Universidad
Complutense
Madrid

Equation Section (Next)

MODELOS DE GESTIÓN Y PRODUCCIÓN: PLANIFICACIÓN DE PROYECTOS, SECUENCIACIÓN, GESTIÓN DE INVENTARIOS Y FIABILIDAD

Begoña Vitoriano

Octubre 2010

ÍNDICE

II.1 Técnicas de planificación y control de proyectos

En un negocio o industria es habitual que se establezcan tareas que hay que desarrollar existiendo un determinado orden total o parcial para llevarlas a cabo. Estas tareas pueden ser tareas pertenecientes a un proyecto y lo que se busca es determinar el menor tiempo posible para acabar ese proyecto, o pueden ser, por ejemplo, procesos productivos que requieren el uso de determinados recursos y hay que decidir cómo secuenciar los procesos en los recursos con distintos objetivos o metas a alcanzar. Lo que resulta común a ambos planteamientos es la existencia de unas tareas que desarrollar y unas precedencias entre ellas, pudiendo considerarse todo ello planificación de tareas, con o sin recursos. Sin embargo, la planificación de proyectos tiene una entidad propia y un uso generalizado por lo que ha sido objeto de análisis pormenorizados y ha dado lugar a técnicas específicas, por lo que debe tener un tratamiento diferenciado. Existen aplicaciones ampliamente utilizadas en la industria que ayudan en la planificación y control de proyectos como son Microsoft Project (www.microsoft.com) y Gantt Project (ganttproject.sourceforge.net), esta última de domino público.

Por lo tanto, en esta sección se verán en primer lugar las técnicas más usuales de planificación de proyectos por su relevancia y en la sección siguiente los modelos de secuenciación sobre máquinas. Sin embargo, es conveniente observar que las técnicas que se presentarán para modelar los problemas de secuenciación son aplicables y extensibles a cualquier situación donde se busque una planificación de tareas con precedencias entre ellas.

II.1.1 Introducción

Las técnicas que vamos a ver en esta sección se utilizan cuando se desea planificar un proyecto con múltiples actividades, permitiendo no sólo llevar a cabo la programación de las actividades que configuran el proyecto, sino además detectar cuellos de botella, estimar la probabilidad de cumplir los plazos de entrega establecidos, evaluar el impacto en la planificación de realizar cambios de programa, etc.

Se entiende por *proyecto* un conjunto de actividades interrelacionadas, cada una con una duración y unos recursos necesarios para llevarla a cabo. Así el primer paso para planificar un proyecto es definirlo. Esto supone definir todas las actividades que configuran el proyecto, sus relaciones de precedencia y sus requerimientos de tiempo y recursos para llevarlas a cabo.

Estas condiciones configurarían las restricciones que la planificación debe cumplir, pero es necesario determinar cuál es el objetivo de la planificación. Se pueden plantear distintos objetivos, siendo fundamentalmente dos: objetivos de tiempo y objetivos de coste. Las técnicas básicas se plantean el objetivo de encontrar el tiempo mínimo en que puede ser completado el proyecto, sin embargo veremos algunas variantes donde se incluyen objetivos de coste o de asignación de los recursos.

Para resolver el problema del tiempo mínimo en los años 50 se desarrollaron dos técnicas que difieren en la consideración de la duración de las actividades, siendo una para duraciones deterministas y otra para duraciones estocásticas. Estas técnicas son:

- CPM (*Critical Path Method*): Método del camino crítico
- PERT (*Program Evaluation and Review Technique*)

Para aplicar ambas técnicas se requiere primero representar el proyecto mediante una red de actividades.

II.1.2 Red de actividades

Un proyecto se representa mediante una red que visualiza gráficamente las relaciones de precedencia en la realización de las actividades. Existen dos formas de llevar a cabo esta representación, una en que las actividades se localizan en los nodos y otra en la que las actividades se localizan en los arcos.

La técnica de búsqueda del tiempo mínimo de finalización del proyecto representando el proyecto con las actividades en los nodos es conocida como método ROY y su red como grafo ROY. La representación del proyecto mediante un grafo ROY suele resultar más intuitiva, pero cuando hay muchas actividades y relaciones de precedencia entre ellas puede resultar bastante más compleja y, por tanto, mucho menos útil. De ahí que en este contexto se presenten las técnicas sobre una red de actividades donde éstas se localizan en los arcos.

En la red cada actividad se representa por un arco con orientación la de progreso del proyecto. La duración de la actividad o su duración media, según el caso, determina la longitud del arco.

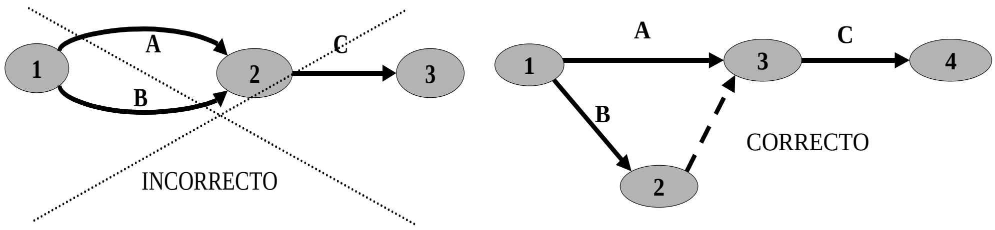
Los nodos establecen las relaciones de precedencia, de modo que los arcos que llegan a un nodo son las actividades que tienen que haber terminado para que puedan comenzar aquéllas que vienen representadas por arcos que salen de ese nodo. Así pues un nodo es identificado con un evento, entendiéndose por éste el fin de las tareas que llegan a ese nodo o el inicio de las tareas que salen de ese nodo.

Como tales eventos que son considerados los nodos, en toda red deben existir un nodo inicial y un nodo final que representan el inicio del proyecto y su finalización.

Después de estas consideraciones se construye la red de actividades manteniendo dos propiedades:

1. Cada actividad es representada por uno y sólo un arco de la red
2. Dos nodos pueden estar conectados por a lo sumo un arco (ya que una actividad vendrá representada por sus nodos inicial y final)

Es posible que al construir la red no se puedan mantener estas propiedades y representar correctamente la relación entre las actividades sin añadir en algunos casos actividades ficticias. Una actividad ficticia es una actividad que se añade sin duración alguna para establecer relaciones de precedencia que de otra forma no se podría o para evitar violar las propiedades anteriores. Por ejemplo, si dos actividades tienen exactamente los mismos predecesores y son antecesoras de las mismas actividades habría que poner dos arcos entre dos nodos, lo que violaría la propiedad 2, teniendo que usar una actividad ficticia como se muestra en la figura.

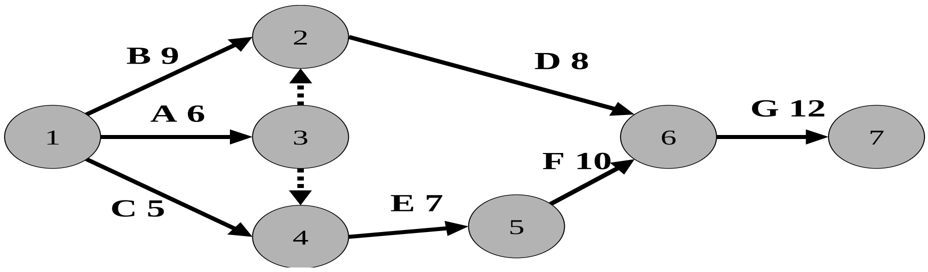


Otro caso donde también sería necesario introducir actividades ficticias es si dos actividades tienen distintos predecesores pero al menos uno común. Veamos el siguiente ejemplo de proyecto y su red de actividades correspondiente.

Un determinado artículo está compuesto por dos productos ensamblados. Se desea hacer la planificación para saber cuándo será posible disponer del artículo ya terminado habiéndose determinado que las actividades a realizar, sus precedencias y sus duraciones son las que se recogen en la siguiente tabla:

Actividad	Descripción	Predecesores	Duración
A	Capacitar trabajadores	–	6
B	Comprar materia prima producto 1	–	9

C	Comprar materia prima producto 2	–	5
D	Fabricar producto 1	A, B	8
E	Fabricar producto 2	A, C	7
F	Probar producto 2	E	10
G	Ensamblar productos 1 y 2	D, F	12



II.1.3 Método del camino crítico (CPM)

Este método se aplica cuando las duraciones de las actividades se suponen conocidas o estimadas con exactitud. El método obtiene la duración total necesaria para completar el proyecto, la programación de las actividades y la clasificación de éstas en actividades críticas y no críticas.

Una actividad se denomina *crítica* cuando no hay holgura al determinar sus instantes de inicio y final, es decir, cuando cualquier retraso en la finalización de esta actividad (tanto porque empezara más tarde que el instante previsto como porque se alargara su duración) supone un retraso en el final del proyecto.

Una actividad no crítica, sin embargo, tendrá holgura, pudiendo ser adelantada o retrasada dentro de unos límites sin afectar a la duración total del proyecto.

Se denomina *camino crítico* a un camino en la red desde el inicio hasta el fin formado por actividades críticas. Obsérvese que en una red puede haber más de un camino crítico.

El método del camino crítico se lleva a cabo en dos pasadas, una hacia delante en la red y otra hacia atrás. En la primera se determinan los instantes más tempranos en que pueden comenzarse las actividades y termina determinando la duración total del proyecto. En la segunda se calculan, yendo hacia atrás, los instantes más tardíos en que pueden acabar las actividades. Una vez obtenidos estos valores es fácil determinar cuáles son las actividades críticas.

Se usará la siguiente notación:

- d_{ij}: duración de la actividad que va del nodo i al nodo j
- t_i: instante más temprano del nodo i (es el instante más temprano en que pueden empezar las actividades que salen de ese nodo)

- T_i: instante más tardío del nodo i (es el instante más tardío en que pueden acabar las actividades que llegan a ese nodo)

Fase hacia delante (determinación de instantes más tempranos):

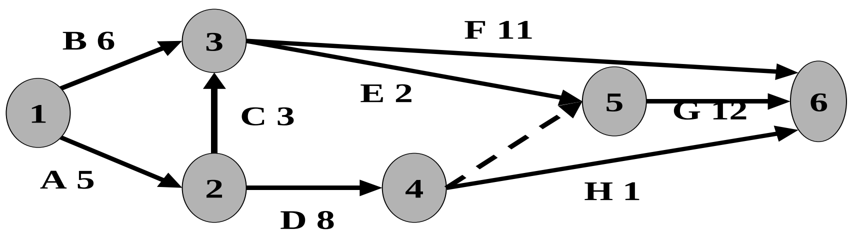
1. Etiquetar el nodo inicial con tiempo 0, es decir, $t_1 = 0$.
2. Elegir un nodo j tal que todos los nodos anteriores unidos directamente a él por un arco ya hayan sido etiquetados ($p,q,...,v$). Etiquetar el nodo j con el máximo de las etiquetas de estos nodos más la longitud del arco que los une, es decir, $t_j = \max\left\{t_p + d_{pj}, t_q + d_{qj}, ..., t_v + d_{vj}\right\}$.
3. Repetir el paso 2 hasta etiquetar el nodo final n, entonces t_n es la duración mínima del proyecto.

Fase hacia atrás (determinación de instantes más tardíos):

1. Etiquetar el nodo final con tiempo el del proyecto, es decir, $T_n = t_n$.
2. Elegir un nodo j tal que todos los nodos posteriores unidos directamente a él por un arco ya hayan sido etiquetados ($p,q,...,v$). Etiquetar el nodo j con el mínimo de las etiquetas de estos nodos menos la longitud del arco que los une, es decir, $T_j = \min\left\{T_p - d_{jp}, T_q - d_{jq}, ..., T_v - d_{jv}\right\}$.
3. Repetir el paso 2 hasta etiquetar el nodo inicial (que debe ser etiquetado con $T_0 = 0$, pues si no fuera así no sería correcto y se habría cometido algún error).

Con esto acaba el procedimiento de cálculo de los instantes más tempranos y más tardíos. Ahora es fácil identificar las actividades críticas que son aquellas actividades que no tienen holgura, es decir, una actividad (i,j) (denotada por sus nodos inicial y final) será crítica si se verifica $T_j = t_j$, $T_i = t_i$ y $T_j - T_i = t_j - t_i = d_{ij}$. Las actividades críticas han de formar un camino (al menos) desde el inicio al final. Puede haber más de un camino crítico.

Para ilustrar el procedimiento y los conceptos que se han introducido y los que se comentarán después veamos un ejemplo. Sea la siguiente red de actividades:



cuyos datos son los siguientes

Actividad	Predecesores	Duración
A	–	5
B	–	6
C	A	3
D	A	8
E	B, C	2
F	B, C	11
G	D, E	12
H	D	1

El procedimiento sería el siguiente:

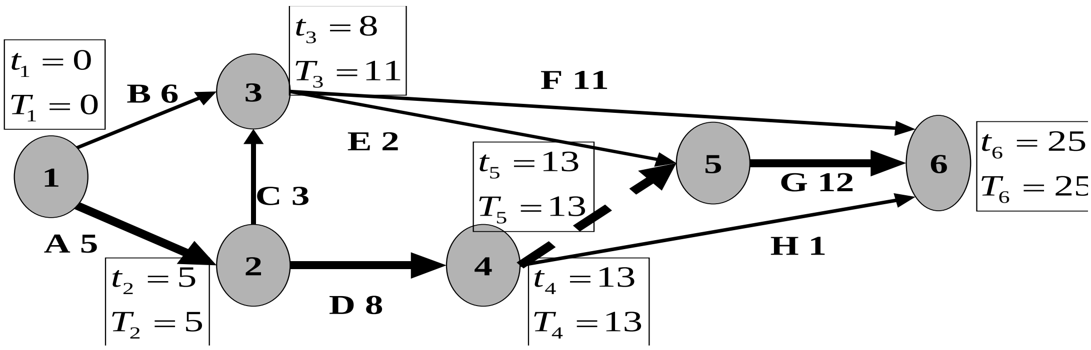
Fase hacia delante:

1. $t_1 = 0$
2. $t_2 = t_1 + d_{12} = 0 + 5 = 5$
2. $t_3 = \max\{t_1 + d_{13}, t_2 + d_{23}\} = \max\{0 + 6, 5 + 3\} = 8$
2. $t_4 = t_2 + d_{24} = 5 + 8 = 13$
2. $t_5 = \max\{t_3 + d_{35}, t_4 + d_{45}\} = \max\{8 + 2, 13 + 0\} = 13$
2. $t_6 = \max\{t_3 + d_{36}, t_4 + d_{46}, t_5 + d_{56}\} = \max\{8 + 11, 13 + 1, 13 + 12\} = 25$

Luego, la duración del proyecto será de 25 unidades de tiempo.

Fase hacia atrás:

1. $T_6 = 25$
2. $T_5 = T_6 - d_{56} = 25 - 12 = 13$
2. $T_4 = \min\{T_6 - d_{46}, T_5 - d_{45}\} = \min\{25 - 1, 13 - 0\} = 13$
2. $T_3 = \min\{T_6 - d_{36}, T_5 - d_{35}\} = \min\{25 - 11, 13 - 2\} = 11$
2. $T_2 = \min\{T_3 - d_{23}, T_4 - d_{24}\} = \min\{11 - 3, 13 - 8\} = 5$
2. $T_1 = \min\{T_3 - d_{13}, T_2 - d_{12}\} = \min\{11 - 6, 5 - 5\} = 0$



Evidentemente, las actividades críticas son A, D y G, siendo el camino crítico el que pasa por los nodos 1, 2, 4, 5 y 6. Obsérvese que para la actividad

H se verifica que los instantes más tempranos y más tardíos de sus nodos inicial y final coinciden, pero que no es una actividad crítica ya que la diferencia entre ambos es superior a la duración de la actividad. Es decir, no es suficiente para que una actividad sea crítica que sus nodos inicial y final no tengan holgura, la que no debe tenerla es la actividad.

Respecto a lo que se entiende por holgura de una actividad, existen dos tipos de holgura:

- *Holgura total* de la actividad (i, j), denotada por TF_{ij}: cantidad en que se puede retrasar el inicio de la actividad (i, j) más allá de su instante más temprano posible sin retrasar el proyecto (suponiendo que no se retrasan otras actividades). Su valor viene dado por la expresión $TF_{ij} = T_j - t_i - d_{ij}$. También se interpreta como lo que puede ser incrementada la duración de la actividad en esas condiciones.
- *Holgura libre* de la actividad (i, j), denotada por FF_{ij}: cantidad en que se puede retrasar el inicio de la actividad (i, j) (o su duración) más allá de su instante más temprano posible sin afectar al inicio de cualquier actividad posterior. Su valor viene dado por $FF_{ij} = t_j - t_i - d_{ij}$. Por definición, se verifica $FF_{ij} \leq TF_{ij}$.

Por lo tanto si para una actividad se cumple que $FF_{ij} = TF_{ij}$, entonces la actividad puede ser programada en cualquier instante del intervalo de tiempo $[t_i, T_i]$ sin afectar a ninguna otra actividad. Si por el contrario se cumple que $FF_{ij} < TF_{ij}$, entonces cualquier retraso superior a FF_{ij} afectará a todos los eventos y actividades posteriores, teniendo que retrasar en la cantidad que exceda a la holgura libre el comienzo de todas las actividades que salen del nodo j.

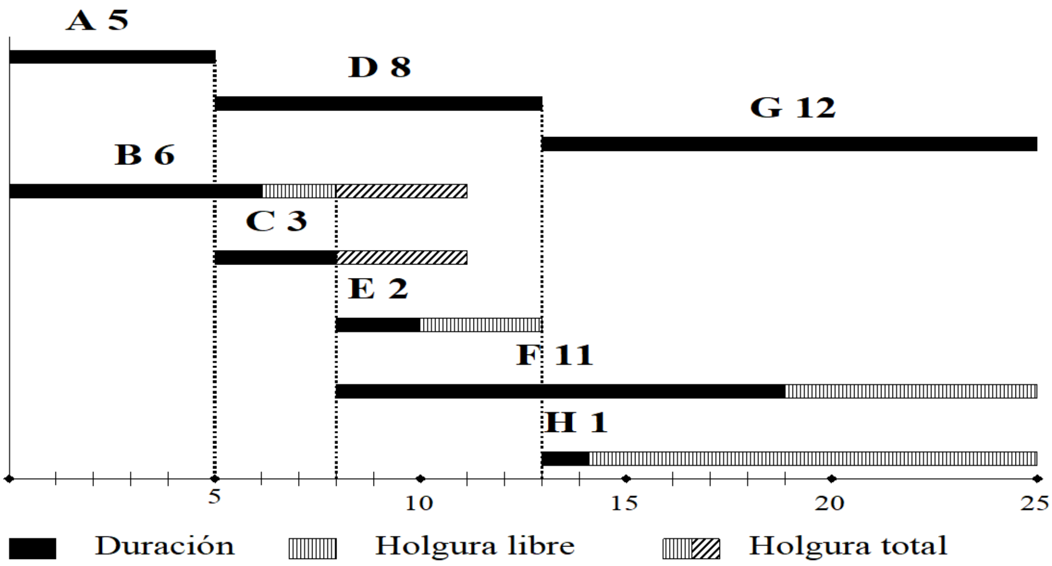
Obsérvese que si se han añadido actividades ficticias éstas pueden modificar la holgura libre de algunas actividades ya que a las que afectaría modificar el instante final de una variable pueden ser ficticias, lo cual no es real. Así pues, las actividades ficticias sólo se deben utilizar cuando sea absolutamente necesario y si al calcular las holguras alguna de estas actividades ficticias resultan con holgura dársela a la correspondiente actividad real a la que pertenece dicha holgura (generalmente, una actividad que acabe en el nodo de inicio de la ficticia).

Veamos el valor de las holguras en el ejemplo anterior. En primer lugar, para las actividades críticas no existe ningún tipo de holgura, luego sólo hay que calcularlas para las actividades no críticas. En la siguiente tabla se recogen esas holguras:

Act. no críticas	Duración d_{ij}	Holgura total TF_{ij}	Holgura libre FF_{ij}
B (1,3)	6	$11 - 0 - 6 = 5$	$8 - 0 - 6 = 2$
C (2,3)	3	$11 - 5 - 3 = 3$	$8 - 5 - 3 = 0$
E (3,5)	2	$13 - 8 - 2 = 3$	$13 - 8 - 2 = 3$
F (3,6)	11	$25 - 8 - 11 = 6$	$25 - 8 - 11 = 6$
H (4,6)	1	$25 - 13 - 1 = 11$	$25 - 13 - 1 = 11$

Como se puede observar, ambas holguras coinciden para las actividades E, F y H y no coinciden para B y C. Esto supone que así como las tres últimas actividades se pueden programar en cualquier punto entre su inicio más temprano y su inicio más tardío sin afectar a ninguna otra programación de actividad, no ocurre lo mismo para las actividades B y C. Es más, puesto que la actividad C tiene holgura libre 0 cualquier retraso en ella supone una modificación de las actividades posteriores a ella. Si este retraso es menor o igual que 3 se podrán reprogramar las actividades sin alargar la duración del proyecto y si es superior necesariamente se acabará más tarde el proyecto.

Para visualizar claramente la planificación obtenida y las holguras de las actividades se utiliza un formato gráfico, denominado *diagrama de Gantt.* En este diagrama, el eje X representa el tiempo y cada actividad se representa mediante una barra horizontal que comienza en su instante más temprano y de longitud la duración. Las actividades críticas se colocan arriba y las no críticas debajo. Además, en ocasiones, se alarga la barra añadiendo al final de la duración la holgura libre y detrás la diferencia entre la holgura total y la libre. Estos valores añadidos se representan con líneas de otro color. Veamos el diagrama de Gantt para el ejemplo anterior.



II.1.4 Método PERT

Este método se aplica cuando se considera aleatoria la duración de las actividades. El objetivo del método es dar una distribución de la duración total del proyecto, con la que se obtenga la duración esperada, su varianza y se pueda dar respuestas a preguntas del tipo probabilidad de terminar el proyecto en una fecha programada, etc.

En este contexto la duración de cada actividad, D_{ij}, es una variable aleatoria con esperanza $E\left[D_{ij}\right]$ y varianza $V\left[D_{ij}\right]$ y la duración total del proyecto será otra variable aleatoria, CP, cuya esperanza denotaremos por $E[CP]$ y su varianza por $V[CP]$.

El método asume ciertas hipótesis que pueden ser muy discutidas. Éstas son:

Día 1: *Las duraciones de las actividades son variables aleatorias independientes.*

Para cualquier camino desde el inicio hasta el final la duración esperada de ese camino es la suma de las duraciones esperadas de las actividades que lo forman, pero además por ser independientes las variables aleatorias, la varianza del camino es la suma de las varianzas. Es decir, en cualquier caso la duración esperada de un camino c es $\sum_{(i,j)\in c} E\left[D_{ij}\right]$, pero, además por ser independientes la varianza de la duración del camino es $\sum_{(i,j)\in c} V\left[D_{ij}\right]$.

Por otra parte, como la duración total de un proyecto viene dada por la duración de un camino crítico cc, es decir, $CP = \sum_{(i,j)\in cc} D_{ij}$, se tiene de forma inmediata que $E[CP] = \sum_{(i,j)\in cc} E\left[D_{ij}\right]$ y $V[CP] = \sum_{(i,j)\in cc} V\left[D_{ij}\right]$.

Día 2: *El camino crítico no cambia, siempre es el de mayor duración esperada.*

En el caso en que haya más de un camino con longitud esperada igual, se considera crítico el de mayor varianza.

La consecuencia inmediata de esta hipótesis junto con las consideraciones previas, es que para determinar la duración esperada de un proyecto y su varianza, es suficiente determinar el camino crítico aplicando el CPM, visto en la sección anterior, utilizando las duraciones esperadas de las actividades. Una vez determinado el camino crítico la esperanza de la duración es la suma de las esperanzas de las duraciones de las actividades que lo forman y la varianza también la suma de las varianzas de las actividades del camino.

Día 3: La variable duración del proyecto, CP, tiene distribución normal.

Esta hipótesis, en principio arbitraria, viene justificada porque al ser una variable que es suma de otras, aplicando el teorema central del límite, su distribución se aproxima suficientemente por una distribución normal. Por lo tanto, de las tres hipótesis se concluye que la distribución de la variable aleatoria CP es $N(\mu = \sum_{(i,j)\in cc} E\left[D_{ij}\right], \sigma^2 = \sum_{(i,j)\in cc} V\left[D_{ij}\right])$.

Por lo tanto, el procedimiento para obtener la distribución de la duración del proyecto sería el siguiente:

PASO 1: Determinar las esperanza y varianza de todas las actividades del proyecto.

PASO 2: Encontrar el camino crítico utilizando las duraciones esperadas de las actividades (en caso de haber más de uno, se elige el de mayor varianza).

PASO 3: Obtener la varianza del camino crítico sumando las varianzas de las actividades que formen el camino.

Así, por ejemplo, si se obtiene una ruta crítica formada por cinco actividades (una de ellas ficticia) cuyas esperanzas son 9, 0, 7, 10 y 12 y sus varianzas son 1.78, 0, 4, 0.44 y 1, la distribución de la duración del proyecto será $N(38{,}7.22)$. Con esta conclusión se puede dar respuesta a preguntas como ¿cuál es la probabilidad de acabar el proyecto antes de 35 días? Para responder, se calcula esta probabilidad por los métodos clásicos, siendo Z una variable con distribución normal de media 0 y varianza 1:

$$P(CP \leq 35) = P(\frac{CP-38}{\sqrt{7.22}} \leq \frac{35-38}{\sqrt{7.22}}) = P(Z \leq -1.12) = 0.13$$

Otra posible pregunta sería, ¿qué duración debo decir para tener una probabilidad del 97.5 % de acabar a tiempo? Si x es la incógnita, el planteamiento y la solución sería

$$P(CP \leq x) = 0.975 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(\frac{CP - 38}{\sqrt{7.22}} \leq \frac{x - 38}{\sqrt{7.22}}) = 0.975 \Rightarrow P(Z \leq \frac{x - 38}{\sqrt{7.22}}) = 0.975 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{x - 38}{\sqrt{7.22}} = 1.96 \Rightarrow x = 38 + 1.96\sqrt{7.22} = 43.27$$

de donde se deduce que habría que decir al menos 44 días.

Obsérvese que para aplicar este método no es necesario ni siquiera suponer distribución alguna para la duración de las actividades, sólo es necesario conocer su esperanza y varianza. Sin embargo, en la realidad no es sencillo determinar estos valores. ¿Cuál es la esperanza o media de la duración de una actividad? Es una pregunta que no es fácil responder a no ser que se disponga de datos históricos, pero, mucho menos lo es si preguntamos por la varianza, un valor mucho menos intuitivo.

Para solventar esta dificultad tradicionalmente se ha supuesto una determinada distribución para la que se puede obtener la media y la varianza a partir de valores mucho más intuitivos y fáciles de determinar: la distribución beta. Esta distribución supone que la variable toma valores entre un mínimo y un máximo y además, de todas las posibles, se utilizan las que tienen una única moda. Conociendo estos tres valores es posible determinar la esperanza y varianza de la distribución. Así pues, haciendo esta suposición, lo que es necesario conocer es la duración más optimista de la actividad (a: el mínimo), la duración más pesimista (b: el máximo) y la duración más probable (m: la moda), que son conceptos mucho más intuitivos y fáciles de determinar. A partir de ellos se obtienen los valores de la esperanza y la varianza como $E\left[D_{ij}\right] = \dfrac{a + b + 4m}{6}$ y $V\left[D_{ij}\right] = \dfrac{(b - a)^2}{36}$.

El procedimiento es sencillo y de ahí su uso tan generalizado, pero, como ya se ha dicho, las hipótesis que se formulan no están siempre justificadas. A continuación se presentan algunos comentarios a estas hipótesis:

1. La hipótesis de independencia de las variables no siempre es razonable, ya que esto supone que si una variable se alarga o se reduce en tiempo, no va a afectar a la distribución de las otras variables, cuando en la realidad puede haber razones que hacen que se alargue que también hace que otras lo hagan (factores meteorológicos, por ejemplo), o al revés, al ver que una se ha demorado, que las siguientes se hagan con mayor velocidad para compensar la demora.
2. La hipótesis de que el camino crítico es siempre el mismo tampoco está del todo justificada, ya que en muchos casos se puede esperar un camino crítico

pero la duración de otras tareas puede dar lugar a que actividades que por su duración media no sean críticas, se demoren, produciendo otro camino con mayor duración.

3. La hipótesis de normalidad de la distribución de la duración del camino se justifica por el teorema central del límite, pero este resultado es asintótico, es decir, se verifica en el límite, y puede ser utilizado para aproximar distribuciones cuando es un número grande de variables las que se suman. Por lo tanto, si en el camino crítico no resulta un número grande de actividades, la distribución de la suma puede estar muy lejos de aproximarse a una distribución normal.
4. La hipótesis de seguir una distribución beta las duraciones de las actividades es, probablemente, la hipótesis más fácil de asumir. Por una parte, esta hipótesis no siempre es necesaria, ya que si la esperanza y varianza de la distribución es conocida o estimada no es necesario hacerla. Realmente, sólo es necesaria cuando los datos que se conocen son el tiempo mínimo, el máximo y el más probable, e incluso en estos casos, la distribución beta se presenta como la más apropiada para ajustar una distribución de una variable que toma valores en un intervalo acotado, ya que sus dos parámetros y su expresión la hacen muy flexible, pudiendo tomar formas muy diversas.

A pesar de los comentarios anteriores, el método PERT es un método muy apropiado para aproximar la duración de un proyecto, sobre todo por la facilidad de sus cálculos. Sin embargo, hay que tener en cuenta que es una aproximación, que en algunos casos puede estar muy lejos de la realidad, tanto más cuanto menos asumibles sean las hipótesis anteriores. En el caso de querer obtener algo más preciso sin ajustarse a estas hipótesis, la alternativa más razonable es utilizar la simulación para hacerlo.

