | M3 | Disponibilidad | M1 | M2 | M3 | Disponibilidad |
| G1 | 25 | 21 | 20 | **25** | 6 | 7 | 8 | **130** |
| G2 | 27 | 19 | 25 | **32** | 8 | 6 | 7 | **100** |
| Demanda | **17** | **6** | **22** | | **45** | **85** | **76** | |

En cada explotación hay 6 vehículos especialmente adaptados para el transporte de vacas y 8 para el de cerdos. Un vehículo para vacas tiene una capacidad en volumen de 100 unidades y uno para cerdos tiene una capacidad de 80 unidades de volumen. Con independencia de la explotación ganadera y del matadero entre los que puedan hacer un viaje, el uso de un camión para vacas tiene un coste fijo de 200 €, además del coste directamente asociado a las vacas transportadas. Por lo que hace a los camiones para cerdos, dicho coste fijo es de 165 €.

Una vaca ocupa 12 unidades de volumen y un cerdo 3.

1. Elaborar un modelo de programación lineal entera que satisfaga las demandas de los mataderos con un coste de transporte mínimo.
2. Supóngase ahora que también es posible, si conviene, transportar cerdos en un camión para vacas, aunque ello supone ciertas adaptaciones que incrementan el coste unitario de transporte de los cerdos en 2 €. De la misma forma, es posible transportar vacas en los vehículos para cerdos, con un coste unitario adicional de 10 €. Suponinedo que en un camión pueden ir vacas o cerdos simultáneamente, elaborar un modelo de programación lineal entera que satisfaga las demandas de los mataderos con un coste de transporte mínimo.

## PROBLEMA: CORTE DE BOBINAS

La empresa EIVISSA se dedica a la fabricación de bobinas madre de plástico con un ancho de 6000 mm. Sus clientes son empresas de envasado cuyos pedidos son bobinas hija de anchos inferiores, tal como aparecen en la siguiente tabla:

| Pedido | Anchura [mm] | Fecha de entrega [horas] |
|---|---|---|
| 1 | 1500 | 6 |
| 2 | 1200 | 10 |
| 3 | 800 | 7 |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 750 | 8 |
| 5 | 915 | 8 |
| 6 | 315 | 10 |
| 7 | 1450 | 5 |
| 8 | 650 | 4 |
| 9 | 725 | 7 |
| 10 | 1800 | 12 |

Se trata de plantear un modelo de optimización para determinar los cortes a realizar en las bobinas madre para satisfacer los pedidos de bobinas hija con estas posibles diferentes funciones objetivo alternativas:

1. Plantear el modelo de optimización completo para minimizar el número total de bobinas madre necesitadas
2. Minimizar la suma del desperdicio lateral sobrante de todas las bobinas
3. Minimizar la suma de los retrasos de cada pedido con respecto a las fechas de entrega teniendo en cuenta que el corte de una bobina madre en bobinas hija dura 6 horas y que sólo se dispone de una máquina de corte de bobinas madre por lo que el corte de cada bobina se hace consecutivamente

## PROBLEMA EMPRESA DISTRIBUIDORA

Una empresa distribuidora tiene dos almacenes centrales en las ciudades C1 y C2 desde los que abastece a tres centros de distribución situados en D1, D2 y D3. Desde estos centros de distribución se aprovisionan a cuatro mercados M1, M2, M3 y M4.

Sean $e_1$ y $e_2$ las existencias en los almacenes centrales y $d_1$, , $d_3$ y $d_4$ las demandas de los mercados. El coste de transporte unitario desde el almacén central al centro de distribución $j$ es $c_{ij}$ y el de transportar una unidad desde el centro de distribución $j$ al mercado $k$ es $w_{jk}$. Cada unidad del artículo tiene un peso $p$.

1. Elaborar un modelo de programación lineal que permita satisfacer las demandas de los mercados al menor coste.
2. ¿Cómo se modifica dicho modelo si M1 no puede ser aprovisionado simultáneamente desde D1 y D2?
3. ¿Qué modificación adicional hay que introducir cuando el coste unitario de transporte entre un centro de distribución y un mercado cualesquiera de todas las unidades que excedan de un mínimo $m$, y sólo de ellas, se reduce en una cantidad $h$?

4. ¿Qué nueva modificación experimenta el modelo si las unidades se transportan en camiones que pueden transportar un peso máximo $P$, tal que $P$ no es múltiplo de $p$? El coste de cada camión es independiente del trayecto realizado y asciende a la cantidad $C$. Este coste se añade al coste unitario de transporte de las unidades.

# III.4. Resultados de la biblioteca de problemas

RESULTADO DEL PROBLEMA DISTRIBUCIÓN DE GASÓLEO

$X_{ij}$: cantidad enviada de depósito i a estación j

$Y_{ij}$: camiones usados de depósito i a estación j

$$
\begin{aligned}
\max \; & \sum_{i,j} \left( 7X_{ij} - c_{ij} Y_{ij} \right) \\
s.a. \; & \sum_{j} X_{ij} \le cap_i \quad \forall i \\
& \sum_{i} X_{ij} \le dem_j \quad \forall j \\
& X_{ij} \le capac_{ij} \quad \forall i, j \\
& X_{ij} \le 20 Y_{ij} \quad \forall i, j \qquad X_{ij}, Y_{ij} \ge 0, Y_{ij} \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Objetivo: 825

| Cantidades | E1 | E2 | E3 | E4 |
|---|---|---|---|---|
| D1 | 80 | 0 | 60 | 0 |
| D2 | 0 | 60 | 80 | 80 |
| D3 | 40 | 60 | 0 | 40 |

| Camiones | E1 | E2 | E3 | E4 |
|---|---|---|---|---|
| D1 | 4 | 0 | 3 | 0 |
| D2 | 0 | 3 | 4 | 4 |
| D3 | 2 | 3 | 0 | 2 |

RESULTADO DEL PROBLEMA CONDUCTORES DE METRO

$X_i$: número de conductores que empiezan su turno el día i

$T_i$: conductores que trabajan el día i

$Y$: número de personas contratadas a tiempo parcial

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_i c_i T_i + 200Y \\
s.a. \quad & T_i = \sum_{j \ne i+1, i+2} X_j \ge nec_i \quad \forall i \ne 5,6,7 \\
& T_i = \sum_{j \ne i+1, i+2} X_j + Y \ge nec_i \quad \forall i = 5,6,7 \\
& Y \le 3 \\
& X_i, T_i, Y \ge 0
\end{aligned}
$$

| L | M | X | J | V | S | D | Extra |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 2 | 2 | 4 | 3 | 3 | 0 | 0 |

COSTE: 6730

RESULTADO DEL PROBLEMA PRODUCCIÓN

$X_i$ : unidades producidas de producto Pi

$$M_j : \begin{cases} 1 & \text{si pide materia prima j} \\ 0 & \text{si no pide materia prima j} \end{cases}$$

$$\max \sum_i pv_i X_i - \sum_{i,j} a_{ij} c_j X_i - \sum_j f_j M_j$$

$$s.a. \quad \sum_i a_{ij} X_i \le disp_j M_j \quad \forall j$$

$$X_i \ge 0, M_j \in \{0,1\}$$

| Beneficio | 1435 |
|---|---|
| P1 | 50 |
| P2 | 100 |
| P3 | 0 |
| P4 | 150 |

RESULTADO DEL PROBLEMA AYUDA EN EMERGENCIAS

$$\max_{x_{ij}} \sum_{i,j} a_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_j x_{ij} \le a_i \quad \forall i$$

$$\sum_i x_{ij} \le v_j \quad \forall j$$

$$x_{ij} \ge 0$$

El avión A1 hace 50 viajes a la aldea V1, el avión A2 hace 40 a la aldea V3 y 20 a la V5, y el avión A3 hace 50 a la aldea V2 y 40 a la V4. La cantidad total de alimentos repartidos es 1870.

RESULTADO DEL PROBLEMA CONSTRUCCIÓN DE ALMACENES

$$\min_{x_{ij}, y_i} \sum_{i,j} v_{ij} x_{ij} + \sum_i f_i y_i$$

$$\sum_j x_{ij} \le c_i y_i \quad \forall i$$

$$\sum_i x_{ij} \ge d_j \quad \forall j$$

$$x_{ij} \ge 0, y_i \in \{0,1\}$$

Construir los almacenes 1 y 3 y servir 3000 unidades del almacén 1 al cliente 1 y 1000 unidades al cliente 2 y del almacén 3 4000 unidades al cliente 2.

### RESULTADO DEL PROBLEMA TRANSPORTE DE ELECTRODOMÉSTICOS

$$\begin{aligned}
&\min_{x_{ijk}} \sum_{i,j,k} c_{ij} x_{ijk} \\
&\sum_j x_{ijk} \le a_{ik} && \forall i,k \\
&\sum_i x_{ijk} \ge b_{jk} && \forall j,k \\
&\sum_k x_{ijk} \le t_{ij} && \forall i,j \\
&x_{ijk} \ge 0
\end{aligned}$$

| Frigoríficos | Barcelona | A Coruña | Valencia |
|---|---|---|---|
| Alicante | 1500 | 0 | 3500 |
| Huelva | 2500 | 5000 | 500 |

| Lavadoras | Barcelona | A Coruña | Valencia |
|---|---|---|---|
| Alicante | 3000 | 0 | 4000 |
| Huelva | 0 | 3000 | 0 |

El coste total de transporte es de 176000 u.m.

### RESULTADO DEL PROBLEMA LOGÍSTICA

$$\begin{aligned}
&\max_{x_{ijk}} \sum_{i,j,k} v_{jk} x_{ijk} - \sum_{i,j,k} f_{ik} x_{ijk} - \sum_{i,j,k} c_{ij} x_{ijk} \\
&\sum_{j,k} t_{ik} x_{ijk} \le h_i && \forall i \\
&\sum_i x_{ijk} \ge b_{jk} && \forall j,k \\
&-500 \le \sum_j x_{ij1} - \sum_j x_{ij2} \le 500 \quad \forall i \\
&x_{ijk} \ge 0
\end{aligned}$$

| A1 | D1 | D2 | D3 |
|---|---|---|---|
| F1 | 600 | 0 | 500 |
| F2 | 0 | 840 | 0 |

| A1 | D1 | D2 | D3 |
|---|---|---|---|
| F1 | 0 | 0 | 1200 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| F2 | 700 | 500 | 0 |

El beneficio neto es de 29000.

## RESULTADO DEL PROBLEMA GESTIÓN DE AUTOBUSES

$$
\begin{aligned}
&\min x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\
&x_1 + x_6 \geq 4 \\
&x_1 + x_2 \geq 8 \\
&x_2 + x_3 \geq 10 \\
&x_3 + x_4 \geq 7 \\
&x_4 + x_5 \geq 12 \\
&x_5 + x_6 \geq 4 \\
&x_5 + x_6 \leq 4 + 12\delta \\
&x_1 + x_6 \geq 5\delta \\
&x_i \in \mathbb{Z}^+, \delta \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

El número mínimo de autobuses es de 26.

## RESULTADO DEL PROBLEMA ADQUISICIÓN DE CAMIONES

$$
\begin{aligned}
&\min(0.30x + 0.25y)800 \\
&x \leq 10 \\
&y \leq 5 \\
&40x + 30y \geq 400 \\
&2(10 - x) \geq 5 - y \\
&x, y \in \mathbb{Z}^+
\end{aligned}
$$

## RESULTADO DEL PROBLEMA PLANIFICACIÓN DEL METRO

$$
\begin{aligned}
&\min 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 4x_6 + 3x_7 + 3x_8 \\
&x_1 + x_2 + x_6 \geq 1 \\
&x_1 + x_3 + x_5 + x_8 \geq 2 \\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_7 \geq 1 \\
&x_1 + x_3 + x_6 \geq 1 \\
&x_2 + x_4 + x_6 \geq 1 \\
&x_3 + x_8 \geq 1 \\
&x_2 + x_4 + x_5 \geq 1 \\
&x_5 + x_7 \geq 1 \\
&x_4 + x_7 \geq 1 \\
&x_4 + x_6 + x_8 \geq 1 \\
&\left.\begin{aligned} x_2 + \delta \geq 1 \\ x_5 + x_7 - 2\delta \geq 0 \end{aligned}\right\} \text{ o bien } \left\{ x_5 + x_7 \geq 2 - 2x_2 \right. \\
&x_i, \delta \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

RESULTADO DEL PROBLEMA OFICINA DE CORREOS

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{i=1}^{7} x_i \\
&x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 17 \\
&x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 13 \\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 15 \\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 19 \\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 14 \\
&x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 16 \\
&x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 13 \\
&x_i \in \mathbb{Z}^+
\end{aligned}
$$

RESULTADO DEL PROBLEMA ABASTECIMIENTO

$$
\begin{aligned}
&\min 40x_{s1}+50x_{s2}+60x_{13}+70x_{1t}+40x_{23}+70x_{2t}+60x_{3t}+\\
&+100000y_{s1}+200000y_{s2}+80000y_{13}+\\
&+10000y_{1t}+200000y_{23}+200000y_{2t}+150000y_{3t}\\
&x_{s1}+x_{s2}=180\\
&x_{s1}=x_{13}+x_{1t}\\
&x_{s2}=x_{23}+x_{2t}\\
&x_{13}+x_{23}=x_{3t}\\
&x_{1t}+x_{2t}+x_{3t}=180\\
&x_{s1}\le 100y_{s1}\\
&x_{s2}\le 200y_{s2}\\
&x_{13}\le 50y_{13}\\
&x_{1t}\le 30y_{1t}\\
&x_{23}\le 20y_{23}\\
&x_{2t}\le 100y_{2t}\\
&x_{3t}\le 60y_{3t}\\
&y_{2t}\ge y_{s2}\\
&x_{ij}\ge 0,\, y_{ij}\in\{0,1\} \quad \forall i,j
\end{aligned}
$$

Se eligen las conexiones (s–1), (s–2), (1–3), (1–t), (2–t) y (3–t) y pasa un flujo de 80, 100, 50, 30, 100 y 50 respectivamente. El coste total es 853300.

## RESULTADO DEL PROBLEMA ADQUISICIÓN DE MÁQUINAS TROQUELADORAS

$$
\begin{aligned}
&\min(2x+1.75y+1.5z+0.01\cdot 20x+0.01\cdot 15y+0.01\cdot 10z)8\\
&20\cdot 8x+15\cdot 8z+10\cdot 8z\ge 3500\\
&x\le 8\\
&y\le 10\\
&z\le 20\\
&x,y,z\in\mathbb{Z}^+
\end{aligned}
$$

## RESULTADO DEL PROBLEMA SECUENCIACIÓN DE TRABAJOS EN UNA MÁQUINA

Sea $d_j$ al tiempo de proceso del trabajo $j$ y $r_j$ a la fecha de entrega del trabajo $j$.

Definimos las variables del problema como

$$
x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{si el trabajo } j \text{ se hace en la posición } i\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}
$$

La función objetivo será la minimización de la demora media $\min \frac{1}{4}\sum_i p_i$ sujeto a:

- Cada trabajo se hace una vez $\sum_i x_{ij} = 1 \quad \forall j$

- En cada posición sólo un trabajo $\sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i$

- Para cada posición $i$ se acaba un trabajo en ella con fecha de entrega $\sum_j r_j x_{ij}$ .

- Por otra parte, el trabajo $j$ que acaba en esa posición acaba en el instante $\sum_j d_j \sum_{k\le i} x_{kj}$ . Las variables $n_i$ y $p_i$, cuentan si acaba antes de tiempo (adelantado) o después (retrasado). Por eso $p_i$, que es la demora, es la que aparece en la función objetivo $\sum_j d_j \sum_{k\le i} x_{kj} + n_i - p_i = \sum_j r_j x_{ij} \quad \forall i$

- $n_i, p_i \ge 0 \quad x_{ij} \in \{0,1\}$

RESULTADO DEL PROBLEMA PRODUCCIÓN II

$$
\begin{aligned}
&\max 2900y_1 + 6900y_2 - 600y_1 - 1800y_2 - 1000y_1 - 2000y_2 \\
&y_1 + 2y_2 \le 90 \\
&2y_1 + 6y_2 \le 300 \\
&y_2 \le 40 \\
&15u_1 \le y_1 \le 30u_1 \\
&10u_2 \le y_2 \le 20u_2 \\
&y_1, y_2 \ge 0, u_1, u_2 = \{0,1\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\max \sum_k p_k y_k - e\sum_k t_k x_k - c\sum_k x_k \\
&\sum_k x_k \le \bar{x} \\
&\sum_k t_k x_k \le \bar{t} \\
&y_k = a_k x_k, \forall k \\
&u_k \underline{y}_k \le y_k \le u_k \bar{y}_k, \forall k \\
&x_k, y_k \ge 0, u_k = \{0,1\}, \forall k
\end{aligned}
$$

RESULTADO DEL PROBLEMA PRODUCCIÓN E INVENTARIO

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_i \left( ci_i + c' p_i \right) \\
&i_i + p_i - d_i = i_{i+1} \\
&p_i \le \overline{p}_i \\
&i_i \le \overline{i}_i \\
&i_1 = 250, i_5 = 100 \\
&i_i, p_i \ge 0
\end{aligned}
$$

RESULTADO DEL PROBLEMA MISIÓN PACÍFICA

$$
\begin{aligned}
&\max 2x_{ef} + 5x_{ei} + 4x_{eg} + 3x_{ep} + 4x_{fi} + 4x_{fg} + 2x_{fp} + 5x_{ig} + 4x_{ip} + 3x_{gp} \\
&x_{ef} + x_{ei} + x_{eg} + x_{ep} \le 1 \\
&x_{ef} + x_{fi} + x_{fg} + x_{fp} \le 1 \\
&x_{ei} + x_{fi} + x_{ig} + x_{ip} \le 1 \\
&x_{eg} + x_{fg} + x_{ig} + x_{gp} \le 1 \\
&x_{ep} + x_{fp} + x_{ip} + x_{gp} \le 1 \\
&x_{ef} + x_{ei} + x_{eg} + x_{ep} + x_{fi} + x_{fg} + x_{fp} + x_{ig} + x_{ip} + x_{gp} = 2 \\
&x_{ei} \le x_{fg} \\
&x_{ef}, x_{ei}, x_{eg}, x_{ep}, x_{fi}, x_{fg}, x_{fp}, x_{ig}, x_{ip}, x_{gp} \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

RESULTADO DEL PROBLEMA MEZCLA DE CRUDO

$$
\begin{aligned}
&\max 7000(x_{11} + x_{21}) + 6000(x_{12} + x_{22}) - 4500(x_{11} + x_{12}) - 3500(x_{21} + x_{22}) \\
&-400(x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22}) - y_1 - y_2 \\
&x_{11} + x_{12} \le 5000 \\
&x_{21} + x_{22} \le 5000 \\
&x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} \le 9000 \\
&12x_{11} + 6x_{21} \ge 10(x_{11} + x_{21}) \\
&12x_{12} + 6x_{22} \ge 8(x_{12} + x_{22}) \\
&0.5x_{11} + 2x_{21} \le x_{11} + x_{21} \\
&0.5x_{12} + 2x_{22} \le 2(x_{12} + x_{22}) \\
&x_{11} + x_{21} = 3000 + 0.1y_1 \\
&x_{12} + x_{22} = 2000 + 0.1y_2 \\
&x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, y_1, y_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

RESULTADO DEL PROBLEMA PRODUCCIÓN VI

a)

b) $\lambda_{ij-1} + \lambda_{ij+1} - \lambda_{ij} \le 1 \quad \forall i, 2 \le j \le n-1$

o bien $$\lambda_{ij} + \lambda_{ij+1} \le 2 - 2Par_{ij} \quad \forall i, 1 \le j \le n-1$$

RESULTADO DEL PROBLEMA TRANSPORTE POR FERROCARRIL

a)
$$\begin{aligned}
&\max z = \sum_i (b_i - c_i) x_i \\
&\sum_i v_i x_i \le V \\
&\sum_i p_i x_i \le P \\
&0 \le x_i \le mx_i \quad \forall i
\end{aligned}$$

Se deben dar las cantidades de las mercancías a transportar, el valor de la variable dual de la primera restricción para dar el valor de cada unidad de volumen, el valor de la variable dual de la segunda restricción para dar el valor de cada unidad de peso, y a cada propietario del que no se transporte nada el coste reducido de su variable correspondiente que sería en lo que tendría que aumentar su oferta para ser incluida.

b)
$$\begin{aligned}
&\max z = \sum_i (a_i - g_i x_i - c_i) x_i \\
&\sum_i v_i x_i \le V \\
&\sum_i p_i x_i \le P \\
&0 \le x_i \le mx_i \quad \forall i
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
&\max z = \sum_{i,j} (b_i - c_i) x_{ij} - cvag \sum_j y_j \\
&\sum_i v_i x_{ij} \le \bar{V} y_j \quad \forall j \\
&\sum_i p_i x_{ij} \le \bar{P} y_j \quad \forall j \\
&\sum_j x_{ij} \le mx_i \quad \forall i \\
&x_{ij} \ge 0, \quad y_j \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned}
&\max z = \sum_i (b_i - c_i) x_i - cvag \cdot y \\
&\sum_i v_i x_i \le \bar{V} y \\
&\sum_i p_i x_i \le \bar{P} y \\
&0 \le x_i \le mx_i \quad \forall i \\
&y \in \mathbb{Z}^+
\end{aligned}$$

RESULTADO DEL PROBLEMA EDICIÓN DE CDS

$$\begin{aligned}
&\max \sum_j y_j \\
&\sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i \\
&\sum_i tam_i x_{ij} \le 700 y_j \quad \forall j \\
&\sum_i indi_i x_{ij} \ge 45 y_j \quad \forall j \\
&x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} \le 1 \quad \forall j \\
&x_{ij}, y_j \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

RESULTADO DEL PROBLEMA VUELOS CHARTER

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{i,j} C_{ij} x_{ij} + \sum_i 6 y_i \\
&\sum_i CAP_i \sum_j j \cdot x_{ij} \ge D \\
&\sum_j x_{ij} \le y_i \quad \forall i \\
&x_{ij}, y_i \in \{0,1\}
\end{aligned}
\quad \text{o bien} \quad
\begin{aligned}
&\min \sum_{i,j} C_{ij} x_{ij} + 6 \sum_{i,j} x_{ij} \\
&\sum_i CAP_i \sum_j j \cdot x_{ij} \ge D \\
&\sum_j x_{ij} \le 1 \quad \forall i \\
&x_{ij} \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

RESULTADO DEL PROBLEMA PROVEEDORES

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{i,j} \left( c_{ij} X_{ij} + ccont_{ij} Y_{ij} \right) \\
&\sum_j X_{ij} \le a_i \quad \forall i \\
1.\quad &\sum_i X_{ij} = d_j \quad \forall j \\
&X_{ij} \le M Y_{ij} \quad \forall i, j \ (M \text{ cota suf. grande, por ejemplo, } M = \max(d_j) = 135) \\
&X_{ij} \ge 0, Y_{ij} \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

$$\min \sum_{i,j}\left(c_{ij}X_{ij}^{+}+(c_{ij}+penal_i)X_{ij}^{-}+ccont_{ij}Y_{ij}\right)$$

$$\sum_j X_{ij} \le a_i \quad \forall i$$

$$\sum_i X_{ij} = d_j \quad \forall j$$

$$X_{ij} \le MY_{ij} \quad \forall i,j \; (M \text{ cota suf. grande, por ejemplo, } M=\max(d_j)=135)$$

2. $X_{ij} = X_{ij}^{+} + X_{ij}^{-} \quad \forall i,j$

$$\sum_j X_{ij} \ge k_i(1-Z_i) \quad \forall i$$

$$X_{ij}^{-} \le m_{ij}Z_i \quad \forall i,j$$

$$X_{ij}^{+} \le m_{ij}(1-Z_i) \quad \forall i,j \; (m_{ij} \text{ cota suf. grande, por ejemplo, } d_j)$$

$$X_{ij}, X_{ij}^{-}, X_{ij}^{+} \ge 0, Y_{ij}, Z_{ij} \in \{0,1\}$$

RESULTADO DEL PROBLEMA COMPOSICIÓN DE PIENSO

a)

$$\min \sum_i c_i X_i + \sum_j p_j(D_j+E_j)$$

$$\sum_i a_{ij}X_i \ge \min{}_j \quad \forall j$$

$$\sum_i a_{ij}X_i \le \max{}_j \quad \forall j$$

$$\sum_i a_{ij}X_i + D_j - E_j = opt_j \quad \forall j$$

$$X_i, D_j, E_j \ge 0$$

b) Dos modelos alternativos:

$$\min \sum_i c_i X_i + Extra + \sum_j p_j(D_j+E_j)$$

$$\sum_i a_{ij}X_i \ge \min{}_j \quad \forall j$$

$$\sum_i a_{ij}X_i \le \max{}_j \quad \forall j$$

$$\sum_i a_{ij}X_i + D_j - E_j = opt_j \quad \forall j$$

$$X_1 - 2X_2 \le M\delta$$

$$Extra \ge 0.05X_1 - M(1-\delta)$$

$$X_i, D_j, E_j, Extra \ge 0 \quad \delta \in \{0,1\}$$

$$\min c_1X_1^- + c_2X_2 + (c_1+0.05)X_1^+ + \sum_j p_j(D_j+E_j)$$
$$\sum_i a_{ij}X_i \geq \min_j \quad \forall j$$
$$\sum_i a_{ij}X_i \leq \max_j \quad \forall j$$
$$\sum_i a_{ij}X_i + D_j - E_j = opt_j \quad \forall j$$
$$X_1 = X_1^- + X_1^+$$
$$X_1 - 2X_2 \leq M\delta$$
$$X_1^- \leq M(1-\delta)$$
$$X_1^+ \leq M\delta$$
$$X_i, X_1^-, X_1^+, D_j, E_j \geq 0 \quad \delta \in \{0,1\}$$

RESULTADO DEL PROBLEMA EXPLOTACIONES GANADERAS

a) $i$ explotaciones ganaderas, granjas (G1 y G2)

$j$ mataderos (M1, M2 y M3)

$k$ tipo de animal (vaca y cerdo)

$N_{ik}$ número de vehículos para transportar animales tipo $k$ en explotación $i$

$DISP_{ik}$ disponibilidad de animales $k$ en las explotaciones ganaderas $i$

$DEM_{jk}$ demanda en cada matadero $j$ de cada animal $k$

$COSTE_{ijk}$ coste unitario de transporte de explotaciones ganaderas $i$ a mataderos $j$ para cada animal $k$

$CAP_k$ capacidad de cada tipo de vehículo $k$

$FIJO_k$ coste fijo de uso del camión para transportar animales tipo $k$

$VOL_k$ volumen unitario de cada tipo de animal $k$

Transformar un dato: $ANIM_k = \lfloor CAP_k / VOL_k \rfloor$: número animales que caben en un camión de tipo $k$

Podrían ser dos problemas separados de transporte (nada los liga)

Variables:

$x_{ijk}$ animales tipo $k$ transportados entre la explotación $i$ y el matadero $j$

$z_{ijk}$ vehículos para animales tipo $k$ usados entre explotación $i$ y matadero $j$

$$\min \quad \sum_k \left( \sum_{i,j} \left( COSTE_{ijk} x_{ijk} + FIJO_k z_{ijk} \right) \right)$$

$$\sum_j x_{ijk} \le DISP_{ik} \qquad \forall i,k$$

$$\sum_i x_{ijk} \ge DEM_{jk} \qquad \forall j,k$$

$$\sum_j z_{ijk} \le N_{ik} \qquad \forall i,k$$

$$x_{ijk} \le ANIM_k z_{ijk} \qquad \forall i,j,k \quad Cuasicorrecto: VOL_k x_{ijk} \le CAP_k z_{ijk} \quad \forall i,j,k$$

$$x_{ijk}, z_{ijk} \in \mathbb{Z}^+$$

b)

$i$ explotaciones ganaderas, granjas (G1 y G2)

$j$ mataderos (M1, M2 y M3)

$k$ tipo de animal (vaca y cerdo)

$n$ vehículo

$N_{ik}$ número de vehículos para transportar animales tipo $k$ en explotación $i$

$DISP_{ik}$ disponibilidad de animales $k$ en las explotaciones ganaderas $i$

$DEM_{jk}$ demanda en cada matadero $j$ de cada animal $k$

$COSTE_{ijk}$ coste unitario de transporte de explotación ganadera $i$ a matadero $j$ para cada animal $k$

$CAP_k$ capacidad de cada tipo de vehículo $k$

$FIJO_k$ coste fijo de uso del camión para transportar animales tipo $k$

$VOL_k$ volumen unitario de cada tipo de animal $k$

$INCCOSTE_k$ incremento de coste unitario de transporte para cada animal $k$

Variables

$x_{ijk}^{kn}$ cantidad de animales de tipo $k$ transportados entre la explotación ganadera $i$ y el matadero $j$ transportados en el vehículo número $n$ del tipo $k$

$y_{ijk}^{k'n}$ cantidad de animales de tipo $k$ transportados entre la explotación ganadera $i$ y el matadero $j$ transportados en el vehículo número $n$ del tipo $k'$ (en este caso $k$ y $k'$ son diferentes)

$v_{ij}^{nk}$ uso o no del vehículo $n$ diseñado para el transporte del animal $k$ para transportar animales entre la explotación ganadera $i$ y el matadero $j$

$$\min \sum_{knij} \left( COSTE_{ijk} x_{ijk}^{kn} + (COSTE_{ijk} + INCCOSTE_k) y_{ijk}^{k'n} + FIJO_k v_{ij}^{kn} \right)$$

$$VOL_k x_{ijk}^{kn} + VOL_{k'} y_{ijk'}^{kn} \le CAP_k v_{ij}^{kn} \quad \forall knij$$

$$\sum_{ni} (x_{ijk}^{kn} + y_{ijk}^{k'n}) \ge DEM_{jk} \quad \forall jk$$

$$\sum_{nj} (x_{ijk}^{kn} + y_{ijk}^{k'n}) \le DISP_{ik} \quad \forall ik$$

$$\sum_{j} v_{ij}^{kn} \le 1 \quad \forall ikn$$

$$x_{ijk}^{kn}, y_{ijk}^{kn} \in \mathbb{Z}^+, v_{ij}^{kn} \in \{0,1\}$$

La solución óptima con una tolerancia relativa del 3 % tiene un coste de 4943 €.

| | | Vehículos de vacas | | | | Vehículos de cerdos | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | M1 | M2 | M3 | | M1 | M2 | M3 |
| G1 | | | (8,0)<br>(8,0)<br>(6,0) | | (0,23)<br>(**1**,22) | (0,26) | (0,24) |
| G2 | (8,0)<br>(8,0) | (6,**7**) | | | | (0,26)<br>(0,26) | (0,26)<br>(0,26) |

RESULTADO DEL PROBLEMA CORTE DE BOBINAS

Definimos $i$ como el índice de cada pedido o bobina hija, $I$ es el número total de pedidos, $j$ como el índice de las bobinas madre, $J$ es el número máximo de bobinas madre posibles (una cota superior es el número de pedidos). $A_i$ es la anchura de cada pedido, $F_i$ es la fecha de entrega de cada pedido y $\overline{A}$ es la anchura de la bobina madre.

Definimos las variables

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el pedido } i \text{ se obtiene de la bobina madre } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

$$Y_j = \begin{cases} 1 & \text{si se usa la bobina madre } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad D_j \text{ el desperdicio de la bobina } j.$$

La función objetivo de minimización del número total de bobinas se expresa como

$$\min \sum_{j=1}^{J} Y_j$$

- Satisfacción de cada pedido $i$ : $\sum_{j=1}^{J} X_{ij} = 1 \quad \forall i$
- Los pedidos de una bobina no pueden exceder su ancho:

  La función objetivo de minimización del desperdicio de las bobinas madre se expresa como

$$\min \sum_{j=1}^{J} D_j$$

- El desperdicio se calcula cambiando la restricción anterior

$$\sum_{i=1}^{I} A_i X_{ij} + D_j = \bar{A} Y_j \quad \forall j$$

La función objetivo de minimización del retraso en la fecha de entrega se expresa como $\min \sum_{i=1}^{I} RT_i$

siendo $AD_i$ y $RT_i$ el adelanto o retraso en la fecha de entrega del pedido $i$

- El retraso en la fecha de entrega de cada pedido se calcula en esta ecuación

$$\sum_{j=1}^{J} 6jX_{ij} + AD_i - RT_i = F_i \quad \forall i \text{ o bien } \sum_{j=1}^{J} 6jX_{ij} - RT_i \le F_i \quad \forall i$$

RESULTADO DEL PROBLEMA EMPRESA DISTRIBUIDORA

1. Variables

   $X_{ij}$ : número de unidades enviadas de $i$ a $j$

   $Y_{ij}$ : número de unidades enviadas de $j$ a $k$

$$\min \sum_{ij} c_{ij} X_{ij} + \sum_{jk} w_{jk} Y_{jk}$$
$$\sum_{j} X_{ij} \le e_i \quad \forall i$$
$$\sum_{j} Y_{jk} = d_k \quad \forall k$$
$$\sum_{i} X_{ij} = \sum_{k} Y_{jk} \quad \forall j$$
$$X_{ij}, Y_{jk} \ge 0 \quad X_{ij}, Y_{jk} \in \mathbb{Z}??$$

2. Nueva variable: $Z = \begin{cases} 1 & \text{le provee distribuidor 1} \\ 0 & \text{le provee distribuidor 2} \end{cases}$

   Añadir al modelo las restricciones:

$$\begin{aligned} &Y_{11} \le MZ \\ &Y_{21} \le M(1-Z) \\ &Z \in \{0,1\} \end{aligned}$$

   siendo, por ejemplo, $M = d_1$

3. Entiendo por el enunciado que las $m$ primeras siempre cuestan lo mismo y las que se pasen son las que tienen descuento (no todas una vez se pasan).

   Nuevas variables

   $N_{jk}$, $P_{jk}$ : exceso y defecto sobre el valor $m$

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } N_{jk} > 0 \\ 0 & \text{si } P_{jk} > 0 \end{cases}$$

   Modificar función objetivo añadiendo el término $-\sum_{jk} hN_{jk}$

   Añadir las restricciones:

$$\begin{aligned} &Y_{jk} = m + N_{jk} - P_{jk} \quad \forall j,k \\ &N_{jk} \le M\delta_{jk} \quad \forall j,k \\ &P_{jk} \le M(1-\delta_{jk}) \quad \forall j,k \end{aligned}$$

   (Estas dos últimas son necesarias pues si no pueden ser distintas de 0 ambas a la vez, para un mismo valor de $Y$ y lograr menor coste).

4. Sea $cap = \left\lfloor \frac{P}{p} \right\rfloor$ número de artículos que caben en un camión. Sean las variables:

   $T_{ij}$ : número de camiones enviados de $i$ a $j$

   $S_{jk}$ $T_{ij}$ : número de camiones enviados de $j$ a $k$

   Modificar la función objetivo añadiendo el término $+C\left(\sum_{ij} T_{ij} + \sum_{jk} S_{jk}\right)$

   Añadir las restricciones:

$$X_{ij} \le cap\,T_{ij} \quad \forall i, j$$
$$Y_{jk} \le cap\,S_{jk} \quad \forall j, k$$

# IV. Codificación de modelos de optimización

## IV.1. Alternativas de codificación

Las principales alternativas actuales para el desarrollo de modelos de optimización suelen ser, Sharda (1995):

- *Lenguajes de programación de propósito general* (C, C++, Java, Visual Basic, FORTRAN 90) que llaman a una biblioteca de optimización

  Tienen sentido cuando el tiempo de solución es crítico o el modelo es ejecutado con mucha frecuencia o cuando se necesitan interfaces a medida para la entrada de datos o salida de resultados o cuando el modelo tiene que ser integrado en otra aplicación o se necesitan algoritmos de optimización específicos. Además permiten la implantación del modelo en un entorno software o hardware especial. Como contrapartida requiere un tiempo de desarrollo muy elevado y, sobre todo, presenta una gran dificultad y consumo de recursos para el mantenimiento del código.

  Actualmente existen bibliotecas de componentes orientados a objetos (clases C++) dedicadas exclusivamente a optimización, por ejemplo, Concert de ILOG, LINDO API de LINDO Systems, OptiMax 2000 de Maximal Software, FLOPC++ de Universidade de Aveiro. Cabe también mencionar la iniciativa de desarrollo de software abierto para investigación operativa denominada *Computational Infrastructure for Operations Research* (COIN-OR) (www.coin-or.org).

- *Lenguajes o entornos de cálculo numérico o simbólico* (hojas de cálculo, lenguajes para cálculo numérico intensivo, como MATLAB, o para cálculo simbólico, como Maple o Mathematica, etc.)

  Los optimizadores de las hojas de cálculo, por ser aplicaciones muy comunes y conocidas, pueden ser un vehículo eficaz de difusión de un modelo entre cierto tipo de usuarios y facilitan el manejo de datos que se encuentren ya en dicho formato [Ragsdale, 1998]. Como ventajas específicas se pueden mencionar: su facilidad de uso, su integración total con la hoja de cálculo, la familiaridad con el entorno que facilita la explicación del modelo y de sus resultados, así como la facilidad de presentación de resultados en gráficos. Sin embargo, no inducen una buena práctica de programación, presentan la dificultad de su desarrollo, verificación, validación, actualización, documentación y, en general, el mantenimiento del modelo y no permiten modelar problemas complejos o de gran tamaño [Gass, 1995]. Frontline Systems (www.solver.com) ha desarrollado optimizadotes para Microsoft Excel.

Los lenguajes de cálculo numérico o simbólico no son específicos de problemas de optimización pero facilitan la manipulación numérica o simbólica de matrices y vectores. También disponen de funciones de optimización.

Todas estas alternativas pueden ser utilizadas para desarrollo rápido de un prototipo o una demostración ya que presentan capacidades de presentación gráfica que pueden ser aprovechadas. Son difícilmente utilizables cuando se plantean problemas de optimización de tamaño medio o superior.

- *Lenguajes algebraicos de modelado*

  Son las alternativas más complejas y potentes por su capacidad de indexación de las variables y ecuaciones, permiten cambiar sin dificultad las dimensiones del modelo, de forma natural separan datos de resultados. Desde el punto de vista del modelador permiten la detección de errores de consistencia en la definición y verificación del modelo. Desde el punto de vista del usuario simplifican drásticamente su mantenimiento. Entre los lenguajes de modelado más conocidos se pueden mencionar: GAMS (www.gams.com), AMPL (www.ampl.com) de origen estadounidense y MPL (www.maximalsoftware.com) y AIMMS (www.aimms.com) y XPRESS-MP (www.dashoptimization.com) de origen europeo, por citar algunos. De algunos de ellos se pueden descargar versiones de estudiante desde sus páginas web. GAMS es el más antiguo, pero con el conjunto de usuarios más amplio, quizá por eso con algunas limitaciones en sus capacidades de modelado. AMPL es más nuevo, muy potente para el modelado pero con un conjunto reducido de usuarios. MPL es otro lenguaje de modelado robusto, cuya versión de estudiante acompaña al libro [Hillier y Lieberman, 2002].

  Existe una herramienta integrada denominada OPLStudio (www.ilog.com), en la que se dispone de un lenguaje de modelado (OPL) y varios optimizadores dependiendo del modelo propuesto. Está especialmente desarrollada para problemas de programación (*scheduling*) y planificación, aunque admite también cualquier modelo de optimización lineal y lineal entera mixta. Es una herramienta integrada ya que además del lenguaje de modelado, incluye sus propios optimizadores, Scheduler, Solver, CPLEX[4], estando los dos primeros basados en la programación de restricciones[5] y el último en programación matemática.

  GAMS es el lenguaje más ampliamente difundido comercialmente con su propia lista de discusión de usuarios (gams-l@listserv.gmd.de) mientras que AMPL se está potenciando mucho en las universidades estadounidenses. Existe un proyecto denominado NEOS Server for Optimization (www-neos.mcs.anl.gov/neos/server-solver-types.html) para el cálculo distribuido que permite el envío de problemas de optimización escritos en AMPL o GAMS a

[4] CPLEX es problablemente el mejor optimizador existente para problemas LP y MIP.

[5] Se denomina programación de restricciones a un tipo de programación lógica donde el dominio de las variables viene definido por relaciones lógicas y por restricciones.

través de internet y éstos son resueltos por optimizadores específicos para el tipo de problema enviado en servidores de la red devolviendo los resultados de la optimización.

Existen libros específicos que describen sus características y que sirven como guías de usuario tanto para el lenguaje GAMS [Brooke, 1998], [McCarl, 1998], para AMPL, [Fourer, 2000], o para OPL [Van Hentenryck, 1999]. Incluso en España se ha publicado un libro de optimización que se apoya en GAMS para la presentación de ejemplos [Mocholí, 1996]. Los campos de aplicación de estos lenguajes son tan amplios como los de la optimización propiamente dicha. Abarcan desde la micro y macroeconomía, a la economía de la energía, a la planificación energética o eléctrica, a la ingeniería química o forestal, a la planificación del desarrollo económico o del comercio internacional, a la cobertura de riesgos financieros, a problemas de transporte y comunicaciones, a organización de la producción o fabricación o a la planificación de grandes proyectos. En el caso de la programación de restricciones ésta aparece especialmente en problemas combinatorios para modelar restricciones lógicas.

# IV.2. Casos de estudio con Excel

El Excel es una herramienta muy utilizada en gestión, aunque probablemente no sea la idónea para problemas de optimización. A pesar de todo, y dado lo extendido que está su uso, se muestran ejemplos para desarrollar con Excel, con el Complemento SOLVER. En Internet, se pueden encontrar complementos que mejoran fundamentalmente la escritura del modelo, pero no se distribuyen de forma gratuita con Excel, por lo que no se van a utilizar.

La implementación de un modelo en Excel se va a mostrar con un ejemplo.

## IV.2.1. Caso Ejemplo

Un empresario ha de producir un compuesto basado en un determinado componente básico. Este componente puede ir en una cantidad variable entre el 50 y el 100% del total de la composición. Por otra parte del componente básico hay dos calidades, una calidad superior que cuesta 200€/unidad y otra que cuesta 100€. El mercado le obliga a que al menos un 20% ha de ser del componente de calidad superior. El empresario se plantea maximizar la calidad y minimizar el coste. Plantear un modelo para este problema (con los dos objetivos, aunque se traten por separado) e implementarlo en Excel.

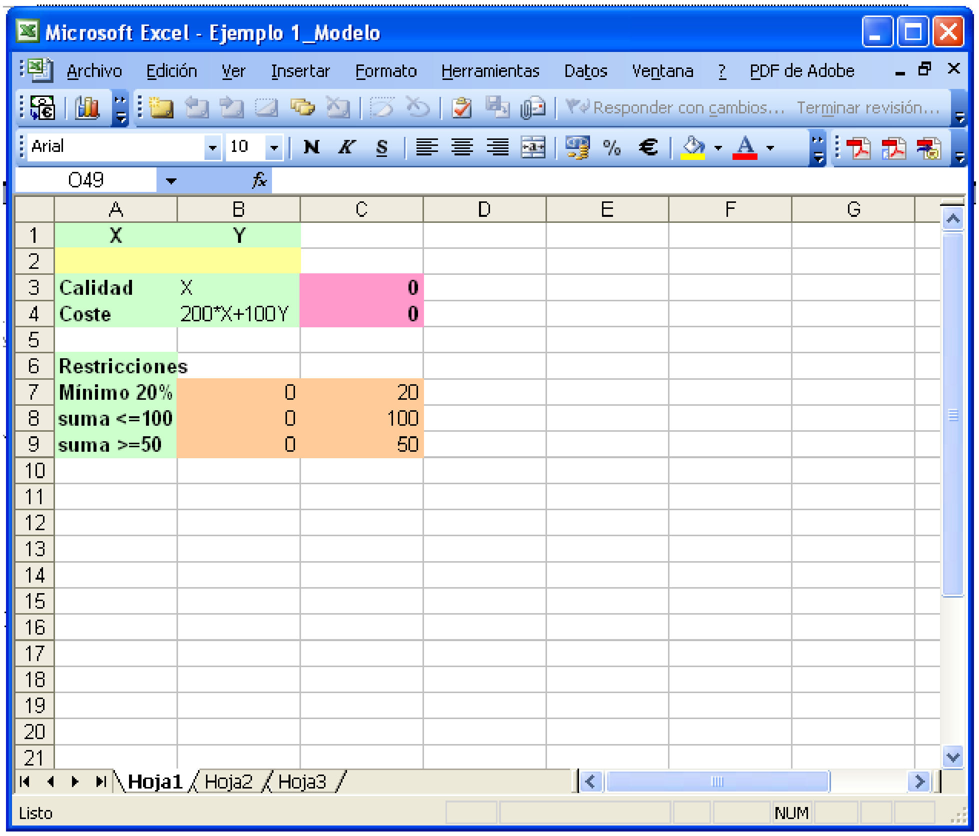
El siguiente modelo de optimización sirve para determinar el espacio de soluciones, donde $X$ representa la calidad superior del componente e $Y$ la calidad inferior:

$$\begin{aligned} &X \geq 20 \\ &X + Y \leq 100 \\ &X + Y \geq 50 \\ &X, Y \geq 0 \end{aligned}$$

Por otra parte, los dos atributos planteados y su dirección de optimización, serían:

$$\begin{array}{lll} \text{Calidad:} & \max & X \\ \text{Coste:} & \min & 200X + 100Y \end{array}$$

A continuación se muestra cómo formular este modelo de programación lineal en Excel. El archivo original se adjunta con el documento (Ejemplo 1_Modelo.xls)



| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | X | Y | |
| 2 | | | |
| 3 | Calidad | X | 0 |
| 4 | Coste | 200*X+100Y | 0 |
| 5 | | | |
| 6 | Restricciones | | |
| 7 | Mínimo 20% | 0 | 20 |
| 8 | suma <=100 | 0 | 100 |
| 9 | suma >=50 | 0 | 50 |

El proceso para crearlo es el siguiente. En un archivo vacío de Excel, marcar dos celdas contiguas que contendrán los valores de las dos variables. En el ejemplo de la imagen, estas celdas se han marcado en amarillo para resaltarlas, y son las celda A2 y B2, para $X$ e $Y$, respectivamente. Inicialmente están vacías pero contendrán la solución del modelo a resolver. Todas las celdas de fondo verde son meramente informativas.

A continuación, para cada objetivo, marcar una celda que contendrá la fórmula de ese objetivo como función de las variables. Por ejemplo, para el criterio Calidad, cuya expresión es la cantidad del componente 1, en el ejemplo se ha seleccionado la celda C3 donde se ha escrito =A2 , ya que es la celda donde está el valor de $X$. Para el criterio Coste, se ha introducido la expresión en la celda C4, = 200*A2+100*B2. Las celdas con las expresiones de los objetivos vienen resaltadas en rosa.

Para introducir cada una de las restricciones, se selecciona una celda con la expresión del lado izquierdo de la restricción, y otra con el lado derecho de la restricción. Por ejemplo, para indicar que del componente 1 ha de haber al menos un 20%, en la celda B7 se ha introducido =A2; y en la celda C7, se ha introducido 20. Para indicar que la suma de ambos componentes ha de ser a lo sumo el 100%, en la celda B8 se ha introducido =A2+B2, y en la celda C8 100 . Por último, para que la suma sea de al menos el 50%, se ha introducido en la celda B9 =A2+B2, y la celda C9 100 . Todas estas celdas están con fondo naranja.

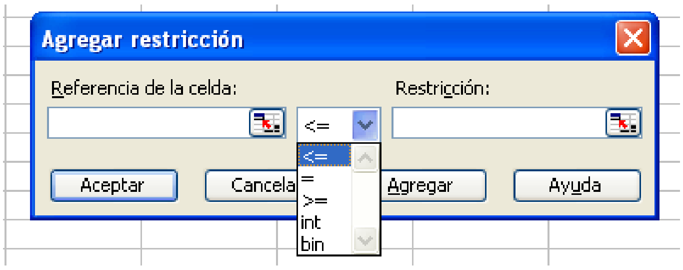
Con esto se han introducido los datos del modelo que se montará y resolverá con el complemento Solver. Este complemento viene por defecto en Excel, pero no siempre está activado. Si al ir al menú de Herramientas, no apareciera, haga click sobre Complementos, y en la pantalla que se abrirá, active la línea que pone Solver. Para montar el modelo, vaya al menú Herramientas y haga click sobre Solver. Aparecerá una pantalla como la siguiente, titulada Parámetros de Solver, pero vacía.


Donde pone Celda Objetivo, marque la celda donde está la expresión del objetivo que desea optimizar. En la imagen está C3 (por defecto Solver lo pone con dólares entre medias), que es que se va a optimizar la Calidad, cuya expresión pusimos en esa celda.

Donde pone Valor de la celda objetivo, puede marcar Máximo si desea maximizar ese atributo, Mínimo si desea minimizar, y otra opción no relevante para nuestro propósito. En este caso, siendo Maximizar la Calidad el criterio, marcamos Máximo.

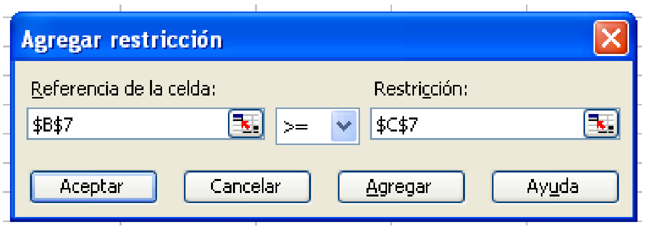
Después pregunta acerca de las celdas que contienen el valor de las variables. En ese cuadro debe marcar las celdas donde están las variables, en nuestro caso A2 y B2.

En cuanto a las restricciones, pulse Agregar para ir añadiéndolas. Observará que se abre una ventana como la que sigue:



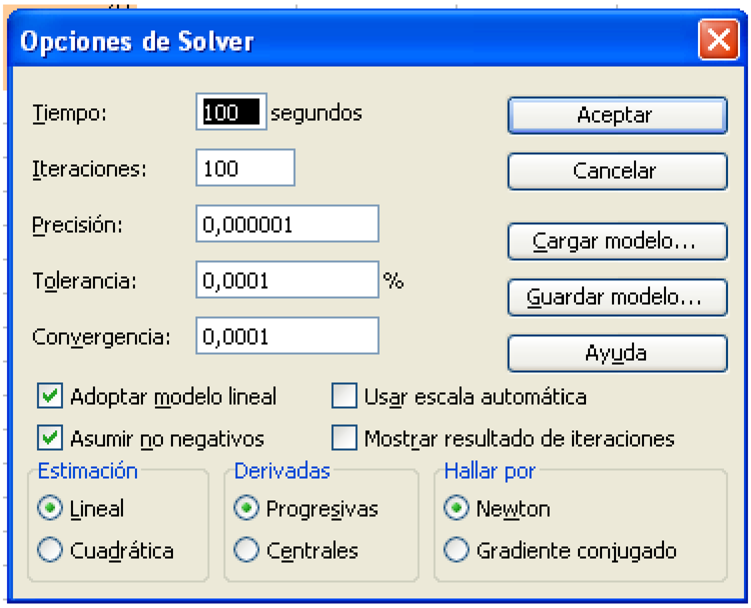

Donde pone Referencia de la celda, deber marcar la celda con la expresión del lado izquierdo de la restricción. Donde pone Restricción, la celda que recoge el lado derecho de la restricción. Y en medio, da a elegir entre 5 opciones: <= para restricciones de menor o igual, = para restricciones de igualdad, >= para restricciones de mayor o igual, int para que las variables marcadas en el lado izquierdo tengan que ser variables que sólo toman valores enteros, y bin para indicar que las variables marcadas en el lado izquierdo sólo puedan tomar valores 0 o 1.

En el ejemplo, la primera restricción (de la componente 1 ha de haber al menos un 20%) la hemos contemplado en las celdas B7 y C7, y es una restricción de mayor o igual con lo que debemos escribir:

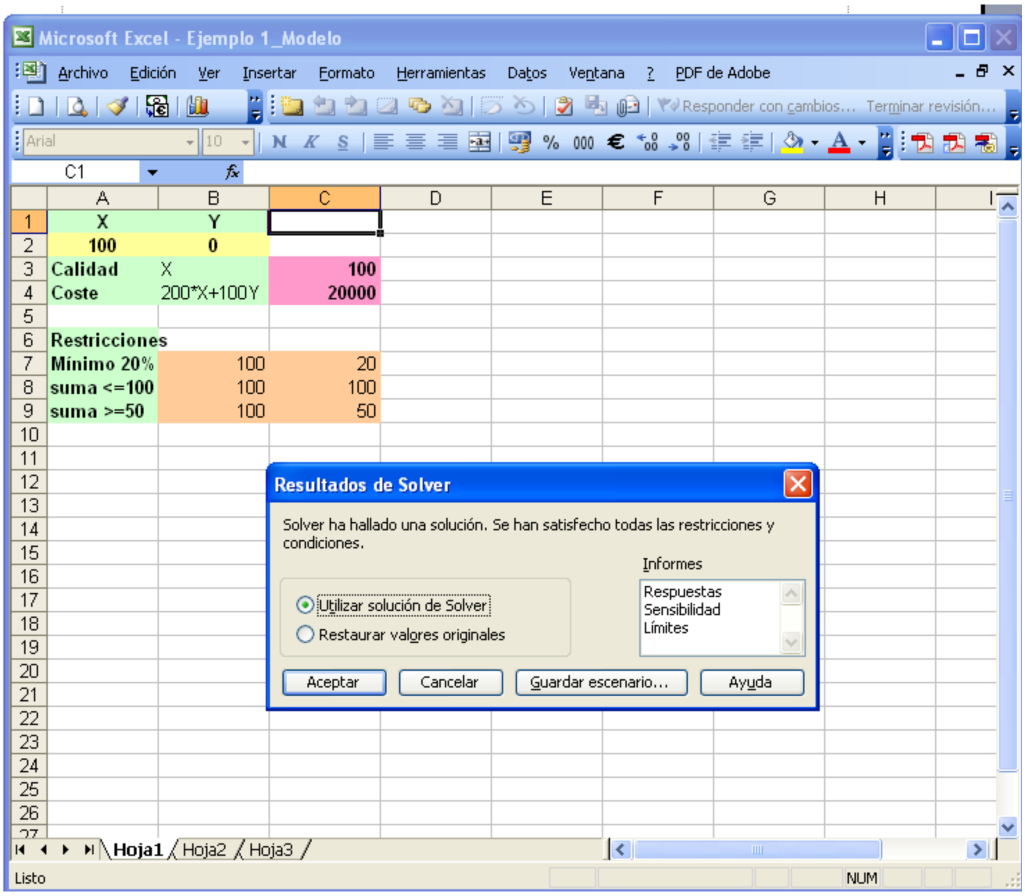



Y así sucesivamente, pulsando el botón de Agregar para ir añadiendo restricciones, con B8 <= C8, y B9 >= C9. Pulsando el botón Aceptar volvemos a la pantalla de Parámetros de Solver donde veremos las restricciones añadidas. Siempre se pueden Agregar nuevas restricciones, Eliminar alguna ya creada, o Modificar alguna de ellas. Para nuestro ejemplo, tendríamos la siguiente pantalla de Parámetros.