II.1.5 Penalizaciones en método PERT: el problema de establecer una fecha de finalización ante riesgo o incertidumbre

La duración de un proyecto, como se ha visto en el apartado anterior, puede ser considerada una variable aleatoria. El método PERT da una estimación (media) de esta duración y puede utilizarse para determinar fechas de finalización que serán superadas sólo con cierta probabilidad determinada a priori.

Sin embargo, esta probabilidad es un parámetro de diseño que puede venir determinada por diversos condicionantes. Una de las situaciones más habituales es que existan costes o penalizaciones asociadas al incumplimiento de la fecha de finalización.

Un caso ejemplo muy claro es cuando se plantea un concurso para adjudicar una obra. Por una parte, una empresa que desee concursar sabe que cuánto menor sea el plazo de finalización más probable es que le sea adjudicado el proyecto. Pero, por otra parte, en este tipo de concursos lo más habitual es que se establezcan penalizaciones por no acabarlo en el plazo previsto, estando la empresa adjudicataria obligada a pagar una multa por ello. Así pues, si la empresa no desea incurrir en una penalización y alarga el plazo de entrega, en general, tendrá que estar dispuesta a hacer una "rebaja" para mejorar su posición frente a otros adjudicatarios. La rebaja habrá de ser mayor cuánto mayor sea el plazo de entrega. Sin embargo, si la empresa realiza el proyecto y por causas aleatorias acaba antes de la fecha prevista, pensará que ha dejado de ganar una cierta suma de dinero, lo que se conoce como "coste de rebaja". ¿Cuál será la duración que establezca el mejor compromiso entre los costes de penalización y de rebaja?

Esta duración será la que minimice la suma del coste de rebaja más el coste de penalización. Sin embargo, esta minimización dado que las duraciones no son exactas se puede plantear en dos contextos muy distintos:

- En situación de *riesgo*: se considera que la distribución de probabilidad de la duración del proyecto es conocida.
- En situación de *incertidumbre*: se considera desconocida la distribución de probabilidad que sigue la duración del proyecto.

Los costes de rebaja o penalización correspondientes a una fecha de entrega establecida y una fecha real de finalización del proyecto se considerarán conocidos o estimados para poder determinar cuál es esa fecha de mejor compromiso, tanto en un contexto como en otro.

II.1.5.1 Situación de riesgo

En esta sección se considerarán lineales los costes de rebaja y penalización. Así, denotaremos por α al coste unitario de rebaja en que incurre la empresa si finaliza el proyecto antes de la fecha pactada (por ejemplo, en €/día) y por β a la penalización unitaria en caso de que finalice el proyecto después de esa fecha pactada (podrían ser también €/día). Esta hipótesis no es absolutamente necesaria, pero simplifica mucho los cálculos a la hora de presentar el procedimiento.

También se va a considerar que a la empresa le es indiferente perder dinero que dejar de ganarlo, es decir, le resulta tan gravoso perder c € por penalización como dejar de ganar c € por haber rebajado el precio previamente. Esta hipótesis se puede modificar de forma sencilla incrementando uno de los costes unitarios; por ejemplo, si le resulta peor tener que pagar el dinero al final de una penalización, el parámetro β puede ser incrementado.

Sea $f(x)$ la función de densidad conocida de la distribución de la duración del proyecto (en el método PERT esta distribución se asume como normal). Sea a su vez Z la duración establecida de antemano que se desea determinar como óptima para minimizar la suma de los costes esperados de rebaja y penalización.

Si la duración real del proyecto x resulta anterior a la duración establecida de antemano ($x < Z$) el coste en concepto de rebaja será $\alpha(Z-x)$ y, por lo tanto, el coste esperado de rebaja para una fecha dada Z será

$$\int_{-\infty}^{Z} \alpha(Z-x)f(x)dx$$

Por otra parte, si la duración real es posterior a la fecha establecida ($x > Z$), el coste por penalización será $\beta(x-Z)$ y su coste esperado por lo tanto será

$$\int_{Z}^{\infty} \beta(x-Z)f(x)dx$$

Así, el coste esperado que se desea minimizar es la suma de ambos costes

$$\min \int_{-\infty}^{Z} \alpha(Z-x)f(x)dx + \int_{Z}^{\infty} \beta(x-Z)f(x)dx$$

Para obtener el valor óptimo de Z basta con derivar respecto a esta variable e igualar a 0. Aplicando la regla de Leibnitz (dado que en ambos casos la función dentro de la integral es 0 en Z) la ecuación resultante es:

$$\alpha\int_{-\infty}^{Z} f(x)dx - \beta\int_{Z}^{\infty} f(x)dx = 0$$

Reordenando términos y dado que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ por ser función de densidad, el valor que buscamos de duración del proyecto es Z tal que

$$\int_{-\infty}^{Z} f(x)dx = P(x \leq Z) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

Este valor en el caso de la normal puede ser buscado en las tablas o calculado por algún programa estadístico. Para cualquier otra distribución puede buscarse en sus tablas, si está tabulada, o calculada directamente.

II.1.5.2 Situación de incertidumbre

En este caso, la distribución de probabilidad de la duración del proyecto se considera desconocida. Para poder hacer un análisis de las opciones y tomar una decisión, este problema se debe plantear como un problema de decisión con incertidumbre.

Para ello, se definen las alternativas o estrategias como las posibles duraciones del proyecto a considerar y como estados de la naturaleza o escenarios las posibles duraciones reales que pueden darse o que se consideren relevantes. Al fin, debe quedar una matriz cuadrada pues todas las opciones que se puedan dar podrían ser duraciones a establecer de antemano.

En la tabla de decisión, se pondrían los costes asociados a esa decisión y ese estado de la naturaleza (si la decisión es inferior al estado de la naturaleza será una penalización y si es superior será un coste de rebaja).

Por ejemplo, si un proyecto puede durar con duraciones mínimas de las actividades 40 unidades de tiempo y con duraciones máximas de las actividades 50 unidades de tiempo, la tabla de decisión tendría 11 posibles escenarios que serían las posibles duraciones. A su vez, como decisiones se pueden considerar todas las posibles duraciones o una selección de ellas. La valoración de una decisión bajo un escenario concreto será la penalización en que se incurra, bien por coste de rebaja o por penalización por demora. Supóngase que estos costes son de 10 si es de rebaja y de 20 por demora, la tabla sería la siguiente:

Escenarios / Decisiones	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
40	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
41	10	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180
42	20	10	0	20	40	60	80	100	120	140	160
43	30	20	10	0	20	40	60	80	100	120	140
44	40	30	20	10	0	20	40	60	80	100	120
45	50	40	30	20	10	0	20	40	60	80	100
46	60	50	40	30	20	10	0	20	40	60	80
47	70	60	50	40	30	20	10	0	20	40	60
48	80	70	60	50	40	30	20	10	0	20	40
49	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0	20
50	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0

Aplicando los criterios de teoría de la decisión con incertidumbre se obtienen distintas decisiones, de modo que al fin se ha de llegar a un compromiso con una de las decisiones. Así, por ejemplo, si se aplica el criterio de Wald o pesimista, las decisiones se valorarían como:

Decisiones	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Valor	200	180	160	140	120	100	80	70	80	90	100

A la vista de esta tabla, la decisión óptima sería dar una duración prevista de 47 unidades de tiempo.

El criterio optimista no tendría sentido ya que en el mejor de los casos todas las opciones tienen una penalización de 0.

Por último, aplicar el criterio de Savage tampoco tiene sentido ya que es el mismo de Wald, puesto que dado un escenario la solución óptima para él tiene valor 0 y, por lo tanto, los valores que aparecen en la tabla ya son de por sí, penalizaciones o costes de oportunidad, por lo que la tabla no cambia.

II.1.6 Coste en el método del camino crítico: alternativas en el desarrollo de una actividad

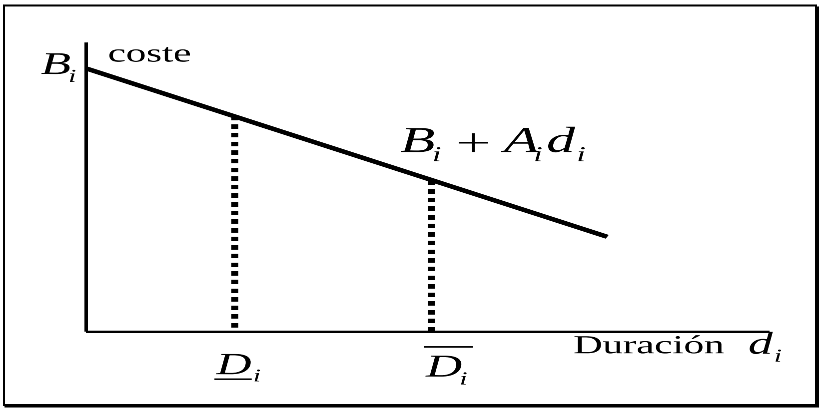
Es muy habitual que la duración de una actividad no esté prefijada de antemano, pero no por ser aleatoria, sino porque existan diversas alternativas con distintos costes, dependiendo de los recursos asignados.

Existen técnicas heurísticas para resolver el problema de elegir la duración óptima de las actividades y, por lo tanto, la duración y coste del proyecto asociados a esas duraciones. Uno de los algoritmos diseñados con tal fin es del Ackoff y Sasieni. Sin embargo, es con la programación matemática con la que mejores resultados se pueden obtener, pudiendo hacer modelos adaptados al caso específico que se esté tratando.

A continuación se presenta un modelo a modo de ejemplo de cómo formular mediante programación matemática un problema de planificación.

Sea un proyecto con un conjunto de tareas I y unas precedencias definidas entre estas tareas P, de modo que si $(i,j) \in P$ quiere decir que la actividad j no puede comenzar hasta que no haya acabado la tarea i.

Las tareas tienen asociado un coste a su duración, que vamos a suponer lineal, de modo que cuanto menor sea esta duración mayor será su coste, es decir, la función de coste es de la forma $B_i + A_i d_i$ $(A_i \leq 0)$ dentro de un intervalo $\left[\underline{D_i}, \overline{D_i}\right]$.



Se supone además que existe una duración total de proyecto que no puede ser superada T y el objetivo es obtener una planificación de mínimo coste que cumpla las precedencias establecidas y no supere el tiempo máximo de proyecto.

A continuación se presenta el modelo, donde las incógnitas son d_i la duración de las actividades y x_i el instante más temprano en que puede comenzarse una actividad (que será el instante para el que quede programada):

$$\begin{array}{ll}
\min \sum_{i \in I} (B_i + A_i d_i) & \\
x_i + d_i \leq x_j & \forall (i,j) \in P \\
\underline{D}_i \leq d_i \leq \overline{D}_i & \forall i \in I \\
x_i + d_i \leq T & \forall i \in I \\
x_i, d_i \geq 0 & \forall i \in I
\end{array}$$

El problema puede ser considerado como de programación lineal paramétrica si la duración total del proyecto T es considerada un parámetro. En tal caso, la solución del problema serían unas duraciones y costes de actividades asociados a cada una de las duraciones consideradas para el parámetro.

II.1.7 Programación de proyectos con recursos limitados: nivelación y asignación de recursos

En los métodos de programación y control de proyectos vistos anteriormente existe la hipótesis implícita de que los distintos recursos necesarios para desarrollar las actividades existen en cantidades ilimitadas. Obviamente, se trata de un supuesto muy fuerte y en muchos casos poco realista. En esta sección, se van a analizar dos problemas asociados a los recursos, el problema de nivelación y el problema de asignación de recursos limitados.

II.1.7.1 Nivelación de recursos

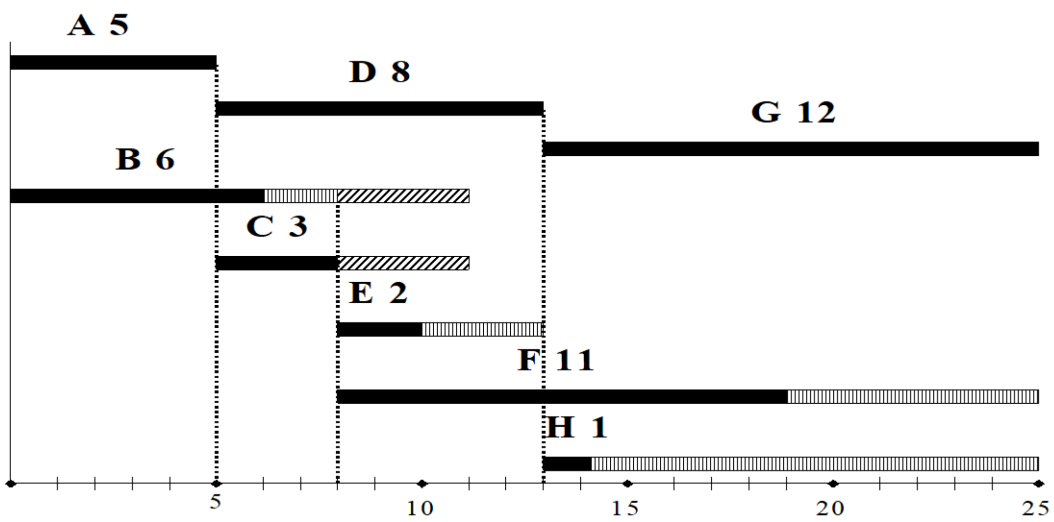
Este problema se plantea cuando, aun existiendo los recursos sin ser una restricción, éstos son utilizados de forma desigual en el tiempo. El objetivo es nivelar o repartir el uso de estos recursos en el tiempo de la forma más equilibrada posible sin alargar la duración del proyecto, es decir, la duración dada por el camino crítico.

Para abordar este problema, dada una programación de un proyecto, lo primero es hacer una representación gráfica y clara de la carga a lo largo del tiempo del recurso que se esté analizando. Para ello, en el gráfico Gantt que representa el calendario del proyecto se añade una fila final en la que se contabiliza esta carga por periodos (días, por ejemplo) y a partir de esta fila se hace una representación gráfica en la que en el eje de abcisas se representa el tiempo y en el eje de ordenadas la carga de trabajo.

Para ilustrar esta representación, supongamos que en el ejemplo de la sección II.1.3 se considera la mano de obra como un recurso que se desea que esté nivelado y los requerimientos de mano de obra de cada una de estas tareas son los que se recogen en la siguiente tabla:

Tareas	A	B	C	D	E	F	G	H
Mano de obra	5	5	5	5	10	10	5	5

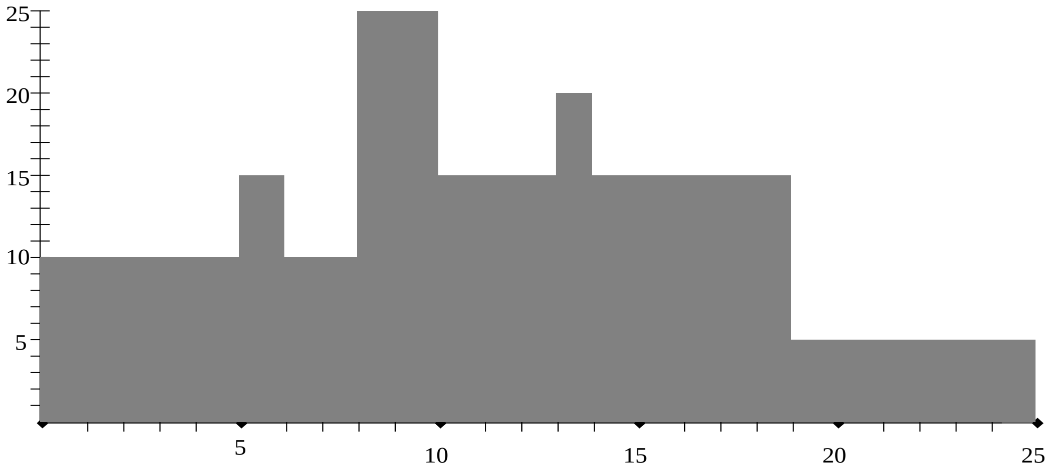
La carga de trabajo para la programación de tiempo más temprano mostrada en el siguiente diagrama de Gantt se recoge en la tabla presentada a continuación:



Días	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Carga	10	10	10	10	10	15	10	10	25	25	15	15	15	20	15	15	15	15	15	5	5	5	5	5	5

Gráficamente, esta carga se representa de la siguiente forma:



El objetivo de la nivelación de recursos será obtener una carga lo más uniforme posible a lo largo del tiempo. La programación ideal del proyecto sería que esa carga fuera siempre la misma, lo que en el ejemplo corresponde a un valor de 305 (que es la carga total) entre los días que dura el proyecto que son 25. Es decir, el ideal sería tener una carga constante diaria de 12.2 operarios. Sin embargo, resulta obvio que en este caso es imposible, de modo que un posible objetivo es minimizar la varianza de la programación resultante. Esta varianza puede ser calculada como la media de la suma de los cuadrados de las cargas menos la carga media al cuadrado, es decir, sumar los cuadrados de las cargas y dividir por el número de días y a ese valor restarle el cuadrado de la carga media (en el ejemplo, 12.2^2). Sin embargo, optimizar esta función u optimizar esta función sin la constante y sin dividir nos va a dar el mismo resultado, por lo que se puede plantear el problema como minimizar la suma de los cuadrados de las cargas diarias.

Para resolver este problema, plantear un modelo de programación matemática es el método más eficiente y capaz de asegurarnos que la solución alcanzada es la óptima. Sin embargo, también existen algunos algoritmos heurísticos que pueden dar una solución razonable en poco tiempo y sin tener que resolver un problema de optimización. A continuación, se muestra un algoritmo heurístico de este tipo debido a Burgess y Killebrew, que siendo uno de los pioneros en este tema también está considerado uno de los más eficientes.

II.1.7.1.1 Algoritmo Burgess-Killebrew

PASO 1:

Elegir la actividad no crítica con mayor o más avanzado instante más temprano de finalización. Retrasar esta actividad de unidad en unidad de tiempo hasta lo que le permita su holgura total, eligiendo como fecha de inicio aquélla que dé menor valor para la suma de los cuadrados de las cargas diarias.

Paso 2:

Repetir el paso 1 una por una para las actividades no críticas con mayor instante más temprano de finalización, pero que no hayan sido analizadas hasta el momento, hasta que todas las actividades no críticas hayan sido analizadas. En caso de empate, tomar primero la que tenga mayor holgura. (Atención a las relaciones de precedencia al entrar en retrasos en la parte de la holgura total que no es holgura libre).

Paso 3:

Repetir los pasos 1 y 2 hasta que no haya ninguna disminución en los cuadrados de las cargas.

Apliquémoslo a nuestro ejemplo.

Paso 1: La actividad no crítica que se selecciona en primer lugar es la actividad F. Las cargas de trabajo, si no se retrasa su inicio, y sus cuadrados serán

Días	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Carga	10	10	10	10	10	15	10	10	25	25	15	15	15	20	15
Carga^2	100	100	100	100	100	225	100	100	625	625	225	225	225	400	225

Días	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	SUMA
Carga	15	15	15	15	5	5	5	5	5	5	
Carga^2	225	225	225	225	25	25	25	25	25	25	4525

Si se retrasa 1 día estos valores resultan ser:

Días	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Carga	10	10	10	10	10	15	10	10	15	25	15	15	15	20	15
Carga^2	100	100	100	100	100	225	100	100	225	625	225	225	225	400	225

Días	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	SUMA
Carga	15	15	15	15	15	5	5	5	5	5	
Carga^2	225	225	225	225	225	25	25	25	25	25	4325

Con 2 días sería:

Días	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Carga	10	10	10	10	10	15	10	10	15	15	15	15	15	20	15
Carga^2	100	100	100	100	100	225	100	100	225	225	225	225	225	400	225

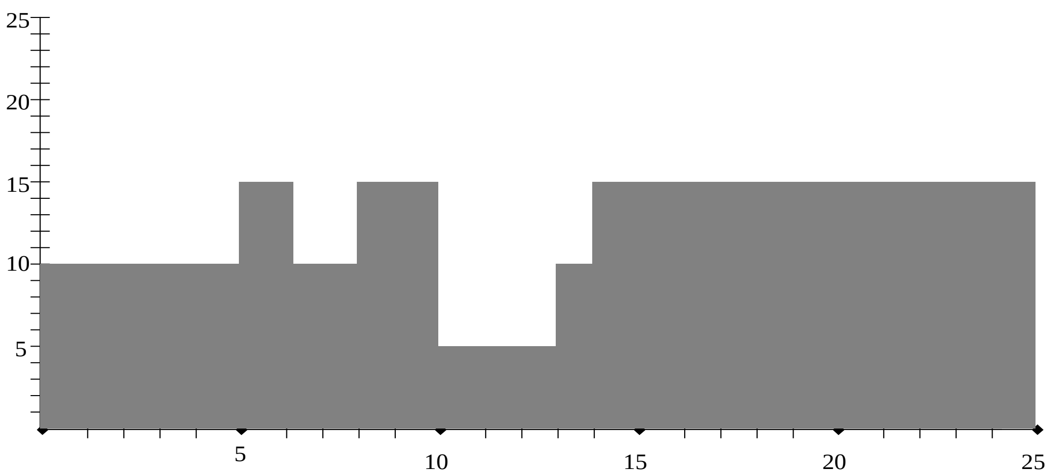
Días	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	SUMA
Carga	15	15	15	15	15	15	5	5	5	5	
Carga^2	225	225	225	225	225	225	25	25	25	25	4125

Si se retrasa 3 días el resultado de la suma de los cuadrados no varía, al igual que si se retrasa 4 o 5 días, siendo en todos los casos 4125. Si se retrasa 6 días, la tabla sería:

Días	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Carga	10	10	10	10	10	15	10	10	15	15	5	5	5	10	15
Carga^2	100	100	100	100	100	225	100	100	225	225	25	25	25	100	225

Días	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	SUMA
Carga	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	
Carga^2	225	225	225	225	225	225	225	225	225	225	4025

De todas las opciones se toma la última ya que es la que resulta en una suma de cuadrados menor. De este modo la carga de trabajo queda así:



PASO 2: Se repite el proceso, eligiendo ahora la siguiente actividad que sería la H. Esta actividad si se retrasa en una unidad daría la tabla:

Días	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Carga	10	10	10	10	10	15	10	10	15	15	5	5	5	5	20
Carga^2	100	100	100	100	100	225	100	100	225	225	25	25	25	25	400

Días	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	SUMA
Carga	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	
Carga^2	225	225	225	225	225	225	225	225	225	225	4125

El valor de la suma de cuadrados empeora y para retrasos mayores sería el mismo valor, luego no interesa retrasar esta actividad.

La siguiente actividad sería la E. Es fácil comprobar que moverla dentro de su holgura no modifica la suma de cuadrados, luego la dejamos como está.

A continuación sería la C. Si se retrasa esta actividad en una unidad la nueva tabla (teniendo en cuenta que habría que retrasar la E y la F, aunque esta última ya está retrasada) resulta ser:

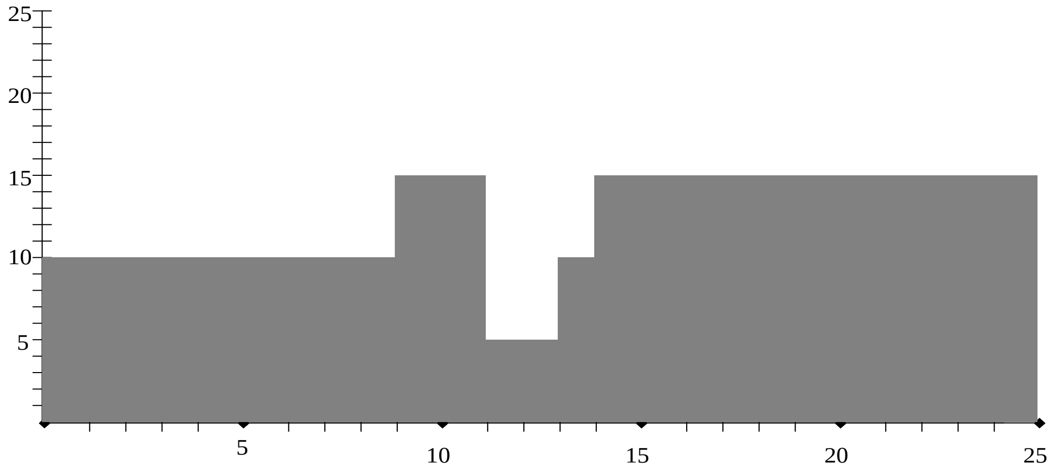
Días	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Carga	10	10	10	10	10	10	10	10	10	15	15	5	5	10	15
Carga^2	100	100	100	100	100	100	100	100	100	225	225	25	25	100	225

Días	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	SUMA
Carga	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	
Carga^2	225	225	225	225	225	225	225	225	225	225	3975

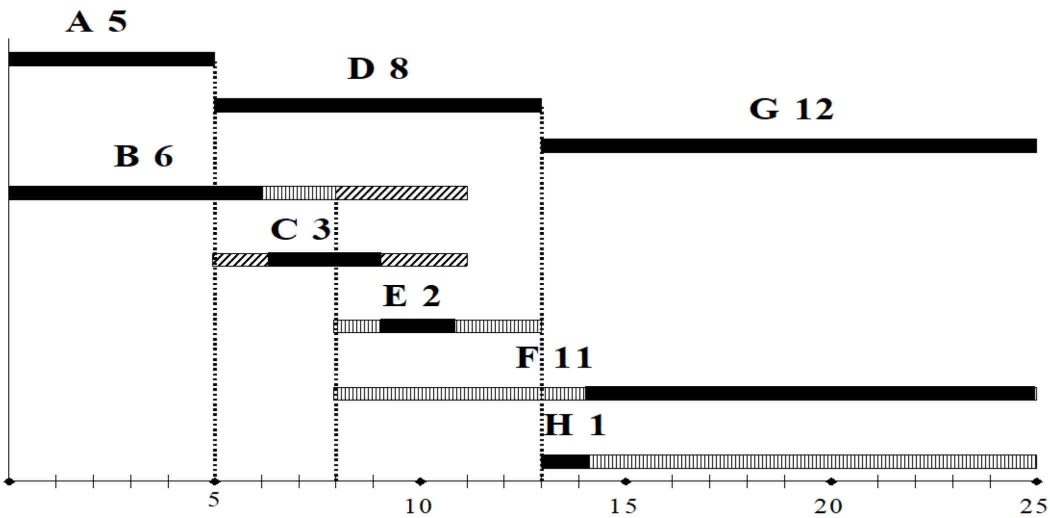
De modo, que interesa. Para retrasos mayores se obtienen sumas de cuadrados de igual valor de modo que nos quedamos con esta última programación.

La siguiente y última actividad de esta iteración, es la actividad B. Para esta actividad es fácil comprobar que cualquier retraso o produce la misma suma de cuadrados o empeora (con el cuidado de retrasar la actividad E cuando sea necesario).

De esta forma la tabla final de cargas de esta iteración que tendríamos es la de la tabla anterior que corresponde al gráfico siguiente:



El diagrama de Gantt asociado sería:



PASO 3: Hay que repetir el proceso anterior sobre esta nueva programación para ver si se puede reducir la suma de los cuadrados de las cargas. Es fácil comprobar que este resultado no es mejorable.

II.1.7.1.2 Nivelación de recursos mediante programación matemática

A continuación, se muestra un modelo de programación matemática para este mismo problema y la solución aplicada a este caso ejemplo. La primera ventaja de la programación matemática es que nos asegura que llegaremos al óptimo, pero además nos permite hacer modelos más flexibles pudiendo nivelar más de un recurso e incluso incorporar la opción de fraccionar las actividades.

Utilizaremos la siguiente notación:

j: actividades del proyecto

k: recursos a nivelar

p: periodos de tiempo (de 1 a la duración del proyecto)

d_j: duración de la actividad j
car_{jk}: carga del recurso k que utiliza la actividad j por unidad de tiempo
$G=(J,Q)$: grafo de precedencias, de modo que los nodos son las actividades y los arcos las relaciones de precedencia directas, es decir, existe un arco en Q si el nodo inicial corresponde a una actividad que ha de acabar antes que la correspondiente al nodo final.