Todavía, para terminar de montar el modelo, debemos pulsar en el botón Opciones, en el que se abrirá la siguiente pantalla:

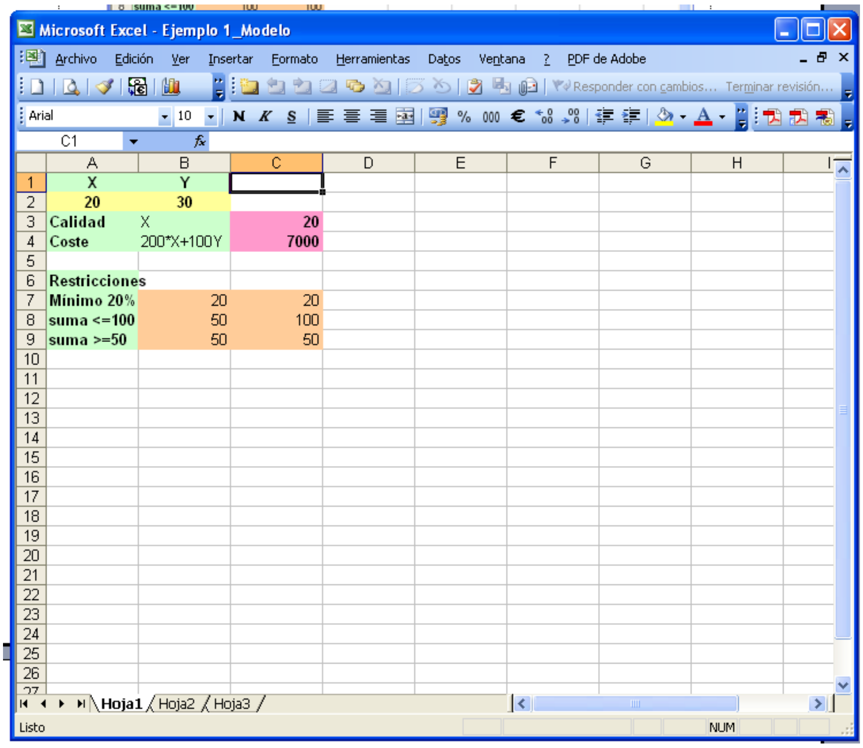



Como norma general, son parámetros bastante técnicos, pero hay dos que es necesario tocar, y alguno que es conveniente. Los que son necesarios es marcar Adoptar modelo lineal, y Asumir no negativos (especialmente éste último, ya que es donde indicamos que las variables sólo pueden tomar valores positivos). También es recomendable reducir algunos de los números que aparecen por defecto (los de Precisión, Tolerancia y Convergencia), pero no se puede llegar a poner 0 que sería lo ideal. Pulsar Aceptar para tener todo el modelo y volver a la pantalla de Parámetros de Solver, donde pulsando Resolver, resolverá el modelo dando los resultados en las celdas indicadas, después de emitir un mensaje en que dice: Solver ha hallado una solución. Se han satisfecho todas las restricciones y condiciones. Y pregunta si se quiere utilizar la solución de Solver, a lo que se debe decir Aceptar.




La cantidad de componente 1 (variable X), es 100 (celda A2), y del componente 2 (variable Y), es 0 (celda B2). La calidad obtenida es 100 (celda C3), que es la máxima posible, y el coste para esa solución es 20000 (celda C4).

Este modelo creado aparecerá siempre que se pulse Solver, y se puede modificar el objetivo simplemente marcando la otra celda objetivo (C4) en el primer parámetro de Solver, cambiando a Mínimo para minimizar el coste, y pulsando Resolver.




En este caso, la solución es 20% del componente 1, y 30 del componente 2. Obteniendo una calidad de 20, y un coste de 7000.

El archivo Excel que incluye las soluciones de los casos de estudio es Ejemplos MO_MIM.xls

## IV.2.2. Caso 1: Distribución de gasóleo

Una empresa de distribución de gasóleo dispone de tres depósitos D1, D2 y D3 donde guarda el gasóleo y desde los que abastece a cuatro estaciones de servicio, E1, E2, E3 y E4. En la tabla se muestra la capacidad máxima de almacenamiento de cada depósito, la demanda máxima de cada punto de venta y las capacidades máximas de transporte en las posibles rutas entre depósitos y estaciones de servicio.

| | E1 | E2 | E3 | E4 | Capacidad |
|---|---|---|---|---|---|
| D1 | 80 | – | 70 | – | 150 |
| D2 | – | 60 | 90 | 85 | 300 |
| D3 | 40 | 60 | – | 50 | 250 |
| Demanda | 130 | 200 | 150 | 250 | |

Además, cada unidad que se envíe a las gasolineras le supone un beneficio de 7 u.m. y los envíos se llevan a cabo en camiones cuya capacidad es de 20 unidades cada uno, con un coste estimado por camión en cada una de las rutas de:

| Costes (u.m.) | E1 | E2 | E3 | E4 |
|---|---|---|---|---|

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| D1 | 100 | – | 125 | – |
| D2 | – | 100 | 125 | 100 |
| D3 | 75 | 100 | – | 125 |

Formular y resolver un problema para determinar el plan de rutas óptimo que maximice el beneficio de la empresa.

**SOLUCIÓN:**

$X_{ij}$ : cantidad enviada de depósito i a estación j

$Y_{ij}$ : camiones usados de depósito i a estación j

$$\max \sum_{i,j} \left( 7X_{ij} - c_{ij} Y_{ij} \right)$$

$$s.a. \quad \sum_j X_{ij} \leq cap_i \quad \forall i$$

$$\sum_i X_{ij} \leq dem_j \quad \forall j$$

$$X_{ij} \leq capac_{ij} \quad \forall i,j$$

$$X_{ij} \leq 20Y_{ij} \quad \forall i,j \qquad X_{ij}, Y_{ij} \geq 0, Y_{ij} \in \mathbb{Z}$$

Objetivo: 825

| Cantidades | E1 | E2 | E3 | E4 |
|---|---|---|---|---|
| D1 | 80 | 0 | 60 | 0 |
| D2 | 0 | 60 | 80 | 80 |
| D3 | 40 | 60 | 0 | 40 |

| Camiones | E1 | E2 | E3 | E4 |
|---|---|---|---|---|
| D1 | 4 | 0 | 3 | 0 |
| D2 | 0 | 3 | 4 | 4 |
| D3 | 2 | 3 | 0 | 2 |

## IV.2.3. Caso 2: Conductores de metro

La Compañía Metropolitana de Transporte (CMT) explota el metro de la ciudad y planifica la asignación de turnos de su personal de operación. El convenio laboral exige que cada conductor disponga de dos días libres consecutivos por semana. La demanda de conductores para operar los trenes varía dependiendo del día, siendo, de lunes a domingo, de 18, 16, 15, 16, 19, 14 y 12 conductores respectivamente. El coste de personal varía a lo largo de la semana. Para un día cualquiera de lunes a viernes el coste es de 50 € por día, los sábados se pagan a 75 y los domingos a 90.

Además se puede recurrir a la contratación parcial de hasta 3 personas que trabajarían los viernes, sábados y domingos por un coste de 200 €. Determinar el esquema óptimo de turnos de trabajo de dichos conductores.

**SOLUCIÓN:**

$X_i$ : número de conductores que empiezan su turno el día i
$T_i$ : conductores que trabajan el día i
$Y$ : número de personas contratadas a tiempo parcial

$$\min \quad \sum_i c_i T_i + 200Y$$

$$s.a. \quad T_i = \sum_{j \neq i-1, i-2} X_j \geq nec_i \quad \forall i \neq 5,6,7$$

$$T_i = \sum_{j \neq i-1, i-2} X_j + Y \geq nec_i \quad \forall i = 5,6,7$$

$$Y \leq 3$$

$$X_i, T_i, Y \geq 0$$

COSTE: 6730

| L | M | X | J | V | S | D | Extra |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 2 | 2 | 4 | 3 | 3 | 0 | 0 |

## IV.2.4. Caso 3: Producción

Una empresa puede fabricar 4 productos diferentes utilizando en su elaboración 5 tipos de materias primas. Las unidades requeridas de cada materia prima por cada unidad de cada producto se recogen en la tabla siguiente, así como el precio de venta de cada producto y la disponibilidad de cada materia prima:

| | M1 | M2 | M3 | M4 | M5 | Precio venta |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P1 | 1 | 1 | | 1 | | 15 |
| P2 | | 1 | | 1 | 1 | 20 |
| P3 | 1 | 1 | 1 | | | 15 |
| P4 | 1 | | 1 | | | 10 |
| Disponible | 200 | 150 | 150 | 200 | 100 | |

El precio unitario de cada materia prima es de 2, 3, 4, 5 y 5, respectivamente, pero hay un coste adicional por hacer un pedido de cada materia prima, independiente de la cantidad que se pida, de 20, 25, 20, 25, 25 unidades, respectivamente. Determinar el plan de producción óptimo para maximizar los beneficios de la empresa.

***SOLUCIÓN:***

$X_i$ : unidades producidas de producto Pi

$$M_j : \begin{cases} 1 & \text{si pide materia prima j} \\ 0 & \text{si no pide materia prima j} \end{cases}$$

$$\max \sum_i pv_i X_i - \sum_{i,j} a_{ij} c_j X_i - \sum_j f_j M_j$$

$$s.a. \quad \sum_i a_{ij} X_i \leq disp_j M_j \quad \forall j$$

$$X_i \geq 0, M_j \in \{0,1\}$$

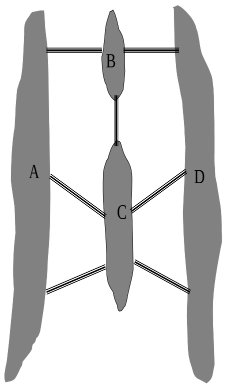
| | |
|---|---|
| Beneficio | 1435 |
| P1 | 50 |
| P2 | 100 |
| P3 | 0 |
| P4 | 150 |

.

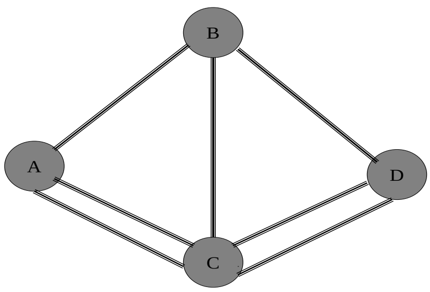
# V.Teoría de grafos u optimización en redes

## V.1. Introducción

La teoría de grafos surge en el siglo XVIII con Euler (1707-1803), cuando resolvió el famoso problema de los puentes de Konigsberg. Por esa ciudad pasa un río, el río Pregel, formando dos islas (B y C), conectadas entre sí y con las orillas (A y D) por siete puentes tal y como muestra la figura.



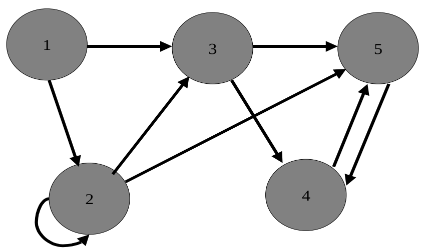

Los habitantes de esta ciudad tenían como entretenimiento en sus paseos domingueros intentar hacer un recorrido que pasara exactamente una vez por cada puente y que acabara en el punto donde empezó. El gran aporte de Euler fue que no sólo resolvió el problema anticipando que era imposible (ya que para que fuera posible el número de puentes que llega a un punto debe ser un número par), sino que hizo una abstracción del problema, un modelo, diferente a los hasta entonces utilizados: lo representó mediante un grafo.



Así la teoría de grafos se dedica a la resolución de problemas que pueden ser modelados mediante un grafo y resueltos mediante algoritmos específicamente desarrollados para un grafo. Existe un software de dominio público denominado Grafos (http://personales.upv.es/~arodrigu/Grafos/) que permite resolver los problemas habituales que se comentan en esta sección.

# V.2. Definiciones básicas

Un *grafo dirigido* o *red* es un conjunto de *nodos, nudos* o *vértices* (todos los términos son admisibles) unidos por *arcos*. Así cada *arco* es un par ordenado de vértices. Por ejemplo, sea el grafo de la figura $G=(V,A)$, donde $V=\{1,2,3,4,5\}$ es el conjunto de vértices y el conjunto de arcos es $A=\{(1,2),(1,3),(2,3),(2,5),(3,4),(3,5),(5,4),(4,5),(2,2)\}$.




Un *bucle* es un arco de la forma $(a,a)$, como por ejemplo el arco (2,2) de la figura.

Una *arista* es un arco sin orientación, es decir, no ordenado, y que por lo tanto puede ser utilizado tanto en un sentido como en otro. Un *grafo no dirigido* es un conjunto de vértices y un conjunto de aristas.

Un *multigrafo* es un grafo en el que existen un par de vértices unidos por más de una arista. En general, en todo lo que se va a ver y salvo que se diga lo contrario, se trabajará con *grafos simples*, es decir, no son multigrafos y no tienen bucles.

Una *cadena* es una secuencia de aristas o de arcos sin considerar su orientación, que une un par de nodos. Por ejemplo, en la figura, la secuencia de arcos que unen el nodo 4 con el 3: (4,5) (5,2) (2,3) forman una cadena. Un *camino* es una cadena en la que todos los arcos tienen la misma orientación. La cadena anterior, por ejemplo, no sería un camino.

Un *ciclo* es una cadena que une un nodo con él mismo y un *circuito* o *ciclo dirigido* es una secuencia que es ciclo y camino a la vez.

Un grafo es *conexo* si cualquier par de vértices está unido por al menos una cadena. Se dice *fuertemente conexo* si cualquier par de vértices está unido por al menos un camino. Un *árbol* es un grafo conexo y sin ciclos.

Para trabajar con un grafo es necesario poder almacenarlo. Existen diversas formas de almacenamiento o representación de grafos, pero una de la más extendida es la representación matricial, siendo fundamentalmente dos las matrices habitualmente usadas para representar un grafo: la matriz de incidencia y la matriz de adyacencia.

La *matriz de incidencia* de un grafo no dirigido es una matriz con tantas filas como nodos $n$ y tantas columnas como aristas $m$ tiene el grafo definiéndose sus elementos como

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el nodo } i \text{ pertenece a la arista } j \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

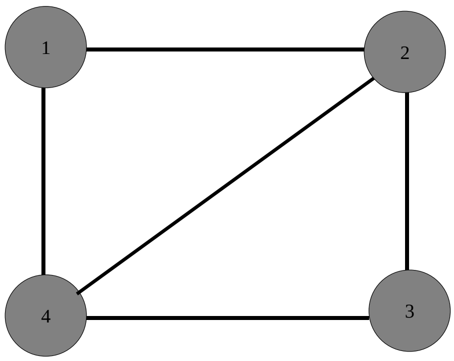
Para el caso de un grafo dirigido la definición es análoga, pero denotando con –1 el nodo inicial del arco y con +1 el nodo final. Obsérvese que esta matriz tiene únicamente dos elementos distintos de cero en cada columna (en caso de un bucle sólo un elemento) y es fácil observar que excepto en el caso de multigrafos se trata de una matriz totalmente unimodular[6]. Esto implica que cualquier problema de programación lineal entera que se plantee mediante esta matriz podrá ser resuelto mediante programación lineal, ya que la solución siempre será entera.

La *matriz de adyacencia* de un grafo es una matriz cuadrada de tantas filas y columnas como número de nodos y cuyos elementos se definen como

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si existe un arco (arista) del nodo } i \text{ al } j \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Obsérvese, que en el caso de un grafo no dirigido esta matriz es simétrica.

Para el siguiente grafo no dirigido, las correspondientes matrices de adyacencia e incidencia se presentan a continuación.

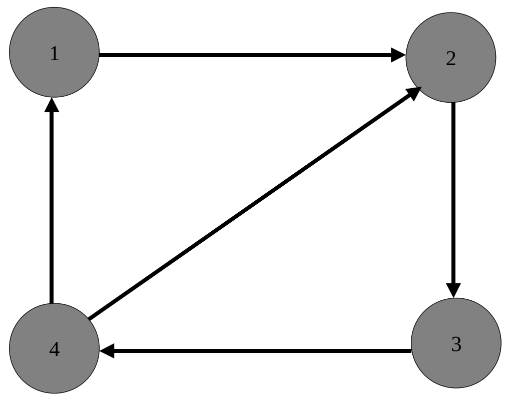



$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[6] Ver el tema de programación lineal entera para la definición.

Otro ejemplo, pero en esta ocasión para un grafo dirigido, sería el siguiente.




$$B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los algoritmos, no sólo de grafos, se suelen clasificar por su eficiencia, siendo la medida más usual de ésta la que es denominada *complejidad*. Si la dimensión del problema es $n$ y el número de operaciones elementales que realiza un algoritmo es $f(n)$, se dice que el algoritmo es de complejidad $\theta(g(n))$ si $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\text{constante}$. En general, se utiliza la función más sencilla que verifique la definición anterior, así, por ejemplo, si el número de operaciones elementales es $2n^3+n^2-2$, se dice que el algoritmo es de complejidad $\theta(n^3)$. En muchos casos, no es posible precisar el número de operaciones elementales de forma exacta, en cuyo caso se sigue el criterio del peor de los casos. Es un criterio muy discutible, pero es el mundialmente aceptado para estos casos.[7]

Se considera por tanto que un algoritmo es más eficiente que otro si su complejidad es menor, entendiendo por tal que el crecimiento de la función de complejidad es más lento.

Por lo tanto, en lo que sigue junto a los algoritmos que se presenten se dará su complejidad, tanto para ver lo eficientes que son como para poder comparar unos con otros.

[7] Para profundizar en el tema de la complejidad consultar el libro de Garey, M.R. and D.S. Johnson "*Computers and Intractability. A guide to the theory of NP-Completeness*" (1979) Freeman and Company (San Francisco).

# *V.3.* Árbol generador o de extensión de mínimo peso

Dado un grafo no dirigido $G=(V,E)$, se llama *árbol de extensión* a un árbol que incluye a todos los vértices de $G$ y sus aristas están incluidas en $E$. También se le llama *árbol de expansión* o *árbol generador* o *árbol soporte*, aunque en inglés sólo tiene una acepción, *spanning tree*.

Dado un grafo no dirigido, $G=(V,E)$, con "pesos" en las aristas, el problema de optimización que se plantea sobre él asociado al árbol de extensión es el problema del árbol de extensión de mínimo peso, consistente en obtener a partir del grafo original un árbol que conecte todos los vértices y cuya suma de los pesos de sus aristas sea mínima.

Este problema suele surgir cuando se quiere diseñar una red, por ejemplo de telecomunicaciones, buscando que la red final tenga la menor longitud o coste global posible. Obsérvese que no busca minimizar la distancia o coste entre dos nodos concretos sino el global de la red.

Para resolverlo existen dos algoritmos, en principio igualmente eficientes[8], de tipo ávido o *greedy*. Este tipo de algoritmos se basa en que en cada etapa se toma una decisión localmente óptima, es decir, óptima para esa etapa sin tener en cuenta el resto de las etapas; por lo tanto, en general, son algoritmos de tipo heurístico (encuentran una buena solución en poco tiempo, pero puede no ser la óptima). Sin embargo, para este problema esta estrategia de búsqueda de la solución resulta ser óptima, pudiéndose demostrar que la solución alcanzada es la solución óptima del problema.

Los dos algoritmos son el algoritmo de Prim del año 1957 y el algoritmo de Kruskal de 1956. A continuación se presentará el primero de ellos, el otro puede consultarse en cualquiera de los libros de la bibliografía especializado en grafos.

Se utilizará la siguiente notación:

$n$: número de nodos del grafo $G$ ($n=\text{card}(V)$)

$T$ : árbol construido

$C_k$ : conjunto de nodos conectados hasta la iteración $k$

$\overline{C}_k$ : conjunto de nodos todavía no conectados hasta la iteración $k$

***Algoritmo de Prim***

[8] Ambos tienen la misma complejidad, sin que se pueda determinar a priori en un grafo cuál lo resolverá en menos tiempo.

PASO 1: SELECCIÓN DE UN VÉRTICE INICIAL CUALQUIERA

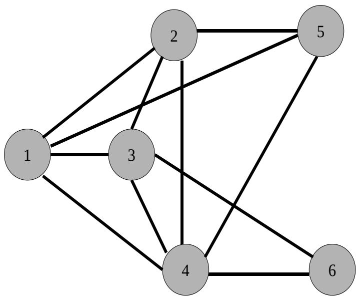
Hacer $C_0 = \varnothing$, $\overline{C}_0 = V$. Elegir un vértice cualquiera $i \in V$ y hacer $C_1 = \{i\}$, $\overline{C}_1 = V - \{i\}$. Sea $k = 2$ y $T = \varnothing$.

PASO 2: SELECCIÓN DEL VÉRTICE MÁS CERCANO A LOS CONECTADOS Y QUE TODAVÍA NO HAYA SIDO CONECTADO, AÑADIR LA ARISTA AL ÁRBOL GENERADOR

Seleccionar $j^* \in \overline{C}_{k-1}$, un nodo no conectado tal que se une a algún vértice ya conectado (de $C_{k-1}$) con la arista de menor peso $e_{k-1}$. Hacer $C_k = C_{k-1} \cup \{j^*\}$, $\overline{C}_k = \overline{C}_{k-1} - \{j^*\}$ y $T = T \cup \{e_{k-1}\}$.

Si $k = n$, parar. Si no, poner $k = k + 1$ y repetir el paso 2.

Sea el siguiente ejemplo. Una compañía pretende unir por carretera los pueblos de la siguiente figura, representando las aristas las posibles carreteras que se pueden construir y sus pesos las distancias de éstas, recogidos en la matriz de distancias adjunta. Si el coste de unir dos pueblos es proporcional a la distancia entre ellos, ¿qué carreteras debe construir para que queden unidos todos los pueblos con un coste mínimo?




$$\begin{pmatrix} . & 1 & 5 & 7 & 9 & \infty \\ 1 & . & 6 & 4 & 3 & \infty \\ 5 & 6 & . & 5 & \infty & 10 \\ 7 & 4 & 5 & . & 8 & 3 \\ 9 & 3 & \infty & 8 & . & \infty \\ \infty & \infty & 10 & 3 & \infty & . \end{pmatrix}$$

PASO 1:

$C_0 = \varnothing$, $\overline{C}_0 = V = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Sea por ejemplo $i = 1$: $C_1 = \{1\}$, $\overline{C}_1 = \{2,3,4,5,6\}$. Sea $k = 2$ y $T = \varnothing$.

PASO 2:

$j^* = 2$, $e_1 = \{1,2\}$. $C_2 = \{1,2\}$, $\overline{C}_2 = \{3,4,5,6\}$, $T = \{e_1\}$. $k < 6$, $k = 3$.

PASO 3:

$j^* = 5$, $e_2 = \{2,5\}$. $C_3 = \{1,2,5\}$, $\overline{C}_3 = \{3,4,6\}$, $T = \{e_1, e_2\}$. $k < 6$, $k = 4$

PASO 4:

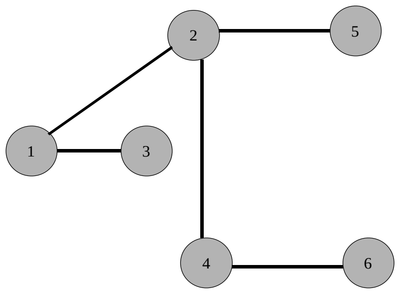
$j^* = 4$, $e_3 = \{2,4\}$. $C_4 = \{1,2,5,4\}$, $\overline{C}_4 = \{3,6\}$, $T = \{e_1, e_2, e_3\}$. $k < 6$, $k = 5$.

PASO 5:

$j^* = 6$, $e_4 = \{4,6\}$. $C_5 = \{1,2,5,4,6\}$, $\overline{C}_5 = \{3\}$, $T = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. $k < 6$, $k = 6$

PASO 6:

$j^* = 3$, $e_5 = \{1,3\}$. $C_6 = \{1,2,5,4,6,3\}$, $\overline{C}_6 = \varnothing$, $T = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. $k = 6$, parar




El árbol no es único ya que hay un empate en el último paso, pudiendo sustituirse la arista $\{1,3\}$ por la $\{3,4\}$ y el peso total es el mismo.

El algoritmo se puede adaptar de forma inmediata para buscar el árbol de máximo peso. El "peso" total es de 16 km.

# V.4. Problemas de camino mínimo

Sobre un grafo dirigido, supuesta una "longitud" para cada arco, los problemas de camino mínimo consisten en encontrar uno o varios caminos de longitud mínima entre ciertos nodos. La "longitud" de un arco puede ser tanto una longitud real como un coste, un tiempo, etc.

Los problemas de camino mínimo son probablemente los problemas más relevantes de la teoría de grafos, no sólo por sus múltiples aplicaciones en problemas reales, sino también porque forman parte de los métodos de resolución de otros problemas, siendo los algoritmos de resolución incorporados como subrutinas dentro de algoritmos más complejos.

Se denominan problemas de camino mínimo, en plural, ya que existen varios planteamientos posibles dentro de esta definición: camino mínimo de un origen a un destino, caminos mínimos de un vértice a todos los demás, caminos mínimos de todos a todos los vértices, etc. En general, nosotros nos referiremos al problema de camino mínimo como el problema de buscar el camino más corto de un vértice a todos los demás.

A la hora de resolver un problema de camino mínimo lo primero que hay que comprobar es que no existan circuitos de longitud negativa, ya que si existieran evidentemente el problema no tendría solución.[9]

La forma de resolver los problemas de camino mínimo se basa en la programación dinámica ya que el problema puede ser planteado por etapas. A partir del principio de optimalidad de Bellman y denotando por $d_{kj}$ a la longitud del arco $(k, j)$ y por $u_j$ a la distancia acumulada mínima desde el vértice origen al vértice $j$, se deducen las siguientes ecuaciones denominadas *ecuaciones de Bellman* que sirven para resolver el problema de camino mínimo:

$$u_1 = 0$$
$$u_j = \min_{k \neq j} \left\{ u_j, u_k + d_{kj} \right\} \quad j = 2, ..., n$$

En principio, bastaría con resolver estas ecuaciones para resolver el problema, pero la resolución de estas ecuaciones no es inmediata, por lo que se han diseñado algoritmos específicos para resolverlas. A continuación vamos a ver dos de ellos, el primero y más sencillo (algoritmo de Dijkstra) sólo puede ser aplicado en el caso en que todas las longitudes de los arcos sean mayores o iguales que cero y el segundo (algoritmo de Bellman-Ford) que se puede aplicar al caso general.

***Algoritmo de Dijkstra* (*1959*)**

Como se ha comentado, sólo es aplicable cuando las longitudes de los arcos son mayores o iguales que cero. Sin embargo es el más utilizado y el que debe utilizarse cuando sea posible, ya que su complejidad ($\theta(n^2)$) es la mejor de entre todos los algoritmos de camino mínimo.

Es un algoritmo de etiquetado, denotándose por $P$ al conjunto de nodos etiquetados de forma permanente y $T$ al conjunto de nodos etiquetados de forma transitoria.

La idea básica de este algoritmo es ir obteniendo el camino mínimo en cada iteración al vértice transitorio con longitud menor desde el origen, ya que al no existir arcos con longitud negativa, nunca será posible disminuir ese valor pasando por ningún otro nodo cuya distancia sea mayor. Una vez asegurada que la distancia obtenida hasta ese vértice es la menor posible, se actualizan las demás etiquetas transitorias, viendo si existe un camino más corto a estos nodos a través del nodo recién etiquetado.

Se denotará por $pred(j)$, al nodo inmediatamente anterior al nodo $j$ en el camino del origen al nodo $j$, para poder rehacer el camino.

---

[9] Existen algoritmos para detectar la existencia de circuitos con longitud negativa, pero no se van a ver en este curso. Consúltese en la bibliografía especializada para profundizar sobre el tema.

PASO 0: INICIO, SE ETIQUETAN LOS NODOS CON LA LONGITUD DEL ARCO QUE LOS UNE CON EL ORIGEN

$u_1 = 0$, $u_j = d_{1j}$, $j = 2,...,n$. $P = \{1\}$, $T = \{2,..,n\}$, $pred(j) = 1,\ j = 2,...,n$

PASO 1: DESIGNAR LA ETIQUETA PERMANENTE DE LA ITERACIÓN: VÉRTICE CON MENOR VALOR DE LA ETIQUETA TRANSITORIA

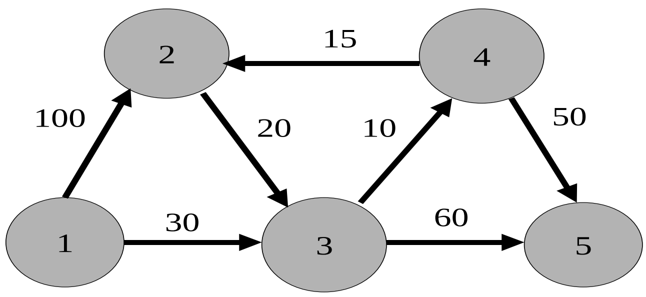
Buscar $k \in T$ tal que $u_k = \min_{j \in T} \{u_j\}$. Hacer $P = P \cup \{k\}$ y $T = T - \{k\}$.

Si $T = \varnothing$, parar.

PASO 2: REVISAR LAS ETIQUETAS TRANSITORIAS

$\forall\, j \in T$ calcular $u_j = \min\{u_j, u_k + d_{kj}\}$, si se modifica poner $pred(j) = k$. Volver al PASO 1.

Apliquemos este algoritmo para resolver el problema de encontrar el camino más corto desde el nodo 1 a todos los demás en el siguiente grafo:




PASO 0:

$u_1 = 0$, $u_2 = 100$, $u_3 = 30$, $u_4 = \infty$, $u_5 = \infty$. $P = \{1\}$, $T = \{2,3,4,5\}$, $pred(j) = 1,\ j = 2,3,4,5$
.

PASO 1:

$u_k = 30$, $k = 3$, $P = \{1,3\}$, $T = \{2,4,5\} \neq \varnothing$.

PASO 2:

$u_2 = \min\{u_2, u_3 + d_{32}\} = \min\{100, 30 + \infty\} = 100$,

$u_4 = \min\{u_4, u_3 + d_{34}\} = \min\{\infty, 30+10\} = 40$, $pred(4) = 3$.

$u_5 = \min\{u_5, u_3 + d_{35}\} = \min\{\infty, 30+60\} = 90$, $pred(5) = 3$

PASO 1:

$u_k = 40$, $k = 4$, $P = \{1,3,4\}$, $T = \{2,5\} \neq \varnothing$.

PASO 2:

$u_2 = \min\{u_2, u_4 + d_{42}\} = \min\{100, 40+15\} = 55$, $pred(2) = 4$.

$u_5 = \min\{u_5, u_4 + d_{45}\} = \min\{90, 40+50\} = 90$, $pred(5) = 4$.

PASO 1:

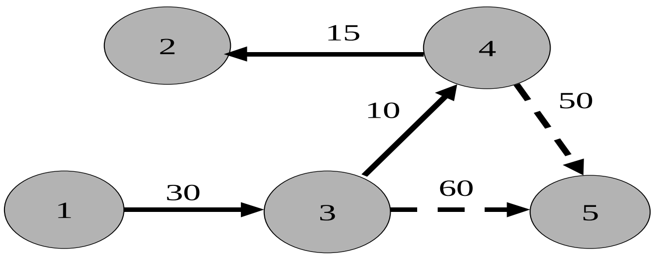
$u_k = 55$, $k = 2$, $P = \{1,3,4,2\}$, $T = \{5\} \neq \varnothing$.

PASO 2:

$u_5 = \min\{u_5, u_2 + d_{25}\} = \min\{90, 55+\infty\} = 90$.

PASO 1:

$u_k = 90$, $k = 2$, $P = \{1,3,4,2,5\}$, $T = \varnothing$, parar.




Este algoritmo es muy eficiente, sin embargo, como ya se ha comentado no es aplicable si existen arcos de longitud negativa, ya que las etiquetas no pueden hacerse permanentes pues podría disminuir la distancia usando más arcos, arcos de longitud negativa. La situación de arcos con longitud negativa podría ser considerada un caso anómalo, sin embargo, no lo es si se consideran las longitudes como costes, teniendo la longitud negativa el sentido de coste negativo o, mejor dicho, beneficio.

***Algoritmo de Bellman-Ford***

El algoritmo de Bellman-Ford resuelve las ecuaciones de Bellman para el caso general. No es recomendable utilizarlo cuando no haya longitudes negativas ya que es de complejidad $\theta(n^3)$, peor que el de Dijkstra.

Suponiendo que no existen circuitos de longitud negativa (en caso contrario no habría solución), la idea básica es obtener en cada iteración $k$ el camino mínimo desde el origen a cada vértice usando a lo sumo $k$ arcos.

Sea $u_j^m$ la longitud del camino mínimo del vértice 1 al vértice $j$ usando a lo sumo $m$ arcos. El algoritmo es el siguiente:

PASO 1: INICIAR CON LONGITUDES DE LOS ARCOS DEL NODO 1 A LOS DEMÁS NODOS

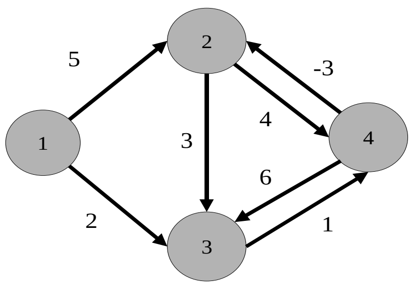
$u_1^1 = 0$, $u_j^1 = d_{1j}$ $\quad j = 2,...,n$. Poner $m = 1$

PASO 2: CALCULAR LAS DISTANCIAS MÍNIMAS USANDO A LO SUMO $m+1$ ARCOS

Calcular .

Si $u_j^{m+1} = u_j^m \; \forall j$, parar[10]. Si no, poner $m = m+1$ y volver al paso 2.

Veamos cómo funciona el algoritmo aplicado al siguiente ejemplo:




PASO 1:

$u_1^1 = 0$, $u_2^1 = 5$, $u_3^1 = 2$, $u_4^1 = \infty$. $m = 1$

PASO 2:

$$u_2^2 = \min\left\{u_2^1, \min\left\{u_3^1 + d_{32}, u_4^1 + d_{42}\right\}\right\} = \min\left\{5, \min\left\{2+\infty, \infty - 3\right\}\right\} = 5$$

[10] Obsérvese que para $m = n$ seguro se cumplirá $u_j^n = u_j^{n-1}$ ya que se trata de construir un árbol.

$$u_3^2 = \min\left\{u_3^1, \min\left\{u_2^1 + d_{23}, u_4^1 + d_{43}\right\}\right\} = \min\left\{2, \min\left\{5+3, \infty+6\right\}\right\} = 2$$

$$u_4^2 = \min\left\{u_4^1, \min\left\{u_2^1 + d_{24}, u_3^1 + d_{34}\right\}\right\} = \min\left\{\infty, \min\left\{5+4, 2+1\right\}\right\} = 3$$

Como $u_4^2 \neq u_4^1$, poner $m = 2$ y volver al paso 2.

PASO 2:

$$u_2^3 = \min\left\{u_2^2, \min\left\{u_3^2 + d_{32}, u_4^2 + d_{42}\right\}\right\} = \min\left\{5, \min\left\{2+\infty, 3-3\right\}\right\} = 0$$

$$u_3^3 = \min\left\{u_3^2, \min\left\{u_2^2 + d_{23}, u_4^2 + d_{43}\right\}\right\} = \min\left\{2, \min\left\{5+3, 3+6\right\}\right\} = 2$$

$$u_4^3 = \min\left\{u_4^2, \min\left\{u_2^2 + d_{24}, u_3^2 + d_{34}\right\}\right\} = \min\left\{3, \min\left\{5+4, 2+1\right\}\right\} = 3$$

Como $u_2^3 \neq u_2^2$, poner $m = 3$ y volver al paso 2 (aunque ya se sabe que se ha acabado por ser $m = n-1 = 4-1 = 3$.

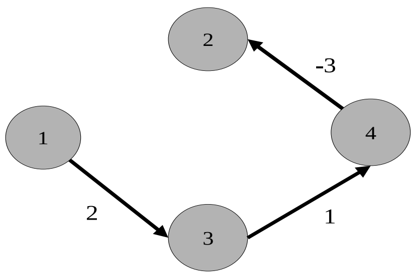
PASO 2:

$$u_2^4 = \min\left\{u_2^3, \min\left\{u_3^3 + d_{32}, u_4^3 + d_{42}\right\}\right\} = \min\left\{0, \min\left\{2+\infty, 3-3\right\}\right\} = 0$$

$$u_3^4 = \min\left\{u_3^3, \min\left\{u_2^3 + d_{23}, u_4^3 + d_{43}\right\}\right\} = \min\left\{2, \min\left\{0+3, 3+6\right\}\right\} = 2$$

$$u_4^4 = \min\left\{u_4^3, \min\left\{u_2^3 + d_{24}, u_3^3 + d_{34}\right\}\right\} = \min\left\{3, \min\left\{0+4, 2+1\right\}\right\} = 3$$

Como $u_j^4 = u_j^3 \quad \forall j$, parar.




Existen algoritmos específicos para resolver otros problemas de camino mínimo, como el algoritmo de Floyd-Warshall para resolver el problema de encontrar el camino mínimo de todos a todos los vértices, o mejoras a alguno de los algoritmos previos (como la mejora de Floyd al algoritmo de Bellman-Ford o la mejora de Ahuja para el de Dijkstra), pero su presentación excede de los objetivos de este capítulo introductorio de teoría de grafos.

# V.5. Problemas de flujo en redes

Los problemas de flujo en redes son problemas muy utilizados en todo lo que es transporte y distribución de diversos productos. También existen distintos planteamientos de problemas de flujo en redes, siendo el problema de flujo máximo con capacidades máximas en los arcos (también denominado únicamente problema de flujo máximo) y el problema de flujo compatible con coste mínimo los más relevantes y que serán vistos en esta sección.

Existen variantes de esos dos problemas, como el problema de flujo máximo con capacidades mínimas y máximas, problemas con varias fuentes y varios sumideros, problemas con capacidades en los nodos, problemas con ganancias y pérdidas de flujo en los arcos, etc. Sin embargo, no serán considerados en este capítulo introductorio.

## V.5.1. Problema de flujo máximo

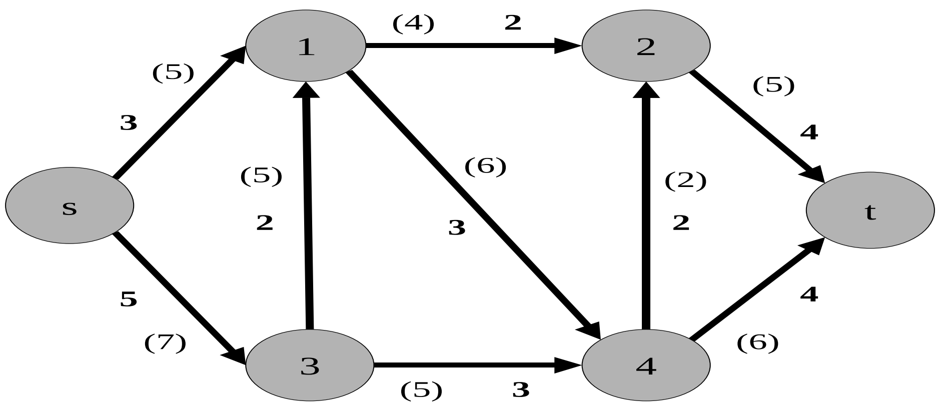
Sea $G=(V,U)$ un grafo dirigido sin bucles. Se dice que $G$ es una *red de transporte* si:

- Existe un única *fuente*, $s$, es decir, un único nodo en el que no incide ningún arco.
- Existe un único *sumidero*, $t$, es decir, un único nodo del que no sale ningún arco
- El grafo $G$ está *valorado*, es decir, cada arco tiene asociado un valor no negativo denominado *capacidad* del arco.
- Cada vértice es alcanzable desde la fuente y el sumidero es alcanzable desde todos los vértices.

Se denomina *flujo compatible* a un vector $\varphi$ de dimensión el número de arcos que cumpla las siguientes propiedades:

- El flujo no supera la capacidad de ningún arco ($\varphi_{ij} \le c_{ij} \quad \forall (i,j)$)
- Verifica la *ley de conservación de flujo*: $\forall i \ne s,t \quad \sum_{j/(j,i)\in U} \varphi_{ji} - \sum_{j/(i,j)\in U} \varphi_{ij} = 0$

Obsérvese que en un flujo compatible, el flujo que sale de la fuente coincide con el que llega al sumidero, denominándose *valor* del flujo. Dada la siguiente red cuyas capacidades aparecen entre paréntesis junto a cada arco, un flujo compatible sería el que aparece junto a cada arco en negrita, siendo su valor 8.




El objetivo del problema de *flujo máximo* es determinar un flujo compatible para transportar la mayor cantidad de flujo desde la fuente al sumidero.

Este problema está íntimamente relacionado con otro, tal y como se verá a continuación, el problema de encontrar el corte de mínima capacidad.

Un *corte* es un conjunto de arcos del grafo cuya eliminación desconecta la fuente del sumidero, dando lugar a dos componentes una que incluye a la fuente y otra al sumidero. Por ejemplo, en la figura anterior los arcos (1,2), (1,4) y (3,4) forman un corte, siendo las componentes obtenidas la de los nodos $\{s,1,3\}$ y la de los nodos $\{2,4,t\}$. Un corte se denota por las dos componentes que forma.

Se denomina *capacidad de un corte* a la suma de las capacidades de los arcos que lo forman. En el ejemplo anterior la capacidad sería 15=4+6+5. Un corte se denota por las dos componentes que forma y su capacidad por $C$, es decir, en el ejemplo sería $C(\{s,1,3\},\{2,4,t\}) = 15$.

El *problema del corte de mínima capacidad* es el problema de encontrar en una red el corte cuya capacidad sea mínima.

Es evidente que dado un flujo compatible y dado un corte, el valor del flujo no puede ser superior a la capacidad del corte, es decir, $V(\varphi) \leq C(P,\overline{P}) \quad \forall \varphi$ compatible y $\forall (P,\overline{P})$ corte y, por lo tanto, también se cumplirá para los valores máximos y mínimos, $\max\limits_{\varphi \text{ compatible}} V(\varphi) \leq \min\limits_{(P,\overline{P}) \text{ corte}} C(P,\overline{P})$.

La cuestión es si esta desigualdad es tal o se logra la igualdad y la respuesta es que sí aunque es no tan evidente, es decir, se puede asegurar que *el máximo flujo que se puede enviar de la fuente al sumidero coincide con la mínima capacidad de un corte.* La razón es que se puede demostrar planteando ambos problemas mediante programación lineal que son problemas duales y, por lo tanto, en el óptimo las dos funciones objetivo coinciden.

La inmediata aplicación de este resultado es que el algoritmo que se presentará a continuación es un algoritmo que resuelve ambos problemas (de hecho, su justificación se basa en este resultado).

***Algoritmo de Ford-Fulkerson o del camino de aumento***

Vamos a ver algunas definiciones previas:

- *Capacidad residual de un arco:* es la diferencia entre la capacidad de un arco y el flujo asignado a éste.

- *Camino de aumento:* es un camino de la fuente al sumidero tal que el mínimo de las capacidades residuales de los arcos que lo forman es positivo, denominándose a este valor *capacidad residual del camino de aumento.*

El algoritmo es el siguiente:

PASO 1: COMENZAR CON UN FLUJO COMPATIBLE Y OBTENER LAS CAPACIDADES RESIDUALES DE LOS ARCOS

Poner flujo 0 $\varphi_{ij} = 0 \; \forall (i, j) \in U$ y capacidades residuales $c_{ij}^* = c_{ij} \; \forall (i, j) \in U$ .

Etiquetar $s \to (-, \infty)$

PASO 2: OBTENER UN CAMINO DE AUMENTO, INCLUSO REDIRECCIONANDO FLUJO ANTERIORMENTE ASIGNADO

Sea $i \in V$ un nodo ya etiquetado y sea $j \in V$ un nodo sin etiquetar tal que existe el arco $(i, j)$ o el arco $(j, i)$ . Hacer según el caso:

a) Si $(i, j) \in V$ y la capacidad residual no es 0 ( $c_{ij}^* > 0$ ) puede aumentar flujo, calcular el mínimo de la capacidad residual de los arcos anteriores y este arco y etiquetar el nodo, es decir, calcular $\delta_j = \min\left\{\delta_i, c_{ij}^*\right\}$ y etiquetar el nodo $j$ con $j \to (i+, \delta_j)$ .

b) Si $(j, i) \in V$ y se está enviando flujo por ese arco ( $\varphi_{ji} > 0$ ) se puede redireccionar parte de ese flujo (se puede disminuir en ese arco), entonces calcular $\delta_j = \min\left\{\delta_i, \varphi_{ji}\right\}$ y etiquetar el nodo $j$ con $j \to (i-, \delta_j)$ .

Repetir hasta que el sumidero esté etiquetado e ir al paso 3 o hasta que no sea posible etiquetar más nodos (que se habrá acabado) e ir al paso 4.

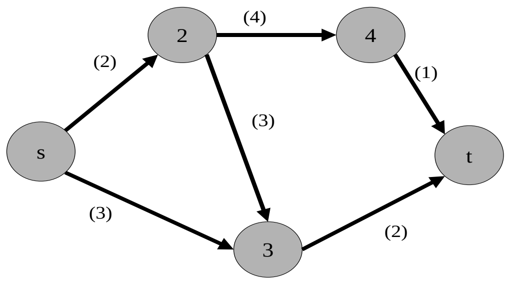
PASO 3: AUMENTAR EL FLUJO EN EL CAMINO OBTENIDO Y RECALCULAR LAS CAPACIDADES RESIDUALES

Recorrer el camino de nodos etiquetados aumentando el flujo en los arcos etiquetados positivamente y disminuyéndolo en los etiquetados negativamente en la cantidad con que se etiquetó el sumidero $\delta_t$ (capacidad residual del camino). Recalcular las capacidades residuales (disminuir en los arcos positivos y aumentar en los negativos). Borrar las etiquetas, excepto la de la fuente, y volver al paso 2.

PASO 4: PARAR, NO ES POSIBLE AUMENTAR EL FLUJO

El flujo obtenido es máximo y el corte de capacidad mínima viene dado por los nodos etiquetados en una componente y los no etiquetados en otra (es decir, el corte son los arcos que vayan de una componente a otra).

Apliquemos el algoritmo al siguiente ejemplo.




PASO 1:

Poner flujo 0 y capacidades residuales las de los arcos

$\varphi_{ij} = 0 \; \forall (i,j) \in U$ y $c^*_{ij} = c_{ij} \; \forall (i,j) \in U$ . Etiquetar $s \to (-,\infty)$

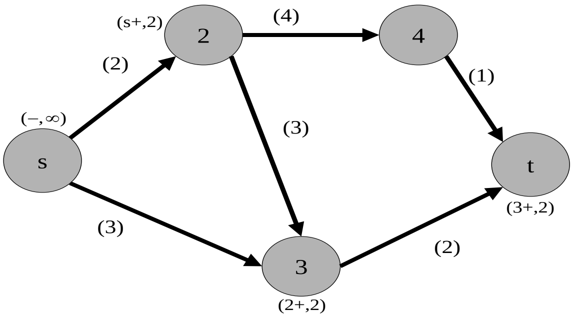
PASO 2:

$i = s$ y $j = 2$, caso a): $\delta_2 = \min\{\infty, 2\} = 2$, etiquetar $2 \to (s+, 2)$

$i = 2$ y $j = 3$, caso a): $\delta_3 = \min\{2, 3\} = 2$, etiquetar $3 \to (2+, 2)$

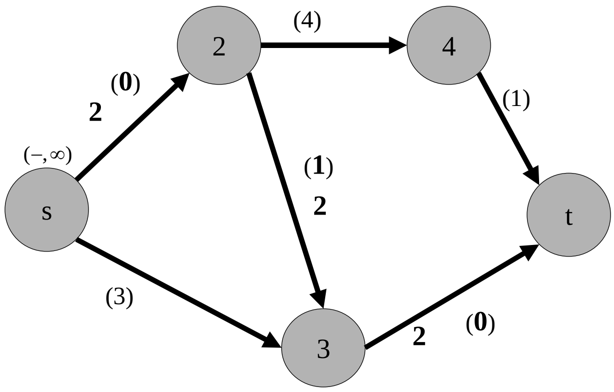
$i = 3$ y $j = t$, caso a): $\delta_t = \min\{2, 2\} = 2$, etiquetar $t \to (3+, 2)$

El sumidero está etiquetado (ver en la figura siguiente las etiquetas asignadas y el camino de flujo obtenido), ir al paso 3.




PASO 3:

Nuevo flujo $\varphi_{s2} = 2, \varphi_{23} = 2, \varphi_{3t} = 2\ (\varphi_{13} = \varphi_{24} = \varphi_{4t} = 0)$ y capacidades $c_{s2}^* = 0, c_{23}^* = 1, c_{3t}^* = 0 \quad (c_{s3}^* = 3, c_{24}^* = 4, c_{4t}^* = 1)$




Borrar etiquetas y volver al paso 2.

PASO 2:

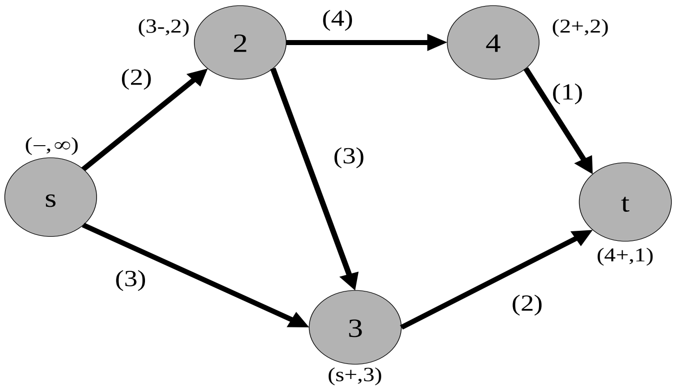
$i = s$ y $j = 3$, caso a): $\delta_3 = \min\{\infty, 3\} = 3$, etiquetar $3 \to (s+, 3)$

$i = 3$ y $j = 2$, caso b): $\delta_2 = \min\{3, 2\} = 2$, etiquetar $2 \to (3-, 2)$

$i = 2$ y $j = 4$, caso a): $\delta_4 = \min\{2, 4\} = 2$, etiquetar $4 \to (2+, 2)$

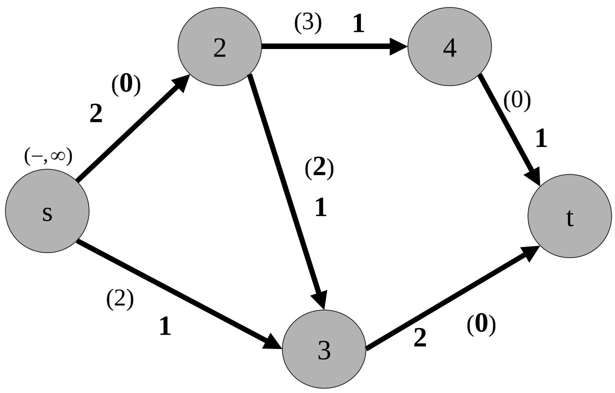
$i = 4$ y $j = t$, caso a): $\delta_t = \min\{2, 1\} = 1$, etiquetar $t \to (4+, 1)$

El sumidero está etiquetado (ver en la figura siguiente las etiquetas asignadas y el camino de flujo obtenido), ir al paso 3.




PASO 3:

Nuevo flujo $\varphi_{s3}=0+1, \varphi_{32}=2-1=1, \varphi_{24}=1, \varphi_{4t}=1\,(\varphi_{s2}=2, \varphi_{34}=2)$ y capacidades $c^*_{s3}=2, c^*_{23}=2, c^*_{24}=3, c^*_{4t}=0 \quad (c^*_{s2}=0, c^*_{3t}=0)$




Borrar etiquetas y volver al paso 2.

PASO 2:

$i=s$ y $j=3$, caso a): $\delta_3=\min\{\infty,2\}=2$, etiquetar $3\rightarrow(s+,2)$

$i=3$ y $j=2$, caso b): $\delta_2=\min\{2,1\}=1$, etiquetar $2\rightarrow(3-,1)$

$i=2$ y $j=4$, caso a): $\delta_4=\min\{1,3\}=1$, etiquetar $4\rightarrow(2+,1)$

No se pueden etiquetar más nodos y el sumidero no ha llegado a ser etiquetado, ir al paso 4).

PASO 4:

Parar, ya que el flujo obtenido es el óptimo y su valor es 3. Respecto al corte de mínima capacidad, obsérvese qué nodos están etiquetados, $\{s,2,3,4\}$, y cuáles no están etiquetados,

$\{t\}$, luego el corte divide la red en estas dos componentes, estando formado por los arcos que van de la primera a la segunda, es decir, $(3,t)$ y $(4,t)$ (obsérvese que la capacidad del corte es 3 al igual que el valor del flujo y que son arcos saturados, es decir, con capacidad residual 0).

El problema anterior también se puede formular como un problema de programación lineal y resolverlo, siendo el modelo:

$$\begin{aligned} \max \quad & v \\ & \sum_{j/(j,i)\in U} \varphi_{ji} - \sum_{j/(i,j)\in U} \varphi_{ij} = \begin{cases} -v & \text{si } i = s \\ 0 & \text{si } i \neq s,t \\ v & \text{si } i = t \end{cases} \\ & 0 \leq \varphi_{ij} \leq c_{ij} \end{aligned}$$

Sin embargo, por temas de complejidad, es preferible aplicar el algoritmo de Ford-Fulkerson para resolver el problema.

## V.5.2. Problema de flujo compatible con coste mínimo

En este problema se incorpora un nuevo elemento en la red, el *coste*. Se supone asociado a cada arco un coste unitario de envío de flujo a través del arco, $d_{ij}$. El problema consiste en enviar una cantidad de flujo conocida, $\theta$, a través de la red desde la fuente al sumidero, con coste total mínimo.

El planteamiento mediante programación lineal de este problema sería el siguiente (se supone la misma notación que en la sección anterior)[11]:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j)\in U} d_{ij}\varphi_{ij} \\ & \sum_{i/(s,i)\in U} \varphi_{ij} = \theta \\ & \sum_{i/(i,t)\in U} \varphi_{ij} = -\theta \\ & \sum_{i/(j,i)\in U} \varphi_{ji} - \sum_{i/(i,j)\in U} \varphi_{ij} = 0 \quad \forall j \neq s,t \\ & 0 \leq \varphi_{ij} \leq c_{ij} \quad \forall (i,j) \in U \end{aligned}$$

[11] Obsérvese que la matriz de restricciones tanto de este problema como del anterior, es la matriz de incidencia del grafo, con todas las propiedades que esto conlleva.

# V.6. Recorridos en grafos

Los recorridos en grafos son formas de recorrer un grafo (sus nodos y/o sus aristas) cumpliendo ciertas condiciones. En su forma clásica, responden a problemas que no incluyen una optimización sino que el objetivo es encontrar una solución factible al problema planteado, sin embargo, a partir de ellos se han formulado nuevos problemas ya con un objetivo a optimizar.

En lo que sigue se presentarán los dos problemas de recorridos más conocidos y sus variantes de optimización. Los dos problemas más conocidos son el del ciclo euleriano y su problema de optimización asociado el problema del cartero chino y el del ciclo hamiltoniano, siendo su problema de optimización asociado el problema del viajante.