Como variables vamos a considerar:

$$X_{jp} = \begin{cases} 1 & \text{si la actividad } j \text{ se realiza durante periodo } p \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Las restricciones serán:

a) Todas las actividades han de hacerse dentro del tiempo permitido.

$$\sum_p X_{jp} = d_j \qquad \forall j$$

b) Respetar las relaciones de precedencia del grafo G.
Estas prelaciones pueden representarse de muy diversas formas. Una de ellas es mediante el siguiente conjunto de restricciones

$$\sum_{p'<p} X_{j'p'} \geq d_{j'} X_{jp} \qquad \forall p, \forall (j', j) \in Q$$

c) Las actividades se han de hacer sin interrupción. Obsérvese que esta hipótesis está subyacente en todo lo visto anteriormente, pero dada la flexibilidad de la programación matemática, podría no incluirse en este caso. Así pues, para las actividades para las que sea un requisito imprescindible se añadirán las siguientes restricciones:

$$X_{jp} + X_{j\,p+d_j} \leq 1 \qquad \forall j, p$$

Por último, hay que expresar la función objetivo en términos de nuestras variables. Como se vio al principio de esta sección, el objetivo puede ser minimizar la suma de los cuadrados de las cargas, es decir,

$$\min \sum_p \sum_k \left(\sum_j car_{jk} X_{jp} \right)^2$$

El modelo así planteado resulta de programación cuadrática. Existiría una formulación lineal alternativa que minimiza las desviaciones al valor medio. Para ello habría que añadir unas variables de desviaciones:
N_{pk}: desviación inferior (por debajo) durante el periodo p al valor medio de la carga del recurso k

S_{pk}: desviación superior (por encima) durante el periodo p al valor medio de la carga del recurso k
y unas restricciones de desviaciones:

$$\sum_j car_{jk} X_{jp} + N_{pk} - S_{pk} = \overline{car}_k \quad \forall p,k$$

donde $\overline{car}_k$ representa la carga media del recurso k. Con esta formulación la función objetivo sería:

$$\min \sum_p \sum_k (N_{pk} + S_{pk})$$

Para el caso ejemplo que estamos tratando, la formulación en GAMS de este modelo se presenta a continuación.

```
$TITLE Nivelación de recursos

OPTION OPTCR = 0

SETS J / A, B, C, D, E, F, G, H /
     K / MOBRA /
     P / p1*p25 /
     preced(j,j) precedencia de j1 con respecto a j2
       / A.C, A.D, B.E, B.F, C.E, C.F, D.G, D.H, E.G /

ALIAS (jj,j), (pp,p)

PARAMETERS
d(j)      duración  / A 5, B 6, C 3, D 8, E 2, F 11, G 12, H 1 /
cuadrados cuadrados de las cargas

TABLE car(j,k) carga de recursos por actividad
   MOBRA
A    5
B    5
C    5
D    5
E   10
F   10
G    5
H    5

binary   variables X(j,p)
positive variables N(p,k), S(p,k)
         variables objetivo

EQUATIONS
dura(j)             duración total de actividad j
precedencias(p,j,j) relaciones de precedencia
nointerrumpir(j,p)  no interrumpir las actividades
desviaciones(k,p)   desviaciones a media de la carga del recurso
fobjetivo           función objetivo ;

dura(j)..                 sum(p, X(j,p)) =E= d(j) ;
precedencias(p,preced(jj,j))..
                          sum(pp $(ord(pp)<ord(p)), X(jj,pp)) =G= d(jj)*X(j,p) ;
nointerrumpir(j,p+d(j)).. X(j,p) + X(j,p+d(j)) =L= 1 ;
desviaciones(k,p)..       sum(j, car(j,k)*X(j,p)) + N(p,k) - S(p,k) =E=
                          sum(j, car(j,k)*d(j))/card(p) ;
fobjetivo..               objetivo =E= sum((p,k), N(p,k) + S(p,k)) ;

model NIVELACION /all/
solve NIVELACION using MIP minimizing objetivo ;

cuadrados = sum((p,k), sum(j, car(j,k)*X.L(j,p))**2)
```

Al resolver el problema del ejemplo con este modelo se obtiene una planificación alternativa a la obtenida mediante el algoritmo de Burgess-Killebrew, con igual suma de cuadrados.

II.1.7.2 Asignación de recursos limitados

El problema de asignar recursos limitados en un proyecto es un problema muy habitual en la vida real. Este problema se distingue del anterior fundamentalmente porque aquí hay un límite o disponibilidad de los recursos en cada periodo de tiempo, de modo que no se pueden programar tareas en un periodo de tiempo de forma que la suma de las cantidades del recurso que necesitan esas actividades sea mayor que la disponibilidad del recurso. En este caso, habrá tareas que aun no existiendo una relación de precedencia entre ellas, haya que decidir en qué orden se hacen para no superar esa disponibilidad. En el ejemplo de la sección anterior podría ser un problema si la disponibilidad del recurso mano de obra es de 10 operarios, entonces la planificación prevista no se podría llevar a cabo. En particular, las tareas F y G, aun no teniendo una relación de precedencia se ve que no podrán realizarse a la vez y habrá que decidir cuál se hace antes.

En este planteamiento, el uso de los recursos en cada periodo de tiempo no es un objetivo que se quiere nivelar, sino una restricción rígida que se tiene que cumplir. Por otra parte, lo que ahora será un objetivo es terminar el proyecto cuánto antes.

Para este problema de minimizar la duración del proyecto asignando los recursos de forma factible, de nuevo la programación matemática es la herramienta que nos asegura el óptimo y más flexibilidad nos puede dar. Sin embargo, como plantea cierta dificultad y, en ocasiones, los modelos resultan muy grandes en tamaño (y por lo tanto su resolución puede ser demasiado lenta), se han desarrollado algunas heurísticas con este fin. En este apartado, se verá primero una heurística y después algunos modelos de programación matemática.

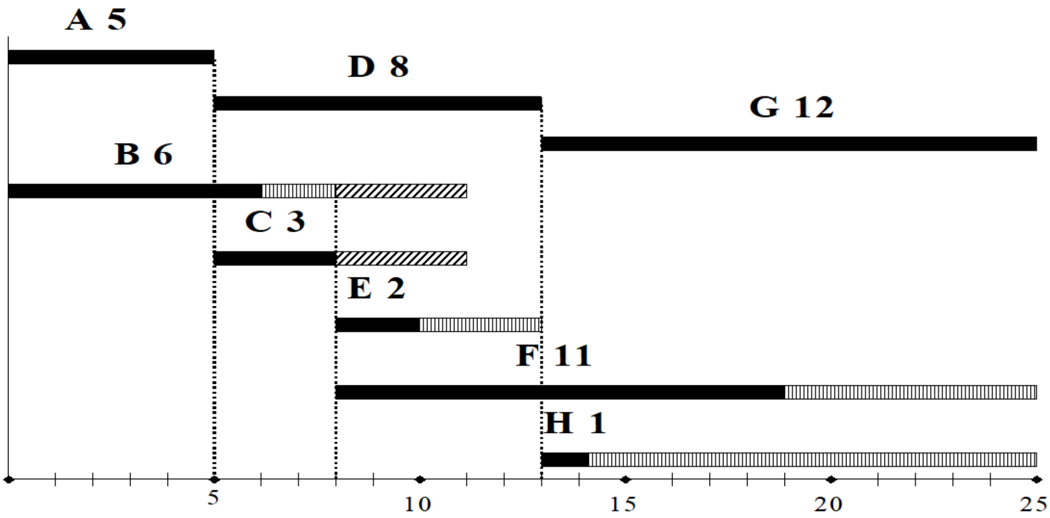
II.1.7.2.1 Algoritmo heurístico para el problema de asignación de recursos

El algoritmo que se va a presentar es un algoritmo sencillo, aunque hay otros más complejos que han sido implantados en diversos programas que son ampliamente utilizados (ALTAI, CORUA, RAMPS, RPSM, SPAR, etc.).

El algoritmo que se presenta, debido a Wiest y Levy, se basa en la idea de ir asignando los recursos periodo a periodo, empezando por el primero. La idea es programar las actividades que pueden realizarse en ese periodo, siempre que no se supere la disponibilidad de los recursos, dando prioridad a las que menor holgura tienen (las actividades críticas serán las de mayor prioridad).

Veamos el ejemplo de la sección anterior, suponiendo las mismas necesidades de mano de obra de cada actividad, pero con un límite de 10 operarios para realizar las tareas.

Partimos de la programación inicial resultante de aplicar el método del camino crítico, recogiendo la carga correspondiente a cada periodo.



Días	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Carga	10	10	10	10	10	15	10	10	25	25	15	15	15	20	15	15	15	15	15	5	5	5	5	5	5

El algoritmo trabajaría así:

Día 1: Se asigna A y B pues no superan la disponibilidad.
Día 2: Se asigna A y B pues no superan la disponibilidad.
Día 3: Se asigna A y B pues no superan la disponibilidad.
Día 4: Se asigna A y B pues no superan la disponibilidad.
Día 5: Se asigna A y B pues no superan la disponibilidad.
Día 6: Sigue B (ya iniciada) y se asigna D (no tiene holgura), siendo la carga de 10. Se retrasa el inicio de C.
Día 7: Sigue D y se asigna el inicio de C. La carga es de 10.
Día 8: Siguen D y C.
Día 9: Siguen D y C, con carga 10, luego, no pueden empezar ni E ni F (que estaba así programado).
Día 10: Sigue D, pero no se pueden programar ni E ni F ya que consumen 10 unidades de recurso que junto a las 5 de D superan la disponibilidad (G y H ni se consideran por las precedencias).
Día 11: Sigue D.
Día 12: Sigue D.
Día 13: Sigue D.
Día 14: D ha acabado y hay que programar la que menor holgura tenga. Sería G (es crítica), pero no puede empezar hasta que no se acabe E, en este

punto podemos asegurar que el proyecto no acabará en el tiempo mínimo que se había establecido. Siguiendo el algoritmo la que tiene menor holgura de las restantes es E, así pues se programa E que consume 10 unidades de recurso.

Día 15: Sigue E.

Día 16: Acabada E, se programa G ya que es la de menor holgura (crítica) consumiendo 5. F no puede programarse por consumir 10. H también se programa pues consume 5. Total: 10.

Día 17: Sigue sólo G, pues F consume 10 unidades que junto a las 5 de G superaría la disponibilidad.

Día 18: Sigue G.

Día 19: Sigue G.

Día 20: Sigue G.

Día 21: Sigue G.

Día 22: Sigue G.

Día 23: Sigue G.

Día 24: Sigue G.

Día 25: Sigue G.

Día 26: Sigue G.

Día 27: Sigue G y acaba.

Día 28: Empieza F, carga de 10.

Día 29: Sigue F.

Día 30: Sigue F.

Día 31: Sigue F.

Día 32: Sigue F.

Día 33: Sigue F.

Día 34: Sigue F.

Día 35: Sigue F.

Día 36: Sigue F.

Día 37: Sigue F.

Día 38: Acaba F y el proyecto.

Como se puede apreciar, el proyecto se ha alargado en 13 días al tener limitado el recurso de la mano de obra.

II.1.7.2.2 Modelos de programación matemática para el problema de asignación de recursos

Existen diversas formulaciones para este problema. Una de ellas sería plantear un modelo similar al de la sección de nivelación de recursos pero con variantes. En concreto, la duración del proyecto para a ser un objetivo en lugar de una restricción y el uso de los recursos una restricción en lugar de un objetivo.

La formulación podría ser la siguiente:

j: actividades del proyecto

k: recursos a nivelar

p: periodos de tiempo (de 1 a un valor que seguro no se vaya a superar; sin un análisis previo puede ser la suma de todas las duraciones, pero es mejor un pequeño análisis para reducir este índice; podría ser el resultado de la heurística de la sección anterior)

d_j: duración de la actividad j

car_{jk}: carga del recurso k que utiliza la actividad j por unidad de tiempo

$disp_k$: disponibilidad del recurso k

$G = (J, Q)$: grafo de precedencias, de modo que los nodos son las actividades y los arcos las relaciones de precedencia directas, es decir, existe un arco en Q si el nodo inicial corresponde a una actividad que ha de acabar antes que la correspondiente al nodo final.

Como variables vamos a considerar:

$$X_{jp} = \begin{cases} 1 & \text{si la actividad } j \text{ se realiza durante periodo } p \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Las restricciones serán:

a') Todas las actividades han de hacerse dentro del tiempo permitido

$$\sum_p X_{jp} = d_j \qquad \forall j$$

b') Respetar las relaciones de precedencia del grafo G.

$$\sum_{p'<p} X_{j'p'} \geq d_{j'} X_{jp} \qquad \forall p, \forall (j', j) \in Q$$

c') Las actividades se han de hacer sin interrupción.

$$X_{jp} + X_{j\,p+d_j} \leq 1 \qquad \forall j, p$$

d') No superar la disponibilidad de los recursos:

$$\sum_j car_{jk} X_{jp} \leq disp_k \qquad \forall p, k$$

Por último, hay que expresar la función objetivo en términos de nuestras variables. Una forma es ponderar los periodos de tiempo, de modo que se penalice la programación de una tarea en los periodos altos. Esto se puede hacer ponderando de menos a más las variables correspondientes a los periodos, es decir, el objetivo sería:

$$\min \sum_p \alpha_p (\sum_j X_{jp})$$

definiendo las ponderaciones de modo que cumplan $\alpha_p > \alpha_{p'}$ si $p > p'$. Esta formulación tiene un riesgo y es que como consideramos todas las tareas asignadas a un periodo, podemos penalizar más el tener 2 tareas en un periodo que alargar el proyecto. Para no correr este riesgo, se deberían incluir otras variables binarias que indiquen si en un periodo se programa alguna tarea o no, en lugar de contar el número de tareas. Las nuevas variables serían

$$Y_p = \begin{cases} 1 & \text{si se programa alguna actividad durante el periodo } p \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Con estas nuevas variables habría que añadir una restricción que las ligue con las anteriores

$$\sum_j X_{jp} \leq M Y_p \quad \forall p$$

siendo M una cota que no se pueda superar y la nueva función objetivo sería

$$\min \sum_p \alpha_p Y_p$$

La formulación en GAMS sería la siguiente:

```
$TITLE Asignación de recursos limitados

OPTION OPTCR = 0

SETS J / A, B, C, D, E, F, G, H /
     K / MOBRA /
     P / p1*p38 /
     preced(j,j) precedencia de j1 con respecto a j2
       / A.C, A.D, B.E, B.F, C.E, C.F, D.G, D.H, E.G /

ALIAS (jj,j), (pp,p)

PARAMETERS
d(j)    duración  / A 5, B 6, C 3, D 8, E 2, F 11, G 12, H 1 /
disp(k) disponibilidad de recursos / MOBRA 10 /
alfa(p) ponderación de los periodos ;

alfa(p) = ord(p)

TABLE car(j,k) carga de recursos por actividad
   MOBRA
A    5
B    5
C    5
D    5
E   10
F   10
G    5
H    5

binary variables X(j,p), Y(p)
       variables objetivo

EQUATIONS
dura(j)             duración total de actividad j
precedencias(p,j,j) relaciones de precedencia
nointerrumpir(j,p)  no interrumpir las actividades
disponibilidad(k,p) disponibilidad del recurso k en periodo p
relacionvar(p)      relación uso de periodo
fobjetivo           función objetivo ;
```

```
dura(j)..                 sum(p, X(j,p)) =E= d(j) ;
precedencias(p,preced(jj,j))..
                          sum(pp $(ord(pp)<ord(p)), X(jj,pp)) =G= d(jj)*X(j,p) ;
nointerrumpir(j,p+d(j)).. X(j,p) + X(j,p+d(j)) =L= 1 ;
disponibilidad(k,p)..     sum(j, car(j,k)*X(j,p)) =L= disp(k) ;
relacionvar(p)..          sum(j, X(j,p)) =L= card(j)*Y(p) ;
fobjetivo..               objetivo =E= sum(p, alfa(p)*Y(p));

model ASIGNACION /all/
solve ASIGNACION using MIP minimizing objetivo
```

Al resolver este ejemplo, se observa que no se puede obtener una duración inferior a los 38 días obtenidos con el método heurístico. Por otra parte, siendo un proyecto tan sencillo, el tiempo de resolución del modelo fue de 18 segundos con el optimizador CPLEX 9.0 en un PC a 1.1 GHz, lo que hace suponer que el tiempo para proyectos mayores puede ser inviable. Una reformulación del problema puede ser más eficiente.

A su vez, hay formulaciones alternativas cuando los recursos se consideran individualmente (por ejemplo, una máquina concreta) que resultan más eficientes que aplicar esta formulación.

II.1.8 Biblioteca de problemas

PROBLEMA 1

Considérese la lista (simplificada) de actividades que intervienen en la construcción de una casa.

Actividad	Descripción	Antecesores	Duración
A	Cimientos	–	5
B	Muros y Techos	A	8
C	Tejado	B	10
D	Cables Eléctricos	B	5
E	Ventanas	B	4
F	Revestimiento	E	6
G	Pintar	C, F	3

1. Dibujar la red del proyecto, determinar la ruta crítica, obtener la holgura total de cada actividad y la holgura libre de cada una.
2. Supóngase que se puede reducir la duración de cada actividad contratando más trabajadores. En la tabla siguiente se dan los costes diarios de la reducción de la duración de las actividades. Establecer el problema de programación lineal que hay que resolver para minimizar el coste total de la terminación del proyecto en 20 días.

Actividad	Coste diario por reducción (€/día)	Máxima reducción (días)
Cimientos	3000	2

Muros y Techos	1500	3
Tejado	2000	1
Cables Eléctricos	4000	2
Ventanas	2000	2
Revestimiento	3000	3
Pintar	4000	1

PROBLEMA 2

El promotor de un concierto de rock en una ciudad debe realizar las tareas que se dan a continuación antes de poder realizar el concierto.

Activ.	Descripción	Antec.	a (mín)	b (máx)	m (más prob.)
A	Encontrar lugar	–	2	4	3
B	Encontrar ingenieros	A	1	3	2
C	Contratar acto inic.	A	2	10	6
D	Anunciar radio y TV	C	1	3	2
E	Instalar venta billetes	A	1	5	3
F	Instal. eléctricas	B	2	4	3
G	Imprimir publicidad	C	3	7	5
H	Arreglar transporte	C	0.5	1.5	1
I	Ensayos	F, H	1	2	1.5
J	Detall. último minuto	I	1	3	2

Considérese que todas las duraciones tienen distribución beta.

1. Dibujar la red de proyecto.
2. Determinar la ruta crítica.
3. Si el promotor quiere tener una probabilidad de 0.99 de terminar la preparación para el 30 de junio, ¿cuándo tendrá que empezar con el trabajo para encontrar un lugar para el concierto?

PROBLEMA 3

Las actividades que configuran un proyecto, sus precedencias, así como sus duraciones más optimistas, pesimistas y más probables vienen recogidas en la siguiente tabla:

Actividad	Predecesores	Dur. optim.	Dur. más prob.	Dur. pesimista
A	–	2	2.5	6
B	–	1	1.5	5
C	–	2	5.5	6
D	A	3	4	5

E	A, B	3	5	7
F	A, B	7	9	11
G	C	5	6	7
H	D, E	10	10	10
I	F	9	9	9
J	F, G	7	8	9

1. Suponiendo que las distribuciones de las duraciones son todas de tipo beta, ¿para qué valor la probabilidad de que el proyecto esté terminado antes de esa fecha es de 0.8? (Nota: El valor de una N(0,1) que deja 0.8 de probabilidad a su izquierda es 0.84).
2. Dar las holguras libres y totales de todas las actividades, suponiendo duraciones medias.

PROBLEMA 4

Un proyecto consiste en las siguientes actividades, siendo posible realizar cada una de las mismas de tres formas diferentes con una duración y un coste distinto para cada una. Las actividades, sus predecesores y sus duraciones (en semanas) y costes se reflejan en la siguiente tabla:

Tareas	Antec.	D. normal	C. normal	D. acel.	C. acel.	D. urg.	C. urg.
A	–	9	3	7	4	5	6
B	A	8	3	6	4	4	5
C	A	7	2	5	3	3	5
D	C	10	3	8	4	6	6
E	B, D	12	4	10	5	7	7
F	D	10	4	8	5	6	6

1. Dar la duración mínima del proyecto y las holguras libre y total de las actividades con una duración normal de éstas.
2. Plantear un problema de programación lineal para resolver el problema de elegir cómo llevar a cabo cada actividad de entre las tres formas posibles y en qué instante, de modo que se minimice el coste, se respeten las precedencias, el proyecto no dure más de 25 semanas y teniendo en cuenta que si la actividad A se lleva a cabo de forma urgente la F también ha de llevarse a cabo de forma urgente.

PROBLEMA 5

Las estimaciones de la duración mínima, más probable y máxima de las distintas actividades que configuran un proyecto se dan en la siguiente tabla:

Actividad	A, B	C	D, G, I	E, H, J, K	F, L	M	N, O	P	Q	R, S	T	U
Mínima	2	1	3	1	2	1	4	5	7	4	5	1
Más probable	5	4	6	3	3	2	6	6	9	5	8	5
Máxima	7	5	9	5	4	3	10	7	10	6	9	6

Estas actividades están ligadas por las prelaciones siguientes:

A	Precede a D, C, F
B, C	Precede a E, G, H
D	Precede a I
E, F, I	Precede a L, J, K, M
G	Precede a J, K, M
H	Precede a K, M

J, L	Precede a N
K	Precede a O, P, Q, R
M	Precede a O
N, P	Precede a S
Q, O	Precede a U
R, S	Precede a T

1. Se pide dibujar un gráfico que represente las actividades y sus prelaciones, el tiempo medio mínimo en que puede ser acabado el proyecto y los eventos y actividades críticas, suponiendo distribuciones tipo beta.
2. Caracterizar la distribución de probabilidad del tiempo de realización del proyecto.

Problema 6

Un proyecto consta de las siguientes actividades cuyas duraciones mínimas, más probables y máximas se dan en la siguiente tabla:

Actividad	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Mínima	3	2	1	2	2	3	3	8	2
Más probable	6	6	3	3	3	5	5	9	3
Máxima	15	10	5	10	4	7	7	10	4

Las relaciones de precedencias entre tareas son las siguientes:

A, B	Preceden a C, D, E
C	Precede a F, G, H
D	Precede a G, H
E	Precede a H
F, G	Precede a I

a) Dibujar la red del proyecto, determinar la duración media mínima del proyecto, el camino crítico y las holguras de las actividades suponiendo duraciones medias y distribuciones beta.
b) ¿Qué duración debería decirse para tener una probabilidad de 0.8 de acabar el proyecto a tiempo?

PROBLEMA 7

Un proyecto de investigación consta de una serie de actividades, que se recogen en la tabla siguiente, junto con sus relaciones y sus duraciones en meses.

Actividad	Descripción	Antecesoras	Duración
A	Asignación de tareas	–	1
B	Búsqueda bibliográfica	A	6
C	Diseño de experimentos	A	5
D	Programación de software	A	5
E	Análisis de resultados anteriores	B	3
F	Realización de experimentos	B, C	1
G	Análisis de resultados	F	1
H	Simulación informática	B, C, D	4
I	Validación de resultados	E, G	1
J	Redacción del informe final	H, I	2

¿Cuál será la fecha más temprana en que se podrá entregar el informe final? Si en el momento de comenzar alguna de las tareas, el investigador que la debe realizar causa baja, ¿cuánto tiempo se podrá retrasar cada actividad, para buscar otro investigador, sin que esto afecte a la fecha de entrega del proyecto? ¿Sería necesario modificar en algún caso la planificación del resto de las actividades?

PROBLEMA 8

Una red de actividades tiene las siguientes características

Actividad	Precede directamente a	Duración
A	D, E, F	5
B	E, F	7
C	E, F, G	9
D	H, K	10
E	H, K	4
F	I, L	5

G	I, L	N(7,2)
H	J	6
I	J	2
J		4
K		N(11,3)
L		8

Como se ve la actividad G tiene una duración aleatoria normal de media 7 y desviación típica 2, en tanto que la de K, también normal, tiene media 11 y desviación típica 3.

a. Proponer un modelo de programación lineal entera que minimice el tiempo medio de ejecución del proyecto, suponiendo que las actividades F y G utilizan un mismo recurso y, por lo tanto, no pueden ejecutarse simultáneamente.
b. Suponiendo ahora que no existe la limitación del recurso único y utilizando el método PERT, determinar el camino crítico para la duración media.
c. Bajo las hipótesis del método PERT, ¿qué duración habría que dar para tener una probabilidad del 97.5 % de acabar a tiempo?
d. Suponiendo independencia de las duraciones, pero nada más ¿qué duración habría que dar para tener esa probabilidad del 97'5% de acabar a tiempo? Compara también los resultados del PERT y el caso exacto si K tuviera desviación típica 1, y en el caso en que fuera determinista (duración de K 11).

PROBLEMA 9

En la siguiente tabla se presentan cinco actividades, sus precedencias y duraciones.

Actividad	Precede a	Duración [días]
A	D	10
B	C y E	Uniforme [4,8]
C	D	5
D	–	Triangular [4,6,8]
E	–	5

Los tres parámetros de la distribución triangular son el mínimo, la moda y el máximo.

Se pide:

1. Dibujar el grafo de la red con las actividades y sus duraciones.
2. Suponiendo duraciones medias de las actividades determinar la duración mínima del proyecto, los márgenes (holguras) libres y totales.
3. Describir un procedimiento que permita simular la duración del proyecto teniendo en cuenta las duraciones aleatorias de algunas actividades. Realizar la simulación utilizando estas series de números aleatorios:
   Serie 1: 0.34, 0.56, 0.18, 0.86, 0.05
   Serie 2: 0.53, 0.07, 0.62, 0.59, 0.32
4. Determinar la probabilidad de que el camino crítico obtenido para las duraciones medias sea el camino crítico en la ejecución del proyecto.
5. Suponer ahora que D tiene distribución Uniforme en [4,8]. Dar la distribución exacta de la duración del proyecto, y comparar los resultados de la probabilidad de que el proyecto se extienda más de 17, 18, 19, 20 y 21 días según el método PERT y según la distribución exacta.
6. Dada la siguiente formulación de programación lineal para el problema con duraciones medias, y la correspondiente tabla óptima, responder a las siguientes cuestiones.

$$
\begin{aligned}
&\min TOT \\
&T_D - T_A \geq 10 \\
&T_C - T_B \geq 6 \\
&T_E - T_B \geq 6 \\
&T_D - T_C \geq 5 \\
&TOT - T_D \geq 6 \\
&TOT - T_E \geq 5 \\
&T_i, TOT \geq 0
\end{aligned}
$$

	T_A	T_B	T_C	T_D	T_E	TOT	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	
$c_j - z_j$	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	−17
T_D	0	−1	0	1	0	0	0	−1	0	−1	0	0	11
T_C	0	−1	1	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	6
T_E	0	−1	0	0	1	0	0	0	−1	0	0	0	6
S_1	1	−1	0	0	0	0	1	−1	0	−1	0	0	1
TOT	0	−1	0	0	0	1	0	−1	0	−1	−1	0	17
S_6	0	0	0	0	0	0	0	−1	1	−1	−1	1	6

- Interpretar los resultados, incluyendo el significado de todas las variables de la tabla, el valor y significado de las duales, y los costes reducidos de las originales
- ¿Existen soluciones alternativas? Justificar, y, en su caso, dar esas soluciones

II.1.9 Resultados de la biblioteca de problemas

RESULTADO DEL PROBLEMA 1

1. Rutas críticas hay dos: A-B-E-F-G y A-B-C-G. Duración = 26. La única actividad que no es crítica es D, cuyas holguras total y libre coinciden, siendo 8.
2.

$$\min 3000r_A + 1500r_B + 2000r_C + 4000r_D + 2000r_E + 3000r_F + 4000r_G$$
$$x_B \geq x_A + 5 - r_A$$
$$x_C \geq x_B + 8 - r_B$$
$$x_D \geq x_B + 8 - r_B$$
$$x_E \geq x_B + 8 - r_B$$
$$x_F \geq x_E + 4 - r_E$$
$$x_G \geq x_C + 10 - r_C$$
$$x_G \geq x_F + 6 - r_F$$
$$x_G + 3 - r_G = x_A + 20$$
$$0 \leq r_A \leq 2;\ 0 \leq r_B \leq 3;\ 0 \leq r_C \leq 1;\ 0 \leq r_D \leq 2;\ 0 \leq r_E \leq 2;\ 0 \leq r_F \leq 3;\ 0 \leq r_G \leq 1$$
$$x_i \geq 0 \quad \forall i$$

Solución: reducir la duración de A en 2, la de B en 3, la de C en 1 y la de E en 1. Siendo la programación: A empieza en 0, B en 3, C en 8, D en 8, E en 8, F en 11 y G en 17. Se logra con un coste de 14.500.

RESULTADO DEL PROBLEMA 2

1.
2. Ruta crítica: A-C-G, con duración esperada de 14 días. Su varianza es de 2.3333.
3. Sabiendo que Z(0.01)=2.32, es decir, el valor de una distribución normal de media 0 y desviación 1 que deja a la derecha una probabilidad de 0.01 es 2.32, se deduce que debe empezar 17.54 días antes, redondeando, debe comenzar 18 días antes.

RESULTADO DEL PROBLEMA 3

2. Para 21.8.
3. A-FF=TF=0; B-FF=TF=1; C-FF=0, TF=2; D-FF=1, TF=4; E-FF=0, TF=3; F-FF=TF=0; G-FF=1, TF=2; H-FF=TF=3; I-FF=TF=0; J-FF=TF=1.

RESULTADO DEL PROBLEMA 4

1. Duración = 38. Holguras: A-FF=TF=0; B-FF=TF=9; C-FF=TF=0; D-FF=TF=0; E-FF=TF=0; F-FF=TF=2.
2.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 3X_{A1}+3X_{B1}+2X_{C1}+3X_{D1}+4X_{E1}+4X_{F1}+ \\
& +4X_{A2}+4X_{B2}+3X_{C2}+4X_{D2}+5X_{E2}+5X_{F2}+ \\
& +6X_{A3}+5X_{B3}+5X_{C3}+6X_{D3}+7X_{E3}+6X_{F3} \\
& \sum_{i=1}^{3} X_{ji}=1 \quad \forall j \in \{A,B,C,D,E,F\} \\
& T_B \geq T_A+9X_{A1}+7X_{A2}+5X_{A3} \\
& T_C \geq T_A+9X_{A1}+7X_{A2}+5X_{A3} \\
& T_D \geq T_C+7X_{C1}+5X_{C2}+3X_{C3} \\
& T_E \geq T_B+8X_{B1}+6X_{B2}+4X_{B3} \\
& T_E \geq T_D+10X_{D1}+8X_{D2}+6X_{D3} \\
& T_F \geq T_D+10X_{D1}+8X_{D2}+6X_{D3} \\
& T_E+12X_{E1}+10X_{E2}+7X_{E3} \leq 25 \\
& T_F+10X_{F1}+8X_{F2}+6X_{F3} \leq 25 \\
& X_{A3} \leq X_{F3} \\
& X_{ji} \in \{0,1\}, T_j \geq 0 \quad \forall i=1,2,3 \quad \forall j \in \{A,B,C,D,E,F\}
\end{aligned}
$$

RESULTADO DEL PROBLEMA 5

Hay dos caminos críticos: A-D-I-L-N-S-T y A-D-I-J-N-S-T. La esperanza de la duración con ambos es 38.8333 y la varianza en un caso es 4 + 25/36 y en el otro 4 + 13/36.

RESULTADO DEL PROBLEMA 6

1. El camino crítico es A-D-H, con una duración media de 20 y una varianza de 5.888. Las holguras son: B(FF=0 ó 1, TF= 1), C(0,1), E(1,1), F(1,2), G(0,1), I(1,1).
2. La duración sería: 20 + $0.84\sqrt{5.8888} = 22.04$.

Resultado del problema 8

b. Variables:

CP : duración media del proyecto

T_i : instante de inicio de la actividad i

$$X_{FG} = \begin{cases} 1 & \text{si F se hace antes que G} \\ 0 & \text{en otro caso (G antes que F)} \end{cases}$$

Datos:

d_i : duración de la actividad i

Precedencias: $(i,i') \in P$

Modelo:

$$\min CP$$

$$T_{i'} \geq T_i + d_i \quad \forall (i,i') \in P$$

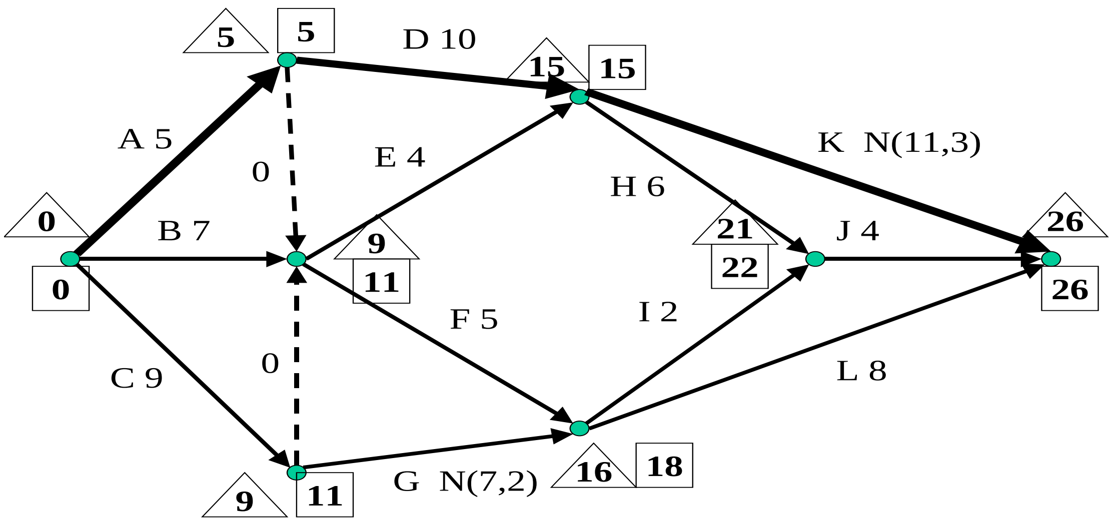
$$CP \geq T_i + d_i \quad \forall i \quad o \quad i = J,K,L$$

$$T_F \geq T_G + d_G - mX_{FG}$$

$$T_G \geq T_F + d_F - m(1 - X_{FG})$$

$$CP, T_i \geq 0,\ X_{FG} \in \{0,1\}$$

b.



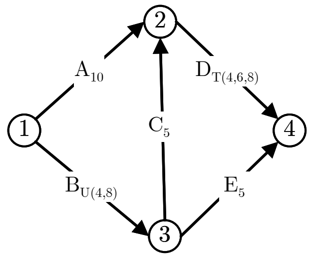
c. El camino crítico está formado por las actividades A, D y K.

$$E[CP] = E[D_A] + E[D_D] + E[D_K] = 5 + 10 + 11 = 26$$
$$V[CP] = \sigma_A^2 + \sigma_D^2 + \sigma_K^2 = 0 + 0 + 9 = 9$$
$$CP \overset{d}{=} N(26,3) \quad 0.025 \geq P(CP \geq f) = P(Z \geq \frac{f-26}{3})$$
$$\frac{f-26}{3} = 1.96 \quad f = 26 + 3 \cdot 1.96 \approx 32$$

d.

RESULTADO DEL PROBLEMA 9

1.



2. Las duraciones medias son

Actividad	Duración media [días]
A	10
B	6
C	5
D	6
E	5

Nodo	Instante más temprano t_i	Instante más tardío T_i
1	$t_1 = 0$	$T_1 = \min\{T_2 - d_A, T_3 - d_B\} =$ $\max\{11-10, 6-6\} = 0$
3	$t_3 = t_1 + d_B = 0 + 6 = 6$	$T_3 = \min\{T_4 - d_E, T_2 - d_C\} =$ $\max\{17-5, 11-5\} = 6$
2	$t_2 = \max\{t_1 + d_A, t_3 + d_C\} =$ $\max\{0+10, 6+5\} = 11$	$T_2 = T_4 - d_D = 17 - 6 = 11$
4	$t_2 = \max\{t_3 + d_E, t_2 + d_D\} =$ $\max\{6+5, 11+6\} = 17$	$T_4 = 17$

Actividad	Holguras libre y total [días]
A	1

B	0
C	0
D	0
E	6

La duración mínima de proyecto es de 17 días. El camino crítico es B-C-D.

3. Para hacer la simulación de la duración real del proyecto hay que tomar muestras de las duraciones aleatorias. Las muestras de la distribución uniforme se pueden obtener mediante la transformada inversa. Las muestras de la triangular se pueden obtener mediante la transformada inversa o mediante aceptación-rechazo simple.

   Con la primera serie se calculan las muestras de la duración de B $d_B = (8-4)u + 4$. Con la segunda las de la duración de D. Las funciones de densidad y distribución son

$$f(d_D) = \begin{cases} 0.25d_D - 1 & 4 \leq d_D \leq 6 \\ -0.25d_D + 2 & 6 \leq d_D \leq 8 \end{cases}$$

$$F(d_D) = \begin{cases} 0.125d_D^2 - d_D + 2 & 4 \leq d_D \leq 6 \\ -0.125d_D^2 + 2d_D - 7 & 6 \leq d_D \leq 8 \end{cases}$$

   Por el método de la transformada inversa (TI)

$$\begin{cases} 0.125d_D^2 - d_D + 2 = u & u \leq 0.5 \\ -0.125d_D^2 + 2d_D - 7 = u & u \geq 0.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_D = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 0.125(2-u)}}{0.25} & u \leq 0.5 \\ d_D = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 0.125(7+u)}}{-0.25} & u \geq 0.5 \end{cases}$$

   Por el método de aceptación rechazo simple (AR). Con el primer número aleatorio obtengo una muestra de la duración $d_D = (8-4)u_1 + 4 = 4 \cdot 0.53 + 4 = 6.12$. Con el segundo una muestra de la altura $y = 0.5 \cdot 0.07 = 0.035$. Como $0.035 = y \leq f(d_D) = -0.25 \cdot 6.12 + 2 = 0.47$ acepto la muestra. Otra muestra $d_D = (8-4)u_1 + 4 = 4 \cdot 0.62 + 4 = 6.48$, valor de la ordenada $y = 0.5 \cdot 0.59 = 0.295$, Como $0.295 = y \leq f(d_D) = -0.25 \cdot 6.58 + 2 = 0.38$ acepto la muestra.

Núms.	Duración B [días]	Núms.	Duración D [días] (TI)	Duración D [días] (AR)

0.34	5.36	0.53	6.06	6.12
0.56	6.24	0.07	4.75	-
0.18	4.72	0.62	6.26	6.48
0.86	7.44	0.59	6.19	-
0.05	4.2	0.32	5.6	

4. Para que el camino crítico calculado para duraciones medias siga siendo crítico es necesario que la duración total de B más C sea superior a la de A. Esta probabilidad viene dada por la condición de que

$$P(d_B + d_C > d_A) = P(d_B > d_A - d_C) = P(d_B > 5) =$$
$$= 1 - P(d_B \leq 5) = 1 - F(5) = 1 - 0.25 \cdot 5 + 1 = 0.75$$

5.

6. Valores variables originales
   - T_i: A y B empiezan en 0, C en 6, D en 11 y E en 6.
   - TOT : La duración del proyecto es 17 días.

   Función objetivo: 17 días de proyecto
   Variables de holgura:
   - S1=1 D se demora 1 día en empezar desde que acaba A (puesto que A no precede a nadie más, se puede ver como holgura de A)
   - S6= 6 desde que acaba E hasta el final del proyecto hay 6 días (holgura de E que no precede a nadie)
   - Resto holguras es cero, todo empieza cuando acaba lo precedente y D determina el final del proyecto.

   Variables duales:
   - Y1= 0: Si A aumenta su duración no afecta al proyecto (no crítica)
   - Y2= 1: Si B aumenta su duración en 1 se retrasa el proyecto en 1, al retrasar a C (B crítica)
   - Y3= 0: Si B aumenta su duración en 1 no afecta al proyecto por retrasar a E (sí por C)
   - Y4= 1: Si C aumenta su duración en 1 se retrasa el proyecto (C crítica) y D también lo será.
   - Y5= 1: Si D aumenta su duración en 1 se retrasa el proyecto en 1 (crítica)
   - Y6= 0: Si E aumenta su duración no afecta al proyecto

   CoStes reducidos de no básicas:

- De A: 0, aumentar el instante de inicio de A no afecta al proyecto (no crítica)
- De B: 1, aumentar en 1 el instante de inicio de B retrasa el proyecto en 1 (crítica)

Otras soluciones básicas:

	T_A	T_B	T_C	T_D	T_E	TOT	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	
$c_j - z_j$	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	-17
T_D	0	-1	0	1	0	0	0	-1	0	-1	0	0	11
T_C	0	-1	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	6
T_E	0	-1	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	6
T_A	1	-1	0	0	0	0	1	-1	0	-1	0	0	1
TOT	0	-1	0	0	0	1	0	-1	0	-1	-1	0	17
S_6	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	-1	-1	1	6

	T_A	T_B	T_C	T_D	T_E	TOT	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	
$c_j - z_j$	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	-17
T_D	0	-1	0	1	0	0	0	-1	0	-1	0	0	11
T_C	0	-1	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	6
T_E	0	-1	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	12
S_1	1	-1	0	0	0	0	1	-1	0	-1	0	0	1
TOT	0	-1	0	0	0	1	0	-1	0	-1	-1	0	17
S_3	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	-1	-1	1	6

	T_A	T_B	T_C	T_D	T_E	TOT	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	
$c_j - z_j$	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	-17
T_D	0	-1	0	1	0	0	0	-1	0	-1	0	0	11
T_C	0	-1	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	6
T_E	0	-1	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	12
T_A	1	-1	0	0	0	0	1	-1	0	-1	0	0	1
TOT	0	-1	0	0	0	1	0	-1	0	-1	-1	0	17
S_3	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	-1	-1	1	6

Todas las posibles soluciones son:

$$\begin{pmatrix} T_A \\ T_B \\ T_C \\ T_D \\ T_E \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 + \lambda_4 \\ 0 \\ 6 \\ 11 \\ 6 + 6(\lambda_3 + \lambda_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 6 \\ 11 \\ 6 + \theta \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \quad \lambda_i \geq 0 \quad o \quad \mu, \theta \in [0,1]$$

II.2 Modelos de secuenciación en máquinas

En un negocio o industria es habitual que se establezcan tareas que hay que desarrollar existiendo un determinado orden total o parcial para llevarlas a cabo. En esta sección se van a tratar problemas en los que hay unas tareas que llevar a cabo con determinados recursos limitados. La terminología utilizada proviene del ámbito de la producción denominándose trabajos (*jobs*) a las tareas y máquinas a los recursos. Aunque el contexto en que se utilicen no sea productivo, en general, es fácil hacer la traslación a este lenguaje.

El planteamiento del problema que se va a ver recibe el nombre de problema *general job-shop*, no se hace la traducción de este término al castellano por no existir un claro convenio al respecto. En este planteamiento se supone que existen n *trabajos* $\{J_1,...,J_n\}$ que han de ser procesados por m *máquinas* $\{M_1,...,M_m\}$ [1]. Se supone que cada trabajo ha de pasar por cada máquina una y sólo una vez, denominándose *operación* al proceso de un trabajo en una máquina y denotándose por o_{ij} la operación de procesar el trabajo i en la máquina j.

Se denominan *restricciones tecnológicas* a condiciones que puedan ser puestas en el orden en que los trabajos deben ser procesados en las máquinas. En el caso general, se supone que cada trabajo tiene su propio orden de proceso sin que exista relación con el orden de cualquier otro trabajo. Sin embargo, existe un caso particular de gran importancia en el que el orden es el mismo para todos los trabajos, denominándose a este problema *flow-shop* ya que es como si los trabajos fluyeran entre las máquinas en el mismo orden.

Cada operación o_{ij} requiere un cierto tiempo p_{ij} para ser desarrollada, denominado *tiempo de proceso.* Por convenio, en este tiempo se incluye cualquier tiempo requerido para ajustar la máquina para este trabajo o tiempo de transporte hasta la máquina. Este tiempo se supone fijo y conocido con antelación. Igualmente, todos los datos se suponen deterministas y conocidos por el planificador.

También se supone que las máquinas están siempre disponibles, aunque no se supondrá lo mismo para los trabajos, es decir, se considerará que los trabajos pueden no estar disponibles para ser procesados al principio del periodo de planificación. Se denominará *release date* o *ready time* y se denotará por r_i al instante en el que el trabajo J_i puede empezar a ser procesado o el pedido puede empezar a ser preparado.

[1] Algunos autores se refieren a las máquinas como procesadores, especialmente cuando se trata este tipo de problemas en planificación de trabajos informáticos.

El problema general *job-shop* consiste en encontrar una secuencia en la que los trabajos pasan por las máquinas para ser procesados, tal que

a) Asumiendo ciertas hipótesis, sea una planificación compatible con las restricciones tecnológicas, es decir, sea factible, y
b) Sea óptima respecto a algún criterio de desarrollo.

Las hipótesis, que supone el problema *job-shop* y que se verán a continuación, hacen que no todos los problemas de programación y secuenciación puedan ser modelados como un *job-shop* ni resueltos con las técnicas desarrolladas para este tipo de problemas. Sin embargo, son una buena introducción a los conceptos manejados en la teoría de secuenciación y a las técnicas utilizadas con un desarrollo coherente, de modo que además de su valor en sí mismo, permiten seguir con facilidad las teorías desarrolladas en otros contextos.

Empezaremos comentando cuáles son las hipótesis del *job-shop* y después se comentarán las distintas medidas de desarrollo y los posibles objetivos asociados a éstas que se pueden plantear en un problema de estas características, así como las relaciones entre ellas.

II.2.1 Hipótesis del *job-shop*

1. Cada trabajo es una entidad y, por lo tanto, no pueden procesarse dos operaciones de un mismo trabajo simultáneamente.
2. No existe interrupción, es decir, cada operación una vez empezada debe ser completada antes de que otra operación pueda empezar en esa máquina.
3. Cada trabajo incluye una y sólo una operación en cada máquina, por lo que todos los trabajos incluyen exactamente m operaciones.
4. No se permite cancelación, es decir, no puede cancelarse una operación ya iniciada.
5. Los tiempos de proceso son independientes de la secuencia seguida, lo que excluye tiempos de ajuste en las máquinas diferentes según la secuencia de trabajos considerada o tiempos de transporte entre máquinas.
6. Se permite inventario intraproceso, es decir, los trabajos pueden esperar hasta que la máquina siguiente esté libre. No se considera por tanto que los trabajos deban ser continuos de operación en operación.
7. Hay sólo una máquina de cada tipo, no pudiendo elegir entre varias máquinas para desarrollar una operación
8. Las máquinas pueden estar inactivas.
9. Las máquinas no pueden procesar más de una operación a la vez.

10. Las máquinas están disponibles durante todo el periodo de planificación.
11. Las restricciones tecnológicas son conocidas e inmutables.
12. No existe aleatoriedad, es decir, son conocidos y fijos todos los datos que intervienen: número de trabajos, número de máquinas, tiempos de proceso, etc.

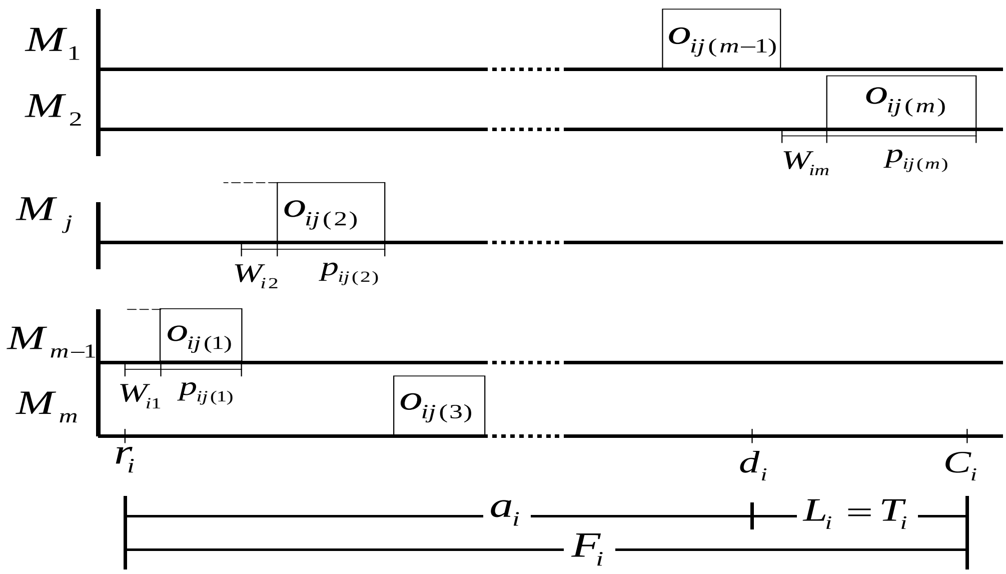
II.2.2 Medidas de desarrollo y objetivos

En general, no es fácil definir el objetivo en un problema de secuenciación y planificación ya que suelen ser numerosos y a menudo conflictivos. Ya en 1966 Mellor enumeró 27 metas u objetivos que pueden plantearse, a lo que se añade la dificultad de modelar matemáticamente estos objetivos para poder encontrar una solución que los optimice. A continuación se muestran algunas definiciones y notaciones sobre los datos (en minúsculas) y medidas (denotadas por mayúsculas) que se pueden hacer sobre la planificación antes de hablar de los objetivos que se pueden plantear sobre ellas:

- p_{ij} tiempo de proceso de la operación o_{ij}
- r_i instante en que el trabajo J_i puede iniciar su proceso o que el pedido puede empezar a ser preparado (*release date* o *ready time*)
- d_i instante en que el trabajo J_i debería ser terminado (*due date*) o fecha de entrega
- a_i amplitud del periodo de planificación del trabajo J_i o plazo de entrega; $a_i = d_i - r_i$
- W_{ik} tiempo de espera del trabajo J_i antes de realizarse su k-ésima operación (que no implica que sea en la máquina k)
- W_i tiempo total de espera del trabajo J_i; claramente, $W_i = \sum_{k=1}^{m} W_{ik}$
- C_i instante de finalización o cumplimentación de J_i; se verifica $C_i = r_i + \sum_{k=1}^{m} (W_{ik} + p_{ij(k)})$, donde $j(k)$ denota la máquina j donde se realiza la k-ésima operación en la que el trabajo J_i debe procesarse
- F_i tiempo de proceso o tiempo de cumplimentación o tiempo de suministro (*flow time*), es decir, el tiempo que pasa el trabajo J_i desde que empieza a ser procesado hasta que es acabado, luego, se cumple $F_i = C_i - r_i$
- L_i desviación de J_i respecto a su instante límite de acabado, es decir, $L_i = C_i - d_i$. Si el trabajo acaba antes de la fecha límite este valor será negativo, mientras que si se retrasa, será positivo. Es habitual que se planteen variables diferentes y no negativas para el retraso y para el adelanto, lo que se muestra a continuación.
- T_i demora en la entrega del trabajo J_i: $T_i = \max\{L_i, 0\}$

- E_i adelanto en la entrega del trabajo J_i: $E_i = \max\{-L_i, 0\}$

En el siguiente diagrama de Gantt se representan estas cantidades para un único trabajo y m máquinas donde el orden determinado por las restricciones tecnológicas es $(M_{m-1}, M_j, M_m, ..., M_1, M_2)$ y para una determinada programación:



Respecto a las medidas, sólo se ha hablado de las medidas de un trabajo, pero cuando se lleva a cabo una planificación hay que referirse a medidas incluyendo todos los trabajos. Habitualmente para agregar las medidas de todos los trabajos se recurre a utilizar la media de las medidas consideradas (por ejemplo, la media de los tiempos de proceso) o el máximo de éstas (por ejemplo, el máximo de los instantes de los trabajos). Se denotará por $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ a la media, así por ejemplo la media de los tiempos de proceso será $\overline{F} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F_i$ y por $X_{\max} = \max\{X_1, ..., X_n\}$ al máximo, de modo que el máximo de los instantes de finalización se denotará y calculará como $C_{\max} = \max\{C_1, ..., C_n\}$.

Por último, se define el tiempo inactivo (*idle*) de la máquina j como $I_j = C_{\max} - \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$.

Veamos ahora los criterios más utilizados para dirigir la búsqueda de una planificación. Estos criterios los vamos a agrupar según a qué tipo de medidas afecten.

II.2.2.1 Criterios basados en los instantes de finalización

Los principales criterios en esta categoría son $F_{\max}$, $C_{\max}$, $\overline{F}$ y $\overline{C}$. Minimizar el primero supone minimizar el máximo tiempo de proceso, que esencialmente supone que el coste de la programación está relacionado directamente con su trabajo más largo. Minimizar $C_{\max}$, el máximo instante de finalización, supone que el coste depende del tiempo total dedicado a la producción completa de todos los artículos; a este valor se le llama *tiempo total de producción*, utilizándose también la palabra anglosajona *make-span* para referirse a este valor. Obsérvese que ambos valores son iguales si los instantes en que pueden empezarse los trabajos (*release dates*) son cero. Minimizar $\overline{F}$ implica que el coste se considera directamente relacionado con el tiempo medio de procesar un trabajo. Se puede comprobar que es equivalente minimizar $\overline{F}$ a minimizar $\overline{C}$, lo cual no es cierto para $F_{\max}$ y $C_{\max}$, debido a que las propiedades del máximo y de la media son diferentes.

Algunos autores utilizan las medidas medias pero ponderadas, de modo que los trabajos llevan distinto peso según una importancia relativa dentro del proceso completo.

II.2.2.2 Criterios basados en las fechas de entrega

Es muy habitual que el coste de una programación de trabajos esté relacionado con lo que se desvía del objetivo de entregar en plazo los trabajos y, por lo tanto, las medidas que se utilizan son $\overline{L}$, $L_{\max}$, $\overline{T}$ y T_{max}. Minimizar los dos primeros es apropiado cuando existe una recompensa por entregar un trabajo antes de tiempo, mientras que si ésta no existe sino que sólo existe penalización en caso de demora, lo apropiado es utilizar alguna de las últimas.

Hay casos en los que la penalización en que se incurre por terminar un trabajo fuera de plazo no es proporcional a la cantidad, de modo que es lo mismo entregarlo un minuto tarde que un siglo. Una situación de este tipo puede darse por ejemplo si un vuelo es programado para aterrizar después del tiempo máximo para el que dispone de combustible, las consecuencias son igual de catastróficas tanto si es un minuto o una hora lo que se pasa de ese instante. Por lo tanto, en ocasiones más que plantear un objetivo que sea función de la cantidad en que se sobrepasa la fecha de entrega, se busca minimizar el *número de trabajos fuera de plazo*, siendo entonces preferible, por ejemplo, retrasar un trabajo mucho y mantener los demás en plazo que retrasar todos un poquito y que se salgan muchos de plazo.

II.2.2.3 Criterios basados en el nivel de inventario y el coste de utilización

En este caso lo que habitualmente se desea minimizar es el número medio de trabajos en espera o el número medio de trabajos sin terminar. Sin embargo, cuando se habla de número medio es la media en el tiempo, es decir, en el periodo de planificación, valores que se calculan a partir de las variables $N_W(t)$ número de trabajos esperando entre máquinas en el instante t y $N_U(t)$ número de trabajos no acabados o en proceso en el instante t. El cálculo de las medias en tal caso será $\overline{N}_W(t) = \frac{1}{C_{\max}} \int_0^{C_{\max}} N_W(t)\, dt$ y $\overline{N}_U(t) = \frac{1}{C_{\max}} \int_0^{C_{\max}} N_U(t)\, dt$, respectivamente. Ambas medidas están directamente relacionadas con el coste de inventario inherente al proceso.

Otras medidas que se utilizan en este contexto son minimizar el número medio de trabajos acabados con el fin de reducir el coste de inventario de productos acabados o maximizar el número medio de trabajos que realmente están siendo procesados con el fin de maximizar el uso eficiente de las máquinas. En este último sentido y mirando más desde el punto de vista de las máquinas, es posible plantear como objetivos minimizar la media o el máximo tiempo inactivo de las máquinas.

II.2.2.4 Relaciones entre las medidas de desarrollo

Entre todas las medidas que se han nombrado anteriormente existen relaciones por las cuales unas son equivalentes a otras, es decir, que las secuencias óptimas son las mismas si se plantea un objetivo o se plantea otro equivalente. Estas equivalencias permiten reformular un problema pudiendo cambiar un objetivo por otro más sencillo o cuya formulación matemática tenga mejores propiedades a la hora de resolverlo. A continuación, se recogen algunas relaciones entre las medidas consideradas:

a) Son equivalentes las medidas medias $\overline{C}$, $\overline{F}$, $\overline{W}$ y $\overline{L}$.
b) No son equivalentes las medidas análogas a las anteriores pero para el máximo, excepto en casos particulares. Dos de estos casos son:
   - b.1) Si los instantes de posible inicio (*release dates*) son 0 para todos los trabajos, son equivalentes $C_{\max}$ y $F_{\max}$.
   - b.2) Si todos los trabajos tienen una misma fecha de entrega son equivalentes $C_{\max}$ y $L_{\max}$.
c) Una programación que es óptima según el criterio $L_{\max}$ también lo es para $T_{\max}$, sin embargo al revés no tiene por qué ser cierto. En cualquier caso, nos permite resolver el problema con el criterio $L_{\max}$, cuya formulación y resolución son más sencillas que las del otro criterio.
d) Son equivalentes $C_{\max}$, $\overline{N}_p$ (el número medio de trabajos siendo realmente procesados, no en espera) e $\overline{I}$ (desocupación media de las máquinas, obtenida según la siguiente expresión $\overline{I} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} I_j = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(C_{\max} - \sum_{i=1}^{n} p_{ij}))$.

e) Son equivalentes las medidas $\overline{N}_U$ y $\overline{C}\,/\,C_{\max}$.
f) Son equivalentes las medidas $\overline{N}_W$ y $\overline{W}\,/\,C_{\max}$.
g) Por último, para problemas de secuenciación en una sola máquina son equivalentes $\overline{C}$, $\overline{F}$, $\overline{W}$, $\overline{L}$, $\overline{N}_U$ y $\overline{N}_W$.

II.2.3 Problemas con una máquina

Los problemas más sencillos que se pueden plantear son los problemas que involucran a una única máquina. Estos problemas son más habituales de lo que se pueda pensar en un primer momento: desde la secuenciación de programas a ser procesados por un ordenador con un único procesador, a operaciones en una sección de un hospital en la que se dispone de un único quirófano o equipo quirúrgico o secciones dentro de un proceso productivo en que hay una única máquina para desarrollar una determinada tarea.

En lo que se refiere a estos problemas vamos a suponer que todas las *release dates* son cero, es decir, se supone para este tipo de problemas que $r_i = 0\ \forall i$ y una sola máquina, luego $m = 1$.

El primer resultado que se tiene para este tipo de problemas y fácil de inferir, es que para cualquiera de los objetivos que se plantee que sea regular, es decir, que sea no decreciente con los instantes de cumplimentación (la mayoría de los considerados), existe una planificación óptima en la que la máquina no está inactiva en ningún momento.

Otro resultado que se tiene para problemas con una máquina es que aunque se ha supuesto que no hay interrupción, esto no supone ninguna restricción ya que en estos problemas permitir la interrupción no puede mejorar ninguna planificación que sea óptima respecto a ninguno de los criterios regulares vistos.

Estos dos resultados unidos tienen como consecuencia que la solución buscada sea una *programación permutación* de los trabajos, es decir, el problema se reduce a buscar una permutación de los trabajos que minimice el objetivo planteado. Dado que la solución es una permutación, es evidente que para cualquier permutación $C_{\max}$ y $F_{\max}$ son los mismos, por lo que estos objetivos no serán considerados en problemas de una máquina con *release dates* cero en todos los trabajos.

A continuación, se presentan las permutaciones que minimizan algunos de los criterios vistos:

a) *Minimización del tiempo medio de proceso* $\overline{F}$. La permutación que resuelve este problema es la denominada *programación de tiempo de proceso creciente*, es decir, la que ordena los trabajos por su tiempo de proceso de menor a mayor. Dada la equivalencia entre objetivos, esta programación es también la óptima para los objetivos $\overline{C}$, $\overline{W}$, $\overline{L}$, $\overline{N}_U$, $\overline{N}_W$.