## V.6.1. Ciclos y caminos eulerianos

Como ya se comentó en la introducción, éste fue el problema que dio comienzo a la teoría de grafos. Dado un grafo no dirigido o un multigrafo $G=(V,E)$, se dice que $G$ tiene un *ciclo euleriano* o ciclo de Euler si existe un ciclo en $G$ que pasa por todos los nodos y atraviesa exactamente una vez cada arista. Si lo que existe es un camino entre dos nodos, que pasa por todos los vértices y atraviesa exactamente una vez cada arista, se dice *camino euleriano.*

El problema de la existencia de un ciclo euleriano lo resuelve el siguiente teorema enunciado por Euler en el año 1766:

*Teorema de Euler.* Sea $G=(V,E)$ un grafo o multigrafo. $G$ posee un ciclo euleriano si y sólo si $G$ es conexo y todos sus vértices son de grado par[12].

Por ejemplo, en el caso de la ciudad de Königsberg no puede haber ciclo euleriano porque el grado de sus vértices es 3, excepto para la isla mayor que tiene grado 5, pero en ningún caso es par.

De forma inmediata se puede ver que un grafo $G$ tiene un camino euleriano si y sólo si es conexo y tiene a lo sumo dos vértices de grado impar (que serían inicio y final del camino). Así pues, los habitantes de Königsberg tampoco deben plantearse el problema del camino euleriano pues tampoco es posible.

Sin embargo, aunque el problema de la existencia del ciclo euleriano esté resuelto, no lo está cómo determinar cuál es ese ciclo. Para ello se presenta a continuación un algoritmo para resolver el problema de determinar un ciclo euleriano en un grafo (no multigrafo) basado en la matriz de adyacencia.

[12] El grado de un vértice se define como el número de aristas que inciden en ese vértice.

***Algoritmo para determinar un ciclo euleriano***

Sea $A=(a_{ij})$ la matriz de adyacencia del grafo $G=(V,E)$.

PASO 1: CONDICIÓN DE EXISTENCIA

Si existe un vértice de grado impar ($\exists i \in V$ tal que $\sum_j a_{ij}$ no es par ), parar ya que no existe ciclo euleriano. En otro caso, poner $p=0$ e ir al paso 2.

PASO 2: CONSTRUCCIÓN DE UN CICLO

Poner $p=p+1$. Elegir $k$ una fila no nula de la matriz $A$ y buscar un ciclo de la siguiente forma:

a) Definir $n=k$ y $C=\{v_k\}$

b) Buscar $m$ tal que $a_{nm}>0$ (es decir, que todavía sea posible ir del vértice $v_n$ al vértice $v_m$.

c) Incluir el vértice $v_m$ en $C$ ($C=C\cup\{v_m\}$) y hacer $a_{nm}=a_{mn}=0$ (eliminar la existencia de esa arista pues no puede volver a ser utilizada).

d) Poner $n=m$. Si $n\neq k$ (no se ha cerrado el ciclo) volver al paso 2b). Si no, almacenar el ciclo $C$ haciendo $C_p=C$ e ir al paso 3.

PASO 3: CONDICIÓN DE PARADA

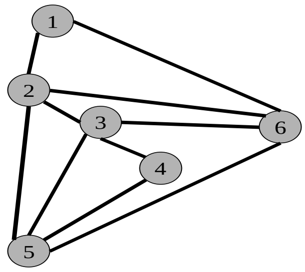
Si existe alguna arista sin utilizar ($\exists a_{ij}\neq 0$) volver al paso 2. Si no, ir al paso 4.

PASO 4: FORMACIÓN DEL CICLO EULERIANO A PARTIR DE LOS CICLOS ALMACENADOS

Buscar dos ciclos almacenados $C_i$ y $C_j$ con al menos un vértice común $v_k$. Eliminar el vértice de uno de ellos $C_i$ y sustituirlo por el otro ciclo $C_j$. Eliminar este último $C_j$ del almacén de ciclos. Repetir el proceso hasta que quede un único ciclo, que será un ciclo euleriano.

Veamos cómo se aplica con un ejemplo. Sea el grafo de la siguiente figura y su matriz de adyacencia.

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&1\\1&0&1&0&1&1\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1&0\end{pmatrix}$$




PASO 1: $\forall i \quad \sum_j a_{ij}$ es par, luego existe ciclo euleriano. $p=0$

PASO 2: $p=1,\ k=2$

a) $n=2$, $C=\{v_2\}$ b) $m=1$ c) $C=\{v_2,v_1\}$, $a_{12}=a_{21}=0$ d) $n=1\neq k=2$ ir a b)

b) $m=6$ c) $C=\{v_2,v_1,v_6\}$, $a_{61}=a_{16}=0$ d) $n=6\neq k=2$ ir a b)

b) $m=2$ c) $C=\{v_2,v_1,v_6,v_2\}$, $a_{62}=a_{26}=0$ d) $n=2=k$ entonces primer ciclo

$C_1=\{v_2,v_1,v_6,v_2\}$ y la matriz que queda es $A=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&1\\0&0&1&0&1&0\end{pmatrix}$

PASO 3: $A\neq 0$ entonces ir al paso 2.

PASO 2: $p=2,\ k=3$

a) $n=3$, $C=\{v_3\}$ b) $m=2$ c) $C=\{v_3,v_2\}$, $a_{32}=a_{23}=0$ d) $n=2\neq k=3$ ir a b)

b) $m=5$ c) $C=\{v_3,v_2,v_5\}$, $a_{25}=a_{52}=0$ d) $n=5\neq k=3$ ir a b)

b) $m=3$ c) $C=\{v_3,v_2,v_5,v_3\}$, $a_{53}=a_{35}=0$ d) $n=3=k$ entonces segundo ciclo

$$C_2=\{v_3,v_2,v_5,v_3\} \text{ y la matriz que queda es } A=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&1\\0&0&1&0&1&0\\0&0&0&1&0&1\\0&0&1&0&1&0\end{pmatrix}$$

PASO 3: $A\neq 0$ entonces ir al paso 2.

PASO 2: $p=3$, $k=3$

a) $n=3$, $C=\{v_3\}$ b) $m=4$ c) $C=\{v_3,v_4\}$, $a_{34}=a_{43}=0$ d) $n=4\neq k=3$ ir a b)

b) $m=5$ c) $C=\{v_3,v_4,v_5\}$, $a_{45}=a_{54}=0$ d) $n=5\neq k=3$ ir a b)

b) $m=6$ c) $C=\{v_3,v_4,v_5,v_6\}$, $a_{56}=a_{65}=0$ d) $n=6\neq k=3$ ir a b)

b) $m=3$ c) $C=\{v_3,v_4,v_5,v_6,v_3\}$, $a_{63}=a_{36}=0$ d) $n=3=k$ entonces tercer ciclo

$$C_3=\{v_3,v_4,v_5,v_6,v_3\} \text{ y la matriz que queda es } A=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

PASO 3: $A=0$ entonces ir al paso 4.

PASO 4: $C_2=\{v_3,v_2,v_5,\underline{v_3}\}$ y $C_3=\{\underline{v_3},v_4,v_5,v_6,v_3\}$, al sustituir en $C_2$ el nodo $v_3$, quedan los ciclos $C_2'=\{v_3,\underline{v_2},v_5,v_3,v_4,v_5,v_6,v_3\}$ y $C_1=\{\underline{v_2},v_1,v_6,v_2\}$ y al sustituir en $C_2'$ el nodo $v_2$, se obtiene el ciclo euleriano $C_2'=\{v_3,v_2,v_1,v_6,v_2,v_5,v_3,v_4,v_5,v_6,v_3\}$.

## V.6.2. Problema del cartero chino

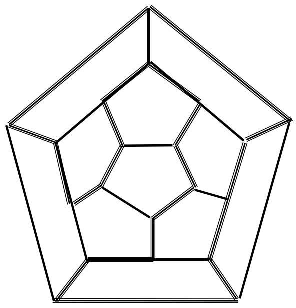
Este problema es una variante del problema del ciclo euleriano pero incluyendo optimización. Dado un grafo no dirigido $G=(V,E)$ conexo con distancias en las aristas, el problema consiste en determinar un recorrido que pase al menos una vez por cada arista y cuya longitud sea mínima. Este planteamiento corresponde al problema de un cartero que tiene que pasar por todas las calles de una red para repartir el correo recorriendo la menor distancia posible, de ahí su nombre.

Si el grafo tiene un ciclo euleriano es evidente que ese ciclo será la solución al problema. Si no lo tiene (algún vértice es de grado impar), alguna o algunas aristas han de ser recorridas más de una vez.

Existen algoritmos específicos para este problema, aunque no los vamos a ver en el tema. Además existen otras variantes de este problema que han dado lugar a otros métodos y modificaciones para resolverlos: el problema del cartero chino en un grafo dirigido (cartero motorizado), el problema con parte del recorrido prefijado, el problema con vuelta a la base cada cierto tiempo, etc.

## V.6.3. Recorridos hamiltonianos

El problema que motivó el estudio de los recorridos hamiltonianos y al que debe su nombre fue enunciado por Hamilon en 1859 y consistía en recorrer a través de las aristas los vértices de un dodecaedro pasando por ellos una y sólo una vez. En la figura aparece el dodecaedro representado como un grafo, es decir, plano.



Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido o un multigrafo. Se dice que $G$ tiene un *ciclo hamiltoniano* si existe un ciclo elemental (no repite vértices) que contiene todos los vértices del grafo. Un *camino hamiltoniano* es un camino elemental que contiene todos los vértices de $G$.

Dado un ciclo hamiltoniano, la eliminación de cualquier arista da un camino hamiltoniano. Al revés, sin embargo, no siempre es factible.

Así como para el problema del ciclo euleriano existe una condición necesaria y suficiente de existencia, en el problema del ciclo hamiltoniano no existe tal condición, sólo las hay necesarias o suficientes, pero no una caracterización. Estas condiciones no se verán en este tema, ni tampoco un algoritmo para obtener los ciclos hamiltonianos por su complejidad y poco eficiencia.[13]

[13] El algoritmo más habitual está basado en potencias de la matriz de adyacencia y puede ser consultado en la bibliografía especializada, aunque resulta bastante ineficiente.

## V.6.4. Problema del viajante

El problema del viajante es un problema de grafos, aunque su mayor relevancia la haya alcanzado por su formulación mediante programación entera. En este tema vamos a ver su planteamiento y enfoque desde la teoría de grafos.

El problema del viajante admite varios planteamientos. Básicamente consiste en encontrar el circuito de longitud mínima en un grafo valorado, siendo los dos posibles enfoques exigir que visite cada vértice exactamente una vez o exigir que los visita al menos una vez.

En el primer planteamiento el problema es, por lo tanto, encontrar un circuito o ciclo (según el grafo sea dirigido o no) hamiltoniano de longitud mínima. En el segundo caso, la solución puede no ser un ciclo elemental, sin embargo, se reduce al mismo problema sustituyendo el grafo $G$ por otro grafo $G'$ completo cuyas aristas o arcos tienen por longitud la distancia mínima entre los dos vértices que unen, obtenidas éstas previamente mediante algún algoritmo de camino mínimo.

Si el grafo es no dirigido el problema se conoce como *problema del viajante simétrico* y si es un grafo dirigido como *problema del viajante asimétrico.*

Se trata de uno de los problemas más difíciles de la literatura, no habiéndose encontrado ningún algoritmo exacto de complejidad polinomial para resolverlo (en principio podría utilizarse el algoritmo de los ciclos hamiltonianos, pero ya se ha comentado que es bastante ineficiente, con una complejidad muy lejos de ser polinomial). Por lo tanto, se va a presentar un algoritmo heurístico, que por lo tanto no asegura que la solución sea óptima, pero sí que sea razonablemente buena.

### *Algoritmo bioptimal para el TSP simétrico sobre el grafo $G'$*

Un paso previo a la aplicación de este algoritmo es construir el grafo $G'$ como se ha comentado anteriormente, es decir, un grafo completo con distancias entre los nodos las distancias mínimas entre esos dos nodos en el grafo original.

PASO 1: INICIO

Seleccionar un nodo origen $s$. Elegir otro nodo $t$, que sea el de distancia mínima desde el origen ( $d(s,t) \leq d(s,j) \quad \forall j \neq t$ ). Poner $l = t$ y guardar los nodos $s$ y $l$ como “visitados”.

PASO 2: CONSTRUCCIÓN DEL RECORRIDO INICIAL MEDIANTE ESTRATEGIA GREEDY

Seleccionar $t$ entre los nodos no visitados de modo que sea el de menor distancia al nodo $l$ de los visitados. Añadir $t$ al final del recorrido y poner $l = t$. Si hay nodos que no están en el recorrido repetir el paso 2, en otro caso, añadir $s$ al recorrido e ir al paso 3.

PASO 3: GUARDAR EL RECORRIDO Y CALCULAR SU LONGITUD

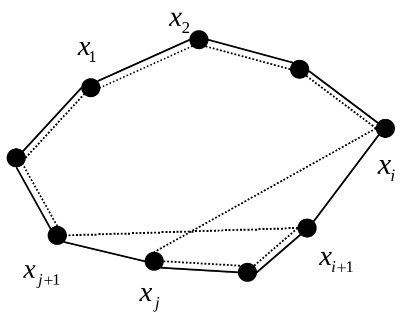
El recorrido será $\{x_1, x_2, ..., x_n, x_1\}$ y su longitud $L$. Poner $i = 1$.

PASO 4: INICIAR EL CAMBIO DE LIGADURAS DEL RECORRIDO

Poner $j = i + 2$.

PASO 5: EVALUAR EL CAMBIO DE LIGADURAS

Considerar el recorrido $\{x_1, ..., x_i, x_j, x_{j-1}, ..., x_{i+1}, x_{j+1}, ..., x_1\}$ creado por el intercambio de ligaduras (ver en la figura adjunta el recorrido inicial en trazo liso y el nuevo recorrido en trazo punteado) y obtener su longitud $L'$. Si $L' < L$ (es mejor este recorrido), considerar el nuevo recorrido como base para hacer los cambios y volver al paso 3. En otro caso ir al paso 6.




PASO 6: CONDICIÓN DE PARADA O VUELTA A INTERCAMBIAR LIGADURAS

Poner $j = j + 1$. Si $j \leq n$, ir al paso 5. Si no, poner $i = i + 1$. Si $i \leq n - 2$, ir al paso 4. Si no, parar.

Veamos su aplicación al siguiente ejemplo. Sea un grafo cuya matriz de distancias entre nodos es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} - & 13 & 12 & 18 & 7 & 14 \\ 13 & - & 21 & 26 & 15 & 25 \\ 12 & 21 & - & 11 & 6 & 4 \\ 18 & 26 & 11 & - & 12 & 14 \\ 7 & 15 & 6 & 12 & - & 9 \\ 14 & 25 & 4 & 14 & 9 & - \end{pmatrix}$$

PASO 1: $s = 1 \quad t = 5$ recorrido parcial 1-5

PASO 2: $l = 5 \quad t = 3$ recorrido parcial 1-5-3

PASO 2: $l=3 \quad t=6$ recorrido parcial 1-5-3-6

PASO 2: $l=6 \quad t=4$ recorrido parcial 1-5-3-6-4

PASO 2: $l=4 \quad t=2$ recorrido parcial 1-5-3-6-4-2, todos visitados.

PASO 3: 1-5-3-6-4-2-1 $L=70 \quad i=1$

PASO 4: $j=3$

PASO 5: Considerar 1-3-5-6-4-2-1, $L'=80$, ir a paso 6

PASO 6: $j=4\leq 6$ entonces ir al paso 5.

PASO 5: Considerar 1-6-3-5-4-2-1, $L'=77$, ir a paso 6

PASO 6: $j=5\leq 6$ entonces ir al paso 5.

PASO 5: Considerar 1-4-6-3-5-2-1, $L'=70$, ir a paso 6

PASO 6: $j=6\leq 6$ entonces ir al paso 5.

PASO 5: Considerar 1-2-4-6-3-5-1, $L'=70$, ir a paso 6

PASO 6: $j=7\not\leq 6$ entonces poner $i=1+1=2\leq 6-2=4$ ir al paso 4.

PASO 4: $j=4$

PASO 5: Considerar 1-5-6-3-4-2-1, $L'=70$, ir a paso 6

PASO 6: $j=5\leq 6$ entonces ir al paso 5.

PASO 5: Considerar 1-5-4-6-3-2-1, $L'=71$, ir a paso 6

PASO 6: $j=6\leq 6$ entonces ir al paso 5.

PASO 5: Considerar 1-5-2-4-6-3-1, $L'=78$, ir a paso 6

PASO 6: $j=7\not\leq 6$ entonces poner $i=2+1=3\leq 6-2=4$ e ir al paso 4.

PASO 4: $j=5$

PASO 5: Considerar 1-5-3-4-6-2-1, $L'=76$, ir a paso 6

PASO 6: $j=6\leq 6$ entonces ir al paso 5.

PASO 5: Considerar 1-5-3-2-4-6-1, $L'=86$, ir a paso 6

PASO 6: $j=7\not\leq 6$ entonces poner $i=3+1=4\leq 6-2=4$ e ir al paso 4.

PASO 4: $j=6$

PASO 5: Considerar 1-5-3-6-2-4-1, $L'=86$, ir a paso 6

PASO 6: $j = 7 \not\leq 6$ entonces poner $i = 4 + 1 = 5 \not\leq 6 - 2 = 4$ entonces parar:

El recorrido inicial 1-5-3-6-4-2-1 es un recorrido bioptimal (que al ser heurístico no asegura que sea óptimo).

Este algoritmo es rápido y eficiente, ya que aunque realice muchas iteraciones éstas son muy sencillas. El único inconveniente, como se ha comentado, es que no asegura el óptimo. Existen otros algoritmos, algunos intercambiando más ligaduras, pero todos heurísticos. Los algoritmos para encontrar el óptimo no son eficientes en tiempo, luego no suelen ser utilizados.

# V.7. Biblioteca de problemas

PROBLEMA 1

Un asesino es buscado por la policía, por lo que debe abandonar su refugio actual para ir a otro más seguro en la misma ciudad. Conoce por experiencias previas cuál es la probabilidad de no ser detenido en cada una de las calles. Se supone, además, que son independientes los sucesos correspondientes a la detención en cada una de las calles. Plantear el problema que se le presenta a este asesino como un problema de grafos.

PROBLEMA 2

En una red de comunicaciones, la probabilidad de que la línea de $i$ a $j$ sea operativa es $p_{ij}$. Sea una red con 7 nodos donde las probabilidades de comunicación son las siguientes:

$$p_{12} = e^{-7} \quad p_{13} = e^{-1} \quad p_{47} = e^{-2} \quad p_{32} = e^{-4} \quad p_{35} = e^{-9}$$

$$p_{67} = e^{-4} \quad p_{24} = e^{-1} \quad p_{56} = e^{-2} \quad p_{34} = e^{-3} \quad p_{46} = e^{-3}$$

Resolver el problema de seleccionar el camino desde el nodo 1 hasta los demás nodos que nos dé la máxima probabilidad de establecer comunicación.

PROBLEMA 3

En una red de comunicaciones de comando y control, un comandante está localizado en un nodo y su subordinado en otro nodo. Con cada eslabón en la red está asociado un esfuerzo $u_{ij}$ requerido para eliminar ese eslabón de la red. Presentar un modelo de grafos que se pueda usar para encontrar el mínimo esfuerzo necesario para bloquear todas las comunicaciones del comandante al subordinado e indicar mediante qué algoritmo se puede resolver el problema.

### PROBLEMA 4

La Agencia del Medioambiente ha decidido limitar el acceso al parque de la Fuenfría. No se permitirán vehículos particulares y se utilizarán únicamente minibuses conducidos por guardias forestales. Las carreteras existentes (de un único sentido y siendo O la estación de entrada y A, B, C, D y E los lugares de interés) y sus distancias son las siguientes:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| O-A = 2 | O-B = 5 | O-C = 4 | C-B = 1 | A-B = 2 |
| A-D = 8 | B-D = 4 | C-D = 3 | E-D = 1 | C-E = 4 |

a) Encontrar los caminos más cortos de la entrada al resto de las estaciones.

b) Si se desea comunicar con terminales de ordenador las estaciones, tendiendo líneas que sigan la carretera, resolver el problema de minimizar el número de kilómetros de línea tendida.

### PROBLEMA 5

RentCar está desarrollando un plan de reemplazamiento para su flota de coches para los próximos 5 años (2001-2005). Al principio de cada año, se decide si un coche debe ser mantenido o reemplazado. Un coche debe estar en servicio al menos un año y a lo sumo 3. En la siguiente tabla se dan los costes de reemplazamiento (en €) por coche en función del año en que es adquirido y de los años que lleva en funcionamiento.

| | Años funcionando | | |
|---|---|---|---|
| Año adquisición | 1 | 2 | 3 |
| 1-ene-2001 | 4000 | 5400 | 9800 |
| 1-ene-2002 | 4300 | 6200 | 8700 |
| 1-ene-2003 | 4800 | 7100 | - |
| 1-ene-2004 | 4900 | - | - |

Resolver como un problema de grafos el problema de encontrar la política óptima que se debe seguir para minimizar el coste.

PROBLEMA 6

Un carguero tiene que ir de un puerto a otro y en el camino puede escoger sus puertos de arribada y el orden en que los visita. Un viaje del puerto $i$ al $j$ le supone un beneficio $b_{ij}$ ($b_{ij} > 0$ si existe una mercancía que transportar en ese viaje, $b_{ij} < 0$ si hace el viaje de vacío). Resolver el problema de obtener la ruta más provechosa si una vez que sale del primer puerto 1 no puede volver a él y una vez que llega al puerto destino 5 ya no sale de él, siendo los beneficios los siguientes:

$$b_{12} = 15 \quad b_{13} = 5 \quad b_{14} = 5 \quad b_{15} = 20 \quad b_{23} = -5 \quad b_{24} = -25 \quad b_{25} = 5$$

$$b_{32} = -5 \quad b_{34} = -15 \quad b_{35} = 10 \quad b_{42} = 20 \quad b_{43} = -10 \quad b_{45} = 5$$

PROBLEMA 7

Los Pérez, los Sánchez, los García y los Fernández se van a su día de campo familiar anual. Se dispone de cuatro automóviles para el transporte de las familias. El automóvil 1 puede transportar a cuatro personas; el automóvil 2, tres personas; el automóvil 3, tres personas; y el automóvil 4, cuatro personas. Hay cuatro personas en cada familia y se ha decidido que ningún automóvil puede transportar a más de dos personas de la misma familia. Resolver el problema de transportar a la mayor cantidad de personas como un problema de grafos.

PROBLEMA 8

Telefónica tiene que comunicar cinco ciudades, siendo las distancias entre ellas:

$$d_{12} = 5 \quad d_{13} = 10 \quad d_{14} = 15 \quad d_{15} = 20 \quad d_{23} = 15$$

$$d_{24} = 20 \quad d_{25} = 25 \quad d_{34} = 20 \quad d_{35} = 5 \quad d_{45} = 10$$

Resolver el problema de grafos que se le presenta a la compañía, si el coste de tender una línea es proporcional a su longitud.

PROBLEMA 9

La comida para pollos es transportada por camiones desde tres almacenes a cuatro granjas de pollos. Desde algunos almacenes no es posible servir directamente a algunas granjas. Las capacidades de las otras rutas están limitadas por el número de caminos disponibles y el número de viajes hechos diariamente. La siguiente tabla muestra las ofertas en los almacenes y las demandas en las granjas (en miles de kilogramos). Las celdas de la tabla muestran las capacidades diarias de las rutas asociadas.

| Granja / Almacén | 1 | 2 | 3 | 4 | Oferta |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 30 | 5 | 0 | 40 | 20 |
| 2 | 0 | 0 | 5 | 90 | 20 |
| 3 | 100 | 40 | 30 | 40 | 200 |
| Demanda | 200 | 10 | 60 | 20 | |

a) Determinar cómo ha de hacerse para satisfacer la máxima demanda.

b) Si además se puede transportar entre los almacenes 1 y 2 y 2 y 3 y entre las granjas 1 y 2, 2 y 3 y 3 y 4, siendo la capacidad de estas nuevas rutas de dos sentidos de 50. ¿Qué efecto produce en las demandas insatisfechas?

PROBLEMA 10

Una empresa tiene 4 centros de fabricación y 8 grandes clientes. La demanda de cada cliente ha de ser satisfecha por a lo sumo un único centro de fabricación y cada centro podría servir a los siguientes clientes:

| | |
|---|---|
| Fábrica 1 | C1, C2 |
| Fábrica 2 | C3, C4, C5 |
| Fábrica 3 | C6, C4, C8 |
| Fábrica 4 | C7, C1, C2 |

Sin embargo, la capacidad de éstos impide que un centro abastezca a más de 2 clientes. Plantear como un problema de grafos el problema de abastecer al mayor número de clientes posible y resolverlo.

PROBLEMA 11

La matriz siguiente recoge las distancias directas por carretera entre las diferentes localidades de una isla medidas en kilómetros (las filas son las ciudades origen y si aparece el valor infinito se entiende que no existe una conexión directa entre ese par de localidades):

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 11 & 3 & \infty & 14 & 18 \\ \infty & 0 & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & 4 & \infty \\ \infty & 2 & \infty & 0 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & 0 & \infty & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

a) Aplicar un algoritmo de redes para hallar el camino más corto de la ciudad 1 a todas las demás.

b) Si los números fueran la máxima altura que hay que pasar entre dos localidades, ¿cómo adaptarías el algoritmo anterior para determinar el camino que pasa por menor altura máxima desde la ciudad 1 a las demás?

# V.8. Resultados de la biblioteca de problemas

RESULTADO DEL PROBLEMA 1

Se plantea como un problema de camino mínimo siendo el grafo: Arcos = Calles, Nodos = Intersecciones de calles, Longitudes = $-\ln p_{ij}$, donde $p_{ij}$ es la probabilidad de no ser detenido en la calle que va de $i$ a $j$.

RESULTADO DEL PROBLEMA 2

$u_1 = 0$, $u_2 = 5$, $u_3 = 1$, $u_4 = 4$, $u_5 = 10$, $u_6 = 7$, $u_7 = 6$. Al nodo 2 se llega desde el 3; al nodo 3 desde el 1; al nodo 4 desde el 3; al nodo 5, desde el nodo 3; al nodo 6, desde el 4; al nodo 7, desde el 4.

RESULTADO DEL PROBLEMA 3

Hay que buscar el corte de mínima capacidad, considerando que la capacidad de cada arco es el esfuerzo para eliminar ese eslabón. Algoritmo de Ford-Fulkerson.

RESULTADO DEL PROBLEMA 4

a) $u_A = 2$, $u_B = 4$, $u_C = 4$, $u_D = 7$, $u_E = 8$.

b) Kilómetros de línea necesarios: 9

RESULTADO DEL PROBLEMA 5

La estrategia óptima es comprar un coche (en 2001), reemplazarlo a los dos años (en el 2003) y mantener éste durante los otros dos años. El coste es de 12.500 €.

RESULTADO DEL PROBLEMA 6

El carguero debe ir de 1 a 4, de 4 a 2 y de 2 a 5, con lo que obtiene un beneficio de 30.

RESULTADO DEL PROBLEMA 7

El máximo número de personas es 14.

RESULTADO DEL PROBLEMA 8

Tendrá que tender 30 kilómetros de línea (1-2, 1-3, 3-5, 4-5).

RESULTADO DEL PROBLEMA 9

a) Se transportarán 145.000 kg: Del almacén 1 a la granja 1, 20; del almacén 2 a la granja 3, 5 y a la granja 4, 15; del almacén 3, a la granja 1, 100, a la granja 2, 10, a la granja 3, 30 y a la granja 4, 5. No se llega a satisfacer la demanda (hay mayor que oferta), pero ni siquiera se reparte toda la oferta.
b) En este caso se distribuye toda la oferta disponible, con lo que se transportarán los 240.000 kg.

RESULTADO DEL PROBLEMA 10

Se plantea como un problema de flujo máximo, con un nodo fuente del que salen arcos a las 4 fábricas con capacidad 2; de cada fábrica salen arcos a los nodos que representan a los clientes que puedan ser servidos por el nodo fábrica inicial con capacidad 1; y de cada nodo cliente a un nodo sumidero sale un arco de cada uno con capacidad 1. El algoritmo para resolverlo es el de Ford-Fulkerson.