En el caso en el que los tiempos de inicio posibles de los trabajos no fueran todos iguales (existe al menos un $r_i \neq 0$), la programación que minimiza el tiempo medio de proceso es la que *programación en tiempo posible de finalización creciente*, es decir, para cada trabajo se calcula su tiempo posible de inicio más tiempo de proceso $(r_i + p_i)$ y se ordenan en orden creciente.

b) *Minimización de la máxima desviación respecto a sus fechas de entrega* $L_{\max}$. En este caso la permutación que proporciona el óptimo es la denominada *programación de fecha de entrega creciente*, es decir, aquélla que ordena los trabajos por su fecha de entrega en forma creciente. También ésta será la solución para el objetivo $T_{\max}$.

c) *Minimización del número de trabajos demorados*: para ello se plantea el siguiente algoritmo debido a Moore y Hodgson, del que se puede asegurar que encuentra la secuencia óptima:

1. Obtener la programación de fecha de entrega creciente.
2. Encontrar el primer trabajo que está demorado respecto a su fecha de entrega en la secuencia actual $J_{i(l)}$. Si no existe, ir al paso 4.
3. Encontrar el trabajo de mayor tiempo de proceso secuenciado antes de $J_{i(l)}$, incluído $J_{i(l)}$, y quitarlo de la secuencia. Volver al paso 2 con la secuencia actual (que tiene un trabajo menos que la anterior).
4. Formar una secuencia óptima con la secuencia que se tiene actual y añadiendo al final todos los trabajos que han sido rechazados en las iteraciones anteriores en cualquier orden.

   Esos trabajos rechazados serán los únicos demorados (se entregarán fuera de plazo).

Otro elemento que suele aparecer en problemas con una máquina es la existencia de *condiciones de precedencia* entre los trabajos, algunas veces debidas a la importancia relativa que puedan tener éstos. Es decir, es posible que se planteen condiciones de orden, de modo que un trabajo no pueda empezar mientras otro no ha sido completado. No deben ser confundidas estas condiciones con las restricciones tecnológicas; las restricciones tecnológicas imponen condiciones de orden a las operaciones de un trabajo, mientras que las condiciones de precedencia restringen la secuencia de operaciones de distintos trabajos.

Añadir estas condiciones, aunque reduce las permutaciones que son factibles, en general, supone una complicación en la formulación más que una ventaja, por ello se suele evitar, si es posible, reformulando las fechas de entrega de los trabajos más que añadiendo restricciones. Sin embargo no siempre es posible modelarlo haciendo tal reformulación, por lo que se han desarrollado algoritmos específicos para algunos de estos problemas. En esta introducción sólo vamos a ver un caso particular, para otros casos es posible plantear un problema de programación matemática formulando las correspondientes restricciones o buscar algoritmos específicos[2].

El único caso particular que vamos a considerar es el de las cadenas de productos. En este caso se supone que los trabajos están divididos formando una partición en K cadenas de $n_1,\ldots,n_K$ trabajos respectivamente. Estas cadenas son secuencias de trabajos con un orden determinado y que han de ser procesados todos inmediatamente uno detrás de otro. Así pues, el problema es cómo secuenciar las cadenas de trabajos, quedando entonces determinada la secuencia completa de trabajos. En este caso se define el tiempo de proceso de una cadena como la suma de los trabajos que la forman (si p_{ij} es el tiempo de proceso del j-ésimo trabajo de la cadena i-ésima sería $p_i' = \sum_{j=1}^{n_i} p_{ij}$). La secuencia óptima de cadenas de trabajos para minimizar el tiempo medio de proceso será aquella en la que se secuencian las cadenas ordenándolas en forma creciente por el tiempo medio de proceso por trabajo, es decir, por el cociente del tiempo de proceso de la cadena y su tamaño (número de trabajos que incluye). Matemáticamente sería la secuencia tal que $\frac{p_{i(1)}'}{n_{i(1)}} \leq \frac{p_{i(2)}'}{n_{i(2)}} \leq \cdots \leq \frac{p_{i(K)}'}{n_{i(K)}}$.

Por último, comentar que para otros objetivos o precedencias, la programación entera y la programación dinámica se presentan como las herramientas más adecuadas. En particular la programación dinámica puede obtener programaciones óptimas con cálculos muy inferiores a lo que sería una enumeración exhaustiva. A continuación se muestra un ejemplo resuelto mediante programación dinámica con recursividad hacia atrás, aunque estos problemas también admiten de forma inmediata la recursividad hacia delante.

En este ejemplo se supone que hay cuatro trabajos cuyos tiempos de proceso y fechas de entrega se recogen a continuación. El objetivo es minimizar el retraso medio, es decir, minimizar $\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} \max\left\{C_i - d_i, 0\right\}$, que es una función no lineal del tiempo de cumplimentación, lo que hace recomendable usar la programación dinámica más que la programación no lineal entera.

[2] Pueden verse la mayoría de ellos en French, S. (1982) *Sequencing and Scheduling. An Introduction to the Mathematics of the Job-Shop*. Ellis-Horwood.

Trabajos	J_1	J_2	J_3	J_4
Tiempos proceso	8	6	10	7
Fecha entrega	14	9	16	16

Vamos a considerar como etapas las fases de agregar un trabajo más a la secuencia, así la etapa 4 será programar el cuarto trabajo, la etapa 3 será programar el tercer trabajo y así sucesivamente. En cuanto a las decisiones, en cada etapa hay que decidir qué trabajo hay que programar en esa posición y para saber cuáles son posibles y evaluar la función objetivo con el coste de esa etapa y el coste futuro, la información que es necesaria de etapas anteriores, los estados, son los trabajos que ya han sido programados. Obsérvese que no es necesario saber en qué orden, pero sí qué trabajos. A continuación se muestran las tablas de las diferentes etapas con recursividad hacia atrás, siendo el objetivo $\sum_{i=1}^{4} \max\{C_i - d_i, 0\}$, ya que se dividirá por 4 al final para facilitar los cálculos.

Etapa 4

Decisiones / Estados	J_1^4	J_2^4	J_3^4	J_4^4	Óptimo	Objetivo
J_1, J_2, J_3	–	–	–	31–16	J_4^4	15
J_1, J_2, J_4	–	–	31–16	–	J_3^4	15
J_1, J_3, J_4	–	31–9	–	–	J_2^4	22
J_2, J_3, J_4	31–14	–	–	–	J_1^4	17

Etapa 3

Decisiones / Estados	J_1^3	J_2^3	J_3^3	J_4^3	Óptimo	Objetivo
J_1, J_2	–	–	24–16+15	21–16+15	J_4^3	20
J_1, J_3	–	24–9+15	–	25–16+22	J_2^3	30
J_1, J_4	–	21–9+15	25–16+22	–	J_2^3	27
J_2, J_3	24–14+15	–	–	23–16+17	J_4^3	24
J_2, J_4	21–14+15	–	23–16+17	–	J_1^3	22
J_3, J_4	25–14+22	23–9+17	–	–	J_2^3	31

Etapa 2

Decisiones / Estados	J_1^2	J_2^2	J_3^2	J_4^2	Óptimo	Objetivo
J_1	–	14–9+20	18–16+30	0+27	J_2^2	25
J_2	14–14+20	–	16–16+24	0+22	J_1^2	20

J_3	18–14+30	16–9+24	–	17–16+31	J_2^2	31
J_4	15–14+27	13–9+22	17–16+31	–	J_2^2	26

Etapa 1

Decisiones	J_1^1	J_2^1	J_3^1	J_4^1	Óptimo	Objetivo
	0+25	0+20	0+31	0+26	J_2^1	20

Deshaciendo el camino hacia atrás, vemos que la secuencia óptima es $(J_2^1, J_1^2, J_4^3, J_3^4)$, con un retraso medio de 20/4=5 unidades de tiempo.

II.2.4 Problemas con varias máquinas

En esta sección vamos a ver primero algunos algoritmos constructivos para ciertos problemas con varias máquinas. Después veremos técnicas más generales aplicadas a otros problemas con estas características.

Para los algoritmos constructivos supondremos que todas las *release dates* son iguales, es decir, $r_i = 0, \; i = 1,\ldots,n$.

El primer caso que vamos a considerar es el problema *flow-shop* con dos máquinas y minimizando el máximo tiempo de cumplimentación, es decir, un problema con n trabajos, 2 máquinas, en el que todos los trabajos han de pasar primero por la máquina 1 y luego por la 2 y en que se desea minimizar el máximo tiempo de cumplimentación $C_{\max}$. Para este tipo de problemas, tanto para dos máquinas como para tres, se puede demostrar que podemos limitarnos a buscar una secuencia óptima entre las programaciones permutación, es decir, que existe una programación óptima en la que el orden en el que cada máquina procesa los trabajos es el mismo para todas las máquinas.

Para obtener la secuencia óptima se definen $a_i = p_{i1}$ (tiempo de proceso del trabajo J_i en la máquina 1) y $b_i = p_{i2}$ (tiempo de proceso del trabajo J_i en la máquina 2). El algoritmo, conocido como algoritmo de Johnson de tipo constructivo y que asegura que se alcanza el óptimo, es el siguiente:

1. Sea $k = 1$ y $l = n$.
2. Sea la lista actual de trabajos no programados $= \{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$.
3. Encontrar el menor valor entre los tiempos a_i y b_i de los trabajos no programados.
4. Si ese menor valor se alcanza en un a_i, es decir, es el tiempo de proceso del trabajo J_i en la primera máquina, entonces hacer:
   4.1. Programar J_i en la k-ésima posición de la secuencia de procesos
   4.2. Borrar J_i de la lista actual de trabajos no procesados
   4.3. Incrementar k a $k+1$

4.4. Ir al paso 6

5. Si ese menor valor se alcanza para un b_i, es decir, es el tiempo de proceso del trabajo J_i en la segunda máquina, entonces hacer:
   5.1. Programar J_i en la l-ésima posición de la secuencia de procesos
   5.2. Borrar J_i de la lista actual de trabajos no procesados
   5.3. Reducir l a $l-1$
   5.4. Ir al paso 6
6. Si hay trabajos todavía sin programar volver al paso 3. En otro caso, parar.

Este algoritmo puede ser extendido a un caso más general, en el que no sólo se relaje la condición de que todos los trabajos pasen en el mismo orden por las dos máquinas, sino, además se puede aplicar si hay trabajos que no tienen que pasar por ambas máquinas sino sólo por una de ellas. El objetivo es el mismo, minimizar el tiempo máximo de cumplimentación. Así el algoritmo de Johnson para dos máquinas extendido supone que existen cuatro tipos de trabajos: los trabajos de tipo A que son los que tienen que ser procesados sólo por la máquina M_1; los trabajos de tipo B que son los que únicamente han de pasar por la máquina M_2; los trabajos tipo C que han de pasar primero por la máquina M_1 y luego por la M_2; y los trabajos tipo D que han de pasar por ambas máquinas pero en el orden inverso a los anteriores.

En estas condiciones para construir una programación óptima de los trabajos se debe seguir el siguiente procedimiento:

1. Secuenciar los trabajos tipo A en cualquier orden para dar la secuencia S_A.
2. Secuenciar los trabajos tipo B en cualquier orden para dar la secuencia S_B.
3. Secuenciar los trabajos tipo C según el algoritmo de Johnson anterior, visto para el problema *flow-shop*, para dar la secuencia S_C.
4. Secuenciar los trabajos tipo D según el algoritmo de Johnson anterior, visto para el problema *flow-shop*, intercambiando los papeles de las máquinas, para dar la secuencia S_D.
5. Obtener la programación óptima:

Máquina	Orden de proceso
M_1	(S_C, S_A, S_D)
M_2	(S_D, S_B, S_C)

No vamos a entrar a ver más algoritmos constructivos, aunque existen algunos para problemas similares a los anteriores. Realmente para problemas que difieran sustancialmente de lo que se ha visto, la programación dinámica en algunos casos y la programación entera en la mayoría de ellos se presentan como la alternativa más razonable. A continuación se presenta un ejemplo sencillo por su tamaño, aunque no por la dificultad para modelarlo y una formulación para él mediante programación lineal entera mixta de tipo general que es fácilmente aplicable para casos más complejos.

Sea un problema con dos trabajos y 3 máquinas, cuyo objetivo es minimizar la máxima demora. Los tiempos de proceso, las fechas de entrega y las condiciones tecnológicas se muestran en la tabla siguiente.

	M_1	M_2	M_3	*Due dates*	Orden
J_1	10	15	18	50	$M_1,\ M_2,\ M_3$
J_2	20	12	15	55	$M_3,\ M_2,\ M_1$

Para este problema definimos inicialmente las siguientes variables de decisión:

T_{ij}: instante en que se inicia el proceso del trabajo J_i en la máquina M_j

A partir de ellas modelaremos el problema añadiendo las variables auxiliares que sean necesarias. Veamos las condiciones:

- Restricciones tecnológicas: se establece el orden en cada trabajo. La forma general sería: Si el trabajo J_i ha de ser procesado antes en la máquina M_j que en la $M_{j'}$, $T_{ij} + p_{ij} \leq T_{ij'}$. Así se tiene,

$$T_{11} + 10 \leq T_{12} \quad T_{12} + 15 \leq T_{13}$$
$$T_{23} + 15 \leq T_{22} \quad T_{22} + 12 \leq T_{21}$$

  (Obsérvese que por transitividad sólo es necesario poner los órdenes inmediatos)

- No simultaneidad en una máquina: dados dos trabajos y una máquina o se procesa primero uno y luego el otro o viceversa. Es decir, en forma general, dados los trabajos J_i y J_k y la máquina M_j, se tiene la disyunción: $T_{ij} + p_{ij} \leq T_{kj}$ o $T_{kj} + p_{kj} \leq T_{ij}$. Esta disyunción se puede formular como conjunción mediante variables binarias auxiliares que representen

$$\delta_{ikj} = \begin{cases} 1 & \text{si } J_i \text{ se procesa después de } J_k \text{ en la máquina } M_j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

  como

$$T_{kj} + p_{kj} - T_{ij} \leq M(1 - \delta_{ikj})$$
$$T_{ij} + p_{ij} - T_{kj} \leq M\delta_{ikj}$$

  siendo M una cota para el valor del lado izquierdo de las restricciones.

Así para nuestro caso particular las restricciones serán:

M_1	M_2	M_3
$T_{11}+10-T_{21} \leq M(1-\delta_{211})$	$T_{12}+15-T_{22} \leq M(1-\delta_{212})$	$T_{13}+18-T_{23} \leq M(1-\delta_{213})$
$T_{21}+20-T_{11} \leq M\delta_{211}$	$T_{22}+12-T_{12} \leq M\delta_{212}$	$T_{23}+15-T_{13} \leq M\delta_{213}$

- Función objetivo: minimizar la máxima demora. Para ello se introducen unas variables auxiliares que representen la demora en cada trabajo y otra que acote todas ellas y que será minimizada. Sea T_i la demora del trabajo J_i. Como se desean obtener estos valores y minimizar su máximo, para cada trabajo se toma la última operación de su proceso completo (determinada por las restricciones tecnológicas) y que denotaremos por $m(i)$ y entonces podemos formular las demoras como $T_{im(i)} + p_{im(i)} - T_i \leq d_i$ y para acotar todas ellas, $T_i \leq T_{\max}$, minimizando este último valor. Así para nuestro caso particular, tendríamos:

$$\begin{aligned}
&\min T_{\max} \\
&T_1 \leq T_{\max} \\
&T_2 \leq T_{\max} \\
&T_{13}+18-T_1 \leq 50 \\
&T_{21}+20-T_2 \leq 55
\end{aligned}$$

- Carácter de las variables. Hay que definir el carácter no negativo de las variables y el binario de las auxiliares definidas:

$$T_{ij} \geq 0, \quad T_i \geq 0, \quad \delta_{ikj} \in \{0,1\}$$

Por último, comentar que todos los algoritmos y técnicas planteadas son de optimización, es decir, se garantiza que alcanzan la programación óptima según el criterio considerado. Sin embargo, dado que la formulación mediante programación entera o no lineal entera es la única alternativa en algunos de los casos y dada la dificultad para resolver ésta en cuanto el tamaño de un problema es elevado (lo cual puede ocurrir incluso con no muchas máquinas y trabajos) también existen algoritmos de tipo heurístico para resolverlos, aunque no se incluirán en este capítulo introductorio.

II.2.5 Biblioteca de problemas

PROBLEMA 1

Encontrar la forma óptima de secuenciar las siguientes 8 tareas en una máquina para minimizar el tiempo medio de cumplimentación.

Tarea	1	2	3	4	5	6	7	8
Tiempo de proceso	10	2	4	7	3	1	3	2

PROBLEMA 2

Encontrar la forma óptima de secuenciar las siguientes 7 tareas en una máquina para minimizar la desviación máxima respecto a la fecha de entrega y dar para esta secuencia la máxima desviación en que se incurre.

Tarea	1	2	3	4	5	6	7
Tiempo de proceso	29	13	31	20	7	3	9
Fecha de entrega	80	20	67	48	100	30	50

PROBLEMA 3

Encontrar la forma óptima de secuenciar las siguientes 10 tareas en una máquina para minimizar el número de trabajos demorados.

Tarea	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tiempo de proceso	5	3	1	2	4	4	2	1	1	4
Fecha de entrega	19	16	25	3	8	14	31	23	2	15

PROBLEMA 4

Supóngase que la ESA tiene una única lanzadera con la que situar en órbita estaciones espaciales. Se desea situar 8 estaciones, cada una de ellas específicamente diseñada para desarrollar ciertas observaciones astronómicas. Cada estación debe ser situada en posición y construida antes de cierta fecha o si no, será inútil. Dados los datos siguientes, ¿en qué orden deberían ser situadas las estaciones? Suponer que se empieza el 1 de enero de 2002.

Estación	Tiempo de montaje en lanzadera, lanzarlmiento y puesta en funcionamiento	Debe estar en órbita el 1º de
1	1 año y 2 meses	Abril 2006
2	7 meses	Enero 2003
3	11 meses	Agosto 2003
4	3 meses	Marzo 2006
5	1 año y 8 meses	Septiembre 2005
6	4 meses	Agosto 2002
7	7 meses	Diciembre 2002
8	1 año y 2 meses	Junio 2004

Problema 5

Minimizar el tiempo medio de cumplimentación de los 12 trabajos siguientes si hay dos cadenas de trabajos que hay que respetar (3, 6, 9, 12) y (1, 2, 4, 8, 10).

Trabajo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Tiempo de proceso	2	1	5	6	3	4	1	2	5	6	1	6

Problema 6

Minimizar el *make-span* para el siguiente problema *flow-shop* con 8 trabajos y 2 máquinas.

	Máquinas	
Trabajos	1	2
1	2	10
2	3	7
3	8	2
4	7	5
5	9	3
6	4	4
7	1	9
8	6	8

Problema 7

Encontrar una secuencia que minimice el tiempo máximo de cumplimentación para los siguientes 14 trabajos y dos máquinas. Representarlo en un diagrama de Gantt.

	Orden de proceso y tiempo			
Trabajo	Primera máquina		Segunda máquina	
1	1	8	2	7
2	2	12	1	14
3	1	13	2	9
4	1	6	–	–
5	1	7	2	13
6	2	9	1	8
7	2	12	–	–
8	1	4	2	10

9	1	10	2	6
10	2	10	1	11
11	2	6	–	–
12	2	8	–	–
13	1	5	2	13
14	1	7	–	–

PROBLEMA 8

Encontrar la secuencia que minimiza el retraso o demora media con que los trabajos son entregados, con los siguientes datos:

Tarea	1	2	3	4
Tiempo de proceso	9	12	7	14
Fecha de entrega	15	19	23	21

PROBLEMA 9

1. Formular un problema de programación matemática para encontrar la programación que minimiza el tiempo máximo de cumplimentación de los siguientes tres trabajos, si no hay restricciones tecnológicas, es decir, no hay un orden establecido entre las operaciones de cada trabajo. Los tiempos de proceso se dan a continuación

Trabajos	Máquina 1	Máquina 2	Máquina 3
1	6	8	3
2	9	5	2
3	4	8	17

2. Hacer lo mismo pero si además se supone que las máquinas han de procesar todos los trabajos en el mismo orden

PROBLEMA 10

Seis alcaldes de pueblo acuden juntos a la capital de la provincia para visitar las delegaciones de Industria y Hacienda, según la siguiente tabla.

Alcalde	1ª Delegación	2ª Delegación
Villamochuelos	Hacienda (60 min)	Industria (25 min)
Valdealpargatas	Industria (20 min)	Hacienda (40 min)
Cañaveras	Hacienda (70 min)	
Montaraces	Industria (25 min)	Hacienda (60 min)

Conejera de Arriba	Industria (30 min)	
Belloteros de Abajo	Hacienda (52 min)	Industria (30 min)

¿Cómo se organizan para volver cuanto antes a sus pueblos, sabiendo que los alcaldes no pueden ser atendidos simultáneamente en la misma Delegación y que han de volver juntos? ¿Cuánto tiempo pasarán en la capital? ¿Cuándo podrán los funcionarios de las respectivas delegaciones irse a comer por haber acabado de atenderles? Representar en un diagrama la secuencia sobre cada una de las delegaciones.

II.2.6 Resultados de la biblioteca de problemas

Resultado del problema 1

La secuencia óptima es (6, 8, 2, 5, 7, 3, 4, 1) con un tiempo medio de cumplimentación de 97/8.

Resultado del problema 2

La secuencia es (2, 6, 4, 7, 3, 1, 5), siendo la máxima desviación 25.

Resultado del problema 3

Una secuencia óptima es (9, 4, 5, 6, 2, 1, 8, 3, 7, 10) en la que sólo hay un trabajo demorado.

Resultado del problema 4

Una secuencia óptima es (6, 7, 8, 4, 1) con los trabajos 2, 3 y 5 cancelados.

Resultado del problema 5

Una secuencia óptima es (7, 11, 5, 1, 2, 4, 8, 10, 3, 6, 9, 12)

Resultado del problema 6

La secuencia óptima es (7, 1, 2, 6, 8, 4, 5, 3) con *make-span* 49.

Resultado del problema 7

Una programación óptima es: en la máquina 1 (8, 13, 5, 3, 1, 9, 4, 14, 10, 2, 6) y en la máquina 2 (10, 2, 6, 7, 11, 12, 8, 13, 5, 3, 1, 9) con máximo tiempo de cumplimentación 115.

Resultado del problema 8

Una secuencia es (1, 2, 3, 4) con retraso medio de 7 (Programación dinámica).

RESULTADO DEL PROBLEMA 9

El tiempo mínimo de cumplimentación es 29.

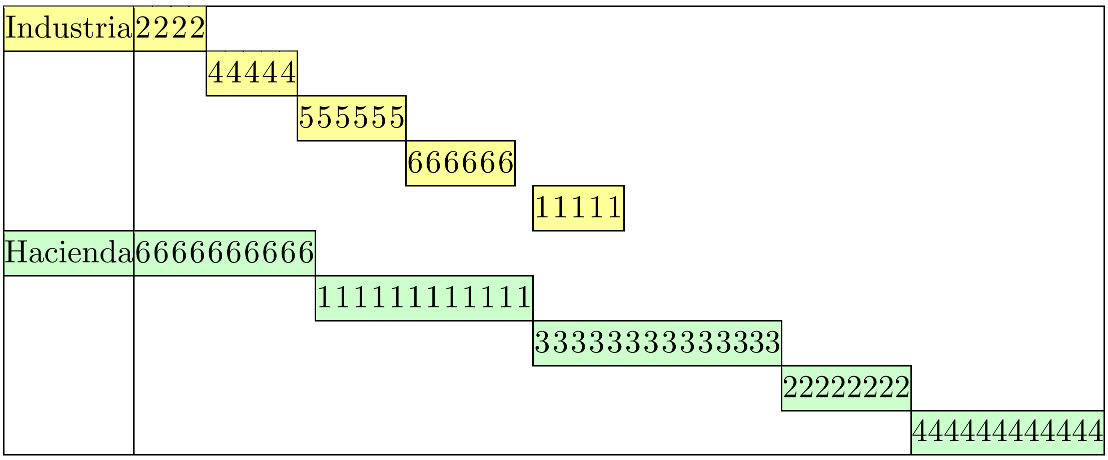
RESULTADO DEL PROBLEMA 10

Se trata de un problema de secuenciación de tareas en dos máquinas. Suponemos que la máquina 1 es la Delegación de Industria y la 2 la de Hacienda. Luego los trabajos se pueden clasificar en estos tipos

	Alcalde	Tipo	Máquina 1	Máquina 2
			Industria	Hacienda
1	Villamochuelos	D	25	60
2	Valdealpargatas	C	20	40
3	Cañaveras	B		70
4	Montaraces	C	25	60
5	Conejera de Arriba	A	30	
6	Belloteros de Abajo	D	30	52

Se deben secuenciar los trabajos de cada uno de los tipos independientemente. Sólo los tipos C y D tienen más de un trabajo luego requieren secuenciación. Los de tipo C se ordenan según el algoritmo de Johnson y los de tipo D por el mismo algoritmo pero intercambiando la posición de las máquinas.

Máquina 1	**Industria**	2, 4, 5, 6, 1	Valdealpargatas, Montaraces, Conejera, Belloteros, Villamochuelos
Máquina 2	**Hacienda**	6, 1, 3, 2, 4	Belloteros, Villamochuelos, Cañaveras, Valdealpargatas, Montaraces



El alcalde de Villamochuelos no puede ir a la Delegación de Industria hasta no haber acabado en la de Hacienda, a los 112 minutos. Los alcaldes pasan un total de 52+60+70+40+60=282 minutos en la capital. El funcionario de Hacienda está ocupado durante ese tiempo y el de Industria durante 52+60+25=137 minutos.

Hay soluciones que evitar el tiempo de espera de la delegación de Industria. Por ejemplo, ésta.

Máquina 1	**Industria**	2, 4, 5, 1, 6	Valdealpargatas, Montaraces, Conejera, Villamochuelos, Belloteros
Máquina 2	**Hacienda**	6, 3, 1, 2, 4	Belloteros, Cañaveras, Villamochuelos, Valdealpargatas, Montaraces

II.3 Modelos de optimización de gestión de inventarios[3]

En un negocio o industria es frecuente que se tengan que almacenar productos listos para la venta o materias primas necesarias para la producción, para poder hacer frente a la demanda. El objeto de la teoría de inventarios[4] es determinar reglas que se puedan aplicar por las empresas para reducir al mínimo los costes derivados de este almacenamiento.

Los modelos de inventarios pretenden fundamentalmente dar respuesta a dos preguntas:

- ¿Cuándo se debe pedir un producto?
- ¿Cuánto se debe pedir del producto?

Es decir, en los modelos de inventarios, las dos decisiones posibles son cuándo y cuánto y el objetivo es minimizar el coste bajo ciertas hipótesis.

Estas hipótesis que se hacen sobre el problema determinan los distintos modelos de inventarios, de los que vamos a ver algunos en posteriores secciones. Sin embargo, previamente veremos algunas definiciones y conceptos básicos sobre los que posteriormente se irán haciendo las hipótesis.

II.3.1 Características del problema general de inventario

Hablaremos de un problema de inventario como, cuándo y cuánto pedir de un producto para satisfacer una demanda con el coste mínimo posible y viendo siempre la empresa como el almacén que se está considerando, es decir, como un punto de depósito al que llegan productos y salen de forma externa a él, sin control directo sobre la demanda ni sobre la fuente.

Este planteamiento engloba tanto si el producto es una materia necesaria para una producción (se solicita la materia prima o producto a una fuente externa pero la demanda es interna a la empresa[5]) como si el producto es un producto acabado a la espera de su venta y fabricado por la propia empresa (la demanda es externa y la fuente es interna, es decir, la propia empresa tiene que

[3] Hay que agradecer todo el trabajo realizado para desarrollar este tema por Francisco Alberto Campos Fernández.

[4] Es también muy habitual utilizar la palabra anglosajona stock para el inventario.

[5] Probablemente esta demanda interna viene a su vez determinada por una demanda externa de productos acabados.

proporcionar el producto al almacén) o como si tanto el producto como la demanda son de fuentes internas (el almacén en realidad es una parte de una empresa mayor y su función es abastecer a otras secciones) o de fuentes externas (la empresa es intermediaria entre el origen y el destinatario final).

Los elementos que intervienen en un problema de inventarios son fundamentalmente los costes, la demanda y el sistema de inventarios a seguir. Vamos a describir estos elementos y las hipótesis que se pueden hacer sobre ellos que determinan los distintos modelos de inventarios.

Con respecto a los *costes* pueden ser de diferente naturaleza, siendo los más habituales los que se relacionan a continuación.

- *Coste de compra:* se basa en el precio por unidad del artículo; en general será constante, con lo que el coste de compra de un lote será proporcional a su tamaño, aunque pueden considerarse descuentos por volumen, etc.
- *Coste de orden y/o preparación:* representa el coste fijo en el cual se incurre cuando se hace un pedido; este coste es independiente del volumen del pedido.
- *Coste de almacenamiento:* es el coste de mantener el inventario, que suele incluir el interés sobre el capital, el coste de mantenimiento y manejo, etc.; en general, este coste se da por unidad en inventario y unidad de tiempo.
- *Coste de ruptura o carencia:* es la penalización por no poder satisfacer la demanda e incluye la pérdida potencial de ingresos, así como el coste más subjetivo de la pérdida de clientes o de la disminución del nivel de calidad del servicio; en general, se dará como un coste por unidad de demanda no satisfecha y unidad de tiempo.

Los modelos de inventarios pretenden minimizar el coste total del sistema de almacenamiento siendo considerado éste una función, en general, aditiva de los costes definidos:

$$\begin{pmatrix}\text{Coste total del}\\ \text{inventario}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Coste de}\\ \text{compra}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Coste de}\\ \text{orden}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Coste de}\\ \text{almacenamiento}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Coste de}\\ \text{ruptura}\end{pmatrix}$$

En cuanto a la demanda puede ser *demanda determinista,* es decir, se supone que se conocen exactamente los pedidos demandados por unidad temporal, o *demanda aleatoria*, que supone cierta incertidumbre en los valores de la demanda, habitualmente modelada mediante una distribución de probabilidad.

Por otra parte la demanda determinista a su vez puede ser clasificada en *estática* (constante por unidad de tiempo) o *dinámica*, que supone una demanda que varía por periodos de tiempo (demanda semanal o mensual, diferente de unos periodos a otros).

Otro elemento a determinar es el sistema de inventarios que se describe. Una primera clasificación de los sistemas es por los instantes en que el inventario puede ser revisado, pudiendo el sistema requerir una *revisión periódica* (por ejemplo, semanal o mensual) coincidiendo el momento para hacer un nuevo pedido con el inicio de cada periodo, o una *revisión continua*, en el que el inventario puede ser revisado en cualquier momento siendo este instante cuando el nivel de inventario desciende por debajo de un determinado nivel, previamente especificado y denominado *punto de reorden.*

Por último, existe otro elemento que puede ser considerado en el modelo que es un *tiempo de entrega*, que es el tiempo transcurrido desde que se pide el producto a la fuente hasta que es entregado.

Los modelos de inventarios buscan un equilibrio entre la calidad de servicio ofrecido a los clientes y el coste económico derivado de ésta, respondiendo a dos cuestiones: cuánto y cuándo pedir.

Con los *elementos* anteriores y las hipótesis que se hagan sobre ellos, se pueden obtener distintos modelos. Una posible clasificación, que no la única, de los modelos que vamos a ver es la siguiente (entendiendo por modelos deterministas aquéllos en los que la demanda es determinista y estocásticos cuando la demanda es aleatoria):

$$\begin{cases} \text{Modelos deterministas} & \begin{cases} \text{Modelos estáticos (o de lote económico EOQ)} \\ \text{Modelos dinámicos} \end{cases} \\ \text{Modelos estocásticos} & \begin{cases} \text{Modelos de revisión continua} \\ \text{Modelos periódicos} \begin{cases} \text{Modelos de un sólo periodo} \\ \text{Modelos multiperiodo} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

A los modelos estáticos se les denomina modelos de lote económico EOQ (*Economic Order Quantity*).

II.3.2 Modelos estáticos de lote económico (EOQ) con revisión continua

La hipótesis común a los modelos que vamos a ver en esta sección es que la demanda es conocida, disminuyendo el inventario a razón de d unidades por unidad de tiempo.

Se utilizará la siguiente notación para los datos (entre paréntesis las unidades de las magnitudes):

- d: tasa de demanda (unidades de producto por unidad de tiempo)
- c_u: coste unitario de compra (unidades monetarias por unidad de producto)
- c_p: coste de orden o pedido (unidades monetarias)
- c_a: coste de almacenamiento (unidades monetarias por unidad de producto y de tiempo)
- c_r: coste de ruptura o carencia (unidades monetarias por unidad de producto y de tiempo)
- l: tiempo de entrega (unidad de tiempo)

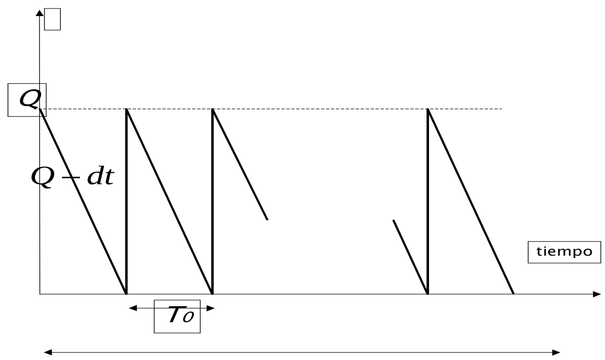
Respecto a las variables de decisión son dos en estos modelos:

- Q: cantidad a pedir o tamaño del lote de pedido (unidades de producto)
- T_o: instante para realizar el pedido la primera vez, o lo que es lo mismo tamaño del ciclo, es decir, tiempo entre dos pedidos (unidades de tiempo)

Ahora presentaremos los modelos más conocidos que cabe plantear dentro de la hipótesis de revisión continua y demanda determinista de tasa constante.

II.3.2.1 Modelo EOQ clásico (sin ruptura)

Éste es el caso más clásico que supone que no se admite ruptura y la entrega es inmediata ($l = 0$). En este caso, el nivel de inventario varía según la siguiente figura



Es decir, el nivel de inventario varía dentro de un ciclo según $Q - dt$, siendo t el tiempo dentro del ciclo. Por lo tanto, el tamaño del ciclo se obtiene igualando a 0 el valor anterior, es decir, $T_0 = Q / d$. Luego, lo que hay que determinar es el valor de Q.

El coste total de un ciclo viene dado por la expresión

$$\text{Coste ciclo=c. orden+c. compra+c. almacenamiento=}c_p + c_u Q + c_a \frac{Q^2}{2d}$$

y el coste total por unidad de tiempo será, por lo tanto,

$$C(Q) = \frac{\text{Coste ciclo}}{\text{Tiempo ciclo}} = \frac{dc_p}{Q} + c_u d + \frac{c_a Q}{2}$$

Esta función $C(Q)$ es estrictamente convexa, luego al derivar e igualar a 0 se obtiene un mínimo global, siendo el valor óptimo

$$Q^* = \sqrt{\frac{2dc_p}{c_a}} \quad (\textit{Fórmula de Wilson})$$

que será el tamaño óptimo del pedido, a realizar cada $T_0 = Q^* / d$ unidades de tiempo.

El valor Q^* en general no es entero, si se desea una solución cabe redondear este valor si es grande y si es pequeño se determina el valor entero como el valor Q^* tal que verifica $Q^*(Q^* - 1) < \frac{2dc_p}{c_a} < Q^*(Q^* + 1)$.

Una variante sencilla de este problema es suponer que la entrega no es inmediata, sino que existe un tiempo de entrega fijo y conocido $l > 0$. Esta modificación no afecta a los valores determinados anteriormente, sólo al momento en que hay que hacer el pedido. Para saber cuándo hacer el pedido se puede utilizar el tiempo, pero lo habitual es determinarlo en función del nivel de inventario, siendo este punto de reorden para el modelo que nos ocupa el punto en el que el nivel de inventario sea de ld unidades[6].

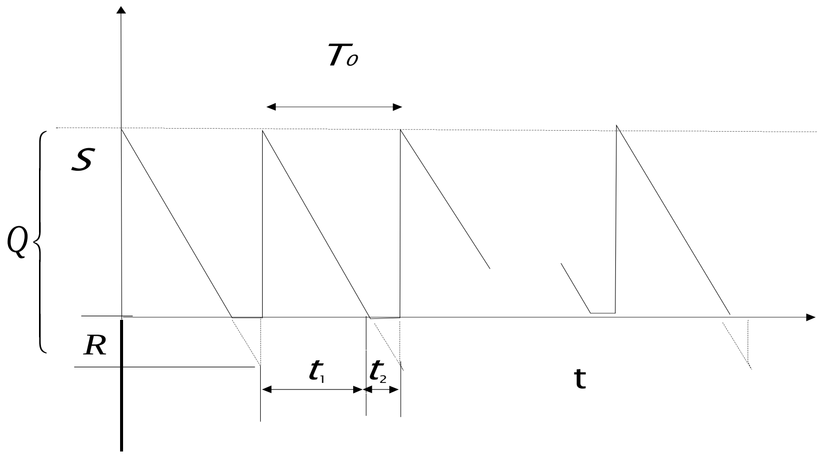
En el caso en que $l > T_0$, las peticiones hay que hacerlas para satisfacer no la demanda del próximo ciclo, sino para ciclos posteriores, en cuyo caso se calcula el plazo de entrega efectivo, $l_e = l - nT_0$, de modo que $l_e < T_0$. Lo único que hay que considerar es que cuando se hace un pedido, será para satisfacer la demanda de n ciclos después.

II.3.2.2 Modelo EOQ con ruptura de inventario

Al modelo anterior añadimos la posibilidad de mantener un cierto tiempo un nivel de inventario nulo. Al añadir esta posibilidad hay que incluir en los costes el coste de ruptura c_r por unidad de demanda no satisfecha y unidad de tiempo. Al recibir el pedido se satisface en primer lugar la demanda pendiente.

En este caso la figura que representa la evolución temporal del nivel de inventario es la siguiente:

[6] Esto es suponiendo que el plazo de entrega es menor que el tamaño del ciclo, en otro caso exigiría una modificación.



El problema consiste en determinar el tamaño del pedido óptimo, Q^*, que proporciona un nivel máximo de inventario S^*, supuesto que se admite una cantidad prefijada $R = Q - S$ de ruptura.

La expresión del coste total por ciclo será

Coste ciclo=c. orden+c. compra+c. almacenamiento+c. ruptura=

$$= c_p + c_u Q + c_a \frac{S^2}{2d} + c_r \frac{(Q-S)^2}{2d}$$

que por unidad de tiempo resulta ser

$$C(Q,S) = \frac{\text{Coste ciclo}}{\text{Tiempo ciclo}} = \frac{dc_p}{Q} + c_u d + \frac{c_a S^2}{2Q} + c_r \frac{(Q-S)^2}{2Q}$$

Luego el problema que se plantea es

$$\begin{aligned} \min_{Q,S} \quad & C(Q,S) \\ & Q \geq S \\ & Q \geq 0 \end{aligned}$$

La función $C(Q,S)$ es convexa y la solución óptima del problema resulta ser

$$Q^* = \sqrt{\frac{2dc_p}{c_a}\frac{c_r + c_a}{c_r}} \ \text{ y } \ S^* = \sqrt{\frac{2dc_p}{c_a}\frac{c_r}{c_r + c_a}}$$

Los valores obtenidos son semejantes al caso anterior, pero se hallan modificados por un factor, denominado *tasa de ruptura* cuya expresión es $r = \dfrac{c_r}{c_r + c_a}$. Este índice está relacionado con el nivel de la calidad del servicio que se desea prestar, de modo que un valor próximo a 1 quiere decir que es mucho mayor el coste de ruptura que el de almacenamiento, o lo que es lo mismo, que apenas se permiten rupturas.

II.3.2.3 Modelo EOQ con descuentos por cantidad

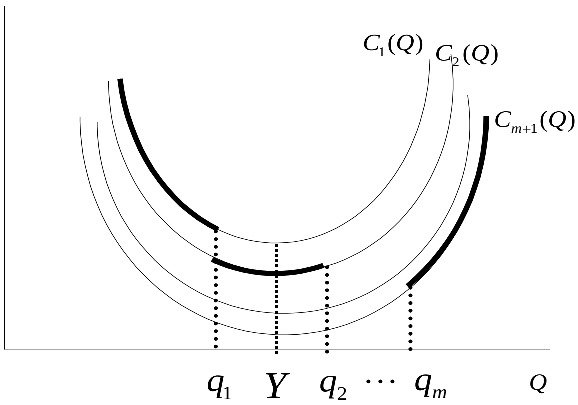
Este modelo es el mismo de la sección II.3.2.1 con la variante de que se puede comprar el producto con descuento por el volumen del pedido, es decir, el coste de compra por unidad es:

$$c_u(Q) = \begin{cases} c_1 & 0 \leq Q < q_1 \\ c_2 & q_1 \leq Q < q_2 \\ \vdots & \vdots \\ c_{m+1} & Q \geq q_m \end{cases} \qquad (c_1 > c_2 > ... > c_{m+1})$$

Obsérvese que si se considera la función de coste por unidad de tiempo de cada uno de estos costes individualmente se tiene

$$C^i(Q) = \frac{dc_p}{Q} + c_i d + \frac{c_a Q}{2}, \quad i = 1,..,m+1$$

Estas funciones son funciones convexas que difieren en una constante y por lo tanto alcanzan su mínimo en el mismo punto $Y = \sqrt{\frac{2dc_p}{c_a}}$. Así el coste total será una función combinada de todas ellas como muestra la siguiente gráfica:



Resulta evidente que si el caso es el de la figura, $q_1 < Y < q_2$, el mínimo hay que buscarlo a la derecha de este valor y será Q^* el valor en que se dé el mínimo de $\min\{C_2(Y), C_3(q_2), \cdots, C_{m+1}(q_m)\}$. De manera general, habría que detectar en qué intervalo se encuentra Y, $q_{i-1} < Y < q_i$ y obtener el valor óptimo Q^* como el valor correspondiente a $\min\{C_i(Y), C_{i+1}(q_i), \cdots, C_{m+1}(q_m)\}$.

A continuación se va a desarrollar para el caso más sencillo, que es sólo de dos costes unitarios diferentes, es decir, $c_u(Q) = \begin{cases} c_1 & Q < q \\ c_2 & Q \geq q \end{cases}$, $c_1 > c_2$. Si se calcula la función de coste con cada uno de estos costes (siguiendo los cálculos de la sección II.3.2.1) se tienen dos funciones de coste por unidad de tiempo según el valor de Q:

$$C^1(Q) = \frac{dc_p}{Q} + c_1 d + \frac{c_a Q}{2} \text{ y } C^2(Q) = \frac{dc_p}{Q} + c_2 d + \frac{c_a Q}{2}.$$

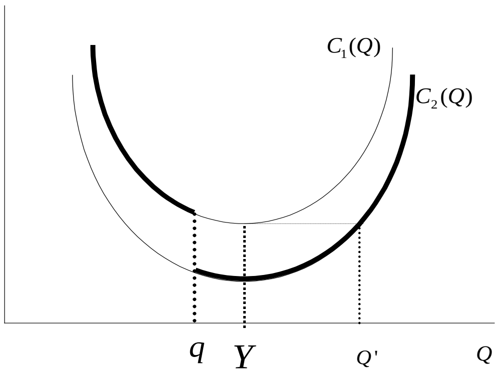
Lo que supone una función de coste por unidad de tiempo

$$C(Q) = \begin{cases} C^1(Q) = \dfrac{dc_p}{Q} + c_1 d + \dfrac{c_a Q}{2} & \text{si } Q < q \\ C^2(Q) = \dfrac{dc_p}{Q} + c_2 d + \dfrac{c_a Q}{2} & \text{si } Q \geq q \end{cases}$$

Ambas funciones, C^1 y C^2, son funciones convexas y puesto que difieren exclusivamente en una constante, alcanzan el mínimo en el mismo punto

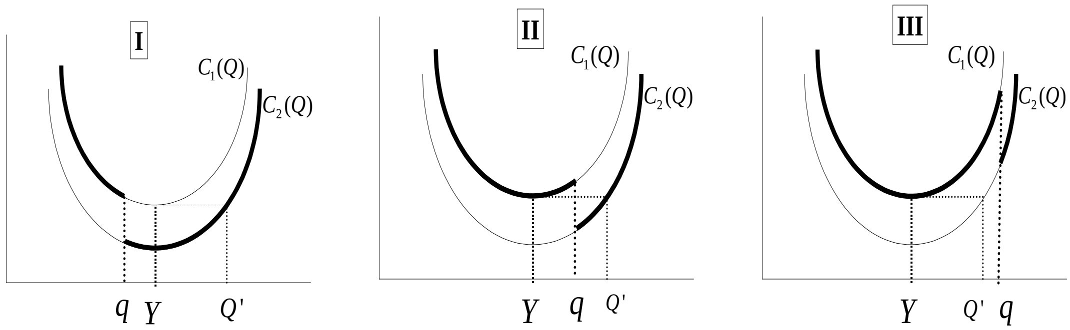
$$Y = \sqrt{\frac{2dc_p}{c_a}}$$

En la figura siguiente se presentan gráficamente las dos funciones de coste y la función total de coste que configuran que es discontinua (en trazo más grueso):



En la figura se representa también el valor Q', que es el valor $Q' > Y$ para el que la función $C_2(Q)$ toma el valor del mínimo de la otra función de coste, es decir, $C_2(Q') = C_1(Y)$, que es un valor del que va a depender la solución.

Para determinar el tamaño óptimo del pedido se pueden distinguir tres casos distintos que se muestran a continuación:



Como se puede apreciar en las tres figuras la solución es diferente. Así en la primera figura (caso I), al ser $q < Y$ la solución óptima se alcanza en el valor $Q^* = Y$. En el caso II, al ser $Y < q < Q'$ la solución óptima se alcanza en $Q^* = q$. Por último, en el caso III, por ser $q > Q'$ el valor óptimo es $Q^* = Y$.

Por lo tanto, el algoritmo a seguir sería el siguiente:

1. Determinar $Y = \sqrt{\dfrac{2dc_p}{c_a}}$. Si $q < Y$, poner $Q^* = Y$. Si no, ir al paso 2.
2. Calcular Q' (resolviendo la ecuación $C_2(Q') = C_1(Y)$ y $Q' > Y$). Si $q < Q'$, poner $Q^* = q$. En otro caso, poner $Q^* = Y$.

II.3.2.4 Modelo EOQ de múltiples artículos con límite de almacenamiento

Las hipótesis de este modelo son las mismas del modelo básico, pero para varios artículos (no se admite ruptura ni hay plazo de entrega). Se describirán las características correspondientes a cada uno por un superíndice que indique el artículo considerado:

- d^i: tasa de demanda del artículo i
- c_u^i: coste unitario de compra del artículo i
- c_p^i: coste de orden o pedido del artículo i
- c_a^i: coste de almacenamiento del artículo i

Respecto a las variables, habrá también una por artículo

- Q^i: tamaño del lote de pedido del artículo i

Lo que caracteriza este modelo es que además existe un espacio disponible de almacenamiento limitado, S, que deben compartir todos los artículos, y un espacio ocupado por cada unidad de cada artículo, s^i.

Para este problema se plantea el siguiente modelo de programación no lineal:

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_i C^i(Q^i) = \sum_i \left(\frac{d^i c_p^i}{Q^i} + c_u^i d^i + \frac{c_a^i Q^i}{2} \right) \\
&\sum_i s^i Q^i \leq S \\
&Q^i \geq 0
\end{aligned}
$$

Una forma de acelerar la resolución de este modelo es probar primeramente si los valores óptimos de las funciones de coste consideradas individualmente ($Q^{i*} = \sqrt{\frac{2d^i c_p^i}{c_a^i}}$) verifican la restricción de espacio, en cuyo caso ya estaría resuelto el problema. Si no es así, es preciso acudir a métodos de programación no lineal para resolver el modelo.

II.3.3 Modelos de inventario dinámicos deterministas con revisión periódica

Los modelos que responden a este título difieren de los anteriores en dos aspectos:

1) el nivel de inventario se revisa periódicamente durante un número finito de periodos
2) la demanda por periodo, aun cuando también es determinista, es dinámica, es decir, puede variar de un periodo al siguiente

En general, se supondrá que no se admite ruptura, es decir, que no es posible satisfacer la demanda de un periodo con las existencias de los periodos posteriores.

El planteamiento general de estos modelos incluye los siguientes datos:

- $t = 1, \ldots, N$ períodos de tiempo que configuran el *horizonte de planificación.*
- d_t: demanda que ha de satisfacerse al inicio del periodo t.
- $c_t(Q_t)$: función de coste de pedir Q_t unidades en el periodo t, incluyendo el coste de preparación de pedido si existe.
- $h_t(I_t)$: función de coste de almacenar I_t unidades durante el periodo t.

Las variables del problema, naturalmente muy íntimamente relacionadas entre sí, son

- Q_t: cantidad solicitada al comienzo del periodo t

- I_t: nivel de inventario al final del periodo t, siendo I_0 el inventario inicial al comienzo del periodo 1.

El planteamiento del problema es encontrar los valores de $Q_1,\ldots,Q_N$ que minimizan el coste total satisfaciendo la demanda. La formulación general del problema de optimización es

$$\begin{aligned}&\min \sum_t \left[c_t(Q_t) + h_t(I_t)\right]\\&Q_t + I_{t-1} = d_t + I_t \quad \forall t\\&Q_t, I_t \geq 0 \quad \forall t\end{aligned}$$

Según sean las funciones de coste y el carácter de las variables tendremos un modelo de programación lineal continuo (variables continuas y costes proporcionales y sin coste de preparación de pedido), programación lineal entera o programación no lineal. Por lo tanto, es posible resolver el modelo en cada caso utilizando las técnicas correspondientes más apropiadas.

Sin embargo, las características del modelo (dividido en periodos o etapas) hacen de la programación dinámica la metodología más apropiada y más utilizada para resolver estos problemas. Es decir, en lugar de resolver el problema de una vez, subdividirlo en problemas más pequeños y más sencillos.[7]

También existen técnicas heurísticas para resolver problemas de este tipo con determinadas características, como la heurística de Silver y Meal. Estas heurísticas tienen como ventaja respecto a las técnicas de programación matemática que son más rápidas en general, sin embargo, hay que tener en cuenta su carácter heurístico que hace que el óptimo no esté asegurado.

II.3.3.1 Una aplicación: planificación del requerimiento de materiales (MRP)

Una de las situaciones más habituales en las que se presenta la optimización de gestión de inventarios dinámicos es la planificación de materiales requeridos para producir determinados artículos cuya demanda periódica es conocida. La metodología MRP (*material resource planning*) reconoce la relación entre la demanda del producto final y la de los componentes que se usan para fabricarlo. Esta relación se utiliza para determinar en diferentes situaciones la cantidad que se debe producir de cada producto final y producir o pedir de cada componente, en cada periodo.

La idea de los problemas y su resolución la veremos con un ejemplo. Supongamos que hay que producir dos artículos, A_1 y A_2, cuya demanda trimestral para el próximo año está estimada en 100 y 150 artículos,

[7] Ver el capítulo dedicado a la programación dinámica.

respectivamente. El tiempo de entrega de la producción (desde que se inicia hasta que está finalizada) es de dos meses para el primer artículo y un mes para el segundo. Cada unidad de estos artículos utiliza dos unidades de un subensamblaje, S. Este subensamblaje tiene un plazo de entrega de un mes.

Los instantes en que se comienza la producción de cada artículo depende de los tiempos de producción de ambos y, por lo tanto, las necesidades del subensamblaje son variables a lo largo del tiempo. En la siguiente tabla se recogen los instantes en que hay que satisfacer la demanda, cuándo se inicia la producción y por lo tanto cuándo es necesario tener el subensamblaje (en cursiva) y cuándo hay que pedirlo si se tuviera que pedir y no estuviera disponible en el inventario (en negrita), para ambos artículos. En las dos últimas filas vienen estos dos últimos conceptos para el subensamblaje con las necesidades agregadas.

Mes(final)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A_1 - entrega				100			100			100			100
A_1 - inicio		100			100			100			100		
S - dispon.		*200*			*200*			*200*			*200*		
S - pedido	**200**			**200**			**200**			**200**			
A_2 - entrega				150			150			150			150
A_2 - inicio			150			150			150			150	
S - dispon.			*300*			*300*			*300*			*300*	
S - pedido		**300**			**300**			**300**			**300**		
S - Tot disp		*200*	*300*		*200*	*300*		*200*	*300*		*200*	*300*	
S - Total	**200**	**300**		**200**	**300**		**200**	**300**		**200**	**300**		

Para minimizar el coste existen diversos planteamientos, de modo que si no existe coste de preparación de pedido ni descuentos por volumen y el resto de los costes son constantes (incluido el de producción) durante todo el horizonte de planificación, la solución óptima es inmediata. Esta solución supone pedir los subensamblajes en las cantidades y fechas que se encuentran en la última fila, pues el único coste a reducir es el coste de inventario, que con esa solución será el mínimo posible.

Sin embargo, si cualquiera de los elementos considerados es modificado (existen costes de producción distintos por periodos, o distintos niveles de producción, o existe coste de preparación de pedido, o descuentos por volumen) la única alternativa es utilizar la programación matemática (en general, la programación dinámica) o heurísticas diseñadas para ese caso concreto.

En el ejemplo, supongamos que existe un coste de mantener en inventario las unidades de ensamblaje de 2 € por mes y un coste de preparación de pedido de 700 €. ¿Cuál será la solución óptima entonces?

Obsérvese que en este caso, sigue sin ser interesante hacer un pedido de subsensamblajes para un artículo que abarque la producción de más de un trimestre (hay que mantenerlo 3 meses y en el mejor de los casos es 3 meses por 200 unidades por 2 € el coste de inventario, que es mayor que el coste de pedido). Sin embargo, sí resulta beneficioso hacer el pedido para un trimestre de los subensamblajes necesarios para la producción de los dos artículos, eso supondría mantener en inventario las unidades requeridas por el artículo 2 durante un mes que sería 1 mes por 300 unidades por 2 €, es decir, el coste de inventario sería 600 € frente al coste de pedido que es de 700 €.

Este análisis que en este caso resulta sencillo, no es evidente en general, con lo que la solución debe ser obtenida formulando un problema de programación matemática[8].

II.3.4 Modelos de inventario estocásticos con revisión continua

Los modelos de inventario estocásticos introducen aleatoriedad en algunos de los datos, siendo el más habitual la demanda, aunque también puede ser considerado el plazo de entrega del artículo.

En esta sección vamos a considerar dos modelos con revisión continua, que son adaptaciones de los modelos de la sección 0, es decir, de lote económico (EOQ).

II.3.4.1 Modelo EOQ probabilizado

En este modelo se considera aleatoriedad en la demanda. Aparecerá un elemento no considerado hasta el momento, que ha de ser determinado en la optimización, que es el *stock de seguridad.*

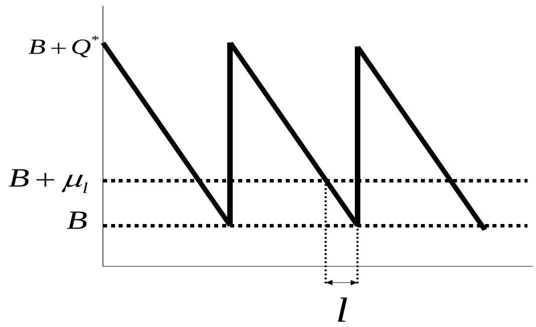
Los elementos que intervienen en este modelo que no hayan sido considerados hasta ahora son los siguientes:

- l: plazo de entrega desde que se hace un pedido hasta que se recibe.
- D_l: variable aleatoria que representa la demanda durante el plazo de entrega.
- α: máxima probabilidad de agotamiento de existencias durante el plazo de entrega

[8] Cómo la programación matemática es un procedimiento "algo" más "sofisticado" que otros procedimientos de puro cálculo no iterativos, es habitual que para resolver este tipo de problemas se encuentren diversas heurísticas aplicadas a cada problema particular.

- B: stock de seguridad; es el nivel de inventario necesario para lograr una probabilidad inferior a α de ruptura de inventario.

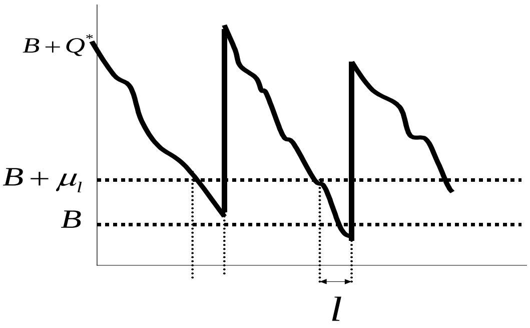
Suponiendo que la media de la variable aleatoria D_l es μ_l, la siguiente gráfica de la evolución del nivel de inventario representa la evolución del inventario suponiendo que la demanda fuera determinista en su nivel medio:



El stock de seguridad, B, ha de ser determinado de modo que se verifique $P\{D_l \geq B + \mu_l\} \leq \alpha$. Habitualmente, la variable aleatoria D_l se modela como una distribución normal de media μ_l y desviación típica σ_l. Así, tipificando se tiene $P\left\{Z \geq \frac{B}{\sigma_l}\right\} \leq \alpha$, donde Z representa una variable aleatoria con distribución $N(0,1)$. Si z_α representa el valor de la normal estándar que deja una probabilidad α a su derecha, se tiene $\frac{B}{\sigma_l} \geq z_\alpha$, de donde se deduce que $B \geq z_\alpha \sigma_l$.

Por otra parte, es habitual que la demanda venga modelada por unidad de tiempo (día, semana, etc.) como una función de densidad normal de media d y desviación típica σ. Por lo tanto, para tener los datos necesarios para llevar a cabo los cálculos previos se obtienen la media y desviación típica de la demanda en el plazo de entrega como $\mu_l = d\,l$ y $\sigma_l = \sqrt{\sigma^2 l}$.

El punto de reorden se fija en la cantidad $B + \mu_l$. La cantidad Q^* a pedir es la misma que la del modelo EOQ determinista sin ruptura de inventario, es decir, $Q^* = \sqrt{\frac{2dc_p}{c_a}}$ y el tiempo estimado para volver a pedir es $T^* = \frac{Q^*}{d}$. La situación suponiendo que $l < T^*$, sería la siguiente:



En el caso en que $l > T^*$, es análogo al caso determinista, las peticiones hay que hacerlas para satisfacer no la demanda del próximo ciclo, sino para ciclos posteriores, siendo el plazo de entrega efectivo, $l_e = l - nT^*$, de modo que $l_e < T^*$. Lo único que hay que considerar es que cuando se hace un pedido, se recibirá uno en ese plazo que no es el solicitado, sino el que se pidió n ciclos antes.

II.3.4.2 Modelo EOQ probabilista

Esta versión es un modelo más exacto que el anterior para introducir la aleatoriedad en la demanda. En este caso sí se considera la posibilidad de ruptura, que es mucho más coherente con la realidad.