RESULTADO DEL PROBLEMA 11

a) Aplicando el algoritmo de Dijkstra se obtiene:

$u_1 = 0, \quad u_2 = 5, \quad u_3 = 8, \quad u_4 = 3, \quad u_5 = 6, \quad u_6 = 12, \quad u_7 = 15.$

b) En este caso, al recalcular las etiquetas en cada paso, en lugar de comparar la anterior con la que se ha hecho permanente más la distancia que las une, se compara la anterior con el máximo entre la que se ha hecho permanente y la que les une. Es decir, si la que se ha hecho permanente es $u_k$, se actualizan las etiquetas según: $u_j = \min\left\{u_j, \max\left\{u_k, d_{kj}\right\}\right\}$

# VI. Modelos de optimización de gestión de inventarios[14]

En un negocio o industria es frecuente que se tengan que almacenar productos listos para la venta o materias primas necesarias para la producción, para poder hacer frente a la demanda. El objeto de la teoría de inventarios[15] es determinar reglas que se puedan aplicar por las empresas para reducir al mínimo los costes derivados de este almacenamiento.

Los modelos de inventarios pretenden fundamentalmente dar respuesta a dos preguntas:

- ¿Cuándo se debe pedir un producto?
- ¿Cuánto se debe pedir del producto?

Es decir, en los modelos de inventarios, las dos decisiones posibles son cuándo y cuánto y el objetivo es minimizar el coste bajo ciertas hipótesis.

Estas hipótesis que se hacen sobre el problema determinan los distintos modelos de inventarios, de los que vamos a ver algunos en posteriores secciones. Sin embargo, previamente veremos algunas definiciones y conceptos básicos sobre los que posteriormente se irán haciendo las hipótesis.

## VI.1. Características del problema general de inventario

Hablaremos de un problema de inventario como, cuándo y cuánto pedir de un producto para satisfacer una demanda con el coste mínimo posible y viendo siempre la empresa como el almacén que se está considerando, es decir, como un punto de depósito al que llegan productos y salen de forma externa a él, sin control directo sobre la demanda ni sobre la fuente.

Este planteamiento engloba tanto si el producto es una materia necesaria para una producción (se solicita la materia prima o producto a una fuente externa pero la demanda es interna a la

[14] Hay que agradecer todo el trabajo realizado para desarrollar este tema por Francisco Alberto Campos Fernández.

[15] Es también muy habitual utilizar la palabra anglosajona stock para el inventario.

empresa[16]) como si el producto es un producto acabado a la espera de su venta y fabricado por la propia empresa (la demanda es externa y la fuente es interna, es decir, la propia empresa tiene que proporcionar el producto al almacén) o como si tanto el producto como la demanda son de fuentes internas (el almacén en realidad es una parte de una empresa mayor y su función es abastecer a otras secciones) o de fuentes externas (la empresa es intermediaria entre el origen y el destinatario final).

Los elementos que intervienen en un problema de inventarios son fundamentalmente los costes, la demanda y el sistema de inventarios a seguir. Vamos a describir estos elementos y las hipótesis que se pueden hacer sobre ellos que determinan los distintos modelos de inventarios.

Con respecto a los *costes* pueden ser de diferente naturaleza, siendo los más habituales los que se relacionan a continuación.

- *Coste de compra:* se basa en el precio por unidad del artículo; en general será constante, con lo que el coste de compra de un lote será proporcional a su tamaño, aunque pueden considerarse descuentos por volumen, etc.
- *Coste de orden y/o preparación:* representa el coste fijo en el cual se incurre cuando se hace un pedido; este coste es independiente del volumen del pedido.
- *Coste de almacenamiento:* es el coste de mantener el inventario, que suele incluir el interés sobre el capital, el coste de mantenimiento y manejo, etc.; en general, este coste se da por unidad en inventario y unidad de tiempo.
- *Coste de ruptura o carencia:* es la penalización por no poder satisfacer la demanda e incluye la pérdida potencial de ingresos, así como el coste más subjetivo de la pérdida de clientes o de la disminución del nivel de calidad del servicio; en general, se dará como un coste por unidad de demanda no satisfecha y unidad de tiempo.

Los modelos de inventarios pretenden minimizar el coste total del sistema de almacenamiento siendo considerado éste una función, en general, aditiva de los costes definidos:

$$\begin{pmatrix}\text{Coste total del}\\ \text{inventario}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Coste de}\\ \text{compra}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{Coste de}\\ \text{orden}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{Coste de}\\ \text{almacenamiento}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{Coste de}\\ \text{ruptura}\end{pmatrix}$$

En cuanto a la demanda puede ser *demanda determinista*, es decir, se supone que se conocen exactamente los pedidos demandados por unidad temporal, o *demanda aleatoria*, que supone

[16] Probablemente esta demanda interna viene a su vez determinada por una demanda externa de productos acabados.

cierta incertidumbre en los valores de la demanda, habitualmente modelada mediante una distribución de probabilidad.

Por otra parte la demanda determinista a su vez puede ser clasificada en *estática* (constante por unidad de tiempo) o *dinámica*, que supone una demanda que varía por periodos de tiempo (demanda semanal o mensual, diferente de unos periodos a otros).

Otro elemento a determinar es el sistema de inventarios que se describe. Una primera clasificación de los sistemas es por los instantes en que el inventario puede ser revisado, pudiendo el sistema requerir una *revisión periódica* (por ejemplo, semanal o mensual) coincidiendo el momento para hacer un nuevo pedido con el inicio de cada periodo, o una *revisión continua*, en el que el inventario puede ser revisado en cualquier momento siendo este instante cuando el nivel de inventario desciende por debajo de un determinado nivel, previamente especificado y denominado *punto de reorden.*

Por último, existe otro elemento que puede ser considerado en el modelo que es un *tiempo de entrega*, que es el tiempo transcurrido desde que se pide el producto a la fuente hasta que es entregado.

Los modelos de inventarios buscan un equilibrio entre la calidad de servicio ofrecido a los clientes y el coste económico derivado de ésta, respondiendo a dos cuestiones: cuánto y cuándo pedir.

Con los *elementos* anteriores y las hipótesis que se hagan sobre ellos, se pueden obtener distintos modelos. Una posible clasificación, que no la única, de los modelos que vamos a ver es la siguiente (entendiendo por modelos deterministas aquéllos en los que la demanda es determinista y estocásticos cuando la demanda es aleatoria):

$$\begin{cases} \text{Modelos deterministas} & \begin{cases} \text{Modelos estáticos (o de lote económico EOQ)} \\ \text{Modelos dinámicos} \end{cases} \\ \text{Modelos estocásticos} & \begin{cases} \text{Modelos de revisión continua} \\ \text{Modelos periódicos} \begin{cases} \text{Modelos de un sólo periodo} \\ \text{Modelos multiperiodo} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

A los modelos estáticos se les denomina modelos de lote económico EOQ (*Economic Order Quantity*).

# VI.2. Modelos estáticos de lote económico (EOQ) con revisión continua

La hipótesis común a los modelos que vamos a ver en esta sección es que la demanda es conocida, disminuyendo el inventario a razón de $d$ unidades por unidad de tiempo.

Se utilizará la siguiente notación para los datos (entre paréntesis las unidades de las magnitudes):

- $d$ : tasa de demanda (unidades de producto por unidad de tiempo)
- $c_u$ : coste unitario de compra (unidades monetarias por unidad de producto)
- $c_p$ : coste de orden o pedido (unidades monetarias)
- $c_a$ : coste de almacenamiento (unidades monetarias por unidad de producto y de tiempo)
- $c_r$ : coste de ruptura o carencia (unidades monetarias por unidad de producto y de tiempo)
- $l$ : tiempo de entrega (unidad de tiempo)

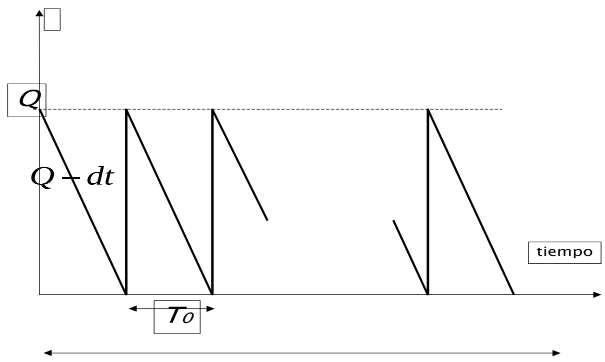
Respecto a las variables de decisión son dos en estos modelos:

- $Q$ : cantidad a pedir o tamaño del lote de pedido (unidades de producto)
- $T_o$ : instante para realizar el pedido la primera vez, o lo que es lo mismo tamaño del ciclo, es decir, tiempo entre dos pedidos (unidades de tiempo)

Ahora presentaremos los modelos más conocidos que cabe plantear dentro de la hipótesis de revisión continua y demanda determinista de tasa constante.

## VI.2.1. Modelo EOQ clásico (sin ruptura)

Éste es el caso más clásico que supone que no se admite ruptura y la entrega es inmediata ( $l = 0$ ). En este caso, el nivel de inventario varía según la siguiente figura



Es decir, el nivel de inventario varía dentro de un ciclo según $Q-dt$, siendo $t$ el tiempo dentro del ciclo. Por lo tanto, el tamaño del ciclo se obtiene igualando a 0 el valor anterior, es decir, $T_0 = Q/d$ . Luego, lo que hay que determinar es el valor de $Q$ .

El coste total de un ciclo viene dado por la expresión

$$\text{Coste ciclo=c. orden+c. compra+c. almacenamiento=}c_p + c_u Q + c_a \frac{Q^2}{2d}$$

y el coste total por unidad de tiempo será, por lo tanto,

$$C(Q) = \frac{\text{Coste ciclo}}{\text{Tiempo ciclo}} = \frac{d\,c_p}{Q} + c_u d + \frac{c_a Q}{2}$$

Esta función $C(Q)$ es estrictamente convexa, luego al derivar e igualar a 0 se obtiene un mínimo global, siendo el valor óptimo

$$Q^* = \sqrt{\frac{2d\,c_p}{c_a}} \quad (\textit{Fórmula de Wilson})$$

que será el tamaño óptimo del pedido, a realizar cada $T_0 = Q^*/d$ unidades de tiempo.

El valor $Q^*$ en general no es entero, si se desea una solución cabe redondear este valor si es grande y si es pequeño se determina el valor entero como el valor $Q^*$ tal que verifica $Q^*(Q^*-1) < \dfrac{2d\,c_p}{c_a} < Q^*(Q^*+1)$.

Una variante sencilla de este problema es suponer que la entrega no es inmediata, sino que existe un tiempo de entrega fijo y conocido $l > 0$. Esta modificación no afecta a los valores determinados anteriormente, sólo al momento en que hay que hacer el pedido. Para saber cuándo hacer el pedido se puede utilizar el tiempo, pero lo habitual es determinarlo en función del nivel de inventario, siendo este punto de reorden para el modelo que nos ocupa el punto en el que el nivel de inventario sea de $ld$ unidades[17].

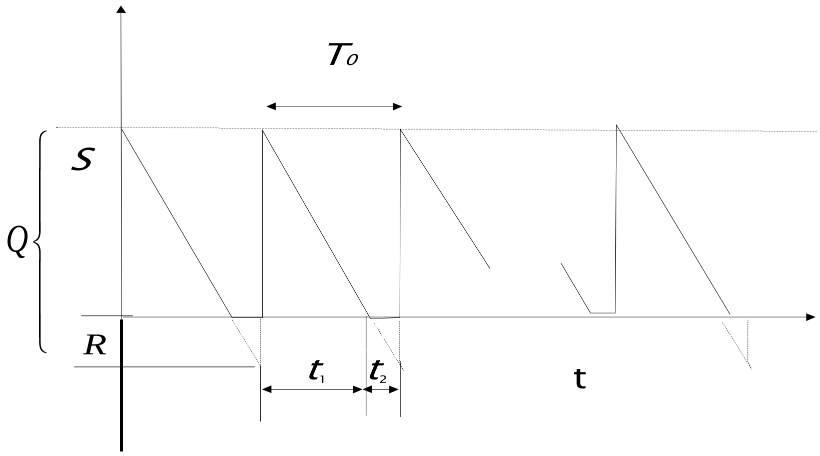
En el caso en que $l > T_0$, las peticiones hay que hacerlas para satisfacer no la demanda del próximo ciclo, sino para ciclos posteriores, en cuyo caso se calcula el plazo de entrega efectivo, $l_e = l - nT_0$, de modo que $l_e < T_0$. Lo único que hay que considerar es que cuando se hace un pedido, será para satisfacer la demanda de $n$ ciclos después.

[17] Esto es suponiendo que el plazo de entrega es menor que el tamaño del ciclo, en otro caso exigiría una modificación.

## VI.2.2. Modelo EOQ con ruptura de inventario

Al modelo anterior añadimos la posibilidad de mantener un cierto tiempo un nivel de inventario nulo. Al añadir esta posibilidad hay que incluir en los costes el coste de ruptura $c_r$ por unidad de demanda no satisfecha y unidad de tiempo. Al recibir el pedido se satisface en primer lugar la demanda pendiente.

En este caso la figura que representa la evolución temporal del nivel de inventario es la siguiente:




El problema consiste en determinar el tamaño del pedido óptimo, $Q^*$, que proporciona un nivel máximo de inventario $S^*$, supuesto que se admite una cantidad prefijada $R = Q - S$ de ruptura.

La expresión del coste total por ciclo será

Coste ciclo=c. orden+c. compra+c. almacenamiento+c. ruptura=

$$= c_p + c_u Q + c_a \frac{S^2}{2d} + c_r \frac{(Q-S)^2}{2d}$$

que por unidad de tiempo resulta ser

$$C(Q,S) = \frac{\text{Coste ciclo}}{\text{Tiempo ciclo}} = \frac{d\,c_p}{Q} + c_u d + \frac{c_a S^2}{2Q} + c_r \frac{(Q-S)^2}{2Q}$$

Luego el problema que se plantea es

$$\min_{Q,S} \quad C(Q,S)$$
$$Q \geq S$$
$$Q \geq 0$$

La función $C(Q,S)$ es convexa y la solución óptima del problema resulta ser

$$Q^* = \sqrt{\frac{2d\,c_p}{c_a}\frac{c_r + c_a}{c_r}} \text{ y } S^* = \sqrt{\frac{2d\,c_p}{c_a}\frac{c_r}{c_r + c_a}}$$

Los valores obtenidos son semejantes al caso anterior, pero se hallan modificados por un factor, denominado *tasa de ruptura* cuya expresión es $r = \frac{c_r}{c_r + c_a}$. Este índice está relacionado con el nivel de la calidad del servicio que se desea prestar, de modo que un valor próximo a 1 quiere decir que es mucho mayor el coste de ruptura que el de almacenamiento, o lo que es lo mismo, que apenas se permiten rupturas.

## VI.2.3. Modelo EOQ con descuentos por cantidad

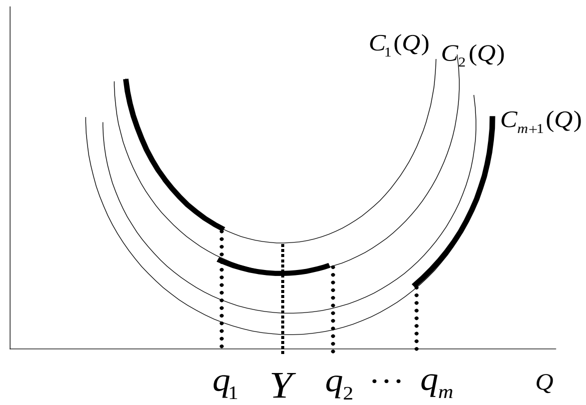
Este modelo es el mismo de la sección VII.2.1 con la variante de que se puede comprar el producto con descuento por el volumen del pedido, es decir, el coste de compra por unidad es:

$$c_u(Q) = \begin{cases} c_1 & 0 \le Q < q_1 \\ c_2 & q_1 \le Q < q_2 \\ \vdots & \vdots \\ c_{m+1} & Q \ge q_m \end{cases} \qquad (c_1 > c_2 > \ldots > c_{m+1})$$

Obsérvese que si se considera la función de coste por unidad de tiempo de cada uno de estos costes individualmente se tiene

$$C^i(Q) = \frac{d\,c_p}{Q} + c_i d + \frac{c_a Q}{2}, \quad i = 1,..,m+1$$

Estas funciones son funciones convexas que difieren en una constante y por lo tanto alcanzan su mínimo en el mismo punto $Y = \sqrt{\frac{2dc_p}{c_a}}$. Así el coste total será una función combinada de todas ellas como muestra la siguiente gráfica:




Resulta evidente que si el caso es el de la figura, $q_1 < Y < q_2$, el mínimo hay que buscarlo a la derecha de este valor y será $Q^*$ el valor en que se dé el mínimo de $\min\{C_2(Y), C_3(q_2), \cdots, C_{m+1}(q_m)\}$. De manera general, habría que detectar en qué intervalo se encuentra $Y$, $q_{i-1} < Y < q_i$ y obtener el valor óptimo $Q^*$ como el valor correspondiente a $\min\{C_i(Y), C_{i+1}(q_i), \cdots, C_{m+1}(q_m)\}$.

A continuación se va a desarrollar para el caso más sencillo, que es sólo de dos costes unitarios diferentes, es decir, $c_u(Q) = \begin{cases} c_1 & Q < q \\ c_2 & Q \geq q \end{cases}$, $c_1 > c_2$. Si se calcula la función de coste con cada uno de estos costes (siguiendo los cálculos de la sección VII.2.1) se tienen dos funciones de coste por unidad de tiempo según el valor de $Q$:

$$C^1(Q) = \frac{d\,c_p}{Q} + c_1 d + \frac{c_a Q}{2} \text{ y } C^2(Q) = \frac{d\,c_p}{Q} + c_2 d + \frac{c_a Q}{2}.$$

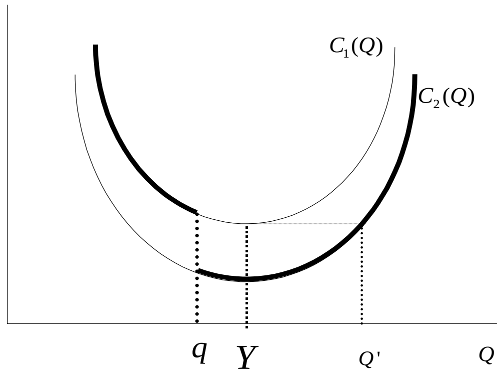
Lo que supone una función de coste por unidad de tiempo

$$C(Q) = \begin{cases} C^1(Q) = \dfrac{d\,c_p}{Q} + c_1 d + \dfrac{c_a Q}{2} & \text{si } Q < q \\ C^2(Q) = \dfrac{d\,c_p}{Q} + c_2 d + \dfrac{c_a Q}{2} & \text{si } Q \geq q \end{cases}$$

Ambas funciones, $C^1$ y $C^2$, son funciones convexas y puesto que difieren exclusivamente en una constante, alcanzan el mínimo en el mismo punto

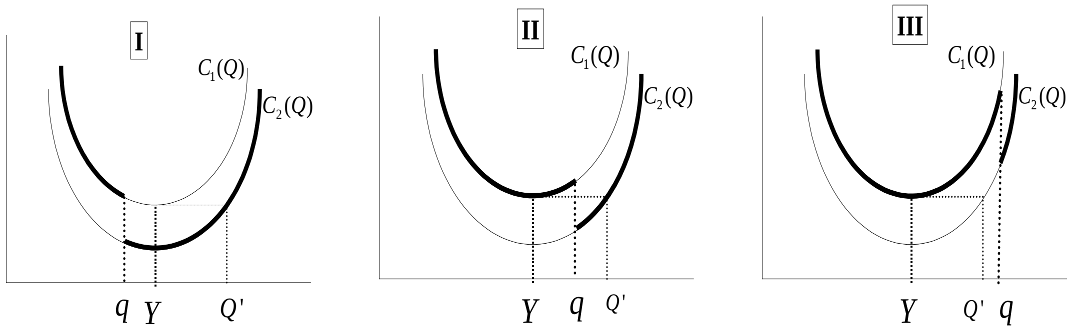
$$Y = \sqrt{\frac{2dc_p}{c_a}}$$

En la figura siguiente se presentan gráficamente las dos funciones de coste y la función total de coste que configuran que es discontinua (en trazo más grueso):




En la figura se representa también el valor $Q'$, que es el valor $Q' > Y$ para el que la función $C_2(Q)$ toma el valor del mínimo de la otra función de coste, es decir, $C_2(Q') = C_1(Y)$, que es un valor del que va a depender la solución.

Para determinar el tamaño óptimo del pedido se pueden distinguir tres casos distintos que se muestran a continuación:




Como se puede apreciar en las tres figuras la solución es diferente. Así en la primera figura (caso I), al ser $q < Y$ la solución óptima se alcanza en el valor $Q^* = Y$. En el caso II, al ser $Y < q < Q'$ la solución óptima se alcanza en $Q^* = q$. Por último, en el caso III, por ser $q > Q'$ el valor óptimo es $Q^* = Y$.

Por lo tanto, el algoritmo a seguir sería el siguiente:

1. Determinar $Y = \sqrt{\dfrac{2dc_p}{c_a}}$. Si $q < Y$, poner $Q^* = Y$. Si no, ir al paso 2.

2. Calcular $Q'$ (resolviendo la ecuación $C_2(Q') = C_1(Y)$ y $Q' > Y$ ). Si $q < Q'$, poner $Q^* = q$. En otro caso, poner $Q^* = Y$.

### VI.2.4. Modelo EOQ de múltiples artículos con límite de almacenamiento

Las hipótesis de este modelo son las mismas del modelo básico, pero para varios artículos (no se admite ruptura ni hay plazo de entrega). Se describirán las características correspondientes a cada uno por un superíndice que indique el artículo considerado:

- $d^i$ : tasa de demanda del artículo $i$
- $c_u^i$ : coste unitario de compra del artículo $i$
- $c_p^i$ : coste de orden o pedido del artículo $i$
- : coste de almacenamiento del artículo $i$

Respecto a las variables, habrá también una por artículo

- $Q^i$ : tamaño del lote de pedido del artículo $i$

Lo que caracteriza este modelo es que además existe un espacio disponible de almacenamiento limitado, $S$, que deben compartir todos los artículos, y un espacio ocupado por cada unidad de cada artículo, $s^i$.

Para este problema se plantea el siguiente modelo de programación no lineal:

$$\min \sum_i C^i(Q^i) = \sum_i \left( \frac{d^i c_p^i}{Q^i} + c_u^i d^i + \frac{c_a^i Q^i}{2} \right)$$

$$\sum_i s^i Q^i \le S$$

$$Q^i \ge 0$$

Una forma de acelerar la resolución de este modelo es probar primeramente si los valores óptimos de las funciones de coste consideradas individualmente ( $Q^{i*} = \sqrt{\frac{2d^i c_p^i}{c_a^i}}$ ) verifican la restricción de espacio, en cuyo caso ya estaría resuelto el problema. Si no es así, es preciso acudir a métodos de programación no lineal para resolver el modelo.

# VI.3. Modelos de inventario dinámicos deterministas con revisión periódica

Los modelos que responden a este título difieren de los anteriores en dos aspectos:

1) el nivel de inventario se revisa periódicamente durante un número finito de periodos
2) la demanda por periodo, aun cuando también es determinista, es dinámica, es decir, puede variar de un periodo al siguiente

En general, se supondrá que no se admite ruptura, es decir, que no es posible satisfacer la demanda de un periodo con las existencias de los periodos posteriores.

El planteamiento general de estos modelos incluye los siguientes datos:

- $t = 1,\ldots,N$ períodos de tiempo que configuran el *horizonte de planificación.*
- $d_t$ : demanda que ha de satisfacerse al inicio del periodo $t$.
- $c_t(Q_t)$: función de coste de pedir $Q_t$ unidades en el periodo $t$, incluyendo el coste de preparación de pedido si existe.
- $h_t(I_t)$ : función de coste de almacenar $I_t$ unidades durante el periodo $t$.

Las variables del problema, naturalmente muy íntimamente relacionadas entre sí, son

- $Q_t$ : cantidad solicitada al comienzo del periodo $t$
- $I_t$ : nivel de inventario al final del periodo $t$, siendo $I_0$ el inventario inicial al comienzo del periodo 1.

El planteamiento del problema es encontrar los valores de $Q_1,\ldots,Q_N$ que minimizan el coste total satisfaciendo la demanda. La formulación general del problema de optimización es

$$\min \sum_t \left[ c_t(Q_t) + h_t(I_t) \right]$$
$$Q_t + I_{t-1} = d_t + I_t \quad \forall t$$
$$Q_t, I_t \geq 0 \quad \forall t$$

Según sean las funciones de coste y el carácter de las variables tendremos un modelo de programación lineal continuo (variables continuas y costes proporcionales y sin coste de preparación de pedido), programación lineal entera o programación no lineal. Por lo tanto, es posible resolver el modelo en cada caso utilizando las técnicas correspondientes más apropiadas.

Sin embargo, las características del modelo (dividido en periodos o etapas) hacen de la programación dinámica la metodología más apropiada y más utilizada para resolver estos problemas. Es decir, en lugar de resolver el problema de una vez, subdividirlo en problemas más pequeños y más sencillos.[18]

También existen técnicas heurísticas para resolver problemas de este tipo con determinadas características, como la heurística de Silver y Meal. Estas heurísticas tienen como ventaja respecto a las técnicas de programación matemática que son más rápidas en general, sin embargo, hay que tener en cuenta su carácter heurístico que hace que el óptimo no esté asegurado.

## VI.3.1. Una aplicación: planificación del requerimiento de materiales (MRP)

Una de las situaciones más habituales en las que se presenta la optimización de gestión de inventarios dinámicos es la planificación de materiales requeridos para producir determinados artículos cuya demanda periódica es conocida. La metodología MRP (*material resource planning*) reconoce la relación entre la demanda del producto final y la de los componentes que se usan para fabricarlo. Esta relación se utiliza para determinar en diferentes situaciones la cantidad que se debe producir de cada producto final y producir o pedir de cada componente, en cada periodo.

La idea de los problemas y su resolución la veremos con un ejemplo. Supongamos que hay que producir dos artículos, $A_1$ y $A_2$, cuya demanda trimestral para el próximo año está estimada en 100 y 150 artículos, respectivamente. El tiempo de entrega de la producción (desde que se inicia hasta que está finalizada) es de dos meses para el primer artículo y un mes para el segundo. Cada unidad de estos artículos utiliza dos unidades de un subensamblaje, $S$. Este subensamblaje tiene un plazo de entrega de un mes.

Los instantes en que se comienza la producción de cada artículo depende de los tiempos de producción de ambos y, por lo tanto, las necesidades del subensamblaje son variables a lo largo

[18] Ver el capítulo dedicado a la programación dinámica.

del tiempo. En la siguiente tabla se recogen los instantes en que hay que satisfacer la demanda, cuándo se inicia la producción y por lo tanto cuándo es necesario tener el subensamblaje (en cursiva) y cuándo hay que pedirlo si se tuviera que pedir y no estuviera disponible en el inventario (en negrita), para ambos artículos. En las dos últimas filas vienen estos dos últimos conceptos para el subensamblaje con las necesidades agregadas.

| Mes(final) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ - entrega | | | | 100 | | | 100 | | | 100 | | | 100 |
| $A_1$ - inicio | | 100 | | | 100 | | | 100 | | | 100 | | |
| $S$ - dispon. | | *200* | | | *200* | | | *200* | | | *200* | | |
| $S$ - pedido | **200** | | | **200** | | | **200** | | | **200** | | | |
| $A_2$ - entrega | | | | 150 | | | 150 | | | 150 | | | 150 |
| $A_2$ - inicio | | | 150 | | | 150 | | | 150 | | | 150 | |
| $S$ - dispon. | | | *300* | | | *300* | | | *300* | | | *300* | |
| $S$ - pedido | | **300** | | | **300** | | | **300** | | | **300** | | |
| $S$ - Tot disp | | *200* | *300* | | *200* | *300* | | *200* | *300* | | *200* | *300* | |
| $S$ - Total | **200** | **300** | | **200** | **300** | | **200** | **300** | | **200** | **300** | | |

Para minimizar el coste existen diversos planteamientos, de modo que si no existe coste de preparación de pedido ni descuentos por volumen y el resto de los costes son constantes (incluido el de producción) durante todo el horizonte de planificación, la solución óptima es inmediata. Esta solución supone pedir los subensamblajes en las cantidades y fechas que se encuentran en la última fila, pues el único coste a reducir es el coste de inventario, que con esa solución será el mínimo posible.