El modelo tiene tres hipótesis:

a) La demanda no satisfecha durante el plazo de entrega se acumula
b) No se permite más de una orden pendiente
c) La distribución de la demanda durante el tiempo de entrega permanece estacionaria con el tiempo

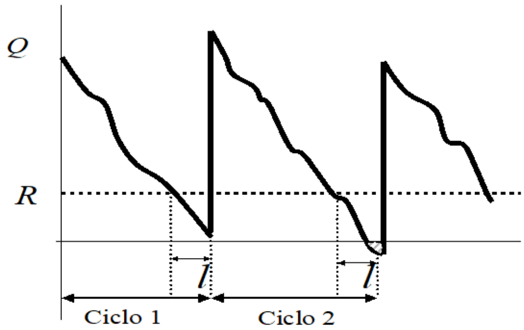
Los elementos que intervienen y su notación son:

- l: plazo de entrega desde que se hace un pedido hasta que se recibe.
- D_l: variable aleatoria que representa la demanda durante el plazo de entrega.
- $f(d)$: función de densidad de la variable aleatoria D_l
- μ_D: esperanza de la demanda por unidad de tiempo
- c_p: coste de orden o pedido
- c_a: coste de almacenamiento por unidad de inventario y tiempo
- c_r: coste de ruptura o carencia por unidad de inventario

En el modelo se supone que se hace una petición cuando se alcanza un nivel de inventario, R, fijado de antemano. El problema consiste en determinar el tamaño óptimo del pedido, Q^*, y del punto de reorden, R^*, que minimizan el coste total.

La función objetivo, es decir, el coste total por unidad de tiempo es a su vez suma de los distintos costes que intervienen en el sistema:

1. *Coste de orden o preparación esperado*: como el número esperado de ciclos es el inverso del tiempo esperado por ciclo y éste es $\frac{Q}{\mu_D}$, el número esperado de ciclos por unidad de tiempo resulta ser $\frac{\mu_D}{Q}$ y por lo tanto el coste de preparación $c_p \frac{\mu_D}{Q}$.
2. *Coste de inventario esperado:* para obtener este coste se hace una aproximación del nivel medio de inventario durante un ciclo, consistente en promediar el inventario medio disponible al inicio de un ciclo y al final. La siguiente figura muestra la situación considerada



El inventario medio al final de un ciclo será $R - E[D_l] = R - \mu_D l$. A su vez el inventario medio al inicio del ciclo será $Q + R - E[D_l] = Q + R - \mu_D l$. Promediando ambos valores se tiene $\frac{Q + R - \mu_D l + R - \mu_D l}{2} = \frac{Q}{2} + R - \mu_D l$ y, por lo tanto, el coste estimado es de $c_a\left(\frac{Q}{2} + R - \mu_D l\right)$.
3. *Coste de ruptura esperado:* se incurre en este coste cuando la demanda durante el plazo de entrega es superior a R, es decir, si $D_l > R$. Así, para un ciclo, la cantidad de faltantes esperada es $\int_R^\infty (x-R)f(x)dx$ y, por lo tanto el coste esperado por ciclo $c_r \int_R^\infty (x-R)f(x)dx$. Por último, para expresarlo por unidad de tiempo, se multiplica este valor por el número de ciclos esperado por unidad de tiempo $\frac{\mu_D}{Q}$, resultando una estimación del coste de ruptura por unidad de tiempo $c_r \frac{\mu_D}{Q} \int_R^\infty (x-R)f(x)dx$.

Con estos costes se obtiene el coste total estimado por unidad de tiempo que se pretende minimizar

$$C(Q,R) = c_p \frac{\mu_D}{Q} + c_a \left(\frac{Q}{2} + R - \mu_D l \right) + c_r \frac{\mu_D}{Q} \int_R^{\infty} (x-R) f(x) dx$$

Derivando esta expresión respecto a cada una de las variables e igualando a cero se obtienen las siguientes ecuaciones para los valores óptimos

$$\int_{R^*}^{\infty} f(x)dx = c_a \frac{Q^*}{\mu_D c_r} \text{ y } Q^* = \sqrt{\frac{2\mu_D (c_p + c_r \int_{R^*}^{\infty} (x - R^*) f(x)dx}{c_a}}$$

Como no se puede obtener una expresión cerrada para estos valores óptimos a partir de esas ecuaciones, se utiliza un algoritmo numérico para obtenerlos desarrollado por Hadley y Whitin en 1963. Este algoritmo parte del menor valor posible de Q (el caso en que el número esperado de faltantes es cero) y del punto de reorden justo opuesto ($R = 0$) y va actualizando los valores de uno y otro usando alternativamente las dos ecuaciones anteriores, hasta que la diferencia entre los dos puntos de reorden obtenidos en iteraciones sucesivas es menor que una tolerancia previamente definida ε. El algoritmo converge en un número finito de iteraciones si existe solución factible.

1. Inicio
   Sea la solución inicial $Q_1 = \sqrt{\frac{2\mu_D c_p}{c_a}}$ (mínimo valor posible de Q) y $R_0 = 0$ (mínimo valor posible de R) que evidentemente no debe cumplir las ecuaciones planteadas. Poner $i = 1$ e ir al paso 1.
2. Cálculo de R_i a partir de Q_i y de la ecuación (1), criterio de parada, actualización de Q_{i+1} a partir de R_i y de la ecuación (2).
   Obtener R_i sustituyendo en la primera ecuación el valor de Q_i.
   Si $|R_i - R_{i-1}| < \varepsilon$, parar, la solución óptima es $Q^* = Q_i$ y $R^* = R_i$.
   En otro caso, obtener Q_{i+1} sustituyendo R_i en la segunda ecuación. Poner $i = i + 1$ y repetir el paso 1.

II.3.5 Modelos de inventario estocásticos con revisión periódica

Estos modelos se clasifican a su vez según su horizonte temporal sea de un solo periodo o abarque más periodos. Dentro de estos casos también las diferentes hipótesis acerca de la gestión del inventario determinan diferentes modelos.

II.3.5.1 Modelos de un solo periodo

Los modelos de inventario de un solo periodo ocurren cuando una mercancía se ordena sólo una vez para satisfacer la demanda del periodo. Ésta es la situación por ejemplo de los productos estacionales que se vuelven obsoletos al final de la estación.

Los elementos que intervienen en el modelo son:

- D: variable aleatoria que representa la demanda durante el periodo.
- $f(d)$: función de densidad de la variable aleatoria D
- $F(d)$: función de distribución de la variable aleatoria D
- c_a: coste de almacenamiento por unidad de inventario durante el periodo
- c_r: coste de ruptura o carencia por unidad de inventario
- c_u: coste de adquisición de cada unidad de inventario
- c_p: coste de orden o pedido
- q_0: inventario inicial

El modelo determina el valor óptimo de pedido, Q^*, que minimiza la suma de los costes esperados.

En general, se pueden distinguir dos casos según exista un coste de preparación de pedido u orden o no.

II.3.5.1.1 Modelo sin coste de preparación de pedido

Las hipótesis básicas de este modelo son que la demanda se produce de forma instantánea inmediatamente después de haber sido recibido el pedido y no se incurre en coste de preparación de pedido.

Para desarrollar el modelo, fundamentalmente, hay que tener presente en este modelo que si la cantidad que se pide es mayor que la demanda ($Q > D$) esa cantidad hay que almacenarla incurriendo en un coste de mantenimiento de inventario, mientras que si es al revés ($Q < D$) se incurre en coste de ruptura de inventario por la demanda no satisfecha. Así mismo, hay que tener en cuenta que la cantidad que realmente se pide no es Q, sino $Q - q_0$ si este valor es positivo o 0 si esta diferencia resultase negativa.

Con las premisas anteriores, el coste esperado para una cantidad Q que ha de ser optimizado es

$$E[C(Q)] = c_u(Q - q_0) + c_a \int_0^Q (Q - x) f(x) dx + c_r \int_Q^\infty (x - Q) f(x) dx$$

Esta función se puede demostrar que es estrictamente convexa y por lo tanto tiene un único mínimo. Por lo tanto, derivando e igualando a cero se obtiene que el valor óptimo es aquél que verifica

$$F(Q^*) = P(D \leq Q^*) = \frac{c_r - c_u}{c_r + c_a}$$

El valor de la derecha es denominado *razón crítica.* Obsérvese que es evidente que este valor es menor o igual que 1, pero podría tratarse de un valor negativo y por lo tanto no tendría sentido la expresión escrita (es una probabilidad). Sin embargo, tal caso no es posible en realidad pues resultaría absurdo que el coste de ruptura fuera menor que el de compra, es decir, que fuera mayor el coste de compra que la penalización por no suministrarlo (habitualmente esta penalización se estima en al menos el beneficio que produce el artículo, que debe ser superior al coste de compra o no tendría sentido).

Todo el desarrollo se ha hecho suponiendo que el valor pedido es superior al inventario inicial, es inmediato derivar que si $Q^* < q_0$ la estrategia óptima es no pedir nada, y si no es así, solicitar la cantidad $Q^* - q_0$.

Por otra parte, también se ha supuesto una distribución continua, pero el cálculo sería análogo para una distribución discreta (en el planteamiento de la función de coste las integrales serían sumatorios) obteniéndose como valor óptimo aquél que verifique $F(Q^* - 1) = P(D \leq Q^* - 1) \leq \frac{c_r - c_u}{c_r + c_a} \leq F(Q^*)$.

II.3.5.1.2 Modelo con coste de preparación de pedido

Este modelo difiere del anterior en que se incurre en un coste de preparación cuando se realiza un pedido $c_p > 0$. Por lo demás, todo es igual en el planteamiento, pero esta diferencia hace variar los resultados.

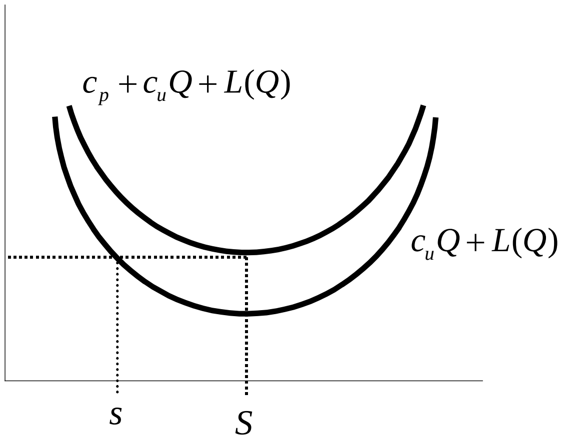
En este caso la función de coste es prácticamente igual excepto en que, si se lleva a cabo un pedido, hay que añadir el coste fijo de realizarlo. Hay por lo tanto que distinguir en la función de coste esperado si se realiza o no pedido, de modo que será

$$C(Q) = \begin{cases} c_p + c_u(Q - q_0) + L(Q) & \text{si } Q > q_0 \\ L(q_0) & \text{si } Q = q_0 \end{cases}$$

donde la función $L(Q)$ recoge los costes de inventario si la demanda es menor que el nivel de inventario y de ruptura en caso contrario, es decir, $L(Q) = c_a \int_0^Q (Q - x) f(x) dx + c_r \int_Q^\infty (x - Q) f(x) dx$.

Minimizar la función de coste esperado pasa por lo tanto por comparar el coste de $Q > q_0$ con el del inventario inicial q_0, es decir, determinar para qué valores $Q > q_0$ el coste es inferior al que se tiene con el inventario inicial, y si existen elegir el mínimo, es decir, buscar de los que cumplen la siguiente condición, si existen, el mínimo $c_p + c_u(Q - q_0) + L(Q) \leq L(q_0)$, o lo que es igual, $c_p + c_u Q + L(Q) \leq c_u q_0 + L(q_0)$.

Para ello, se determina en primer lugar cuál es el mínimo de esos valores y se compara posteriormente con el coste del inventario. El punto donde se alcanza el mínimo de la función $c_p + c_u Q + L(Q)$ es el determinado en la subsección anterior ya que ambas funciones de coste difieren en una constante, es decir, ese punto es S tal que $F(S) = \dfrac{c_r - c_u}{c_r + c_a}$.



Si $S < q_0$, es evidente que no resulta interesante pedir, pues para valores superiores a S las funciones son crecientes, luego un nivel de inventario superior a q_0 tiene coste superior incluso sin incluir el coste de pedido.

Si $S > q_0$, hay dos casos diferentes, ya que el valor $c_u q_0 + L(q_0)$ puede estar por debajo o por encima del valor $c_p + c_u S + L(S)$. De hecho si se calcula el valor s tal que $c_u s + L(s) = c_p + c_u S + L(S)$, se establecen dos zonas diferentes de decisión: para valores de inventario inicial menores que ese valor s se verifica que $c_u q_0 + L(q_0) > c_p + c_u S + L(S)$ y para valores superiores es al revés. De aquí se deriva la política óptima, conocida como *política* $s - S$,

$$Q^* = \begin{cases} S & \text{si } q_0 < s \quad (\text{pedir } S - q_0) \\ q_0 & \text{si } q_0 \geq s \qquad (\text{pedir } 0) \end{cases}$$

II.3.5.2 Modelo de múltiples periodos

Esta sección presenta un modelo de periodos múltiples bajo las hipótesis de coste de preparación cero, retraso de entrega cero y posibilidad de acumular la demanda. Además se supone que la demanda D sigue una distribución estacionaria según una función de densidad, $f(D)$.

Además se incluye un nuevo elemento que es el valor descontado del dinero según un factor de descuento por periodo $\alpha < 1$, es decir, el valor de una cantidad de dinero A en un periodo es para el periodo anterior de αA, y para n periodos anteriores de $\alpha^n A$.

Supongamos que el horizonte de planificación es de n periodos y que la demanda no satisfecha se puede acumular exactamente un periodo. Sea $U_i(q_i)$ la utilidad máxima esperada desde un periodo hasta el final si la cantidad disponible al comienzo de ese periodo es q_i (antes de realizar ningún pedido).

Suponiendo que r fuera el ingreso por unidad, la situación del inventario se puede formular mediante el siguiente modelo de programación dinámica con recursión hacia atrás:

$$U_i(q_i) = \max_{Q_i \geq q_i} \left\{ -c_u(Q_i - q_i) + \int_0^{Q_i} \left[rD - c_a(Q_i - D) \right] f(D)dD + \right.$$
$$\left. + \int_{Q_i}^{\infty} \left[rQ_i + (\alpha r - c_r)(D - Q_i) \right] f(D)dD + \alpha \int_0^{\infty} U_{i+1}(Q_i - D) f(D)dD \right\} \quad i = 1,2,\ldots,n$$

En el caso en que el horizonte de planificación es infinito, la ecuación recursiva se reduce a

$$U(q) = \max_{Q \geq q} \left\{ -c_u(Q - q) + \int_0^{Q} \left[rD - c_a(Q - D) \right] f(D)dD + \right.$$
$$\left. + \int_{Q}^{\infty} \left[rQ + (\alpha r - c_r)(D - Q) \right] f(D)dD + \alpha \int_0^{\infty} U(Q - D) f(D)dD \right\}$$

de donde se deriva el nivel de inventario óptimo Q^* tal que

$$\int_0^{Q^*} f(D)dD = F(Q^*) = \frac{c_r + (1-\alpha)(r - c_u)}{c_r + c_a + (1-\alpha)r}$$

de modo que al inicio de un periodo si el inventario existente es mayor que ese nivel no se ordena nada y, en otro caso, se ordena la diferencia $Q^* - q$.

II.3.6 Biblioteca de problemas

PROBLEMA 1

Una compañía aérea utiliza 500 focos de cola al año. Cada vez que se hace un pedido de estos focos incurre en un coste de 5 €. Cada foco le cuesta 0.40 € y el coste de almacenamiento es de 0.08 € por foco y año. Suponiendo que la demanda es constante y que no se permiten agotamientos, ¿qué cantidad de focos debe pedir cada vez?, ¿cuántos pedidos hará en un año?, ¿cada cuánto tiempo tendrá que hacer un pedido?

PROBLEMA 2

En el problema 1 supóngase que existe demora en la entrega; obtener el punto de reorden en estos dos casos: 1) si el plazo de entrega es de un mes. 2) si el plazo de entrega es de nueve meses.

PROBLEMA 3

Una tienda vende 10000 cámaras al año. Esta tienda se abastece de un almacén regional. Cada vez que hace un pedido tiene un coste de 5 €. La tienda paga por cada cámara 100 € y el coste de almacenar 1 € de inventario durante un año se considera como coste de oportunidad y se estima en 0.20 €. Calcular el tamaño óptimo del pedido.

PROBLEMA 4

Las lámparas de neón dentro del campus de la universidad X se reponen a razón de 100 unidades al día. La universidad pide las lámparas de neón periódicamente. Cuesta 100 € iniciar una orden de compra. Se calcula que el almacenamiento de una lámpara de neón cuesta 0.02 € por día. El tiempo de entrega de cada pedido es de 12 días. Determine la política para un inventario óptimo para pedir lámparas de neón. ¿Cómo sería la política si se considerase un coste de ruptura de 0.05 € por lámpara y día por el descontento que genera entre los alumnos la falta de lámparas de neón?

PROBLEMA 5

Una compañía tiene en existencia un artículo que se consume en una proporción de 50 unidades al día. A la compañía le cuesta 20 € cada vez que hace un pedido. Una unidad retenida en el inventario durante una semana le cuesta 0.35 €.

a) Determine la política del inventario óptimo, suponiendo un tiempo de entrega de una semana.
b) Determine el número óptimo de pedidos por año.
c) Determine el coste de inventario si se considerase un coste de ruptura diario y por unidad de 0.1 €.

PROBLEMA 6

WALMARK STORE comprime y coloca en tarimas las cajas vacías de mercancía, para reciclarlas. La tienda genera 5 tarimas al día. El coste de almacenar una tarima en la parte posterior de la tienda es de 0.1 € al día. La compañía que lleva las tarimas al centro de reciclado cobra una tarifa fija de 100 € por el alquiler de su equipo de carga, más un coste de transporte variable de 3 € por tarima. Trace una gráfica del cambio en el número de tarimas a lo largo del tiempo e idee una política óptima para transportar las tarimas al centro de reciclado.

PROBLEMA 7

LUBECAR se especializa en cambios rápidos de aceite para automóviles. El taller compra el aceite para automóvil por volumen, a 3 € el litro. Hay un descuento de 2.5 € por litro, si LUBECAR compra más de 1000 litros. El taller le da servicio aproximadamente a 150 automóviles al día y cada cambio requiere una media de 1.25 litros. LUBECAR almacena el aceite que compra por volumen a un coste de 0.02 € por litro y día. Además, el coste fijo de cada pedido es de 20 €. Hay un tiempo de entrega de dos días. Determine la política de inventario óptimo.

PROBLEMA 8

Un artículo se vende a 25 € la unidad, pero se ofrece un descuento del 10 % para lotes de 150 unidades o más. Una compañía utiliza este artículo en una proporción de 20 unidades por día. El coste de preparación para pedir un lote es de 50 € y el coste de almacenamiento por unidad y día es de 0.3 €.

a) ¿Debe la compañía aprovechar el descuento?

b) Si el coste de almacenamiento fuese de 2 € ¿debería aprovechar el descuento?

PROBLEMA 9

Los siguientes datos describen tres artículos de inventario

Artículo	Coste de pedido	Demanda (ud/día)	Coste de almacenamiento	Área (m^2)
1	10	2	0.3	1
2	5	4	0.1	1
3	15	4	0.2	1

El área total disponible es de 25 m^2. Los costes están en euros. Defina la política óptima de inventario.

PROBLEMA 10

Los siguientes datos describen cuatro artículos del inventario (en €). La compañía desea determinar la cantidad de lote económico para cada uno de los cuatro artículos, de tal manera que el coste total del inventario es de 10000 €.

Artículo	Coste de pedido	Demanda (ud/día)	Coste de almacenamiento	Área (m^2)
1	100	10	0.1	10
2	50	20	0.2	5
3	90	5	0.2	10
4	20	10	0.1	10

Problema 11

La empresa METALCO produce deflectores de corrientes para su empleo en las chimeneas domésticas durante los meses de diciembre a marzo. La demanda empieza en un nivel bajo, llega a su máximo a mitad de la temporada y disminuye hacia el final. Debido a la popularidad del producto, METALCO puede utilizar horas extra para satisfacer la demanda. La siguiente tabla proporciona las capacidades máximas de producción y las demandas para los cuatro meses de invierno:

Mes	Producción en horario regular	Producción en horas extra	Demanda
1	90	50	100
2	100	60	190
3	120	80	210
4	110	80	160

El coste de producción por unidad en cualquier periodo es de 6 € durante el horario regular y de 9 € durante las horas extra. El coste de almacenamiento por unidad y mes es de 0.1 €. Formula un problema de optimización para determinar la política óptima de inventario.

Problema 12

Se fabrica un producto para satisfacer una demanda conocida durante cuatro periodos, según los siguientes datos:

	Coste de producción por unidad en el periodo			
Rango de producción	1	2	3	4
de 1-3	1	2	2	3
de 4-11	1	4	5	4
de 12-15	2	4	7	5
de 16-25	5	6	10	7
Coste de almacenamiento por unidad hasta el periodo siguiente	0.3	0.35	0.2	0.25
Demanda total	11	4	17	29

Todos los datos están en unidades y euros y se entiende que los rangos no afectan a las unidades anteriores. Así el coste de producir 14 unidades en el primer periodo será de $3 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + (14 - 11) \cdot 2 = 17$ €, resultando una función continua. Plantea el problema con el que obtendríamos la mejor estrategia de inventario.

PROBLEMA 13

Se fabrica un producto para satisfacer una demanda conocida durante cuatro periodos, según los siguientes datos:

	Coste de producción por unidad en el periodo			
Rango de producción	1	2	3	4
entre 1-3	1	2	2	3
entre 4-11	1	4	5	4
entre 12-15	2	4	7	5
entre 16-25	5	6	10	7
Coste de almacenamiento por unidad hasta el periodo siguiente	0.3	0.35	0.2	0.25
Demanda total	11	4	17	29

Todos los datos están en unidades y euros y se entiende que los rangos de producción son excluyentes. Si se producen 14 artículos en el primer periodo el coste es $14 \cdot 2 = 28$ €. Plantee un problema de programación matemática con el que se obtendría la mejor estrategia de inventario.

PROBLEMA 14

Cada semestre la SMALLTOWN OPTOMETRY CLINIC vende 10000 armazones para lentes. La clínica pide los armazones a un abastecedor regional, que cobra 15 € por armazón. Cada pedido incurre en un coste de 50 €. La óptica cree que la demanda de armazones puede acumularse y que el coste por carecer de un armazón durante un semestre es de 15 € debido a la pérdida de negocios futuros. El coste semestral por mantener el inventario es del treinta por ciento del valor del inventario al semestre. ¿Cuál es la cantidad óptima de un pedido? ¿Cuál es la escasez máxima que presentará? ¿Y el nivel máximo de inventario?

PROBLEMA 15

La demanda diaria de rollos fotográficos en una tienda de regalos en un centro de turismo se distribuye de forma normal con una media de 30 rollos y una desviación típica de 5 rollos. El coste de conservar un rollo en la tienda es de 0.02 €. Se contrae un coste fijo de 30 € cada vez que la tienda coloca un nuevo pedido para las películas. La política de inventarios de la tienda requiere pedir 150 rollos siempre que el nivel de inventario descienda a 80 unidades mientras simultáneamente mantiene una existencia estabilizadora de 20 rollos en todo momento.

a) Para la política de inventarios establecida, determine la probabilidad de agotar las existencias durante el tiempo de entrega.
b) Según los datos de la situación, recomiende una política de inventario para la tienda, suponiendo que la probabilidad de agotamiento de la película durante el tiempo de entrega no excede 0.1.

PROBLEMA 16

Si en el ejercicio de las lámparas de neón suponemos que la distribución de la demanda es normal con media 100 y desviación típica 10, determinar el tamaño del stock de seguridad para que la probabilidad de agotamiento del inventario sea menor que 0.05.

PROBLEMA 17

La empresa Electro utiliza resina en su proceso de producción a una tasa de 1000 litros por mes. A Electro le costó 100 € colocar un pedido para un nuevo embarque. El coste mensual de manejo por litro es de 2 € y el coste de faltante por litro es de 10 €. Datos históricos muestran que la demanda durante el tiempo de entrega es uniforme en el rango 0-100 litros por mes. Determine la política de abastecimiento óptima para Electro.

PROBLEMA 18

Para el problema anterior determine:

a) Número aproximado de pedidos por mes.
b) Coste de preparación mensual esperado.
c) Coste de manejo esperado por mes.
d) Coste de faltante por mes.
e) Probabilidad de agotamiento de las existencias durante el tiempo de entrega.

PROBLEMA 19

Rehacer el problema 17 suponiendo que la demanda durante el tiempo de entrega es uniforme entre 40 y 60 litros. Comparar los resultados obtenidos con los del problema 17 e interpretar los resultados.

PROBLEMA 20

El propietario de un puesto de periódicos quiere determinar el número de ejemplares de USA Now que debe tener al inicio de cada día. Cuesta 30 centavos comprar un ejemplar y el propietario lo vende a 75 centavos. La venta del periódico normalmente ocurre entre 7 y 8 de la mañana. Los periódicos que

quedan al final del día se reciclan para tener un ingreso de 5 centavos por ejemplar. ¿Cuántos ejemplares debe tener el propietario cada mañana? Suponer que la demanda del día se puede describir como:
a) Una distribución normal con media 300 y desviación típica 20.
b) Una función de probabilidad discreta definida como:

D	200	220	300	320	340
f(D)	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

PROBLEMA 21

En una situación de inventario de un solo pedido, el coste de compra unitario de un producto es de 10 €, y su coste de manejo unitario es 1 €. Si la cantidad del pedido es de 4 unidades encuentre el rango permisible de coste de penalización unitario implicado por las condiciones óptimas. Supongamos que la demanda ocurre de forma instantánea al inicio del periodo y que la función de probabilidad de la demanda está dada como:

D	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(D)	0.05	0.1	0.1	0.2	0.25	0.15	0.05	0.05	0.05

PROBLEMA 22

La librería de la U de A ofrece un programa de reproducción de los apuntes de clase para los profesores participantes. El profesor Yataha enseña a un grupo de estudiantes de primer año donde se espera una inscripción de entre 200 y 250 estudiantes uniformemente distribuidos. A la tienda le cuesta 10 € producir cada copia que luego vende a los estudiantes a 25 € la copia. Los estudiantes compran sus libros al inicio del semestre. Las copias no vendidas de los apuntes del profesor Yataha se trituran para reciclar. Mientras tanto, una vez que la librería agota las copias no se imprimen copias adicionales y los alumnos son responsables de conseguir los apuntes de otras fuentes. ¿Si la librería quiere maximizar sus beneficios, cuántas copias debe imprimir?

PROBLEMA 23

La demanda diaria de un artículo durante un solo periodo ocurre de forma instantánea al inicio del periodo. La función de densidad de la demanda es uniforme entre 0 y 10 unidades. El coste de manejo unitario del artículo durante el periodo es de 0.5 € y el coste de penalización unitario por agotamiento de las existencias es de 4.5 €. El coste de compra unitario es de 0.5 €. Por cada pedido realizado se incurre en un coste fijo de 5 €.
a) Determine la política de inventarios óptima para el artículo.

b) Rehaga el ejercicio si el coste fijo de preparación fuese de 25 €.

PROBLEMA 24

Una librería vende cuadernos en un pueblo, siendo la única librería que hay en él, de modo que si un niño o adulto desea comprar un cuaderno y no lo hay tendrá que encargarlo y esperar a que llegue a la tienda. La demanda de cuadernos está estimada en 2 cuadernos diarios. Cada cuaderno le cuesta a la tienda comprarlo 0.5 € y, como los pedidos hay que llevarlos al pueblo, el proveedor le cobra el viaje a razón de 45 € por viaje. Por otra parte, el dueño ha estimado que mantener un cuaderno en inventario le cuesta 0.05 € diarios, y 0.04 € cada día que tiene un pedido de un cliente pendiente.

a) ¿Cuál es el mínimo coste que puede lograr el dueño de la librería y, por lo tanto, lo mínimo que podría cobrar por cada cuaderno a sus clientes sin tener pérdidas?
b) ¿Cuánto esperará como máximo un cliente su cuaderno?
c) ¿Cuál sería la calidad del servicio?
d) Si desde que pide los cuadernos pasan 3 días hasta que los recibe, ¿cuándo deberá pedir los cuadernos?
e) Si desde que pide los cuadernos pasan 2 meses (60 días) hasta que los recibe, ¿cuándo deberá pedir los cuadernos?
f) Suponiendo que no se considera dejar pedidos de los clientes pendientes (no hay ruptura), y que la demanda diaria es normal de media 2 y desviación típica 0.25, y el tiempo de entrega es de 3 días ¿cuál debería ser el stock de seguridad?

PROBLEMA 25

Volvamos al fabricante de juguetes (problema 27 de Teoría de colas). Nuestro protagonista recibe los dos tipos de componentes de un mismo proveedor.

1. Para las componentes utilizadas en la máquina de tipo A el coste de pedido de reaprovisionamiento consta de una cantidad fija de 1350 € y una cantidad variable función del número Q_A de componentes solicitadas dada por $0.01Q_A^2$. El coste de almacenamiento para las componentes usadas en la máquina A es de 1.8 € por mes y componente.
2. Para las componentes utilizadas en la máquina de tipo B el coste de pedido de reaprovisionamiento es de 540 € y el de almacenamiento de 3 € por mes y componente.

Los plazos de entrega de los pedidos son de 9 días para las componentes de la máquina A y de 6 días para las de la máquina B. El artesano quiere que para ambas componentes la probabilidad de ruptura de inventario sea como mucho 0.05.

Recuérdese que el número de pedidos diarios se sabe que sigue una distribución de Poisson (la distribución de Poisson tiene igual media que varianza), y se va a considerar que para más de 3 días se puede aproximar por una normal. Recuérdese también que por cada pedido se requieren 6 componentes de tipo A y 9 de tipo B.