Sin embargo, si cualquiera de los elementos considerados es modificado (existen costes de producción distintos por periodos, o distintos niveles de producción, o existe coste de preparación de pedido, o descuentos por volumen) la única alternativa es utilizar la programación matemática (en general, la programación dinámica) o heurísticas diseñadas para ese caso concreto.

En el ejemplo, supongamos que existe un coste de mantener en inventario las unidades de ensamblaje de 2 € por mes y un coste de preparación de pedido de 700 €. ¿Cuál será la solución óptima entonces?

Obsérvese que en este caso, sigue sin ser interesante hacer un pedido de subsensamblajes para un artículo que abarque la producción de más de un trimestre (hay que mantenerlo 3 meses y en el mejor de los casos es 3 meses por 200 unidades por 2 € el coste de inventario, que es mayor que el coste de pedido). Sin embargo, sí resulta beneficioso hacer el pedido para un trimestre de los subensamblajes necesarios para la producción de los dos artículos, eso supondría mantener en inventario las unidades requeridas por el artículo 2 durante un mes que sería 1 mes por 300 unidades por 2 €, es decir, el coste de inventario sería 600 € frente al coste de pedido que es de 700 €.

Este análisis que en este caso resulta sencillo, no es evidente en general, con lo que la solución debe ser obtenida formulando un problema de programación matemática[19].

# VI.4. Modelos de inventario estocásticos con revisión continua

Los modelos de inventario estocásticos introducen aleatoriedad en algunos de los datos, siendo el más habitual la demanda, aunque también puede ser considerado el plazo de entrega del artículo.

En esta sección vamos a considerar dos modelos con revisión continua, que son adaptaciones de los modelos de la sección 0, es decir, de lote económico (EOQ).

## VI.4.1. Modelo EOQ probabilizado

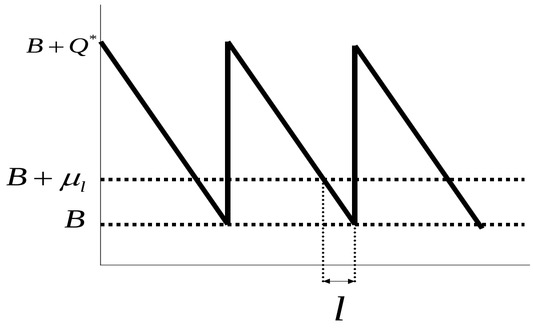
En este modelo se considera aleatoriedad en la demanda. Aparecerá un elemento no considerado hasta el momento, que ha de ser determinado en la optimización, que es el *stock de seguridad.*

Los elementos que intervienen en este modelo que no hayan sido considerados hasta ahora son los siguientes:

- $l$ : plazo de entrega desde que se hace un pedido hasta que se recibe.
- $D_l$ : variable aleatoria que representa la demanda durante el plazo de entrega.
- $\alpha$ : máxima probabilidad de agotamiento de existencias durante el plazo de entrega
- $B$ : stock de seguridad; es el nivel de inventario necesario para lograr una probabilidad inferior a $\alpha$ de ruptura de inventario.

[19] Cómo la programación matemática es un procedimiento "algo" más "sofisticado" que otros procedimientos de puro cálculo no iterativos, es habitual que para resolver este tipo de problemas se encuentren diversas heurísticas aplicadas a cada problema particular.

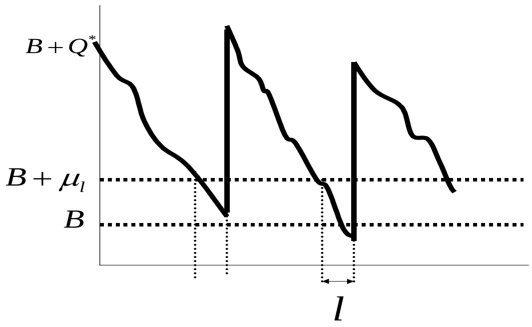
Suponiendo que la media de la variable aleatoria $D_l$ es $\mu_l$, la siguiente gráfica de la evolución del nivel de inventario representa la evolución del inventario suponiendo que la demanda fuera determinista en su nivel medio:




El stock de seguridad, $B$, ha de ser determinado de modo que se verifique $P\{D_l \geq B+\mu_l\} \leq \alpha$. Habitualmente, la variable aleatoria $D_l$ se modela como una distribución normal de media $\mu_l$ y desviación típica $\sigma_l$. Así, tipificando se tiene $P\left\{Z \geq \frac{B}{\sigma_l}\right\} \leq \alpha$, donde $Z$ representa una variable aleatoria con distribución $N(0,1)$. Si $z_\alpha$ representa el valor de la normal estándar que deja una probabilidad $\alpha$ a su derecha, se tiene $\frac{B}{\sigma_l} \geq z_\alpha$, de donde se deduce que $B \geq z_\alpha \sigma_l$.

Por otra parte, es habitual que la demanda venga modelada por unidad de tiempo (día, semana, etc.) como una función de densidad normal de media $d$ y desviación típica $\sigma$. Por lo tanto, para tener los datos necesarios para llevar a cabo los cálculos previos se obtienen la media y desviación típica de la demanda en el plazo de entrega como $\mu_l = d\,l$ y $\sigma_l = \sqrt{\sigma^2 l}$.

El punto de reorden se fija en la cantidad $B+\mu_l$. La cantidad $Q^*$ a pedir es la misma que la del modelo EOQ determinista sin ruptura de inventario, es decir, $Q^* = \sqrt{\frac{2dc_p}{c_a}}$ y el tiempo estimado para volver a pedir es $T^* = \frac{Q^*}{d}$. La situación suponiendo que $l < T^*$, sería la siguiente:




En el caso en que $l > T^*$, es análogo al caso determinista, las peticiones hay que hacerlas para satisfacer no la demanda del próximo ciclo, sino para ciclos posteriores, siendo el plazo de entrega efectivo, $l_e = l - nT^*$, de modo que $l_e < T^*$. Lo único que hay que considerar es que cuando se hace un pedido, se recibirá uno en ese plazo que no es el solicitado, sino el que se pidió $n$ ciclos antes.

## VI.4.2. Modelo EOQ probabilista

Esta versión es un modelo más exacto que el anterior para introducir la aleatoriedad en la demanda. En este caso sí se considera la posibilidad de ruptura, que es mucho más coherente con la realidad.

El modelo tiene tres hipótesis:

a) La demanda no satisfecha durante el plazo de entrega se acumula

b) No se permite más de una orden pendiente

c) La distribución de la demanda durante el tiempo de entrega permanece estacionaria con el tiempo

Los elementos que intervienen y su notación son:

- $l$ : plazo de entrega desde que se hace un pedido hasta que se recibe.
- $D_l$ : variable aleatoria que representa la demanda durante el plazo de entrega.
- $f(d)$ : función de densidad de la variable aleatoria $D_l$
- $\mu_D$ : esperanza de la demanda por unidad de tiempo
- $c_p$ : coste de orden o pedido

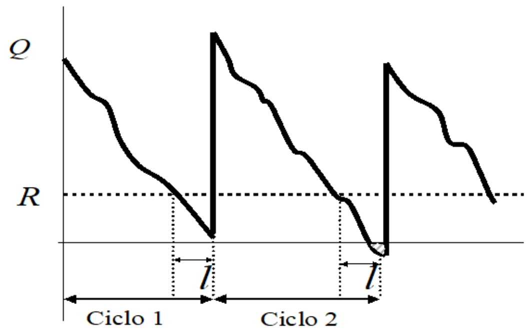
- $c_a$ : coste de almacenamiento por unidad de inventario y tiempo
- $c_r$ : coste de ruptura o carencia por unidad de inventario

En el modelo se supone que se hace una petición cuando se alcanza un nivel de inventario, $R$, fijado de antemano. El problema consiste en determinar el tamaño óptimo del pedido, $Q^*$, y del punto de reorden, $R^*$, que minimizan el coste total.

La función objetivo, es decir, el coste total por unidad de tiempo es a su vez suma de los distintos costes que intervienen en el sistema:

1. *Coste de orden o preparación esperado*: como el número esperado de ciclos es el inverso del tiempo esperado por ciclo y éste es $\frac{Q}{\mu_D}$, el número esperado de ciclos por unidad de tiempo resulta ser $\frac{\mu_D}{Q}$ y por lo tanto el coste de preparación $c_p \frac{\mu_D}{Q}$.

2. *Coste de inventario esperado:* para obtener este coste se hace una aproximación del nivel medio de inventario durante un ciclo, consistente en promediar el inventario medio disponible al inicio de un ciclo y al final. La siguiente figura muestra la situación considerada




El inventario medio al final de un ciclo será $R - E\left[D_l\right] = R - \mu_D l$. A su vez el inventario medio al inicio del ciclo será $Q + R - E\left[D_l\right] = Q + R - \mu_D l$. Promediando ambos valores se tiene $\frac{Q + R - \mu_D l + R - \mu_D l}{2} = \frac{Q}{2} + R - \mu_D l$ y, por lo tanto, el coste estimado es de $c_a\left(\frac{Q}{2} + R - \mu_D l\right)$.

3. *Coste de ruptura esperado:* se incurre en este coste cuando la demanda durante el plazo de entrega es superior a $R$, es decir, si $D_l > R$. Así, para un ciclo, la cantidad de faltantes

esperada es $\int_R^\infty (x-R)f(x)dx$ y, por lo tanto el coste esperado por ciclo $c_r \int_R^\infty (x-R)f(x)dx$. Por último, para expresarlo por unidad de tiempo, se multiplica este valor por el número de ciclos esperado por unidad de tiempo $\frac{\mu_D}{Q}$, resultando una estimación del coste de ruptura por unidad de tiempo $c_r \frac{\mu_D}{Q} \int_R^\infty (x-R)f(x)dx$.

Con estos costes se obtiene el coste total estimado por unidad de tiempo que se pretende minimizar

$$C(Q,R) = c_p \frac{\mu_D}{Q} + c_a \left( \frac{Q}{2} + R - \mu_D l \right) + c_r \frac{\mu_D}{Q} \int_R^\infty (x-R)f(x)dx$$

Derivando esta expresión respecto a cada una de las variables e igualando a cero se obtienen las siguientes ecuaciones para los valores óptimos

$$\int_{R^*}^\infty f(x)dx = c_a \frac{Q^*}{\mu_D c_r} \text{ y } Q^* = \sqrt{\frac{2\mu_D (c_p + c_r \int_{R^*}^\infty (x-R^*)f(x)dx}{c_a}}$$

Como no se puede obtener una expresión cerrada para estos valores óptimos a partir de esas ecuaciones, se utiliza un algoritmo numérico para obtenerlos desarrollado por Hadley y Whitin en 1963. Este algoritmo parte del menor valor posible de $Q$ (el caso en que el número esperado de faltantes es cero) y del punto de reorden justo opuesto ($R=0$) y va actualizando los valores de uno y otro usando alternativamente las dos ecuaciones anteriores, hasta que la diferencia entre los dos puntos de reorden obtenidos en iteraciones sucesivas es menor que una tolerancia previamente definida $\varepsilon$. El algoritmo converge en un número finito de iteraciones si existe solución factible.

1. Inicio

   Sea la solución inicial $Q_1 = \sqrt{\frac{2\mu_D c_p}{c_a}}$ (mínimo valor posible de $Q$) y $R_0 = 0$ (mínimo valor posible de $R$) que evidentemente no debe cumplir las ecuaciones planteadas. Poner $i=1$ e ir al paso 1.

2. Cálculo de $R_i$ a partir de $Q_i$ y de la ecuación (1), criterio de parada, actualización de $Q_{i+1}$ a partir de $R_i$ y de la ecuación (2).

   Obtener $R_i$ sustituyendo en la primera ecuación el valor de $Q_i$.

Si $\left| R_i - R_{i-1} \right| < \varepsilon$, parar, la solución óptima es $Q^* = Q_i$ y $R^* = R_i$.

En otro caso, obtener $Q_{i+1}$ sustituyendo $R_i$ en la segunda ecuación. Poner $i = i + 1$ y repetir el paso 1.

# VI.5. Modelos de inventario estocásticos con revisión periódica

Estos modelos se clasifican a su vez según su horizonte temporal sea de un solo periodo o abarque más periodos. Dentro de estos casos también las diferentes hipótesis acerca de la gestión del inventario determinan diferentes modelos.

## VI.5.1.1. Modelos de un solo periodo

Los modelos de inventario de un solo periodo ocurren cuando una mercancía se ordena sólo una vez para satisfacer la demanda del periodo. Ésta es la situación por ejemplo de los productos estacionales que se vuelven obsoletos al final de la estación.

Los elementos que intervienen en el modelo son:

- $D$: variable aleatoria que representa la demanda durante el periodo.
- $f(d)$: función de densidad de la variable aleatoria $D$
- $F(d)$: función de distribución de la variable aleatoria $D$
- $c_a$: coste de almacenamiento por unidad de inventario durante el periodo
- $c_r$: coste de ruptura o carencia por unidad de inventario
- $c_u$: coste de adquisición de cada unidad de inventario
- $c_p$: coste de orden o pedido
- $q_0$: inventario inicial

El modelo determina el valor óptimo de pedido, $Q^*$, que minimiza la suma de los costes esperados.

En general, se pueden distinguir dos casos según exista un coste de preparación de pedido u orden o no.

## Modelo sin coste de preparación de pedido

Las hipótesis básicas de este modelo son que la demanda se produce de forma instantánea inmediatamente después de haber sido recibido el pedido y no se incurre en coste de preparación de pedido.

Para desarrollar el modelo, fundamentalmente, hay que tener presente en este modelo que si la cantidad que se pide es mayor que la demanda ($Q > D$) esa cantidad hay que almacenarla incurriendo en un coste de mantenimiento de inventario, mientras que si es al revés ($Q < D$) se incurre en coste de ruptura de inventario por la demanda no satisfecha. Así mismo, hay que tener en cuenta que la cantidad que realmente se pide no es $Q$, sino $Q - q_0$ si este valor es positivo o 0 si esta diferencia resultase negativa.

Con las premisas anteriores, el coste esperado para una cantidad $Q$ que ha de ser optimizado es

$$E\left[C(Q)\right] = c_u(Q - q_0) + c_a \int_0^Q (Q - x) f(x) dx + c_r \int_Q^\infty (x - Q) f(x) dx$$

Esta función se puede demostrar que es estrictamente convexa y por lo tanto tiene un único mínimo. Por lo tanto, derivando e igualando a cero se obtiene que el valor óptimo es aquél que verifica

$$F(Q^*) = P(D \leq Q^*) = \frac{c_r - c_u}{c_r + c_a}$$

El valor de la derecha es denominado *razón crítica*. Obsérvese que es evidente que este valor es menor o igual que 1, pero podría tratarse de un valor negativo y por lo tanto no tendría sentido la expresión escrita (es una probabilidad). Sin embargo, tal caso no es posible en realidad pues resultaría absurdo que el coste de ruptura fuera menor que el de compra, es decir, que fuera mayor el coste de compra que la penalización por no suministrarlo (habitualmente esta penalización se estima en al menos el beneficio que produce el artículo, que debe ser superior al coste de compra o no tendría sentido).

Todo el desarrollo se ha hecho suponiendo que el valor pedido es superior al inventario inicial, es inmediato derivar que si $Q^* < q_0$ la estrategia óptima es no pedir nada, y si no es así, solicitar la cantidad $Q^* - q_0$.

Por otra parte, también se ha supuesto una distribución continua, pero el cálculo sería análogo para una distribución discreta (en el planteamiento de la función de coste las integrales serían sumatorios) obteniéndose como valor óptimo aquél que verifique $F(Q^* - 1) = P(D \leq Q^* - 1) \leq \dfrac{c_r - c_u}{c_r + c_a} \leq F(Q^*)$.

## Modelo con coste de preparación de pedido

Este modelo difiere del anterior en que se incurre en un coste de preparación cuando se realiza un pedido $c_p > 0$. Por lo demás, todo es igual en el planteamiento, pero esta diferencia hace variar los resultados.

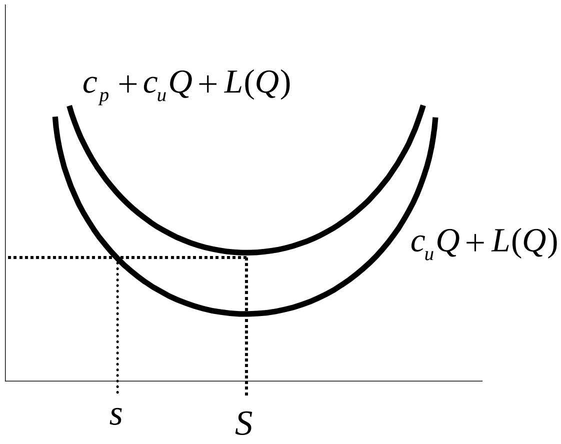
En este caso la función de coste es prácticamente igual excepto en que, si se lleva a cabo un pedido, hay que añadir el coste fijo de realizarlo. Hay por lo tanto que distinguir en la función de coste esperado si se realiza o no pedido, de modo que será

$$C(Q)=\begin{cases} c_p + c_u(Q-q_0)+L(Q) & \text{si } Q>q_0 \\ L(q_0) & \text{si } Q=q_0 \end{cases}$$

donde la función $L(Q)$ recoge los costes de inventario si la demanda es menor que el nivel de inventario y de ruptura en caso contrario, es decir, $L(Q)=c_a\int_0^Q (Q-x)f(x)dx + c_r\int_Q^\infty (x-Q)f(x)dx$.

Minimizar la función de coste esperado pasa por lo tanto por comparar el coste de $Q>q_0$ con el del inventario inicial $q_0$, es decir, determinar para qué valores $Q>q_0$ el coste es inferior al que se tiene con el inventario inicial, y si existen elegir el mínimo, es decir, buscar de los que cumplen la siguiente condición, si existen, el mínimo $c_p + c_u(Q-q_0)+L(Q)\le L(q_0)$, o lo que es igual, $c_p + c_uQ + L(Q)\le c_uq_0 + L(q_0)$.

Para ello, se determina en primer lugar cuál es el mínimo de esos valores y se compara posteriormente con el coste del inventario. El punto donde se alcanza el mínimo de la función $c_p + c_uQ + L(Q)$ es el determinado en la subsección anterior ya que ambas funciones de coste difieren en una constante, es decir, ese punto es $S$ tal que $F(S)=\dfrac{c_r - c_u}{c_r + c_a}$.




Si $S < q_0$, es evidente que no resulta interesante pedir, pues para valores superiores a $S$ las funciones son crecientes, luego un nivel de inventario superior a $q_0$ tiene coste superior incluso sin incluir el coste de pedido.

Si $S > q_0$, hay dos casos diferentes, ya que el valor $c_u q_0 + L(q_0)$ puede estar por debajo o por encima del valor $c_p + c_u S + L(S)$. De hecho si se calcula el valor $s$ tal que $c_u s + L(s) = c_p + c_u S + L(S)$, se establecen dos zonas diferentes de decisión: para valores de inventario inicial menores que ese valor $s$ se verifica que $c_u q_0 + L(q_0) > c_p + c_u S + L(S)$ y para valores superiores es al revés. De aquí se deriva la política óptima, conocida como *política* $s - S$ ,

$$Q^* = \begin{cases} S & \text{si } q_0 < s \quad (\text{pedir } S - q_0) \\ q_0 & \text{si } q_0 \geq s \qquad (\text{pedir } 0) \end{cases}$$

## VI.5.2. Modelo de múltiples periodos

Esta sección presenta un modelo de periodos múltiples bajo las hipótesis de coste de preparación cero, retraso de entrega cero y posibilidad de acumular la demanda. Además se supone que la demanda $D$ sigue una distribución estacionaria según una función de densidad, $f(D)$.

Además se incluye un nuevo elemento que es el valor descontado del dinero según un factor de descuento por periodo $\alpha < 1$, es decir, el valor de una cantidad de dinero $A$ en un periodo es para el periodo anterior de $\alpha A$, y para $n$ periodos anteriores de $\alpha^n A$.

Supongamos que el horizonte de planificación es de $n$ periodos y que la demanda no satisfecha se puede acumular exactamente un periodo. Sea $U_i(q_i)$ la utilidad máxima esperada desde un periodo hasta el final si la cantidad disponible al comienzo de ese periodo es $q_i$ (antes de realizar ningún pedido).

Suponiendo que $r$ fuera el ingreso por unidad, la situación del inventario se puede formular mediante el siguiente modelo de programación dinámica con recursión hacia atrás:

$$U_i(q_i) = \max_{Q_i \geq q_i} \Big\{ -c_u(Q_i - q_i) + \int_0^{Q_i} \left[ rD - c_a(Q_i - D) \right] f(D)dD +$$
$$+ \int_{Q_i}^{\infty} \left[ rQ_i + (\alpha r - c_r)(D - Q_i) \right] f(D)dD + \alpha \int_0^{\infty} U_{i+1}(Q_i - D) f(D)dD \Big\} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

En el caso en que el horizonte de planificación es infinito, la ecuación recursiva se reduce a

$$U(q) = \max_{Q \geq q} \Big\{ -c_u(Q - q) + \int_0^{Q} \left[ rD - c_a(Q - D) \right] f(D)dD +$$
$$+ \int_{Q}^{\infty} \left[ rQ + (\alpha r - c_r)(D - Q) \right] f(D)dD + \alpha \int_0^{\infty} U(Q - D) f(D)dD \Big\}$$

de donde se deriva el nivel de inventario óptimo $Q^*$ tal que

$$\int_0^{Q^*} f(D)dD = F(Q^*) = \frac{c_r + (1-\alpha)(r - c_u)}{c_r + c_a + (1-\alpha)r}$$

de modo que al inicio de un periodo si el inventario existente es mayor que ese nivel no se ordena nada y, en otro caso, se ordena la diferencia $Q^* - q$.

# VI.6. Biblioteca de problemas

PROBLEMA 1

Una compañía aérea utiliza 500 focos de cola al año. Cada vez que se hace un pedido de estos focos incurre en un coste de 5 €. Cada foco le cuesta 0.40 € y el coste de almacenamiento es de 0.08 € por foco y año. Suponiendo que la demanda es constante y que no se permiten agotamientos, ¿qué cantidad de focos debe pedir cada vez?, ¿cuántos pedidos hará en un año?, ¿cada cuánto tiempo tendrá que hacer un pedido?

PROBLEMA 2

En el problema 1 supóngase que existe demora en la entrega; obtener el punto de reorden en estos dos casos: 1) si el plazo de entrega es de un mes. 2) si el plazo de entrega es de nueve meses.

PROBLEMA 3

Una tienda vende 10000 cámaras al año. Esta tienda se abastece de un almacén regional. Cada vez que hace un pedido tiene un coste de 5 €. La tienda paga por cada cámara 100 € y el coste de almacenar 1 € de inventario durante un año se considera como coste de oportunidad y se estima en 0.20 €. Calcular el tamaño óptimo del pedido.

PROBLEMA 4

Las lámparas de neón dentro del campus de la universidad X se reponen a razón de 100 unidades al día. La planta pide las lámparas de neón periódicamente. Cuesta 100 € iniciar una orden de compra. Se calcula que el almacenamiento de una lámpara de neón cuesta 0.02 € por día. El tiempo de entrega de cada pedido es de 12 días. Determine la política para un inventario óptimo para pedir lámparas de neón. ¿Cómo sería la política si se considerase un coste de ruptura de 0.05 € por el descontento que genera entre los alumnos la falta de lámparas de neón?

PROBLEMA 5

Una compañía tiene en existencia un artículo que se consume en una proporción de 50 unidades al día. A la compañía le cuesta 20 € cada vez que hace un pedido. Una unidad retenida en el inventario durante una semana le cuesta 0.35 €.

a) Determine la política del inventario óptimo, suponiendo un tiempo de entrega de una semana.

b) Determine el número óptimo de pedidos por año.

c) Determine el coste de inventario si se considerase un coste de ruptura diario y por unidad de 0.1 €.

PROBLEMA 6

WALMARK STORE comprime y coloca en tarimas las cajas vacías de mercancía, para reciclarlas. La tienda genera 5 tarimas al día. El coste de almacenar una tarima en la parte posterior de la tienda es de 0.1 € al día. La compañía que lleva las tarimas al centro de reciclado cobra una tarifa fija de 100 € por el alquiler de su equipo de carga, más un coste de transporte variable de 3 € por tarima. Trace una gráfica del cambio en el número de tarimas a lo largo del tiempo e idee una política óptima para transportar las tarimas al centro de reciclado.

PROBLEMA 7

LUBECAR se especializa en cambios rápidos de aceite para automóviles. El taller compra el aceite para automóvil por volumen, a 3 € el litro. Hay un descuento de 2.5 € por litro, si LUBECAR compra más de 1000 litros. El taller le da servicio aproximadamente a 150 automóviles al día y cada cambio requiere una media de 1.25 litros. LUBECAR almacena el aceite que compra por volumen a un coste de 0.02 € por litro y día. Además, el coste fijo de cada pedido es de 20 €. Hay un tiempo de entrega de dos días. Determine la política de inventario óptimo.

### PROBLEMA 8

Un artículo se vende a 25 € la unidad, pero se ofrece un descuento del 10 % para lotes de 150 unidades o más. Una compañía utiliza este artículo en una proporción de 20 unidades por día. El coste de preparación para pedir un lote es de 50 € y el coste de almacenamiento por unidad y día es de 0.3 €.

a) ¿Debe la compañía aprovechar el descuento?

b) Si el coste de almacenamiento fuese de 2 € ¿debería aprovechar el descuento?

### PROBLEMA 9

Los siguientes datos describen tres artículos de inventario

| Artículo | Coste de pedido | Demanda (ud/día) | Coste de almacenamiento | Área ($m^2$) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 2 | 0.3 | 1 |
| 2 | 5 | 4 | 0.1 | 1 |
| 3 | 15 | 4 | 0.2 | 1 |

El área total disponible es de 25 $m^2$. Los costes están en euros. Defina la política óptima de inventario.

### PROBLEMA 10

Los siguientes datos describen cuatro artículos del inventario (en €). La compañía desea determinar la cantidad de lote económico para cada uno de los cuatro artículos, de tal manera que el coste total del inventario es de 10000 €.

| Artículo | Coste de pedido | Demanda (ud/día) | Coste de almacenamiento | Área ($m^2$) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 100 | 10 | 0.1 | 10 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 50 | 20 | 0.2 | 5 |
| 3 | 90 | 5 | 0.2 | 10 |
| 4 | 20 | 10 | 0.1 | 10 |

PROBLEMA 11

La empresa METALCO produce deflectores de corrientes para su empleo en las chimeneas domésticas durante los meses de diciembre a marzo. La demanda empieza en un nivel bajo, llega a su máximo a mitad de la temporada y disminuye hacia el final. Debido a la popularidad del producto, METALCO puede utilizar horas extra para satisfacer la demanda. La siguiente tabla proporciona las capacidades máximas de producción y las demandas para los cuatro meses de invierno:

| Mes | Producción en horario regular | Producción en horas extra | Demanda |
|---|---|---|---|
| 1 | 90 | 50 | 100 |
| 2 | 100 | 60 | 190 |
| 3 | 120 | 80 | 210 |
| 4 | 110 | 80 | 160 |

El coste de producción por unidad en cualquier periodo es de 6 € durante el horario regular y de 9 € durante las horas extra. El coste de almacenamiento por unidad y mes es de 0.1 €. Formula un problema de optimización para determinar la política óptima de inventario.

PROBLEMA 12

Se fabrica un producto para satisfacer una demanda conocida durante cuatro periodos, según los siguientes datos:

| | Coste de producción por unidad en el periodo | | | |
|---|---|---|---|---|
| Rango de producción | 1 | 2 | 3 | 4 |
| de 1-3 | 1 | 2 | 2 | 3 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| de 4-11 | 1 | 4 | 5 | 4 |
| de 12-15 | 2 | 4 | 7 | 5 |
| de 16-25 | 5 | 6 | 10 | 7 |
| Coste de almacenamiento por unidad hasta el periodo siguiente | 0.3 | 0.35 | 0.2 | 0.25 |
| Demanda total | 11 | 4 | 17 | 29 |

Todos los datos están en unidades y euros y se entiende que los rangos no afectan a las unidades anteriores. Así el coste de producir 14 unidades en el primer periodo será de $3 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + (14-11) \cdot 2 = 17$ €, resultando una función continua. Plantea el problema con el que obtendríamos la mejor estrategia de inventario.

PROBLEMA 13

Se fabrica un producto para satisfacer una demanda conocida durante cuatro periodos, según los siguientes datos:

| | Coste de producción por unidad en el periodo | | | |
|---|---|---|---|---|
| Rango de producción | 1 | 2 | 3 | 4 |
| entre 1-3 | 1 | 2 | 2 | 3 |
| entre 4-11 | 1 | 4 | 5 | 4 |
| entre 12-15 | 2 | 4 | 7 | 5 |
| entre 16-25 | 5 | 6 | 10 | 7 |
| Coste de almacenamiento por unidad hasta el periodo siguiente | 0.3 | 0.35 | 0.2 | 0.25 |
| Demanda total | 11 | 4 | 17 | 29 |

Todos los datos están en unidades y euros y se entiende que los rangos de producción son excluyentes. Si se producen 14 artículos en el primer periodo el coste es $14 \cdot 2 = 28$ €. Plantee un problema de programación matemática con el que se obtendría la mejor estrategia de inventario.

PROBLEMA 14

Cada semestre la SMALLTOWN OPTOMETRY CLINIC vende 10000 armazones para lentes. La clínica pide los armazones a un abastecedor regional, que cobra 15 € por armazón. Cada pedido incurre en un coste de 50 €. La óptica cree que la demanda de armazones puede acumularse y que el coste por carecer de un armazón durante un semestre es de 15 € debido a la pérdida de negocios futuros. El coste semestral por mantener el inventario es del treinta por ciento del valor del inventario al semestre. ¿Cuál es la cantidad óptima de un pedido? ¿Cuál es la escasez máxima que presentará? ¿Y el nivel máximo de inventario?

PROBLEMA 15

La demanda diaria de rollos fotográficos en una tienda de regalos en un centro de turismo se distribuye de forma normal con una media de 30 rollos y una desviación típica de 5 rollos. El coste de conservar un rollo en la tienda es de 0.02 €. Se contrae un coste fijo de 30 € cada vez que la tienda coloca un nuevo pedido para las películas. La política de inventarios de la tienda requiere pedir 150 rollos siempre que el nivel de inventario descienda a 80 unidades mientras simultáneamente mantiene una existencia estabilizadora de 20 rollos en todo momento.

a) Para la política de inventarios establecida, determine la probabilidad de agotar las existencias durante el tiempo de entrega.

b) Según los datos de la situación, recomiende una política de inventario para la tienda, suponiendo que la probabilidad de agotamiento de la película durante el tiempo de entrega no excede 0.1.

PROBLEMA 16

Si en el ejercicio de las lámparas de neón suponemos que la distribución de la demanda es normal con media 100 y desviación típica 10, determinar el tamaño del stock de seguridad para que la probabilidad de agotamiento del inventario sea menor que 0.05.

PROBLEMA 17

La empresa Electro utiliza resina en su proceso de producción a una tasa de 1000 litros por mes. A Electro le costó 100 € colocar un pedido para un nuevo embarque. El coste mensual de manejo por litro es de 2 € y el coste de faltante por litro es de 10 €. Datos históricos muestran que la demanda durante el tiempo de entrega es uniforme en el rango 0-100 litros por mes. Determine la política de abastecimiento óptima para Electro.

PROBLEMA 18

Para el problema anterior determine:

a) Número aproximado de pedidos por mes.

b) Coste de preparación mensual esperado.

c) Coste de manejo esperado por mes.

d) Coste de faltante por mes.

e) Probabilidad de agotamiento de las existencias durante el tiempo de entrega.

PROBLEMA 19

Rehacer el problema 17 suponiendo que la demanda durante el tiempo de entrega es uniforme entre 40 y 60 litros. Comparar los resultados obtenidos con los del problema 17 e interpretar los resultados.

PROBLEMA 20

El propietario de un puesto de periódicos quiere determinar el número de ejemplares de USA Now que debe tener al inicio de cada día. Cuesta 30 centavos comprar un ejemplar y el propietario lo vende a 75 centavos. La venta del periódico normalmente ocurre entre 7 y 8 de la mañana. Los periódicos que quedan al final del día se reciclan para tener un ingreso de 5 centavos por ejemplar. ¿Cuántos ejemplares debe tener el propietario cada mañana? Suponer que la demanda del día se puede describir como:

a) Una distribución normal con media 300 y desviación típica 20.

b) Una función de probabilidad discreta definida como:

| D | 200 | 220 | 300 | 320 | 340 |
|---|---|---|---|---|---|
| f(D) | 0.1 | 0.2 | 0.4 | 0.2 | 0.1 |

PROBLEMA 21

En una situación de inventario de un solo pedido, el coste de compra unitario de un producto es de 10 €, y su coste de manejo unitario es 1 €. Si la cantidad del pedido es de 4 unidades encuentre el rango permisible de coste de penalización unitario implicado por las condiciones óptimas. Supongamos que la demanda ocurre de forma instantánea al inicio del periodo y que la función de probabilidad de la demanda está dada como:

| D | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(D) | 0.05 | 0.1 | 0.1 | 0.2 | 0.25 | 0.15 | 0.05 | 0.05 | 0.05 |

PROBLEMA 22

La librería de la U de A ofrece un programa de reproducción de los apuntes de clase para los profesores participantes. El profesor Yataha enseña a un grupo de estudiantes de primer año donde se espera una inscripción de entre 200 y 250 estudiantes uniformemente distribuidos. A la tienda le cuesta 10 € producir cada copia que luego vende a los estudiantes a 25 € la copia. Los estudiantes compran sus libros al inicio del semestre. Las copias no vendidas de los apuntes del profesor Yataha se trituran para reciclar. Mientras tanto, una vez que la librería agota las copias no se imprimen copias adicionales y los alumnos son responsables de conseguir los apuntes de otras fuentes. ¿Si la librería quiere maximizar sus beneficios, cuántas copias debe imprimir?

PROBLEMA 23

La demanda diaria de un artículo durante un solo periodo ocurre de forma instantánea al inicio del periodo. La función de densidad de la demanda es uniforme entre 0 y 10 unidades. El coste de manejo unitario del artículo durante el periodo es de 0.5 € y el coste de penalización unitario por agotamiento de las existencias es de 4.5 €. El coste de compra unitario es de 0.5 €. Por cada pedido realizado se incurre en un coste fijo de 5 €.

a) Determine la política de inventarios óptima para el artículo.

b) Rehaga el ejercicio si el coste fijo de preparación fuese de 25 €.

PROBLEMA 24

Una librería vende cuadernos en un pueblo, siendo la única librería que hay en él, de modo que si un niño o adulto desea comprar un cuaderno y no lo hay tendrá que encargarlo y esperar a que llegue a la tienda. La demanda de cuadernos está estimada en 2 cuadernos diarios. Cada cuaderno le cuesta a la tienda comprarlo 0.5 € y, como los pedidos hay que llevarlos al pueblo, el proveedor le cobra el viaje a razón de 45 € por viaje. Por otra parte, el dueño ha estimado que mantener un cuaderno en inventario le cuesta 0.05 € diarios, y 0.04 € cada día que tiene un pedido de un cliente pendiente.

a) ¿Cuál es el mínimo coste que puede lograr el dueño de la librería y, por lo tanto, lo mínimo que podría cobrar por cada cuaderno a sus clientes sin tener pérdidas?

b) ¿Cuánto esperará como máximo un cliente su cuaderno?

c) ¿Cuál sería la calidad del servicio?

d) Si desde que pide los cuadernos pasan 3 días hasta que los recibe, ¿cuándo deberá pedir los cuadernos?

e) Si desde que pide los cuadernos pasan 2 meses (60 días) hasta que los recibe, ¿cuándo deberá pedir los cuadernos?

f) Suponiendo que no se considera dejar pedidos de los clientes pendientes (no hay ruptura), y que la demanda diaria es normal de media 2 y desviación típica 0.25, y el tiempo de entrega es de 3 días ¿cuál debería ser el stock de seguridad?

PROBLEMA 25

Volvamos al fabricante de juguetes (problema 27 de Teoría de colas). Nuestro protagonista recibe los dos tipos de componentes de un mismo proveedor.

1. Para las componentes utilizadas en la máquina de tipo A el coste de pedido de reaprovisionamiento consta de una cantidad fija de 1350 € y una cantidad variable función del número $Q_A$ de componentes solicitadas dada por $0.01Q_A^2$. El coste de almacenamiento para las componentes usadas en la máquina A es de 1.8 € por mes y componente.
2. Para las componentes utilizadas en la máquina de tipo B el coste de pedido de reaprovisionamiento es de 540 € y el de almacenamiento de 3€ por mes y componente.

Los plazos de entrega de los pedidos son de 9 días para las componentes de la máquina A y de 6 días para las de la máquina B. El artesano quiere que para ambas componentes la probabilidad de ruptura de inventario sea como mucho 0.05

Recuérdese que el número de pedidos diarios se sabe que sigue una distribución de Poisson*, y se va a considerar que para más de 3 días se puede aproximar por una normal. Recuérdese también que por cada pedido se requieren 6 componentes de tipo A y 9 de tipo B.

Proponer un modelo que permita al artesano obtener la política óptima de gestión conjunta de los dos tipos de componentes durante en tercer trimestre suponiendo que éste es bueno.

*Nota: la distribución de Poisson tiene igual media que varianza

| $Z$ | Probabilidad acumulada |
|---|---|
| 1.000 | 0.84134474024100 |
| 1.100 | 0.86433389849238 |
| 1.200 | 0.88493026828229 |
| 1.300 | 0.90319945050426 |
| 1.400 | 0.91924328874370 |

| $Z$ | Probabilidad acumulada |
|---|---|
| 2.100 | 0.98213564258197 |
| 2.200 | 0.98609660109168 |
| 2.300 | 0.98927591894028 |
| 2.326 | 0.98999074803142 |
| 2.400 | 0.99180247113057 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1.500 | 0.93319277120655 | 2.500 | 0.99379032014125 |
| 1.600 | 0.94520071054612 | 2.576 | 0.99500243823914 |
| 1.645 | 0.95001511010609 | 2.600 | 0.99533877821735 |
| 1.700 | 0.95543456821752 | 2.700 | 0.99653297694689 |
| 1.800 | 0.96406973448618 | 2.800 | 0.99744480935848 |
| 1.900 | 0.97128350713543 | 2.900 | 0.99813411985961 |
| 2.000 | 0.97724993796381 | 3.000 | 0.99865003277676 |

Centiles de la normal típica

PROBLEMA 26

Un almacén gestiona dos artículos, $A_1$ y $A_2$ , cuya demanda diaria es determinista y constante y que obtiene de un mismo proveedor. Los parámetros de la gestión de los artículos se dan en la siguiente tabla

| Artículo | Demanda anual | Coste de pedido | Coste unitario anual de almacenamiento |
|---|---|---|---|
| 1 | 10000 | 1500 € | 30 € |
| 2 | 8000 | 1800 € | 20 € |

El contrato con el proveedor establece las siguientes cláusulas:

- Recibirá al menos 4 pedidos anuales de cada artículo.
- El número total de pedidos de reaprovisionamiento (sea para uno u otro artículo) que recibirá a lo largo del año no podrá ser superior a 12.

a) Proponer un modelo que permita minimizar el coste global de la gestión de inventario, teniendo en cuenta las restricciones precedentes.

b) ¿Cuáles serían las condiciones de optimalidad que deberían cumplir la o las soluciones del problema?

PROBLEMA 27

Se tiene un inventario de un producto con las siguientes características. La mitad del pedido, $n/2$, siendo $n$ el pedido total, se reaprovisiona de manera lineal con una tasa por unidad de tiempo constante $p$ y la otra mitad se reaprovisiona de inmediato (instantáneamente). Se considera una demanda de producto $d$ constante por unidad de tiempo. Se parte en el instante inicial de inventario 0. Se pide:

1. Dibujar el gráfico que representa el movimiento del inventario a lo largo de un ciclo.
2. Determinar el stock medio durante la fase de aprovisionamiento (crecimiento del inventario). Determinar el stock medio durante la fase de consumo (decrecimiento del inventario).
3. Determinar el stock medio por ciclo.
4. Determinar el coste del inventario por ciclo suponiendo un coste unitario de almacenamiento de $c_a$ y un coste unitario de compra $c_u$.

# VI.7. Soluciones a la biblioteca de problemas

RESULTADO DEL PROBLEMA 1

$Q^* = 250,$ 2 pedidos por año y por tanto, hacer un pedido cada 1/2 año.

RESULTADO DEL PROBLEMA 2

a) El punto de reorden será 41.67 focos.

b) El punto de reorden será 125 focos.

RESULTADO DEL PROBLEMA 3

$Q^* = 70.71$ y redondeando será 70 ó 71 (sin grandes variaciones pues la función de coste es muy plana alrededor del óptimo).

Si para este caso se hace el análisis marginal salen 71. No se cumple

$$70 \cdot 69 < \frac{2dc_p}{c_a} < 70 \cdot 71 \Rightarrow 4830 < 5000 < 4970$$

pero sí se verifica

$$71 \cdot 70 < \frac{2dc_p}{c_a} < 71 \cdot 72 \Rightarrow 4970 < 5000 < 5112$$

RESULTADO DEL PROBLEMA 4

La política de inventarios debe ser pedir 1000 unidades siempre que el nivel del inventario descienda a 200 unidades. El coste diario del inventario asociado es 20 €/día.

El hecho de que la entrega se haga en 12 días sólo modifica el momento de hacer el pedido (cuando el inventario baje a 200 en vez de cuando baje a 0), pero no la cantidad de pedido, ni el coste de inventario asociado.

Con coste de ruptura de 0.05 €, el tamaño de pedido sería de 1183 unidades, el nivel máximo de inventario de 845 unidades. El coste diario del inventario asociado será de 16.9 €.

RESULTADO DEL PROBLEMA 5

a) Pida 200 unidades cuando el nivel descienda a 150 unidades.

b) Aproximadamente 91 pedidos.

c) $Q^* = 245$, $S^* = 163$. Coste = 8.2 €

RESULTADO DEL PROBLEMA 6

Recoja 100 tarimas cada 20 días.

RESULTADO DEL PROBLEMA 7

El consumo diario es de 187.5 l. El pedido óptimo sería de 612.37 l si no existiese rebaja por cantidad. Sin embargo, aplicando la rebaja se observa que para un pedido de 1000 l el coste es menor que para el pedido de 612.37 l. Por lo tanto en este caso el pedido óptimo será de 1000 l, cuando el nivel de inventario descienda a 375 l.

RESULTADO DEL PROBLEMA 8

a) Sí, la compañía debe aprovechar el descuento y pedir 150 unidades cada vez.

b) No, ya que el coste sería mayor. Debería hacer pedidos de 32 unidades cada vez, con un coste por unidad de tiempo de 563.25 € (Frente a un coste de 606.67 € aprovechando el descuento).

RESULTADO DEL PROBLEMA 9

$Q_1^* = 6.35; \quad Q_2^* = 7.11; \quad Q_3^* = 11.6$

RESULTADO DEL PROBLEMA 10

$Q_1^* = 141.42; \quad Q_2^* = 100; \quad Q_3^* = 67.1; \quad Q_4^* = 63.24$

RESULTADO DEL PROBLEMA 11

Para un caso general (puede simplificarse para este caso), se define $x_i$ como la producción total de un mes, siendo $d_i$ la producción en horas extras y dado que ésta es penalizada con 3 € por unidad, se puede expresar la relación entre ambas variables por ejemplo, para el primer periodo, como $x_1 \le 90 + d_i$ y $d_i \le 50$. Además, denotamos por $I_i$ al inventario al final de un mes, con lo que el problema sería

$$\begin{aligned}
&\min \sum_i (6x_i + 3d_i) + 0.1\sum_i I_i \\
&x_1 - d_1 \le 90 \\
&x_2 - d_2 \le 100 \\
&x_3 - d_3 \le 120 \\
&x_4 - d_4 \le 110 \\
&x_1 - I_1 = 100 \\
&x_2 + I_1 - I_2 = 190 \\
&x_3 + I_2 - I_3 = 210 \\
&x_4 + I_3 = 160 \\
&d_1 \le 50, \; d_2 \le 60, \; d_3 \le 80, \; d_4 \le 70 \\
&x_i, d_i, I_i \ge 0 \quad \forall i
\end{aligned}$$

RESULTADO DEL PROBLEMA 12

Llamaremos $x_{ij}$ a la cantidad de unidades fabricadas en el periodo $i$ del rango $j$, es decir, $x_{11}$ es la cantidad de unidades fabricada en el periodo 1 del rango 1 (1-3 ud.); $x_{12}$ a las unidades fabricadas en el primer periodo del segundo rango de producción (4-11 ud.); $x_{23}$ las unidades fabricadas en el segundo periodo del tercer rango de producción (12-15 ud.); y así sucesivamente. Como los costes son crecientes es posible definir la producción de un periodo como la suma de las variables de ese periodo sin que sea necesario añadir más (no sería así en caso de costes decrecientes). Sea $I_i$ el inventario sobrante al final de un periodo. Entonces el problema será

$$\begin{aligned}
&\min x_{11} + x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 2x_{21} + \ldots + 5x_{43} + 7x_{44} + 0.3I_1 + 0.35I_2 + 0.2I_3 + 0.25I_4 \\
&x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} - I_1 = 11 \\
&x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + I_1 - I_2 = 4 \\
&x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + I_2 - I_3 = 17 \\
&x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + I_3 - I_4 = 29 \\
&x_{i1} \le 3, \quad x_{i2} \le 8, \quad x_{i3} \le 4, \quad x_{i4} \le 10 \ \ \forall i \\
&x_{ij}, I_i \ge 0 \quad \forall i, j
\end{aligned}$$

### RESULTADO DEL PROBLEMA 14

El pedido óptimo será de 537 ó 538 armazones. La carencia máxima 124 y el nivel máximo de inventario 413 ó 414 unidades.

### RESULTADO DEL PROBLEMA 15

a) 0.0023

b) Pida 300 rollos cuando el inventario caiga a 70 rollos.

### RESULTADO DEL PROBLEMA 16

El stock de seguridad debe tener un tamaño de al menos 23 unidades. Esto requiere hacer pedidos de 1000 unidades cada vez que el inventario caiga por debajo de 223 unidades.

### RESULTADO DEL PROBLEMA 17

Pedir aproximadamente 320 litros cada vez que el nivel del inventario cae a 94 litros.

### RESULTADO DEL PROBLEMA 18

a) 3.125 pedidos

b) 312.5 €/mes

c) 408 €

d) 2.0397 €

e) 0.06

### RESULTADO DEL PROBLEMA 19

$Q^* = 316.81$ unidades, $S^* = 58.3$ unidades.

RESULTADO DEL PROBLEMA 20

a) La cantidad de pedido óptima es aproximadamente 307 ejemplares (307.32).

b) En este caso la cantidad será de 300 ejemplares.

RESULTADO DEL PROBLEMA 21

$19 < c_r < 35.7$

RESULTADO DEL PROBLEMA 22

230 copias

RESULTADO DEL PROBLEMA 23

a) Si $q_0 < 3.52$ pedimos $S - q_0$. Si no, no pedimos nada.

b) La solución será $s = -2$ (no factible) o bien $s = 18\,(> S)$. Por lo tanto no debemos pedir nada en ningún caso. Esto sucede porque el coste de preparación es muy alto en comparación con el resto de los costes del modelo.

RESULTADO DEL PROBLEMA 25

Puesto que no hay nada que ligue a ambos productos la gestión se puede hacer por separado.

Componente A:

- Demanda media: 12 juguetes/día, 6 componentes/juguete, $d_A = 72$ componentes/día
- $c_p = 1350 + 0.01 Q_A^2$
- $c_{aA} = 1.8/30 = 0.06$ €/día.componente

$$Coste/ciclo = 1350 + 0.01 Q_A^2 + 0.06 \frac{Q_A^2}{2 \cdot 72}$$

$$Coste/dia = \frac{Coste/ciclo}{Q_A/d_A} = \frac{1350 \cdot 72}{Q_A} + 0.01 \cdot 72 Q_A + 0.06 Q_A/2$$

$$\frac{\partial Coste/dia}{\partial Q_A} = -\frac{1350 \cdot 72}{Q_A^2} + 0.75 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_A = 360 componentes$$

$$T_0 = \frac{Q_A}{d_A} = \frac{360}{72} = 5dias \quad l = 9 \quad \Rightarrow \quad l' = 4dias$$
$$PR = 4 \cdot 72 = 288 \text{ sin stock seguridad}$$

Stock seguridad: $D_4 = 6 \cdot N(4 \cdot 12, \sqrt{4 \cdot 12}) = N(4 \cdot 12 \cdot 6, \sqrt{4 \cdot 12 \cdot 6}) = N(288, 24\sqrt{3})$

$$0.05 \geq P(D_4 > 288 + B) = P(Z > \frac{B}{24\sqrt{3}}) \quad \Rightarrow \quad \frac{B}{24\sqrt{3}} = 1.645 \Rightarrow B \geq 68.38 \quad B = 69$$

Punto de reorden = 288 + 69 = 357 componentes

Componente B:

- Demanda media: 12 juguetes/día 9 componentes/juguete $d_B = 108 componentes / dia$
- $c_p = 540$
- $c_{aB} = 3/30 = 0.1€ / dia \cdot componente$

$$Coste / ciclo = 540 + 0.1 \frac{Q_B^2}{2 \cdot 108}$$

$$Coste / dia = \frac{Coste / ciclo}{Q_B / d_B} = \frac{540 \cdot 108}{Q_B} + 0.1 Q_B / 2$$

Fórmula de Wilson: $Q_B = \sqrt{\frac{2 d_B c_p}{c_{aB}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 108 \cdot 540}{0.1}} = 1080 componentes$

$$T_0 = \frac{Q_B}{d_B} = \frac{1080}{108} = 10dias \quad l = 6 < T_0 \quad \Rightarrow$$
$$PR = 6 \cdot 108 = 648 \text{ sin stock seguridad}$$

Stock seguridad: $D_6 = 9 \cdot N(6 \cdot 12, \sqrt{6 \cdot 12}) = N(9 \cdot 12 \cdot 6, 9\sqrt{12 \cdot 6}) = N(648, 54\sqrt{2})$

$$0.05 \geq P(D_6 > 648 + B) = P(Z > \frac{B}{54\sqrt{2}}) \quad \Rightarrow \quad \frac{B}{54\sqrt{2}} = 1.645 \Rightarrow B \geq 125.62 \quad B = 126$$

Punto de reorden = 648 + 126 = 774 componentes

RESULTADO DEL PROBLEMA 26

$$Coste / ciclo A1(Q_{A1}) = 1500 + 30 \frac{Q_{A1}^2}{2 \cdot 10000}$$

$$Coste/cicloA2(Q_{A2}) = 1800 + 20\frac{Q_{A2}^2}{2\cdot 8000}$$

$$Coste/año(Q_{A1}, Q_{A2}) = \frac{1500\cdot 10000}{Q_{A1}} + 30\frac{Q_{A1}}{2} + \frac{1800\cdot 8000}{Q_{A2}} + 20\frac{Q_{A2}}{2}$$

Ciclos/año = nº pedidos = $d/Q$

Modelo:

$$\left.\begin{array}{l} \min \frac{1500\cdot 10000}{Q_{A1}} + 30\frac{Q_{A1}}{2} + \frac{1800\cdot 8000}{Q_{A2}} + 20\frac{Q_{A2}}{2} \\ \frac{10000}{Q_{A1}} \geq 4 \\ \frac{8000}{Q_{A2}} \geq 4 \\ \frac{10000}{Q_{A1}} + \frac{8000}{Q_{A2}} \leq 12 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \min \frac{1500\cdot 10000}{Q_{A1}} + 30\frac{Q_{A1}}{2} + \frac{1800\cdot 8000}{Q_{A2}} + 20\frac{Q_{A2}}{2} \\ Q_{A1} \leq 2500 \\ Q_{A2} \leq 2000 \\ \frac{10000}{Q_{A1}} + \frac{8000}{Q_{A2}} \leq 12 \end{array}$$

Las variables no negativas, pero no pueden ser cero tampoco.

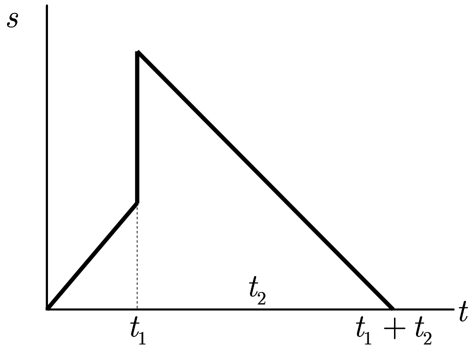
b. Condiciones necesarias de Karush-Kuhn-Tucker:

$$\begin{array}{l} \frac{-15000000}{Q_{A1}^2} + 15 + u_1 - \frac{10000}{Q_{A1}^2}u_3 = 0 \\ \frac{-14400000}{Q_{A2}^2} + 10 + u_2 - \frac{8000}{Q_{A2}^2}u_3 = 0 \\ u_1(Q_{A1} - 2500) = 0 \\ u_2(Q_{A2} - 2000) = 0 \\ u_3(\frac{10000}{Q_{A1}} + \frac{8000}{Q_{A2}} - 12) = 0 \\ u_1, u_2, u_3 \geq 0 \end{array}$$

RESULTADO DEL PROBLEMA 27

1. Calculamos la expresión de la recta de la fase de aprovisionamiento $s = (p-d)t$ hasta $t = t_1$. Sabiendo que $pt_1 = \frac{n}{2}$, $t_1 = \frac{n}{2p}$. El punto máximo del inventario se alcanza en $t = t_1$ y resulta

ser $\overline{s}=(p-d)t_1+\dfrac{n}{2}$. La duración de la fase de consumo es $t_2$, cuyo valor se puede calcular sabiendo que $(p-d)t_1+\dfrac{n}{2}=dt_2$. $t_2=\left[(p-d)t_1+\dfrac{n}{2}\right]/d=\dfrac{n(2p-d)}{2pd}$. La figura que representa el movimiento del inventario en un ciclo es la siguiente.




2. El stock medio durante la fase de aprovisionamiento es $s_1=\dfrac{n(p-d)}{4p}$. El stock medio durante la fase de consumo es $s_2=\dfrac{(p-d)n}{4p}+\dfrac{n}{4}=\dfrac{n(2p-d)}{4p}$.

3. El stock medio por ciclo será $s_c=\dfrac{s_1t_1+s_2t_2}{t_1+t_2}=\dfrac{n(4p-3d)}{8p}$