Proponer un modelo que permita al artesano obtener la política óptima de gestión conjunta de los dos tipos de componentes durante en tercer trimestre suponiendo que éste es bueno.

Z	Probabilidad acumulada	Z	Probabilidad acumulada
1.000	0.84134474024100	2.100	0.98213564258197
1.100	0.86433389849238	2.200	0.98609660109168
1.200	0.88493026828229	2.300	0.98927591894028
1.300	0.90319945050426	2.326	0.98999074803142
1.400	0.91924328874370	2.400	0.99180247113057
1.500	0.93319277120655	2.500	0.99379032014125
1.600	0.94520071054612	2.576	0.99500243823914
1.645	0.95001511010609	2.600	0.99533877821735
1.700	0.95543456821752	2.700	0.99653297694689
1.800	0.96406973448618	2.800	0.99744480935848
1.900	0.97128350713543	2.900	0.99813411985961
2.000	0.97724993796381	3.000	0.99865003277676

Centiles de la normal típica

PROBLEMA 26

Un almacén gestiona dos artículos, A_1 y A_2 , cuya demanda diaria es determinista y constante y que obtiene de un mismo proveedor. Los parámetros de la gestión de los artículos se dan en la siguiente tabla

Artículo	Demanda anual	Coste de pedido	Coste unitario anual de almacenamiento
1	10000	1500 €	30 €
2	8000	1800 €	20 €

El contrato con el proveedor establece las siguientes cláusulas:

- Recibirá al menos 4 pedidos anuales de cada artículo.
- El número total de pedidos de reaprovisionamiento (sea para uno u otro artículo) que recibirá a lo largo del año no podrá ser superior a 12.

a) Proponer un modelo que permita minimizar el coste global de la gestión de inventario, teniendo en cuenta las restricciones precedentes.
b) ¿Cuáles serían las condiciones de optimalidad que deberían cumplir la o las soluciones del problema?

PROBLEMA 27

Se tiene un inventario de un producto con las siguientes características. La mitad del pedido, $n/2$, siendo n el pedido total, se reaprovisiona de manera lineal con una tasa por unidad de tiempo constante p y la otra mitad se reaprovisiona de inmediato (instantáneamente). Se considera una demanda de producto d constante por unidad de tiempo. Se parte en el instante inicial de inventario 0. Se pide:

1. Dibujar el gráfico que representa el movimiento del inventario a lo largo de un ciclo.
2. Determinar el stock medio durante la fase de aprovisionamiento (crecimiento del inventario). Determinar el stock medio durante la fase de consumo (decrecimiento del inventario).
3. Determinar el stock medio por ciclo.
4. Determinar el coste del inventario por ciclo suponiendo un coste unitario de almacenamiento de c_a y un coste unitario de compra c_u.

II.3.7 Soluciones a la biblioteca de problemas

RESULTADO DEL PROBLEMA 1

$Q^* = 250$, 2 pedidos por año y por tanto, hacer un pedido cada 1/2 año.

RESULTADO DEL PROBLEMA 2

a) El punto de reorden será 41.67 focos.
b) El punto de reorden será 125 focos.

RESULTADO DEL PROBLEMA 3

$Q^* = 70.71$ y redondeando será 70 ó 71 (sin grandes variaciones pues la función de coste es muy plana alrededor del óptimo).

Si para este caso se hace el análisis marginal salen 71. No se cumple

$$70 \cdot 69 < \frac{2dc_p}{c_a} < 70 \cdot 71 \Rightarrow 4830 < 5000 < 4970$$

pero sí se verifica

$$71 \cdot 70 < \frac{2dc_p}{c_a} < 71 \cdot 72 \Rightarrow 4970 < 5000 < 5112$$

RESULTADO DEL PROBLEMA 4

La política de inventarios debe ser pedir 1000 unidades siempre que el nivel del inventario descienda a 200 unidades. El coste diario del inventario asociado es 20 €/día.

El hecho de que la entrega se haga en 12 días sólo modifica el momento de hacer el pedido (cuando el inventario baje a 200 en vez de cuando baje a 0), pero no la cantidad de pedido, ni el coste de inventario asociado.

Con coste de ruptura de 0.05 €, el tamaño de pedido sería de 1183 unidades, el nivel máximo de inventario de 845 unidades. El coste diario del inventario asociado será de 16.9 €.

RESULTADO DEL PROBLEMA 5

a) Pida 200 unidades cuando el nivel descienda a 150 unidades.
b) Aproximadamente 91 pedidos.
c) $Q^* = 245$, $S^* = 163$. Coste = 8.2 €/día

RESULTADO DEL PROBLEMA 6

Recoja 100 tarimas cada 20 días.

RESULTADO DEL PROBLEMA 7

El consumo diario es de 187.5 l. El pedido óptimo sería de 612.37 l si no existiese rebaja por cantidad. Sin embargo, aplicando la rebaja se observa que para un pedido de 1000 l el coste es menor que para el pedido de 612.37 l. Por lo tanto en este caso el pedido óptimo será de 1000 l, cuando el nivel de inventario descienda a 375 l.

RESULTADO DEL PROBLEMA 8

a) Sí, la compañía debe aprovechar el descuento y pedir 150 unidades cada vez.
b) No, ya que el coste sería mayor. Debería hacer pedidos de 32 unidades cada vez, con un coste por unidad de tiempo de 563.25 € (Frente a un coste de 606.67 € aprovechando el descuento).

RESULTADO DEL PROBLEMA 9

$Q_1^* = 6.35; \quad Q_2^* = 7.11; \quad Q_3^* = 11.6$

RESULTADO DEL PROBLEMA 10

$Q_1^* = 141.42; \quad Q_2^* = 100; \quad Q_3^* = 67.1; \quad Q_4^* = 63.24$

RESULTADO DEL PROBLEMA 11

Para un caso general (puede simplificarse para este caso), se define x_i como la producción total de un mes, siendo d_i la producción en horas extras y dado que ésta es penalizada con 3 € por unidad, se puede expresar la relación entre ambas variables por ejemplo, para el primer periodo, como $x_1 \leq 90 + d_i$ y $d_i \leq 50$. Además, denotamos por I_i al inventario al final de un mes, con lo que el problema sería

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_i (6x_i + 3d_i) + 0.1 \sum_i I_i \\
&x_1 - d_1 \le 90 \\
&x_2 - d_2 \le 100 \\
&x_3 - d_3 \le 120 \\
&x_4 - d_4 \le 110 \\
&x_1 - I_1 = 100 \\
&x_2 + I_1 - I_2 = 190 \\
&x_3 + I_2 - I_3 = 210 \\
&x_4 + I_3 = 160 \\
&d_1 \le 50,\ \ d_2 \le 60,\ \ d_3 \le 80,\ \ d_4 \le 70 \\
&x_i, d_i, I_i \ge 0 \quad \forall i
\end{aligned}
$$

RESULTADO DEL PROBLEMA 12

Llamaremos x_{ij} a la cantidad de unidades fabricadas en el periodo i del rango j, es decir, x_{11} es la cantidad de unidades fabricada en el periodo 1 del rango 1 (1-3 ud.); x_{12} a las unidades fabricadas en el primer periodo del segundo rango de producción (4-11 ud.); x_{23} las unidades fabricadas en el segundo periodo del tercer rango de producción (12-15 ud.); y así sucesivamente. Como los costes son crecientes es posible definir la producción de un periodo como la suma de las variables de ese periodo sin que sea necesario añadir más (no sería así en caso de costes decrecientes). Sea I_i el inventario sobrante al final de un periodo. Entonces el problema será

$$
\begin{aligned}
&\min x_{11} + x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 2x_{21} + \ldots + 5x_{43} + 7x_{44} + 0.3I_1 + 0.35I_2 + 0.2I_3 + 0.25I_4 \\
&x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} - I_1 = 11 \\
&x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + I_1 - I_2 = 4 \\
&x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + I_2 - I_3 = 17 \\
&x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + I_3 - I_4 = 29 \\
&x_{i1} \le 3, \quad x_{i2} \le 8, \quad x_{i3} \le 4, \quad x_{i4} \le 10 \ \ \forall i \\
&x_{ij}, I_i \ge 0 \quad \forall i, j
\end{aligned}
$$

RESULTADO DEL PROBLEMA 14

El pedido óptimo será de 537 ó 538 armazones. La carencia máxima 124 y el nivel máximo de inventario 413 ó 414 unidades.

Resultado del problema 15

a) 0.0023

b) Pida 300 rollos cuando el inventario caiga a 70 rollos.

Resultado del problema 16

El stock de seguridad debe tener un tamaño de al menos 23 unidades. Esto requiere hacer pedidos de 1000 unidades cada vez que el inventario caiga por debajo de 223 unidades.

Resultado del problema 17

Pedir aproximadamente 320 litros cada vez que el nivel del inventario cae a 94 litros.

Resultado del problema 18

a) 3.125 pedidos

b) 312.5 €/mes

c) 408 €

d) 2.0397 €

e) 0.06

Resultado del problema 19

$Q^* = 316.81$ unidades, $S^* = 58.3$ unidades.

Resultado del problema 20

a) La cantidad de pedido óptima es aproximadamente 307 ejemplares (307.32).

b) En este caso la cantidad será de 300 ejemplares.

Resultado del problema 21

$19 < c_r < 35.7$

Resultado del problema 22

230 copias

Resultado del problema 23

a) Si $q_0 < 3.52$ pedimos $S - q_0$. Si no, no pedimos nada.

b) La solución será $s = -2$ (no factible) o bien $s = 18\,(> S)$. Por lo tanto no debemos pedir nada en ningún caso. Esto sucede porque el coste de preparación es muy alto en comparación con el resto de los costes del modelo.

RESULTADO DEL PROBLEMA 25

Puesto que no hay nada que ligue a ambos productos la gestión se puede hacer por separado.

Componente A:

- Demanda media: 12 juguetes/día, 6 componentes/juguete, $d_A = 72$ componentes/día
- $c_p = 1350 + 0.01Q_A^2$
- $c_{aA} = 1.8/30 = 0.06$ €/día.componente

$$Coste/ciclo = 1350 + 0.01Q_A^2 + 0.06\frac{Q_A^2}{2\cdot 72}$$

$$Coste/dia = \frac{Coste/ciclo}{Q_A/d_A} = \frac{1350\cdot 72}{Q_A} + 0.01\cdot 72Q_A + 0.06Q_A/2$$

$$\frac{\partial Coste/dia}{\partial Q_A} = -\frac{1350\cdot 72}{Q_A^2} + 0.75 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_A = 360 componentes$$

$$T_0 = \frac{Q_A}{d_A} = \frac{360}{72} = 5dias \quad l = 9 \quad \Rightarrow \quad l' = 4dias$$

$PR = 4\cdot 72 = 288$ sin stock seguridad

Stock seguridad:

$D_4 = 6\cdot N(4\cdot 12, \sqrt{4\cdot 12}) = N(4\cdot 12\cdot 6, \sqrt{4\cdot 12\cdot 6}) = N(288, 24\sqrt{3})$

$$0.05 \geq P(D_4 > 288 + B) = P(Z > \frac{B}{24\sqrt{3}}) \quad \Rightarrow \quad \frac{B}{24\sqrt{3}} = 1.645 \Rightarrow B \geq 68.38 \quad B = 69$$

Punto de reorden = 288 + 69 = 357 componentes

Componente B:

- Demanda media: 12 juguetes/día 9 componentes/juguete $d_B = 108 componentes/dia$
- $c_p = 540$
- $c_{aB} = 3/30 = 0.1€/dia\cdot componente$

$$Coste/ciclo = 540 + 0.1\frac{Q_B^2}{2\cdot 108}$$

$$Coste\,/\,dia = \frac{Coste\,/\,ciclo}{Q_B\,/\,d_B} = \frac{540\cdot 108}{Q_B} + 0.1Q_B\,/\,2$$

Fórmula de Wilson: $Q_B = \sqrt{\dfrac{2d_Bc_p}{c_{aB}}} = \sqrt{\dfrac{2\cdot 108\cdot 540}{0.1}} = 1080 componentes$

$$T_0 = \frac{Q_B}{d_B} = \frac{1080}{108} = 10 dias \quad l = 6 < T_0 \quad \Rightarrow$$

$PR = 6\cdot 108 = 648$ sin stock seguridad

Stock seguridad:

$D_6 = 9\cdot N(6\cdot 12,\sqrt{6\cdot 12}) = N(9\cdot 12\cdot 6, 9\sqrt{12\cdot 6}) = N(648, 54\sqrt{2})$

$$0.05 \geq P(D_6 > 648 + B) = P(Z > \frac{B}{54\sqrt{2}}) \quad \Rightarrow \quad \frac{B}{54\sqrt{2}} = 1.645 \Rightarrow B \geq 125.62 \quad B = 126$$

Punto de reorden = 648 + 126 = 774 componentes

Resultado del problema 26

$Coste\,/\,ciclo A1(Q_{A1}) = 1500 + 30\dfrac{Q_{A1}^2}{2\cdot 10000}$

$Coste\,/\,ciclo A2(Q_{A2}) = 1800 + 20\dfrac{Q_{A2}^2}{2\cdot 8000}$

$Coste\,/\,año(Q_{A1}, Q_{A2}) = \dfrac{1500\cdot 10000}{Q_{A1}} + 30\dfrac{Q_{A1}}{2} + \dfrac{1800\cdot 8000}{Q_{A2}} + 20\dfrac{Q_{A2}}{2}$

Ciclos/año = nº pedidos = $d\,/\,Q$

Modelo:

$$\left.\begin{array}{l}
\min \dfrac{1500\cdot 10000}{Q_{A1}} + 30\dfrac{Q_{A1}}{2} + \dfrac{1800\cdot 8000}{Q_{A2}} + 20\dfrac{Q_{A2}}{2} \\
\dfrac{10000}{Q_{A1}} \geq 4 \\
\dfrac{8000}{Q_{A2}} \geq 4 \\
\dfrac{10000}{Q_{A1}} + \dfrac{8000}{Q_{A2}} \leq 12
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
\min \dfrac{1500\cdot 10000}{Q_{A1}} + 30\dfrac{Q_{A1}}{2} + \dfrac{1800\cdot 8000}{Q_{A2}} + 20\dfrac{Q_{A2}}{2} \\
Q_{A1} \leq 2500 \\
Q_{A2} \leq 2000 \\
\dfrac{10000}{Q_{A1}} + \dfrac{8000}{Q_{A2}} \leq 12
\end{array}$$

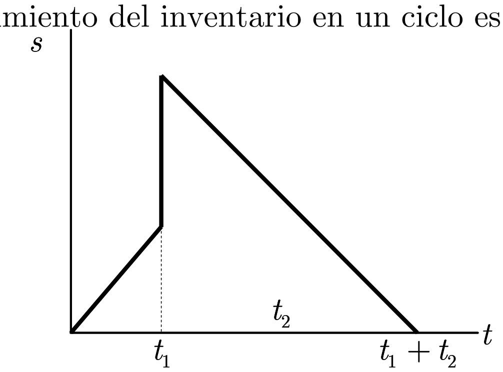
Las variables no negativas, pero no pueden ser cero tampoco.

b. Condiciones necesarias de Karush-Kuhn-Tucker:

$$\frac{-15000000}{Q_{A1}^2} + 15 + u_1 - \frac{10000}{Q_{A1}^2} u_3 = 0$$
$$\frac{-14400000}{Q_{A2}^2} + 10 + u_2 - \frac{8000}{Q_{A2}^2} u_3 = 0$$
$$u_1(Q_{A1} - 2500) = 0$$
$$u_2(Q_{A2} - 2000) = 0$$
$$u_3(\frac{10000}{Q_{A1}} + \frac{8000}{Q_{A2}} - 12) = 0$$
$$u_1, u_2, u_3 \geq 0$$

RESULTADO DEL PROBLEMA 27

1. Calculamos la expresión de la recta de la fase de aprovisionamiento $s = (p-d)t$ hasta $t = t_1$. Sabiendo que $pt_1 = \frac{n}{2}$, $t_1 = \frac{n}{2p}$. El punto máximo del inventario se alcanza en $t = t_1$ y resulta ser $\overline{s} = (p-d)t_1 + \frac{n}{2}$. La duración de la fase de consumo es t_2, cuyo valor se puede calcular sabiendo que $(p-d)t_1 + \frac{n}{2} = dt_2$. $t_2 = \left[(p-d)t_1 + \frac{n}{2}\right] / d = \frac{n(2p-d)}{2pd}$. La figura que representa el movimiento del inventario en un ciclo es la siguiente.



2. El stock medio durante la fase de aprovisionamiento es $s_1 = \frac{n(p-d)}{4p}$. El stock medio durante la fase de consumo es $s_2 = \frac{(p-d)n}{4p} + \frac{n}{4} = \frac{n(2p-d)}{4p}$.
3. El stock medio por ciclo será $s_c = \frac{s_1 t_1 + s_2 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{n(4p-3d)}{8p}$

II.4 Fiabilidad, Mantenimiento y Disponibilidad

II.4.1 Conceptos básicos de fiabilidad

- FIABILIDAD de un dispositivo: probabilidad que éste tiene de realizar una actividad durante un cierto tiempo y bajo ciertas condiciones.
- FALLO O AVERÍA: Incapacidad de un sistema o dispositivo para realizar la función para la que ha sido diseñado.
- COMPONENTE: Cualquier dispositivo que forma parte de otro más complejo.
- Fallo primario: fallo en una componente que no es debido al fallo de otras.
- Fallo secundario o inducido: si el fallo es producido por el fallo de otras.
  Sólo se van a considerar fallos repentinos y completos de las componentes (catastróficos) y no los fallos graduales o parciales (degradación).
- T: v.a. que representa el tiempo de funcionamiento hasta el fallo de una componente.
- Función de distribución de la v.a. T $F(t) = P(T \le t) = \int_0^t f(x)dx$.
- Función de fiabilidad $R(t) = 1 - F(t) = P(T > t)$.
- Tiempo medio hasta el fallo (*MTTF*, *Mean Time to Failure*) = $E[T]$
- Tiempo medio entre fallos (*MTBF*, *Mean Time Between Failures*)
  Si no se considera tiempo de reparación *MTBF*=*MTTF*
- Tasa de fallos: $h(t) = \lambda(t) = \dfrac{f(t)}{R(t)} = -\dfrac{R'(t)}{R(t)}$. Medida de la variación de fiabilidad con el tiempo, o tendencia al fallo con el tiempo (NO es una probabilidad).

II.4.1.1 Modelos de funciones de fiabilidad

En general, para modelar la función de fiabilidad de una componente se utiliza una función con forma de “curva de bañera”, que representa tres periodos en la vida de la componente:

- Periodo infantil o inicial: tasa de fallos decreciente (periodo de aprendizaje o adaptación o “de fallos infantiles”) → Rodaje y/o Garantía
- Periodo de vida útil: tasa de fallos constante (periodo de funcionamiento “normal” o de “fallos por azar o accidente”)
- Periodo de vejez o desgaste: tasa de fallos creciente (periodo de vejez o de “fallos por desgaste”)

Para llevar a cabo la representación de cada periodo las distribuciones más utilizadas son las siguientes:

- Exponencial(λ): tasa de fallos constante, λ. Utilizada para periodo de vida útil (no tiene memoria). $E[T] = MTTF = 1/\lambda$.
- Gamma(p,a): con frecuencia usada para periodo infantil. $E[T] = p/a$
  Tasa de fallos: ($h(t) \to a$ cuando $t \to \infty$)
  $p < 1$: tasa decreciente
  $p = 1$: tasa constante (exponencial)
  $p > 1$: tasa creciente
- Weibull(a,b): con frecuencia usada para periodo infantil.
  Tasa de fallos:
  $b < 1$: tasa decreciente
  $b = 1$: tasa constante (exponencial)
  $b > 1$: tasa creciente
- Normal(μ,σ): tasa de fallos creciente, para periodo vejez. $E[T] = \mu$

II.4.2 Redes y esquemas lógicos de fiabilidad

II.4.2.1 La función de estructura

II.4.2.1.1 Definiciones básicas

Sea un sistema con n componentes. Cada componente tiene una variable de estado asociada

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la componente } i\text{-esima funciona} \\ 0 & \text{si no funciona} \end{cases}$$

Variables representan estado de las componentes ($X_1, X_2, \ldots, X_n$) (espacio Z_n)

Función de estructura: función polinómica que representa el estado del sistema en función del estado de sus componentes (como si fuera un sistema eléctrico). (Toma valores en $\{0.1\}$ y es monótona no decreciente)

Hipótesis:

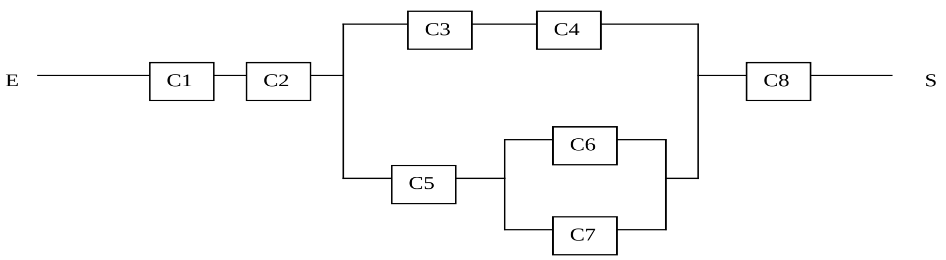
- Sólo se consideran dos estados de sistemas y componentes.
- El estado del sistema es sólo función del estado de sus componentes
- Si el sistema funciona con un conjunto de componentes funcionando, con más también lo hará (viceversa estropeado).

Sistema en serie (todas han de funcionar): $H(x_1,...,x_n)=\prod_{i=1}^{n} x_i$

Sistema en paralelo (basta una funcionando): $H(x_1,...,x_n)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)$

Descomposición modular: descomponer sistemas más complejos en módulos en serie o en paralelo aplicando la función de estructura de éstos.

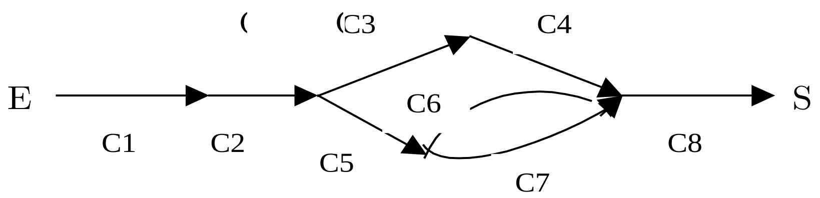
Ejemplo:



$$H(x_1,\ldots,x_8)=x_1x_2\{1-(1-x_5[1-(1-x_6)(1-x_7)])(1-x_3x_4)\}x_8$$

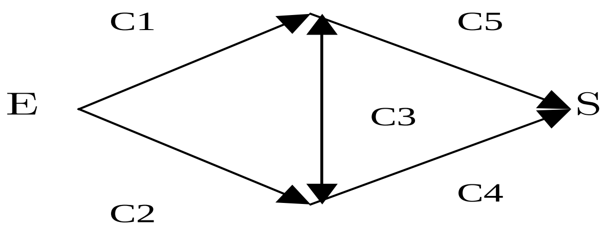
RED DE FIABILIDAD: la idea es una representación que con ayuda de un dipolo representa todas las condiciones lógicas de funcionamiento o fallo del sistema. Cada arco está asociado a una sola componente, aunque varios arcos puedan estar asociados a una misma componente.

Ejemplo:



- Conexión o camino de la estructura (red): subconjunto de componentes tal que si todas funcionan el sistema funciona, aunque las restantes fallen (caminos de E a S de la red). Es minimal si no incluye otras conexiones. En el ejemplo anterior serían: {c1,c2,c3,c4,c8}, {c1,c2,c5,c6,c8}, {c1,c2,c5,c7,c8}
- Corte de la estructura (red): subconjunto de componentes tal que si todas fallan el sistema no funciona, aunque funcionen las restantes (corte de E a S). Es maximal si no está incluido en ningún otro corte. En el ejemplo anterior serían: {c1}, {c2}, {c8}, {c3,c5}, {c4,c5}, {c3,c6,c7}, {c4,c6,c7}

Ejemplo: Red puente



Conexiones: {c1,c5}, {c2,c4}, {c1,c3,c4}, {c2,c3,c5}
Cortes: {c1,c2}, {c4,c5}, {c1,c3,c4}, {c2,c3,c5}

II.4.2.1.2 Obtención de la función de estructura

La función de estructura de un sistema se puede obtener a partir de las conexiones minimales de la red o a partir de los cortes maximales:

- en paralelo las conexiones o caminos mínimos de la red (las componentes que lo forman en serie): $H(x_1,...,x_n) = 1 - \prod_{j=1}^{h}(1 - \prod_{c_i \in P_j} x_i)$
- en serie los cortes de la red (las componentes que forman cada uno en paralelo): $H(x_1,...,x_n) = \prod_{j=1}^{k}(1 - \prod_{c_i \in Q_j}(1 - x_i))$

II.4.2.2 Determinar la función de fiabilidad de un sistema

Método de la forma simple: una vez obtenida la función de estructura, se sustituye en ella cada x_i por la función de fiabilidad de dicha componente. Sólo es válido si se admite que las componentes son independientes, y ha de hacerse una vez que se ha operado en la función de estructura de modo que no aparezcan variables al cuadrado ni similar.

Serie: $R_S(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t) = R_1(t)\cdot ... \cdot R_n(t)$

Paralelo: $R_S(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - R_i(t)) = 1 - (1 - R_1(t))\cdot ... \cdot(1 - R_n(t))$

II.4.2.3 Mejoras de la fiabilidad: la redundancia

Redundancia o reserva: mejorar la fiabilidad poniendo en paralelo dos o más componentes, subsistemas o equipos completos.

Tipos de redundancia:

- Redundancia activa o cargada: Todas las componentes en reserva funcionan al mismo ritmo que la principal.

- Redundancia pasiva o no cargada: Los elementos en reserva están en reposo, luego, no pueden averiarse mientras el principal funciona. Una vez averiado éste, se sustituye manualmente o mediante un dispositivo.
- Redundancia ligera: Los elementos en reserva funcionan al mismo tiempo que el elemento principal, pero a un ritmo más suave hasta el momento que uno sustituye al principal. Por tanto, se pueden estropear pero con menor probabilidad que el principal.

Cuantas más componentes en redundancia mayor será la fiabilidad.

Canibalización: intercambiabilidad de las componentes de un equipo, se produce cuando una componente que ha fallado es sustituida por otra similar que jugaba un papel determinado en otro subsistema.

II.4.3 Políticas de mantenimiento

MANTENIMIENTO: conjunto de acciones que permiten restablecer o prolongar un equipo o sistema en un estado específico o en la medida de asegurar un servicio determinado.

Políticas de mantenimiento:

- Mantenimiento predictivo: se clasifica a su vez en dos tipos:
  - Por el estado de un conjunto de parámetros del sistema
  - Por el análisis de la tendencia de evolución del sistema

  Requiere análisis previos detallados (análisis de fallos, estudios de árboles de fallos y cortes, técnicas de previsión y medida, etc.) y un complejo estudio de modelización estadística, pero es programable.
- Mantenimiento preventivo: es programado a intervalos fijos de tiempo y es barato, pero, a veces innecesario.
- Mantenimiento correctivo: corrige cuando se presentan los fallos o deficiencias, nunca es innecesario, pero, es inoportuno y a la postre caro por los costes derivados de los fallos.

La selección de una política de mantenimiento pasa por evaluar costes (por unidad de tiempo) de cada sistema, y seleccionar el menor.

$MTTR$: tiempo medio de reparación

$MTBF$: tiempo medio entre fallos.

Si es mantenimiento correctivo, $MTBF = MTTF + MTTR$

<u>Ejemplo de evaluación de costes con mantenimiento correctivo</u>.

Datos:

p: coste de un equipo o componente nuevo
q: coste de materias primas o elementos deteriorados por el fallo
M : coste de mano de obra de reparación (por hora)
P : coste por pérdida de producción mientras parado (beneficio)
Gasto medio por unidad de tiempo $= \dfrac{p+q+(M+P)MTTR}{MTBF}$

Ejemplo de evaluación de costes con mantenimiento preventivo.
Datos adicionales:
t_0: instante de mantenimiento programado
$R(t_0)$: probabilidad de que no se produzca fallo antes de t_0
$MTTM$: tiempo medio de mantenimiento
Gasto medio/u.t. =

$$\frac{[p+(P+M)MTTM]R(t_0)+[p+q+(P+M)MTTR](1-R(t_0))}{MTBF}$$

donde $MTBF = \int_0^{t_0} tf(t)dt + t_0 R(t_0)$

Dado que puede ser difícil calcular estos valores de forma directa, se sugiere como alternativa utilizar la simulación para estimarlos.

II.4.4 Mantenibilidad y disponibilidad

MANTENIBILIDAD: aptitud del sistema para ser reparado en un tiempo dado. Es función de la eficacia y rapidez con que pueden realizarse las operaciones de mantenimiento y se mide por una función $M(t)$ que da, para una política de mantenimiento determinada, la probabilidad de que el equipo sea puesto en funcionamiento en un tiempo no superior a t: $M(t) = P(T^* \le t)$, donde T^* es la duración aleatoria de la puesta en servicio.

Tasa de mantenibilidad: $\dfrac{M'(t)}{1-M(t)}$

La distribución más usada para la mantenibilidad, $M(t)$, suele ser la log-normal (cuyo logaritmo neperiano sigue una distribución normal).

La mejora de la mantenibilidad pasa por el diseño (concepción modular), uso de componentes normalizados, formación de personal, una adecuada política de mantenimiento, ...

DISPONIBILIDAD: proporción de tiempo de funcionamiento correcto del equipo $= \dfrac{MTTF}{MTBF}$.

(En el caso de mantenimiento correctivo es $1-\dfrac{MTTR}{MTBF}$)